МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
**(государственный университет)**

**Факультет общей и прикладной физики**
Кафедра "Проблемы теоретической физики"

**Квалификационная выпускная работа на соискание степени бакалавра**

студента 928 группы Мирошниченко О. В.

# Интегрируемые спиновые цепочки.

Научный руководитель:
**д. ф.-м. н., А. А. Белавин**

Москва
2003

# Содержание

**1 Введение.** **2**

**2 XXZ модель с периодическими граничными условиями.** **2**

2.1 Алгебра матриц монодромии. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

2.2 Алгебраический анзац Бете. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2.3 Выражение локальных операторов через элементы матрицы монодромии. 8

**3 XXZ модель с открытыми граничными условиями. Матрица монодромии Склянина.** **9**

# 1 Введение.

В данной работе рассматривается XXZ модель Гейзенберга, которая является простейшей моделью одномерного магнетика. Впервые собственные состояния и спектр в этой модели были вычислены точно при помощи подстановки Бете. Мы подробно излагаем решение этой модели при помощи квантового метода обратной задачи, созданного в работах [1, 2], который является алгебраической формулировкой анзаца Бете. Одним из преимуществ этого метода является то, что он дает возможность вычислить также и корреляционные функции системы [5, 6]. Эта модель представляет интерес не только тем, что она является квантовой системой многих взаимодействующих тел, для которой могут быть получены точные результаты, но и тем, что с ней связаны глубокие математические структуры.

Данная работа является реферативным изложением некоторых результатов работ [1, 2, 4, 7, 8], однако в ней приведены многие промежуточные выкладки, которые опущены в оригинальных работах, и изложение ведется более элементарным языком.

План работы следующий. В разделе 2.1 мы вводим понятие алгебры матриц монодромии и строим семейство коммутирующих интегралов движения. В разделе 2.2 при помощи метода, предложенного в [1] мы находим собственные векторы и собственные значения гамильтониана. В разделе 2.3 мы выводим формулы, выражающие локальные операторы, через элементы матрицы монодромии [4, 5, 7]. Эти формулы играют ключевую роль при вычислении корреляционных функций системы в работах [5, 6].

В разделе 3 мы рассматриваем XXZ модель с открытыми граничными условиями. Эта модель представляет интерес также и тем, что в случае некоторых специальных граничных условий обнаружена ее связь минимальными моделями конформной теории поля. Мы излагаем построение семейства коммутирующих интегралов движения этой модели предложенное в работе [8], а также находим собственные векторы и собственные значения.

# 2 XXZ модель с периодическими граничными условиями.

## 2.1 Алгебра матриц монодромии.

Рассмотрим XXZ модель с периодическими граничными условиями. Введем квантовое пространство $V = V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_N$, где $V_k \cong \mathrm{C}^2$- пространство состояний на $k$-ом узле, и вспомогательное пространство $W \cong \mathrm{C}^2$. Гамильтониан модели имеет вид:

$$H = \sum_{k=1}^{N} (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \mathrm{ch}\eta \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z), \tag{1}$$

где $\sigma_k^\alpha = \mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \sigma^\alpha \otimes \ldots \otimes \mathrm{id}$, $\sigma^\alpha$- матрицы Паули, $\eta$ - параметр анизотропии, а $N+1$-й узел отождествляется с 1- м.

В этом разделе мы покажем, каким способом можно построить семейство коммутирующих трансфер матриц $T(u)$, являющихся производящей функцией интегралов движения [**?**, 3].

Рассмотрим алгебру Янга-Бакстера $\mathcal{A}$, отвечающую $R$- матрице, $R : \mathrm{C} \to \mathrm{End}(W \otimes W)$, которая удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера:

$$R_{12}(u_1 - u_2) R_{13}(u_1 - u_3) R_{23}(u_1 - u_2) = R_{23}(u_1 - u_2) R_{13}(u_1 - u_3) R_{12}(u_1 - u_2), \quad (2)$$

где $u$ - спектральный параметр. Здесь операторы действует в пространстве $W_1 \otimes W_2 \otimes W_3$, $W_i \cong W$, и используются стандартные обозначения, согласно которым $R_{ik} \equiv I^{-1}(R \otimes \mathrm{id}) I$, где $I$ - естественный изоморфизм $I : W_1 \otimes \ldots \otimes W_n \leftrightarrow (W_i \otimes W_k) \otimes \ldots \otimes W_n$. Алгебра $\mathcal{A}$ есть ассоциативная алгебра, образующие которой являются элементами матрицы $L^{\alpha}_{\beta}(u)$ (где $\alpha, \beta = 1, \ldots, \dim W$) оператора монодромии $L(u) \in \mathrm{End}(W) \otimes \mathcal{A}$ в некотором базисе в $W$, и удовлетворяют соотношениям

$$R_{12}(u - v) L_1(u) L_2(v) = L_2(v) L_1(u) R_{12}(u - v). \quad (3)$$

Здесь $L_1, L_2 \in \mathrm{End}(W_1) \otimes \mathrm{End}(W_2) \otimes \mathcal{A}$, а смысл обозначений$L_1, L_2$ такой же, как в (2). (Согласно математической терминологии, пространство $W$ есть комодуль над $\mathcal{A}$, а оператор монодромии задает кодействие $L(u) : W \to W \otimes \mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{A}$ на нем.)

Уравнение Янга-Бакстера (2) является следствием ассоциативности алгебры $\mathcal{A}$, при условии линейной независимости мономов третьего порядка $L_1(u) L_2(v) L_3(w)$. Действительно, произведение $L_1(u) L_2(v) L_3(w)$ можно используя (3) привести к виду $L_3(w) L_2(v) L_1(u)$, двумя способами:

$$L_1 L_2 L_3 = R_{12}^{-1} R_{12} L_1 L_2 L_3 = R_{12}^{-1} L_2 L_1 L_3 R_{12} = R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} R_{13} L_2 L_1 L_3 R_{12} =$$

$$= R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} L_2 L_3 L_1 R_{13} R_{12} = R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} R_{23}^{-1} R_{23} L_2 L_3 L_1 R_{13} R_{12} =$$
$$= R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} R_{23}^{-1} L_3 L_2 L_1 R_{23} R_{13} R_{12},$$

а также:

$$L_1 L_2 L_3 = R_{23}^{-1} R_{23} L_1 L_2 L_3 = R_{23}^{-1} L_1 L_3 L_2 R_{23} = R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} R_{13} L_1 L_3 L_2 R_{23} =$$

$$= R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} L_3 L_1 L_2 R_{13} R_{23} = R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} R_{12}^{-1} R_{12} L_3 L_1 L_2 R_{13} R_{23} =$$
$$= R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} R_{12}^{-1} L_3 L_2 L_1 R_{12} R_{13} R_{23}$$

