Московский Физико-Технический Институт
(Государственный Университет)
Институт Теоретической Физики им. Л.Д.Ландау РАН

Мелкие уровни 2D электрона в магнитном поле

Выпускная квалификационная
работа на степень бакалавра
студента 028 группы Альпищева Ж.Н.

Научный руководитель
к.ф.м.н. Григорьев П.Д.

Черноголовка - 2004

1. Поведение электронов на поверхности жидкого гелия изучается уже почти 30 лет, и обширный анализ возникающих здесь явлений можно найти, например, в монографии [1]. Электроны прижимаются к поверхности потенциалом изображения и электрическим полем. Проникнуть в гелий электроны не могут из-за большой работы входа (порядка 1eV). В результате образуется двумерный электронный газ на поверхности гелия. Потенциальная энергия свободного электрона вблизи поверхности гелия имеет вид:

$$V = eFz - \frac{e^2}{4z}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} + V_0\theta(-z) \ ,$$

где $\theta(-z) = \{0, z > 0 \ ; \ 1, z < 0\}$ и $V_0 \sim 1eV$. Первый член происходит от прижимающего электрического поля (которое включает также поляризационное притяжение электрона к подложке). Второй член вызван поляризационным притяжением к границе гелий-вакуум. Хотя диэлектрическая проницаемость гелия $\varepsilon = 1.057$ близка к единице, поляризационное притяжение является достаточно сильным и удерживает электрон на поверхности даже в отсутствие внешнего электрического поля.

Электрон в таком потенциале имеет водородоподобный спектр $E_n = -R_{He}/n^2$ с эффективной энергией Ридберга $R_{He} = 0.658meV \approx 7.7K$. При достаточно низкой температуре электрон садится на нижний уровень и его движение становиться практически двумерным в плоскости поверхности гелия.

Особенностью двумерного электронного газа на поверхности гелия является его исключительная чистота, поскольку все примеси в жидком гелии вымораживаются - опускаются на дно сосуда благодаря силам электростатического притяжения к подложке и не взаимодействуют с электронами. Имеются два фактора, приводящие к рассеянию электронов: пар гелия и поверхностные волны. Концентрация пара гелия экспоненциально падает с понижением температуры и становиться пренебрежимо малой при $T < 0.5K$. Поэтому при низкой температуре остается только рассеяние на риплонах – квантах поверхностных волн. Таким образом, система поверхностных электронов оказывается достаточно изолированной от окружающей среды. По этой причине она была недавно предложена для реализации квантового компьютера.

Другой важной чертой электронного газа на поверхности гелия, также отличающей данную систему от гетероструктур, является малая концентрация электронов. Последнюю можно менять в широких пределах изменяя прижимающее электрическое поле, однако эту концентрацию нельзя сделать выше некоторой, определяемой устойчивостью заряженной поверхности гелия [2]. Эта критическая концентрация зависит от толщины пленки гелия и меняется от 10^9 электронов на квадратный сантиметр для толстой пленки до 10^{11} для тонкой. Последняя близка к плотности квантового вырождения двумерного электронного газа, при которой начинает играть роль статистика Ферми. Однако дальнейшее повышение электронной плотности и экспериментальное осуществление перехода к вырожденной ферми жидкости представляет значительную сложность. Это обстоятельство ограничивает ряд явлений, которые можно наблюдать в системе поверхностных электронов.

В данной работе рассматривается узкая задача о поведении электронов или более тяжелых заряженных частиц, например, отрицательных ионов, на поверхности жидкого гелия в дополнительном поле магнитных вихрей. Такая истема может быть экспериментально реализована если подложка выполнена из сверхпроводника второго рода, и система помещена во внешнее магнитное поле перпендикулярное поверхности гелия.