(предполагаем, что $R$- матрица обратима). Сравнивая получившиеся выражения, приходим к (2). Трансфер матрица определяется как $T(u) = \mathrm{Tr} L(u)$ (под следом понимается естественный морфизм $\mathrm{Tr}(\,\cdot\,) : \mathrm{End(W)} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$). Из (3) следует, что трансфер матрицы образуют коммутирующее семейство элементов алгебры $\mathcal{A}$:

$$T(u) T(v) = \mathrm{Tr} L(u) \mathrm{Tr} L(v) = \mathrm{Tr} L_1(u) L_2(v) = \mathrm{Tr} R_{12}^{-1} R_{12} L_1(u) L_2(v) = \quad (4)$$

$$= \mathrm{Tr} R_{12}^{-1} L_2(v) L_1(u) R_{12} = \mathrm{Tr} R_{12} R_{12}^{-1} L_2(v) L_1(u) = \mathrm{Tr} L_2(v) L_1(u) =$$
$$= \mathrm{Tr} L(v) \mathrm{Tr} L(u) = T(v) T(u)$$

В алгебре $\mathcal{A}$ можно ввести коумножение $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, задав его на образующих как:

$$\Delta(L(u)) = L(u) \otimes L(u) \in \mathrm{End}(W) \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \quad (5)$$

и затем продолжив на всю алгебру по линейности и мультипликативности. Нужно показать, что так определенное коумножение “уважает” коммутационные соотношения (3), а также коассоциативность $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$. Из (3) и (5) получаем:

$$R_{12} \Delta(L_1) \Delta(L_2) = R_{12} (L_1 \otimes L_1)(L_2 \otimes L_2) = R_{12} L_1 L_2 \otimes L_1 L_2 =$$

$$= L_2 L_1 R_{12} \otimes L_1 L_2 = L_2 L_1 \otimes R_{12} L_1 L_2 = L_2 L_1 \otimes L_2 L_1 R_{12} =$$
$$= (L_2 \otimes L_2)(L_1 \otimes L_1) R_{12} = \Delta(L_2)\Delta(L_1) R_{12}$$

Коасоциативность непосредственно следует из ассоциативноти умножения операторов в $W$:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(L) = \Delta(L) \otimes L = L \otimes L \otimes L = L \otimes \Delta(L) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(L).$$

Если $M_1$ и $M_2$ модули над $\mathcal{A}$, то при помощи коумножения можно определить структуру модуля на тензорном произведении пространств $M_1 \otimes M_2$: $a(x_1 \otimes x_2) = \sum_i a_i x_1 \otimes b_i x_2$, где $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i$, $a, a_i, b_i \in \mathcal{A}$, $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$. Из уравнения Янга-Бакстера (2) видно что пространство $W_3$ можно рассматривать как модуль над $\mathcal{A}$, если задать на нем действие образующих алгебры по формуле $L_1(u)x = R_{13}(u)x$, $x \in W_3$ ( и даже более общей: $L_1(u)x = R_{13}(u-\xi)x$, где $\xi$ - константа). Поэтому можно построить тензорное произведение любого числа таких модулей $W_1 \otimes \ldots \otimes W_N$, при этом действие алгебры дается формулой:

$$L_0 = R_{01} R_{02} \ldots R_{0N} \tag{6}$$

В случае XXZ модели, квантовое пространство каждого спина $V_i \cong W \cong \mathrm{C}^2$ и отождествляя $W_i \quad V_i$, получаем структуру модуля над $\mathcal{A}$ в квантовом пространстве $V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_N$ системы. В дальнейшем все элементы алгебры будем понимать, как операторы в квантовом пространстве. Зафиксируем также, для дальнейшего, некоторый базис во вспомогательном пространстве, и элементы матрицы монодромии будем обозначать следующим образом:

$$L(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} \tag{7}$$

R – матрица, которой отвечает XXZ модель, имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sigma^z & c\sigma^- \\ c\sigma^+ & \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sigma^z \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $a(u) = \mathrm{sh}(\eta + u)$, $b(u) = \mathrm{sh} u$, $c(u) = sh\eta$. Мы не будем здесь приводить проверку того, что эта матрица действительно удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (2), поскольку она является очень громоздкой. Выпишем для дальнейшего соответствующие ей коммутационные соотношения (3) в явном виде:

$$[A(u), A(v)] = [B(u), B(v)] = [C(u), C(v)] = [D(u), D(v)] = 0 \tag{9}$$

$$aA(u)B(v) = bB(v)A(u) + cA(v)B(u) \tag{10}$$

$$aB(u)A(v) = cB(v)A(u) + bA(v)B(u) \tag{11}$$

$$aC(u)D(v) = bD(v)C(u) + cC(v)D(u) \tag{12}$$

$$aD(u)C(v) = cD(v)C(u) + bC(v)D(u) \tag{13}$$

$$bA(u)C(v) + cC(u)A(v) = aC(v)A(u) \tag{14}$$

$$cA(u)C(v) + bC(u)A(v) = aA(v)C(u) \tag{15}$$

$$bB(u)D(v) + cD(u)B(v) = aD(v)B(u) \tag{16}$$

$$cB(u)D(v) + bD(u)B(v) = aB(v)D(u) \tag{17}$$

$$bA(u)D(v) + cC(u)B(v) = bD(v)A(u) + cC(v)B(u) \tag{18}$$

$$bB(u)C(v) + cD(u)A(v) = cD(v)A(u) + bC(v)B(u) \tag{19}$$

$$cA(u)D(v) + bC(u)B(v) = bB(v)C(u) + cA(v)D(u) \tag{20}$$

$$cB(u)C(v) + bD(u)A(v) = cB(v)C(u) + bA(v)D(u) \tag{21}$$

В этих формулах подразумевается, что $a, b, c$ зависят от $u - v$.

Покажем, что гамильтониан XXZ модели выражается через трансфер матрицу $T(u)$ следующим образом:

$$2\mathrm{sh}\eta T^{-1}(0) \left. \frac{dT(u)}{du} \right|_{u=0} = H_{XXZ} + \mathrm{const} \tag{22}$$

При $u = 0$ $R$ - матрица превращается, с точностью до множителя, в оператор перестановки $P$, который переставляет местами пространства в тензорном произведении: $P(x \otimes y) = (y \otimes x)$,

$$R(0) = \mathrm{sh}\eta P \tag{23}$$

Он обладает очевидными свойствами $P^2 = 1$, $P_{ik} A_i P_{ik} = A_k$, используя которые, получаем:

$$\mathrm{sh}^{1-N}\eta T'(0) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Tr} P_{01} \ldots R'_{0k} \ldots P_{0N} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Tr} P_{01} \ldots P_{0,k-1} P_{0k} P_{0,k+1} P_{0,k+1} P_{0k} R'_{0k}(0) P_{0,k+1} \ldots P_{0N} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Tr} P_{01} \ldots P_{0,k-1} P_{0k} P_{0,k+1} P_{k+1,k} R'_{k+1,k}(0) \ldots P_{0N} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Tr}\left(P_{01} \ldots P_{0N}\right) P_{k+1,k} R'_{k+1,k}(0)$$

Здесь вместо индекса $N + 1$ надо понимать 1. Это следует из того, что данные операторы можно циклически переставлять под следом. Умножая на $T^{-1}(0)$, получаем:

$$2\mathrm{sh}\eta T^{-1}(0) T'(0) = \sum_{k=1}^{N} 2 P_{k+1,k} R'_{k+1,k}(0) = \sum_{k=1}^{N} 2 R'_{k,k+1}(0) P_{k,k+1} \tag{24}$$

Из (8) получаем:

$$2R'(0)P = 2 \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{ch}\eta \end{pmatrix} = 2\sigma^+ \otimes \sigma^- + 2\sigma^- \otimes \sigma^+ + \tag{25}$$

$$+ \mathrm{ch}\eta(1 + \sigma^z \otimes \sigma^z) = \sigma^x \otimes \sigma^x + \sigma^y \otimes \sigma^y + \mathrm{ch}\eta \sigma^z \otimes \sigma^z + \mathrm{ch}\eta$$

и подставляя в (24), получим (22). Можно показать, что следующие коэффициенты в разложении:

$$T^{-1}(0)T(u) = 1 + \frac{H_{XXZ}}{2\text{sh}\eta}u + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{H_n}{n!}u^n$$

дают коммутирующие гамильтонианы $H_n$ с локальными взаимодействиями $n$соседних узлов.

## 2.2 Алгебраический анзац Бете.

В этом разделе мы изложим способ, при помощи которого можно найти собственные значения и собственные векторы семейства трансфер матриц [1, 2].

В алгебре End(V) можно ввести градуировку следующим образом. Введем подпространства $\mathrm{A}_k = \{a \in \mathrm{End}(V) | [S^z, a] = ka, k \in \mathrm{Z}\} \subset \mathrm{End}(V)$, где $S^z = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}\sigma_i^z$ - оператор $z$-компоненты полного спина системы. Тогда $\mathrm{End}(V) = \bigoplus\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$, причем, как легко убедиться, если$a \in \mathrm{A}_k, b \in \mathrm{A}_l$, то $ab \in \mathrm{A}_{k+l}$. Поскольку $1, \sigma_k^z \in \mathrm{A}_0$, $\sigma_k^+ \in \mathrm{A}_1$, $\sigma_k^- \in \mathrm{A}_{-1}$, то из формул (6) и (8) следует, что матрица монодромии есть произведение $N$ матриц вида:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

где $\tilde{a}, \tilde{d} \in \mathrm{A}_0$, $\tilde{b} \in \mathrm{A}_{-1}$, $\tilde{c} \in \mathrm{A}_1$. Но легко проверить, что произведение двух таких матриц есть опять матрица такого вида. Поэтому $A(u), D(u) \in \mathrm{A}_0$, $B(u) \in \mathrm{A}_{-1}$, $C(u) \in \mathrm{A}_1$, или:

$$[S^z, A(u)] = [S^z, D(u)] = 0 \tag{26}$$

$$[S^z, B(u)] = -B \tag{27}$$

$$[S^z, C(u)] = C \tag{28}$$

Введем в пространствах $V_k$ естественный базис $e_k^+, e_k^-$, $\sigma_k^z e_k^+ = e_k^+$, $\sigma_k^z e_k^- = -e_k^-$, и рассмотрим вектор $w_+ = e_1^+ \otimes e_2^+ \otimes \ldots \otimes e_N^+$. Из (28) следует, что он является вектором со старшим весом:

$$C(u)w_+ = 0, \tag{29}$$

а из (26), что он есть собственный вектор операторов $A$ и $D$. Чтобы определить собственные значения, подействуем на него матрицей монодромии:

$$\begin{pmatrix} Aw_+ & Bw_+ \\ Cw_+ & Dw_+ \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{N}\begin{pmatrix} ae_k^+ & ce_k^- \\ 0 & be_k^+ \end{pmatrix},$$

откуда легко усмотреть, что:

$$A(u)w_+ = a^N(u)w_+ \tag{30}$$

$$D(u)w_+ = b^N(u)w_+. \tag{31}$$

Будем теперь искать собственные векторы трансфер матрицы $T(u) = A(u) + D(u)$ в виде:

$$\Phi = B(v_1)\ldots B(v_n)w_+, \tag{32}$$

где константы $v_1, \dots v_n$ подлежат определению. Перепишем коммутационные соотношения (11) и (17) в следующем виде:

$$A(u)B(v) = \frac{a(v-u)}{b(v-u)}B(v)A(u) - \frac{c(v-u)}{b(v-u)}B(u)A(v) \tag{33}$$

$$D(u)B(v) = \frac{a(v-u)}{b(u-v)}B(v)D(u) - \frac{c(v-u)}{b(u-v)}B(u)D(v) \tag{34}$$

Действуя на вектор (32) трансфер матрицей, и пронося $A(u)$ и $D(u)$ через $B(v_l)$ к $w_+$, при помощи этих соотношений, а также используя (30) и (31), получим:

$$\begin{gathered}(A(u)+D(u))B(v_1)\dots B(v_n)w_+ = \\ = \left(a^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(v_i-u)}{b(v_i-u)} + b^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(u-v_i)}{b(u-v_i)}\right)B(v_1)\dots B(v_n)w_+ + \\ +\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j B(u)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}B(v_l)w_+\end{gathered} \tag{35}$$

где $\Lambda_j$ - числовые коэффициенты, зависящие от $u, v_1, \dots v_n$. Член с $B(v_1)\dots B(v_n)$ получается, если при протаскивании $A(u)$ и $D(u)$ через $B(v_l)$ учитывать только первые слагаемые в правых частях формул (33) и (34). Остальные (нежелательные) члены получаются, если при протаскивании хотя бы раз воспользоваться вторыми слагаемыми в этих формулах. Проще всего найти коэффициент при члене $\Lambda_1 B(u)B(v_2)\dots B(v_n)w_+$. Можно усмотреть, что он получается только в том случае, когда мы первый раз при протаскивании пользуемся вторыми членами, а затем только первыми. При этом получается:

$$\frac{c(u-v_1)}{b(u-v_1)}\left(a^N(v_1)\prod_{l=2}^{n}\frac{a(v_l-v_1)}{b(v_l-v_1)} - b^N(v_1)\prod_{l=2}^{n}\frac{a(v_1-v_l)}{b(v_1-v_l)}\right)B(u)B(v_2)\dots B(v_n)w_+ \tag{36}$$

Здесь мы использовали равенство $b(v-u) = -b(u-v)$. Однако, поскольку все $B(v_l)$ коммутируют между собой, мы можем переставить их в формуле (35) таким образом, чтобы на первом месте оказался оператор $B(v_j)$ с любым $j$, и следовательно все остальные нежелательные члены получаются из (36) заменой индекса 1 на $j$. В результате, коэффициенты $\Lambda_j$ в (35) равны:

$$\Lambda_k = \frac{c(u-v_j)}{b(u-v_j)}\left(a^N(v_j)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\frac{a(v_l-v_j)}{b(v_l-v_j)} - b^N(v_j)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\frac{a(v_j-v_l)}{b(v_j-v_l)}\right) \tag{37}$$

Приравнивая нулю эти коэффициенты, получим систему уравнений Бете для параметров $v_1, \dots v_n$:

$$\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\frac{a(v_l-v_j)b(v_j-v_l)}{b(v_l-v_j)a(v_j-v_l)} = \left(\frac{b(v_j)}{a(v_j)}\right)^N \tag{38}$$

Выполнение этих равенств является достаточным условием того, чтобы вектор (32) был собственным вектором трансфер матрицы. Покажем, что оно является также и необходимым. Действительно, предположим, что вектор (32) является собственным, тогда, в (35) сумма нежелательных членов равна нулю, и собственное значение транфер матрицы есть:

$$t(u) = a^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(v_i-u)}{b(v_i-u)} + b^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(u-v_i)}{b(u-v_i)} \tag{39}$$

Трансфер матрица $T(u)$ , как видно из (6) и (8), является целой функцией $u$, (т.е. все матричные элементы – целые функции $u$). Легко видеть, что если имеется семейство коммутирующих матриц, которые являются целыми функциями некоторого параметра, то их собственные значения также являются целыми функциями этого параметра. Поэтому (39) не имеет полюсов, как функция $u$. Приравнивая нулю вычеты в точках $u = v_i$, получим уравнения Бете (38).