Такая система интересна по двум причинам. Во-первых, движение заряженных частиц в такой системе не изучалось достаточно основательно ранее. Здесь надо отметить статью Ааронова и Кэшера [3], где было показано исходя из симметрии уравнения Паули, что если магнитное поле локализовано в конечной области, то двумерный электрон имеет уровень, лежащий точно в нуле ($E = 0$) при массе электрона равной голой массе. Строго говоря, этот результат применим при $\zeta > 1$, где ζ есть число квантов магнитного потока в этой конечной области. В предлагаемой работе рассматривается случай $\zeta = 1/2$, соответствующий магнитному потоку в вихре сверхпроводника. Мы также рассматриваем случай $m \neq m_0$, при котором симметрия уравнения Паули, использованная в [3] нарушается. В работе [4] рассматривалось движение электрона в поле квадратной решетки вихрей. Однако [4] также ипользует симметрию, имеющую место только при $m = m_0$.

Во-вторых, данная система позволяет исследовать распределение поля в вихрях сверхпроводника. Эта идея применительно к гетероструктура высказывалась в работе [5]. В этой же работе проведено экспериментальное изучение поведения электронов в гетероструктуах в поле вихрей. На поверхности гелия такие системы не изучались. Электроны на поверхности гелия обладают рядом особенностей. В отличие от гетероструктур невырождены, так как их энергия Ферми обычно много меньше температуры. Кроме того, концентрация электронов на поверхности гелия меньше чем в гетероструктурах, что позволяет решать задачу в одноэлектронном приближении.

2. В качестве модельного профиля поля выберем т.н. ??соленоид??, т.е. имеется область внутри которой поле постоянно, а снаружи равно нулю. Такой профиль допускает точное решение. Запишем уравнение Шрёдингера для радиальной части волновой функции частицы движущейся в однородном поле (внутренняя обдасть соленоида, далее область 1). Полагаем, $m = 0$, $E = 0$ (это соответствует ситуации когда уровень только-только появился).

$$\frac{\hbar^2}{2M}(R'' + \frac{1}{r}R') + (U_0 - \frac{M\omega_H^2 r^2}{8})R = 0, \tag{1}$$

где $U_0 = \frac{e\hbar}{2m_0 c}H$. А вне соленоида:

$$\frac{\hbar^2}{2M}(R'' + \frac{1}{r}R') - \frac{1}{2M}(\frac{e}{c})^2\frac{\Phi^2}{(2\pi r)^2 R} = 0 \tag{2}$$

Или, если подставить значение магитного потока $\frac{2\pi\hbar c\zeta}{e}$ вместо Φ,

$$\frac{\hbar^2}{2M}(R'' + \frac{1}{r}R') - \frac{\zeta^2}{r^2}R = 0 \tag{3}$$

Здесь ζ есть числов квантов потока проходящих через соленоид.

Ищем решение в виде $R = Ar^s$. Подставляем его в уравнение и получаем

$$s(s-1) + s - \zeta^2 = 0 \rightarrow s = \pm\zeta, R = Ar^{-\zeta}. \tag{4}$$

Для того чтобы функция была конечной везде выбираем знак "-". Решение же уравнения в области 1 можно выразить через так называемую вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$R_{in} = B\exp(-\frac{\xi}{2})F(-(\beta - \frac{1}{2}), 1, \xi), \tag{5}$$

где

$$\xi \equiv r^2 \frac{M\omega_H}{2\hbar} = r^2 \frac{M}{2\hbar}\frac{eH}{Mc},\ \xi(r=a) = \frac{1}{\delta} \tag{6}$$

и

$$\beta = \frac{1}{\hbar\omega_H} U_0 = \frac{1}{\hbar\omega_H}\frac{2\pi\hbar c\zeta}{e\pi a^2}\frac{e\hbar}{2m_0 c} = \frac{m}{2m_0}. \tag{7}$$

Таким образом,

$$R_{in} = B\exp(-\frac{\xi}{2})F(-(\frac{m}{2m_0}-\frac{1}{2}),1,\xi); R_{out} = \frac{A}{r^\zeta} = \frac{A}{\xi^{\frac{\zeta}{2}}}. \tag{8}$$