Таким образом, каждое решение уравнений Бете дает собственный вектор трансфер матрицы, а собственное значение дается формулой (39). Мы не будем здесь рассматривать вопрос о том, существуют ли решения уравнений Бете, и достаточно ли их много, чтобы получить все $2^N$ собственных векторов. Кроме того, выше предполагалось, что все $v_1, \dots v_n$ различны, и мы не рассматриваем случай, когда среди них есть одинаковые.

## 2.3 Выражение локальных операторов через элементы матрицы монодромии.

Следующей важной задачей в теории интегрируемых систем, после нахождения собственных векторов и собственных значений гамильтониана, является вычисление корреляционных функций. Как показано в предыдущем разделе, собственные состояния гамильтониана даются действием понижающих операторов $B(v_k)$, которые являются элементами матрицы монодромии. Эти операторы являются нелокальными операторами, выражение которых через локальные операторы $\sigma_k^\alpha$ дается формулами (6) и (8), которые имеют довольно сложную структуру. При вычислении корреляционных функций возникают трудности, поскольку неизвестны какие-либо простые коммутационные соотношения между этими двумя типами операторов. В этом разделе мы изложим очень простой способ [4, 7], при помощи которого можно получить обратные формулы, выражающие локальные операторы через элементы матрицы монодромии, и тем самым при вычислении корреляционных функций иметь дело только с операторами $A, B, C, D$, коммутационные соотношения между которыми имеют простой вид (9) - (21). В работах [5, 6] при помощи этих формул вычислены корелляционные функции в модели XXZ.

Нам понадобиться следующее равенство, которое является соотношением в группе перестановок:

$$L(0) = P_{01}\dots P_{0N} = (\mathrm{sh}\eta)^N S_{N\to 0}, \tag{40}$$

где $S_{N\to 0}$ есть оператор циклического сдвига на один узел, который действует так: $S_{N\to 1}(x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_N) = x_1 \otimes \dots \otimes x_N \otimes x_0$. Трансфер матрица при $u = 0$ также пропорциональна оператору циклического сдвига $S_{N\to 1}$, $S_{N\to 1}(x_1\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_N)=x_2\otimes\ldots\otimes x_N\otimes x_1$:

$$T(0)=\mathrm{Tr}P_{01}\ldots P_{0N}=\mathrm{Tr}P_{01}\ldots P_{0N}P_{01}P_{01}=\mathrm{Tr}P_{12}\ldots P_{1N}P_{01}= \tag{41}$$

$$=P_{12}\ldots P_{1N}\mathrm{Tr}P_{01}=P_{12}\ldots P_{1N}=S_{N\to 1}$$

(как легко проверить, $\mathrm{Tr}P_{01}=\mathrm{id}_1$). Пусть $E_k$ - какой-нибудь локальный оператор на $k$- ом узле, а $E_0$ - соответствующий оператор на вспомогательном пространстве $W$. Операторы $E_0$ и $E_1$ связаны, очевидно, следующим образом: $E_1S_{N\to 0}=S_{N\to 0}E_0$, или согласно (40): $E_1L(0)=L(0)E_0$. Возьмем от этого равенства след по квантовому пространству:

$$\mathrm{tr}L(0)E_0=\mathrm{tr}E_1L(0)=E_1\mathrm{tr}L(0)=E_1T(0), \tag{42}$$

откуда получаем выражение локального оператора на 1-ом узле:

$$E_1=\mathrm{tr}(L(0)E_0)T^{-1}(0). \tag{43}$$

Но операторы на остальных узлах выражаются через него так:
$E_k=(S_{N\to 1})^{k-1}E_1(S_{N\to 1})^{-k+1}$, или согласно (41):

$$E_k=T^{k-1}(0)E_1T^{-k+1}(0)=(\mathrm{sh}\eta)^{-N^2}T^{k-1}(0)E_1T^{N-k+1}(0), \tag{44}$$

где использовано, что $(\mathrm{sh}\eta)^{-N^2}T^N(0)=(S_{N\to 1})^N\equiv 1$. Подставляя (43) в (44), получим:

$$E_k=(\mathrm{sh}\eta)^{-N^2}T^{k-1}(0)\mathrm{tr}(L(0)E_0)T^{N-k}(0) \tag{45}$$

Подставляя в качестве $E_0$ матрицы спиновых операторов $\sigma_k^+,\sigma_k^-,\sigma_k^z$, получим:

$$\sigma_k^+=(\mathrm{sh}\eta)^{-N^2}(A(0)+D(0))^{k-1}C(0)(A(0)+D(0))^{N-k} \tag{46}$$

$$\sigma_k^-=(\mathrm{sh}\eta)^{-N^2}(A(0)+D(0))^{k-1}B(0)(A(0)+D(0))^{N-k} \tag{47}$$

$$\sigma_k^z=(\mathrm{sh}\eta)^{-N^2}(A(0)+D(0))^{k-1}(A(0)-D(0))(A(0)+D(0))^{N-k}. \tag{48}$$

# 3 XXZ модель с открытыми граничными условиями. Матрица монодромии Склянина.

В этом разделе мы рассмотрим XXZ модель с гамильтонианом:

$$H=\sum_{k=1}^{N-1}(\sigma_k^x\sigma_{k+1}^x+\sigma_k^y\sigma_{k+1}^y+\mathrm{ch}\eta\sigma_k^z\sigma_{k+1}^z)+\mathrm{sh}\eta(\sigma_1^z\mathrm{cth}\xi_++\sigma_N^z\mathrm{cth}\xi_-), \tag{49}$$

где $\xi_-$ и $\xi_+$ некоторые параметры. Мы изложим, каким образом можно видоизменить построения, изложенные в предыдущем разделе, для того, чтобы показать, что эта модель тоже является вполне интегрируемой, и найти спектр и собственные состояния гамильтониана [8].

Прежде чем двигаться дальше, перечислим некоторые свойства $R$- матрицы, которые будут играть важную роль в дальнейших построениях. Симметрия:

$$R_{21}(u) = R_{12}(u) = R_{12}^{t_1 t_2}(u) \tag{50}$$

Унитарность:

$$R_{12}(u) R_{12}(-u) = \rho(u) \equiv -\mathrm{sh}(u+\eta)\mathrm{sh}(u-\eta) \tag{51}$$

Кроссинг-симметрия:

$$R_{12}(u) = (\sigma \otimes \mathrm{id}) R_{12}^{t_1}(-\eta - u)(\sigma \otimes \mathrm{id}) \tag{52}$$

Здесь через $t_i$ обозначен антиавтоморфизм алгебры $\mathrm{End}(W_i)$, который в выбранном нами базисе задается транспонированием матриц, а $\sigma$ в этом базисе задается матрицей Паули $\sigma_y$. Все эти свойства легко проверить для $R$- матрицы (8). Из них легко получить:

$$R_{12}^{t_1}(u) R_{12}^{t_2}(-u - 2\eta) = \tilde{\rho}(u) \equiv \rho(u+\eta) \tag{53}$$

Введем $K$- матрицы, $K_+(u), K_-(u) \in \mathrm{End}(W)$:

$$K_+(u) = K\left(u + \frac{\eta}{2}, \xi_+\right), \quad K_- = K\left(u - \frac{\eta}{2}, \xi_-\right), \tag{54}$$

$$K(u,\xi) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(u+\xi) & 0 \\ 0 & -\mathrm{sh}(u-\xi) \end{pmatrix}, \tag{55}$$

которые, как можно проверить, удовлетворяют уравнениям:

$$R_{12}(-u_1+u_2) \overset{1}{K}{}^t_+(u_1) R_{12}(-u_1-u_2-\eta) \overset{2}{K}{}^t_+(u_2) = \tag{56}$$

$$= \overset{2}{K}{}^t_+(u_2) R_{12}(-u_1-u_2-\eta) \overset{1}{K}{}^t_+(u_1) R_{12}(-u_1+u_2)$$

$$R_{12}(u_1-u_2) \overset{1}{K}_-(u_1) R_{12}(u_1+u_2-\eta) \overset{2}{K}_-(u_2) = \tag{57}$$

$$= \overset{2}{K}_-(u_2) R_{12}(u_1+u_2-\eta) \overset{1}{K}_-(u_1) R_{12}(u_1-u_2)$$

Пусть $L(u)$ есть матрица монодромии в случае с периодическими граничными условиями:

$$L(u) = R_{01}\left(u - \frac{\eta}{2}\right) \ldots R_{0N}\left(u - \frac{\eta}{2}\right) \tag{58}$$

(Обратим внимание, что мы сдвинули аргумент $u \to u + \eta/2$, и переопределили $L(u) \to L(u - \eta/2)$ по сравнению с (6)).

Введем матрицу монодромии Склянина:

$$\mathcal{L}(u) = L(u) K_-(u) L^{-1}(\eta - u), \tag{59}$$

и покажем, используя (3) и (56), что она удовлетворяет таким же коммутационным соотношениям, как и $K_-(u)$:

$$R_{12}(u_1-u_2) \overset{1}{\mathcal{L}}(u_1) R_{12}(u_1+u_2-\eta) \overset{2}{\mathcal{L}}(u_2) = \tag{60}$$

$$= \overset{2}{\mathcal{L}}(u_2) R_{12}(u_1+u_2-\eta) \overset{1}{\mathcal{L}}(u_1) R_{12}(u_1-u_2)$$

Пользуясь равенством (57), а также равенствами (3), (50), (51), получаем:

$$R_{12}(u_1-u_2)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)=$$

$$=R_{12}(u_1-u_2)L_1(u_1)\overset{1}{K}_-(u_1)L_1^{-1}(\eta-u_1)R_{12}(u_1+u_2-\eta)L_2(u_2)\overset{2}{K}_-(u_2)L_2^{-1}(\eta-u_2)=$$

$$=R_{12}(u_1-u_2)L_1(u_1)L_2(u_2)\overset{1}{K}_-(u_1)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{2}{K}_-(u_2)L_1^{-1}(\eta-u_1)L_2^{-1}(\eta-u_2)=$$

$$=L_2(u_2)L_1(u_1)R_{12}(u_1-u_2)\overset{1}{K}_-(u_1)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{2}{K}_-(u_2)L_1^{-1}(\eta-u_1)L_2^{-1}(\eta-u_2)=$$

$$=L_2(u_2)L_1(u_1)\overset{2}{K}_-(u_2)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{1}{K}_-(u_1)R_{12}(u_1-u_2)L_1^{-1}(\eta-u_1)L_2^{-1}(\eta-u_2)=$$

$$=L_2(u_2)\overset{2}{K}_-(u_2)L_1(u_1)R_{12}(u_1+u_2-\eta)L_2^{-1}(\eta-u_2)\overset{1}{K}_-(u_1)L_1^{-1}(\eta-u_1)R_{12}(u_1-u_2)=$$

$$=L_2(u_2)\overset{2}{K}_-(u_2)L_2^{-1}(\eta-u_2)R_{12}(u_1+u_2-\eta)L_1(u_1)\overset{1}{K}_-(u_1)L_1^{-1}(\eta-u_1)R_{12}(u_1-u_2)=$$

$$=\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)R_{12}(u_1-u_2)$$

Трансфер матрица Склянина определяется как:

$$T_S(u)=\mathrm{Tr}K_+(u)\mathcal{L}(u)=\mathrm{Tr}K_+(u)L(u)K_-(u)L^{-1}(\eta-u) \qquad (61)$$

Эти трансфер матрицы коммутируют при разных значениях $u$, в чем можно убедиться при помощи следующего, довольно громоздкого вычисления, использующего равенства (50), (51), (53), (56), (60):

$$T_S(u_1)T_S(u_2)=\mathrm{Tr}_1\overset{1}{K}_+(u_1)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)\mathrm{Tr}_2\overset{2}{K}_+(u_2)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)=$$

$$=\mathrm{Tr}_1\overset{1}{K}{}^{t_1}_+(u_1)\overset{1}{\mathcal{L}}{}^{t_1}(u_1)\mathrm{Tr}_2\overset{2}{K}_+(u_2)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)=\mathrm{Tr}_{12}\overset{1}{K}{}^{t_1}_+(u_1)\overset{2}{K}_+(u_2)\overset{1}{\mathcal{L}}{}^{t_1}(u_1)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)=$$

$$=\tilde{\rho}^{-1}(u_1+u_2-\eta)\mathrm{Tr}_{12}\overset{1}{K}{}^{t_1}_+(u_1)\overset{2}{K}_+(u_2)R_{12}^{t_2}(-u_1-u_2-\eta)R_{12}^{t_1}(u_1+u_2-\eta)\times$$

$$\times\overset{1}{\mathcal{L}}{}^{t_1}(u_1)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)=\tilde{\rho}^{-1}\mathrm{Tr}_{12}\{\overset{1}{K}{}^{t_1}_+(u_1)R_{12}(-u_1-u_2-\eta)\overset{2}{K}{}^{t_2}_+(u_2)\}^{t_2}\times$$

$$\times\{\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)\}^{t_1}=\tilde{\rho}^{-1}\mathrm{Tr}_{12}\{\overset{1}{K}{}^{t_1}_+(u_1)R_{12}(-u_1-u_2-\eta)\overset{2}{K}{}^{t_2}_+(u_2)\}^{t_1t_2}\times$$

$$\times\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)=\tilde{\rho}^{-1}\rho^{-1}(u_2-u_1)\times$$

$$\times\mathrm{Tr}_{12}\{\overset{1}{K}{}^{t_1}_+(u_1)R_{12}(-u_1-u_2-\eta)\overset{2}{K}{}^{t_2}_+(u_2)\}^{t_1t_2}R_{12}(u_2-u_1)R_{12}(u_1-u_2)\times$$

$$\times\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)=\tilde{\rho}^{-1}\rho^{-1}\times$$