Приравнивая логарифмические производные волновых функции на границе соленоида $r = a$ получаем

$$\frac{-\frac{1}{2}\exp(-\frac{\xi}{2})F(\alpha,1,\xi) + \alpha\exp(-\frac{\xi}{2})F(1+\alpha,2,\xi)}{\exp(-\frac{\xi}{2})F(\alpha,1,\xi)} = -\frac{\zeta}{2\xi}, \xi = \zeta. \tag{9}$$

(Здесь был использован тот факт что: $F'_\xi(\alpha,1,\xi) = \alpha F((1+\alpha),2,\xi)$). Отсюда имеем

$$-\frac{1}{2} + \frac{\alpha F(1+\alpha,2,\xi)}{F(\alpha,1,\xi)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -(\beta - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow m = m_0. \tag{10}$$

То есть при $m = m_0$ энергия частицы равна нулю, что и следовало ожидать. Однако это верно при любом потоке через соленоид. В статье же Ааронова рассматривается случай $\zeta > 1$, в противном случае волновая функция перестает быть нормируемой и ее исследование вообще говоря затрудняется. Теперь предположим что масса частицы слегка но отличается от нормальной. То есть $\delta m \ll m_0$, тогда предположительно должен появится мелкий уровень. Легче всего найти его в случае полуцелого ζ Известно что в этом случае функция МакДональда являющаяся решением во внешней области может быть выражена через элементарные функции. Наиболее же простой вид имеет функция для $\zeta = 1/2$. Еще одна причина рассматривать этот случай заключается в том, что именно это значение реализуется в конкретной физической задаче о движении в поле Абрикосовского вихря. Итак,

$$R(r) = K_{\frac{1}{2}}(\kappa r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}}\exp(-\kappa r)$$

Сшиваем ее с функцией R_{in} (6)и получаем:

$$-C - \frac{1}{4\xi} = -\frac{1}{2} - \frac{\Delta F(1-\Delta, 2, \xi)}{F(\Delta, 2, \xi)}, \tag{11}$$

Где $C = \sqrt{\frac{4m\varepsilon_0 a^2}{\hbar^2}}$, $\Delta = \frac{\delta m}{2m_0}$, ε_0 есть энергия уровня. Подставляем численное значение вырожденной гипергеометрической функции $F(1, 2, \frac{1}{2}) = 1.27$ и получаем в первом приближении по Δ выражение для мелкого уровня:

$$\varepsilon_0 = 0.1(\frac{\hbar^2}{m_0 a^2})(\frac{\Delta m}{m_0})^2$$

То есть имеем для мелкого уровня квадратичный закон зависимости от Δ. Однако для нахождения характера зависимости можно воспользоваться другими рассуждениями. Предположим что изменение эффективной массы можно рассматривать как возмущение. Опять же следуя обозначениям из статьи Ааронова и Кэшера переписываем гамильтониан невозмущенной системы как($\hbar = c = 2m_0 = 1$):

$$H = (\Pi_x - i\sigma_z \Pi_y)(\Pi_y + i\sigma_z \Pi_y), \tag{12}$$

Здесь

$$\Pi_i = \widehat{p_i} - \frac{e}{c} A_i$$

Затем раскладываем $\frac{1}{2(m+m_0)}$ в ряд Тейлора и ограничиваясь линейным членом получаем возмущающий член в виде $\widehat{V} = \frac{e\hbar}{2m_0 c}\frac{\delta m}{m_0}\widehat{\sigma_z}B$, или в обычных единицах $\widehat{V} = \gamma\widehat{\sigma_z}B, \gamma = \frac{\delta m}{m_0}$. Затем записываем $(\Pi_x - i\sigma_z\Pi_y)$ и $(\Pi_y + i\sigma_z\Pi_y)$ как A^+ и A соответственно. Тогда

$$\widehat{V} = \gamma i\sigma_z[\Pi_y, \Pi_x] = -\frac{\gamma}{2}(AA^+ - A^+A) \tag{13}$$