$$\times\mathrm{Tr}_{12}\{R_{12}(u_2-u_1)\overset{1}{K}{}^{t_1}_+(u_1)R_{12}(-u_1-u_2-\eta)\overset{2}{K}{}^{t_2}_+(u_2)\}^{t_1t_2}\times$$

$$\times R_{12}(u_1-u_2)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)=\tilde{\rho}^{-1}\rho^{-1}\times$$

$$\times\mathrm{Tr}_{12}\{\overset{2}{K}{}^{t_2}_+(u_2)R_{12}(-u_1-u_2-\eta)\overset{1}{K}{}^{t_1}_+(u_1)R_{12}(u_2-u_1)\}^{t_1t_2}\times$$

$$\times\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)R_{12}(u_1-u_2)=$$

$$= \tilde{\rho}^{-1}\rho^{-1}\mathrm{Tr}_{12}\overset{2}{K}{}^{t_2}_{+}(u_2)R_{12}(-u_1-u_2-\eta)\overset{1}{K}{}^{t_1}_{+}(u_1)R_{12}(u_2-u_1)\times$$

$$\times\{\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)R_{12}(u_1-u_2)\}^{t_1t_2} =$$

$$= \tilde{\rho}^{-1}\rho^{-1}\mathrm{Tr}_{12}\overset{2}{K}{}^{t_2}_{+}(u_2)R_{12}(-u_1-u_2-\eta)\overset{1}{K}{}^{t_1}_{+}(u_1)R_{12}(u_2-u_1)R_{12}(u_1-u_2)\times$$

$$\times\{\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)\}^{t_1t_2} =$$

$$= \tilde{\rho}^{-1}\mathrm{Tr}_{12}\overset{2}{K}{}^{t_2}_{+}(u_2)R_{12}(-u_1-u_2-\eta)\overset{1}{K}{}^{t_1}_{+}(u_1)\{\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)\}^{t_1t_2} =$$

$$= \tilde{\rho}^{-1}\mathrm{Tr}_{12}\{\overset{2}{K}{}^{t_2}_{+}(u_2)R_{12}(-u_1-u_2-\eta)\overset{1}{K}{}^{t_1}_{+}(u_1)\}^{t_1}\{\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)R_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1)\}^{t_2} =$$

$$= \tilde{\rho}^{-1}\mathrm{Tr}_{12}\overset{2}{K}{}^{t_2}_{+}(u_2)\overset{1}{K}_{+}(u_1)R^{t_1}_{12}(-u_1-u_2-\eta)R^{t_2}_{12}(u_1+u_2-\eta)\overset{2}{\mathcal{L}}{}^{t_2}(u_2)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1) =$$

$$=\mathrm{Tr}_{12}\overset{2}{K}{}^{t_2}_{+}(u_2)\overset{1}{K}_{+}(u_1)\overset{2}{\mathcal{L}}{}^{t_2}(u_2)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1) = \mathrm{Tr}_2\overset{2}{K}_{+}(u_2)\overset{2}{\mathcal{L}}(u_2)\mathrm{Tr}_1\overset{1}{K}_{+}(u_1)\overset{1}{\mathcal{L}}(u_1) =$$

$$= T_S(u_2)T_S(u_1)$$

Вычислим логарифмическую производную трансфер матрицы при $u=\eta/2$. Поскольку $K_-(\eta/2)=\mathrm{sh}\xi_-$, получаем из (61):

$$T_S\left(\frac{\eta}{2}\right) = \mathrm{sh}\xi_-\mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right) \tag{62}$$

$$\mathrm{sh}^{-1}\xi_-T'_S\left(\frac{\eta}{2}\right) = \mathrm{Tr}K'_+\left(\frac{\eta}{2}\right) + 2\mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right)L'\left(\frac{\eta}{2}\right)L^{-1}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \tag{63}$$

$$+\mathrm{sh}^{-1}\xi_-\mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right)L\left(\frac{\eta}{2}\right)K'_-\left(\frac{\eta}{2}\right)L^{-1}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

Используя (58) и (23), получаем:

$$\mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right)L'\left(\frac{\eta}{2}\right)L^{-1}\left(\frac{\eta}{2}\right) = \mathrm{sh}^{-1}\eta\mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right)\sum_{k=1}^{N}P_{01}\dots R'_{0k}(0)\dots P_{0N}P_{0N}\dots P_{01} = \tag{64}$$

$$= \mathrm{sh}^{-1}\eta\mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right)\sum_{k=2}^{N}R'_{k-1,k}(0)P_{k-1,k} + \mathrm{sh}^{-1}\eta\mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right)R'_{01}(0)P_{01}$$

$$\mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right)L\left(\frac{\eta}{2}\right)K'_-\left(\frac{\eta}{2}\right)L^{-1}\left(\frac{\eta}{2}\right) = \mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right)P_{01}\dots P_{0N}K'_-\left(\frac{\eta}{2}\right)P_{0N}\dots P_{01} = \tag{65}$$

$$= \overset{N}{K'_-}\left(\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{Tr}K_+\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

Собирая все вместе, и используя (54), (55), и (25), получим:

$$T_S^{-1}\left(\frac{\eta}{2}\right)T'_S\left(\frac{\eta}{2}\right) = \left.\frac{\mathrm{Tr}K'_+}{\mathrm{Tr}K_+}\right|_{u=\frac{\eta}{2}} + \frac{2}{\mathrm{sh}\eta}\sum_{k=2}^{N}R'_{k-1,k}(0)P_{k-1,k} + \tag{66}$$

$$+\left.\frac{2\mathrm{Tr}K_+R'_{01}(0)P_{01}}{\mathrm{sh}\eta\mathrm{Tr}K_+}\right|_{u=\frac{\eta}{2}} + \mathrm{sh}^{-1}\xi_-\overset{N}{K'_-}\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{\mathrm{sh}\eta}{\mathrm{ch}\eta} + N\frac{\mathrm{ch}\eta}{\mathrm{sh}\eta} +$$

$$+\frac{1}{\mathrm{sh}\eta}\sum_{k=2}^{N}(\sigma_{k-1}^x\sigma_k^x+\sigma_{k-1}^y\sigma_k^y+\mathrm{ch}\eta\sigma_{k-1}^z\sigma_k^z)+\sigma_1^z\mathrm{cth}\xi_++\sigma_N^z\mathrm{cth}\xi_-$$

Таким образом, гамильтониан нашей модели выражается через трансфер матрицу Склянина аналогично (22).

Вычислим теперь матрицу $L^{-1}(u)$. С этой целью рассмотрим квантовый детерминант:

$$\det_q L(u)=D(u-\eta)A(u)-B(u-\eta)C(u) \tag{67}$$

При $u=-\eta$ $R$- матрица превращается в одномерный проектор $P_{12}^-$:

$$R_{12}(-\eta)=\mathrm{sh}\eta P_{12}^-\equiv\frac{\mathrm{sh}\eta}{2}(1-P_{12}), \tag{68}$$

с помощью которого, а также с помощью коммутационных соотношений (18) - (21), квантовый детерминант можно представить в виде:

$$\det_q L(u)=\mathrm{Tr}_{12}P_{12}^-L_1(u-\eta)L_2(u) \tag{69}$$

Покажем, что квантовый детерминант коммутирует со всеми элементами матрицы монодромии. Для этого нам понадобится следующее равенство, вытекающее из одномерности проектора $P_{12}^-$:

$$P_{12}^-A_{12}P_{12}^-=\mathrm{Tr}_{12}(P_{12}^-A_{12})P_{12}^-, \tag{70}$$

которое справедливо для любого оператора $A_{12}\in\mathrm{End}(W_1\otimes W_2)$. С его помощью имеем:

$$L_3(v)\det_q L(u)=\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)L_3(v)L_1(u-\eta)L_2(u)=$$
$$=\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)R_{13}(u-v-\eta)L_1(u-\eta)L_3(v)R_{13}^{-1}(u-v-\eta)L_2(u)=$$
$$=\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)R_{13}(u-v-\eta)L_1(u-\eta)R_{23}(u-v)L_2(u)L_3(v)\times$$
$$\times R_{23}^{-1}(u-v)R_{13}^{-1}(u-v-\eta)=\mathrm{Tr}_{12}R_{23}(u-v)R_{13}(u-v-\eta)\times$$
$$\times R_{12}(-\eta)L_1(u-\eta)L_2(u)L_3(v)R_{23}^{-1}(u-v)R_{13}^{-1}(u-v-\eta)=$$
$$=\mathrm{Tr}_{12}R_{23}(u-v)R_{13}(u-v-\eta)R_{12}(-\eta)L_2(u)L_1(u-\eta)R_{12}(-\eta)\times$$
$$\times L_3(v)R_{23}^{-1}(u-v)R_{13}^{-1}(u-v-\eta)=\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)L_2(u)L_1(u-\eta)\times$$
$$\times\mathrm{Tr}_{12}R_{23}(u-v)R_{13}(u-v-\eta)R_{12}(-\eta)L_3(v)R_{23}^{-1}(u-v)R_{13}^{-1}(u-v-\eta)=$$
$$=\det_q L(u)\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)R_{13}(u-v-\eta)R_{23}(u-v)R_{12}(-\eta)\times$$
$$\times L_3(v)R_{12}(-\eta)R_{13}^{-1}(u-v-\eta)R_{23}^{-1}(u-v)R_{12}(-\eta)=\det_q L(u)\times$$
$$\times\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)R_{13}(u-v-\eta)R_{23}(u-v)\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)L_3(v)R_{12}(-\eta)\times$$
$$\times\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)R_{13}^{-1}(u-v-\eta)R_{23}^{-1}(u-v)=\det_q L(u)\times$$
$$\times\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)R_{13}(u-v-\eta)R_{23}(u-v)L_3(v)\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)R_{13}^{-1}(u-v-\eta)R_{23}^{-1}(u-v)$$

Но можно проверить, что матрицы $\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)R_{13}(u-v-\eta)R_{23}(u-v)$ и $\mathrm{Tr}_{12}R_{12}(-\eta)R_{13}^{-1}(u-v-\eta)R_{23}^{-1}(u-v)$ кратны единичной, и взаимно обратные, поэтому получаем $L_3(v)\det_q L(u)=$

$\det_q L(u)L_3(v)$. Легко видеть, что $\det_q L(u)$ действует в квантовом пространстве нашей системы как оператор, кратный единичному. Действительно, это пространство натянуто на векторы вида (32), а действуя на них $\det_q L(u)$, и пользуясь коммутативностью, получим:

$$\det_q L(u)\Phi = B(v_1)\dots B(v_n)\det_q L(u)w_+ = a^N(u)b^N(u-\eta)\Phi$$

Таким образом, в нашем представлении $\det_q L(u) = a^N(u-\eta/2)b^N(u-3\eta/2)$. Пользуясь коммутационными соотношениями (10) - (21) при $u - v = -\eta$, получим:

$$\sigma L^t(u-\eta)\sigma L(u) = \begin{pmatrix} D(u-\eta) & -B(u-\eta) \\ -C(u-\eta) & A(u-\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} = \tag{71}$$

$$= \begin{pmatrix} D(u-\eta)A(u) - B(u-\eta)C(u) & D(u-\eta)B(u) - B(u-\eta)D(u) \\ A(u-\eta)C(u) - C(u-\eta)A(u) & A(u-\eta)D(u) - C(u-\eta)B(u) \end{pmatrix} =$$

$$= \det_q L(u)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Окончательно имеем следующее выражение для $L^{-1}(u)$:

$$L^{-1}(u) = \frac{\sigma L^t(u-\eta)\sigma}{\det_q L(u)} \tag{72}$$

Заметим, что эту формулу можно получить гораздо быстрее, используя явное представление матрицы монодромии (58), а также, соотношения унитарности (51) и кроссинга (52):

$$L^{-1}(u) = R_{0N}^{-1}\left(u-\frac{\eta}{2}\right)\dots R_{01}^{-1}\left(u-\frac{\eta}{2}\right) =$$

$$= \mathrm{sh}^{-N}\left(u+\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{sh}^{-N}\left(\frac{3\eta}{2}-u\right)R_{0N}\left(\frac{\eta}{2}-u\right)\dots R_{01}\left(\frac{\eta}{2}-u\right) =$$

$$= \mathrm{sh}^{-N}\left(u+\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{sh}^{-N}\left(\frac{3\eta}{2}-u\right)\sigma R_{0N}^{t_0}\left(u-\frac{3\eta}{2}\right)\dots R_{01}^{t_0}\left(u-\frac{3\eta}{2}\right)\sigma =$$

$$= \mathrm{sh}^{-N}\left(u+\frac{\eta}{2}\right)\mathrm{sh}^{-N}\left(\frac{3\eta}{2}-u\right)\sigma L^t\left(u-\eta\right)\sigma$$

В дальнейшем удобно переопределить матрицу монодромии Склянина, умножив ее на $\det_q L(u)$:

$$\mathcal{L}(u) = L(u)K_-(u)\sigma L^t(-u)\sigma \tag{73}$$

Выпишем явные выражения для ее элементов:

$$\mathcal{A}(u) = \mathrm{sh}\left(u-\frac{\eta}{2}+\xi_-\right)A(u)D(-u) - \mathrm{sh}\left(u-\frac{\eta}{2}-\xi_-\right)B(u)C(-u) \tag{74}$$

$$\mathcal{B}(u) = -\mathrm{sh}\left(u-\frac{\eta}{2}+\xi_-\right)A(u)B(-u) - \mathrm{sh}\left(u-\frac{\eta}{2}-\xi_-\right)B(u)A(-u) \tag{75}$$

$$\mathcal{C}(u) = \mathrm{sh}\left(u-\frac{\eta}{2}+\xi_-\right)C(u)D(-u) - \mathrm{sh}\left(u-\frac{\eta}{2}-\xi_-\right)D(u)C(-u) \tag{76}$$

$$\mathcal{D}(u) = -\mathrm{sh}\left(u-\frac{\eta}{2}+\xi_-\right)C(u)B(-u) - \mathrm{sh}\left(u-\frac{\eta}{2}-\xi_-\right)D(u)A(-u), \tag{77}$$

а также для трансфер матрицы Склянина:

$$T_S(u) = \mathrm{sh}\left(u + \frac{\eta}{2} + \xi_+\right)\mathcal{A}(u) - \mathrm{sh}\left(u + \frac{\eta}{2} - \xi_+\right)\mathcal{D}(u) \tag{78}$$