Очевидно что такой оператор имеет диагональные элементы ($\widehat{H_0} = A^+A$), т.е. поправка к энергии возникает уже в первом порядке теории возмущений, а значит она зависит линейно от $\gamma = \delta m/m_0$. Это кажущееся противоречие объясняется тем что при получении линейной зависимости предполагали что изменение массы может рассматриваться как возмущение. Однако это неверно так как при увеличении массы происходит радикальное изменение волновой функции: она начинает убывать экспоненциально в то время как невозмущенная функция убывала степенным образом, более того, при достаточно малых ζ она как уже упоминалось даже не нормируется. Вместе с тем можно полагать что если у невозмущенной системы не было области где волновая функция убывает степенным образом приведенные рассуждения должны быть верны. И действительно, можно легко проверить что в случае однородного поля все обстоит именно так. В таком случае нужно выяснить как квадратичный закон переходит в линейный при $\zeta \to \infty$. Для этого перепишем заново "уравнение сшивки" но на этот раз для произвольного полуцелого значения ζ. Учитывая известную асимптотику функций МакДональда при малых значениях аргумента $K_n(z) \sim z^{-n}e^{-z}$(экспонентный множитель несингулярен, однако его присутствие необходимо так как именно там "сидит" зависимость от энергии), получаем после простых преобразований

$$F(1+[\frac{\delta m}{m}-\frac{Ema^2}{\hbar^2\zeta}],2,\zeta)\left[\frac{\delta m}{m}-\frac{Ema^2}{\hbar^2\zeta}\right]=\frac{\kappa a}{\zeta} \tag{14}$$

Отсюда видно что пренебрегая линейным по энергии членом (в силу его малости по сравнению с корнем этой же энергии) получаем квадратичный закон. Однако при стремлении $\zeta \to \infty$ гипергеметрическая функция начинает неограниченно расти, а потому существенным становится линейный член. "Точка кроссовера" определяется выражением

$$E=\frac{\hbar^2}{ma^2}\frac{2}{F(1,2,\zeta)} \tag{15}$$

Видно что квадратичная зависимость присутствует при любом конечном ζ, при его увеличении просто уменьшается размер этой области. Можно было бы предположить что у уравнения есть еще одно решение: оно квадратное. В общем случае

$$\kappa a=-\frac{1}{F}\pm\sqrt{\frac{1}{F^2}+2\zeta\frac{\delta m}{m}},F=(1+[\frac{\delta m}{m}-\frac{Ema^2}{\hbar^2\zeta}],2,\zeta) \tag{16}$$

И для энергии

$$E=\frac{1}{f^2}\mp\frac{2}{F}\sqrt{\frac{1}{F^2}+2\zeta\frac{\delta m}{m}}+\frac{1}{F^2}+2\zeta\frac{\delta m}{m} \tag{17}$$

Однако уравнение определяющее энергию такого состояния

$$(\kappa a) = -2\frac{F(1+(\kappa a)^2, 2, \frac{1}{2})}{F((\kappa a)^2, 1, \frac{1}{2})} \tag{18}$$

Не имеет решения для действительных κa. Можно также рассмотреть другой предельный случай когда $m_0 << m_{eff}$. Реализовать его можно если вместо электронов рассматривать отрицательно заряженные ионы [6]. В таком случае задача существенно упрощается. В силу своей тяжести частица будет находится преимущественно на малых расстояниях от сердцевины вихря. Также можно пренебречь всякими "магнитными эффектами", т.е. эффектами связанными с членом с вектор-потенциалом. Зеемановский же член выступает как некоторый потенциал. В таком случае для нахождения уровней можно воспользоваться осцилляторным приближением:

$$E_n = \hbar\sqrt{\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}}(n+1) \tag{19}$$

Таким образом если померить расстояние между уровнями то можно узнать как ведет себя поле в сердцевине вихря. Также можно отметить тот факт, что в силу наличия глубоколежащих уровней должен наблюдаться экспоненцальный закон для транспортных величин типа подвижности ионов как функции температуры, характерный для активационной проводимости.