Теперь мы можем определить собственные значения и собственные векторы трансфер матрицы Склянина при помощи алгебраического анзаца Бете. С помощью (74), (76), (77), (29), (30), (31) и (10) - (21) легко убедиться, что вектор $w_+$удовлетворяет соотношениям:

$$\mathcal{C}(u)w_+ = 0 \tag{79}$$

$$\mathcal{A}(u)w_+ = \alpha(u)w_+ \tag{80}$$

$$\mathcal{D}(u)w_+ = \delta(u)w_+, \tag{81}$$

где

$$\alpha(u) = \mathrm{sh}\left(u - \frac{\eta}{2} + \xi_-\right)a^N(u)b^N(-u) \tag{82}$$

$$\delta(u) = -\left(\mathrm{sh}\left(u - \frac{\eta}{2} + \xi_-\right)\frac{c(2u)}{b(2u)} + \mathrm{sh}\left(u - \frac{\eta}{2} - \xi_-\right)\right)a^N(-u)b^N(u) + \tag{83}$$

$$+\mathrm{sh}\left(u - \frac{\eta}{2} + \xi_-\right)\frac{c(2u)}{b(2u)}a^N(u)b^N(-u)$$

Выпишем нужные нам коммутационные соотношения, следующие из (60):

$$\mathcal{A}(u)\mathcal{B}(v) = \frac{\mathrm{sh}(u-v-\eta)\mathrm{sh}(u+v-\eta)}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(v)\mathcal{A}(u) + \tag{84}$$

$$+\frac{\mathrm{sh}(\eta)\mathrm{sh}(u+v-\eta)}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(u)\mathcal{A}(v) - \frac{\mathrm{sh}\eta}{\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(u)\mathcal{D}(v)$$

$$\mathcal{D}(u)\mathcal{B}(v) = -\frac{2\mathrm{sh}^2\eta\mathrm{ch}^2\eta}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(v)\mathcal{A}(u) + \tag{85}$$

$$+\frac{\mathrm{sh}(u-v+\eta)\mathrm{sh}(u+v+\eta)}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(v)\mathcal{D}(u) - \frac{\mathrm{sh}(u-v+2\eta)\mathrm{sh}\eta}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(u)\mathcal{A}(v) -$$

$$-\frac{\mathrm{sh}\eta\mathrm{sh}(u+v+\eta)}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(u)\mathcal{D}(v)$$

Перейдем к оператору $\overset{\heartsuit}{\mathcal{D}}(u) = \mathcal{D}(u)\mathrm{sh}2u - \mathcal{A}(u)\mathrm{sh}\eta$. Коммутационные соотношения при этом упрощаются:

$$\mathcal{A}(u)\mathcal{B}(v) = \frac{\mathrm{sh}(u-v-\eta)\mathrm{sh}(u+v-\eta)}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(v)\mathcal{A}(u) + \tag{86}$$

$$+\frac{\mathrm{sh}(\eta)\mathrm{sh}(2v-\eta)}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(2v)}\mathcal{B}(u)\mathcal{A}(v) - \frac{\mathrm{sh}\eta}{\mathrm{sh}(u+v)\mathrm{sh}2v}\mathcal{B}(u)\overset{\heartsuit}{\mathcal{D}}(v)$$

$$\overset{\heartsuit}{\mathcal{D}}(u)\mathcal{B}(v) = \frac{\mathrm{sh}(u-v+\eta)\mathrm{sh}(u+v+\eta)}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(v)\overset{\heartsuit}{\mathcal{D}}(u) + \tag{87}$$

$$+\frac{\mathrm{sh}\eta\mathrm{sh}(2u+\eta)\mathrm{sh}(2v-\eta)}{\mathrm{sh}2v\mathrm{sh}(u+v)}\mathcal{B}(u)\mathcal{A}(v) - \frac{\mathrm{sh}\eta\mathrm{sh}(2u+\eta)}{\mathrm{sh}(u-v)\mathrm{sh}(2v)}\mathcal{B}(u)\overset{\heartsuit}{\mathcal{D}}(v)$$

Трансфер матрица Склянина выражается через эти операторы так:

$$T_S(u) = \frac{\text{sh}(2u+\eta)}{\text{sh}2u}\text{sh}\left(u - \frac{\eta}{2} + \xi_+\right)\mathcal{A}(u) - \frac{1}{\text{sh}2u}\text{sh}\left(u + \frac{\eta}{2} - \xi_+\right)\mathcal{D}(u) \tag{88}$$

Собственные векторы трансфер матрицы будем искать в виде:

$$\Phi = \mathcal{B}(v_1)\dots\mathcal{B}(v_n)w_+ \tag{89}$$

Действуя на этот вектор трансфер матрицей, получим:

$$\begin{aligned} T_S(u)\Phi = \Bigg(&\frac{\text{sh}(2u+\eta)}{\text{sh}2u}\text{sh}\left(u - \frac{\eta}{2} + \xi_+\right)\Delta_+(u)\prod_{m=1}^{N}\frac{\text{sh}(u-v_m-\eta)\text{sh}(u+v_m-\eta)}{\text{sh}(u-v_m)\text{sh}(u+v_m)} - \\ &-\frac{1}{\text{sh}2u}\text{sh}\left(u+\frac{\eta}{2}-\xi_+\right)\Delta_-(u)\prod_{m=1}^{N}\frac{\text{sh}(u-v_m+\eta)\text{sh}(u+v_m+\eta)}{\text{sh}(u-v_m)\text{sh}(u+v_m)}\Bigg)\Phi + \dots \end{aligned} \tag{90}$$

где

$$\Delta_+(u) = \alpha(u), \Delta_-(u) = \delta(u)\text{sh}2\eta - \alpha(u)\text{sh}\eta \tag{91}$$

Уравнения Бете получаем из условия аналитичности собственных значений:

$$-\frac{\text{sh}\left(v_m - \frac{\eta}{2} + \xi_+\right)}{\text{sh}\left(v_m + \frac{\eta}{2} - \xi_+\right)}\frac{\text{sh}(2v_m-\eta)\Delta_+(v_m)}{\Delta_-(v_m)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{N}\frac{\text{sh}(v_m-v_k+\eta)\text{sh}(v_m+v_k+\eta)}{\text{sh}(v_m-v_k-\eta)\text{sh}(v_m+v_k-\eta)} \tag{92}$$

# Список литературы


[1] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Квантовый метод обратной задачи. I , Теоретическая и математическая физика, 40, 2 (1979)

[2] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга, УМН, 34, 5 (1979)

[3] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, Корреляционные функции интегрируемых систем, и квантовый метод обратной задачи, - М.: Наука. 1992.

[4] J. M. Maillet, V. Terras, On the quantum inverse sattering problem, hep-th/9911030 v1, 1999.

[5] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain, math-ph/9807020 v1, 1998.

[6] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field, math-ph/9907019.

[7] Y. S. Wang, The reconstruction of local quantum operators for the boundary XXZ spin-1/2 Heisenberg chain, J. Phys. A: Math. Gen. 33 (2000) 4009.

[8] E. K. Sklyanin, Boundary conditions for integrable quantum systems, J. Phys. A: Math. Gen. 21 (1988) 2375-2389.