Модель "прямоугольного вихря" хороша тем что решается точно, однако при $\zeta \gtrsim 1$ уровень зависит от профиля поля. Для движения в магнитном поле есть аналог "мелкой ямы", в том смысле что большую часть времени частица проводит вне ямы, а внутри меняется слабо. Такая ситуация возникает когда ζ мало. Здесь будут приведены некоторые рассуждения на этот счет. Исходить будем из известного тождества

$$< \frac{\partial H}{\partial \lambda} >= \frac{\partial E}{\partial \lambda}$$

В качестве параметра возьмем m_0 (действительно, уменьшение m_0 эквивалентно увеличению m). Дифференцируя Зеемановский член получаем:

$$\frac{dm}{m^2}\frac{e\hbar}{2c}\int B|\psi(r)|^2 d^2r = dE \tag{20}$$

Теперь исходя из того что ψ практически не меняется внутри ямы выносим ее из под знака интегрирования. Оставшийся интеграл теперь есть просто полный поток Ф. Используя асимптотику функции МакДональда

$$\sim \frac{1}{z^n},\ z \to 0; \quad \sim \sqrt{\frac{1}{z}} e^{-z},\ z \to \infty$$

находим отнормированное выражение для $|\psi|^2$

$$|\psi|^2 \approx \frac{\frac{1}{(\kappa a)^2\zeta}}{\frac{1}{(\kappa a)^2}} \tag{21}$$

Тогда

$$\frac{e\hbar^2}{2\hbar c a^2} \frac{dm}{m^2} (\kappa a)^{2-2\zeta} \Phi = dE \tag{22}$$

Раскрыв κ получим

$$\frac{dE}{E^{1-\zeta}} = \frac{\pi \hbar^2 \zeta}{a^2} \frac{dm}{m^{1+\zeta}} \left(\frac{2a^2}{\hbar}\right)^{1-\zeta} \tag{23}$$

Интегрируем это уравнение и получаем

$$E^{\zeta} = \zeta^2 \frac{\hbar^{2\zeta}}{a^{2\zeta}} \left(\frac{\Delta m}{m^{1+\zeta}}\right) \tag{24}$$

или

$$E = \frac{\hbar^2}{m a^2} \zeta^{\frac{2}{\zeta}} \left(\frac{\Delta m}{m_0}\right)^{\frac{1}{\zeta}} \tag{25}$$

При $\zeta \to 0,\ E \to 0$, т.е. на этом уровне проблем не возникает. При $\zeta = \frac{1}{2}$ мы обратно получаем квадратичную зависимость. Вообще говоря все что было полученно выше было полученно для полуцелых ζ. А потому неисключено что при иных значениях ζ, в частности при малых значениях, такая зависимость действительно имеет место.

В данной работе исследовалось поведении заряженных частиц на поверхности жидкого гелия в дополнительном поле магнитных вихрей. Такая истема может быть экспериментально реализована если подложка выполнена из сверхпроводника второго рода, и система помещена во внешнее магнитное поле перпендикулярное поверхности гелия.

Список литературы

[1] В.Б. Шикин, Ю.П. Монарха Двумерные заряженные системы в гелии, "Наука", Москва (1989).

[2] Л.П. Горьков, Д.М. Черникова. Письма в ЖЭТФ **18** (2), 119 (1973).

[3] Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. A 19, 2461-2462 (1979)

[4] Дубровин, С.П.Новиков, ЖЭТФ 79, 1006 (1980)

[5] S. J. Bending, K. v. Klitzing, and K. Ploog, Phys. Rev. B 42, 9859 (1990)

[6] P. D. Grigor'ev and A. M. Dyugaev, JETP **88**, 325 (1999) [ЖЭТФ **115**, 593 (1999)].