

Московский Физико-Технический Институт
(Государственный Университет)
Факультет Общей и Прикладной Физики
Кафедра проблем теоретической физики
Институт Теоретической Физики им. Л.Д.Ландау РАН

Модель димеров на анизотропной треугольной
решетке

Выпускная квалификационная
работа на степень бакалавра
студента 028 группы Нестерова К.Н.

Научный руководитель
кфмн Иоселевич А.С.

Черноголовка - 2004

Содержание

1	Введение	2
2	Спектр вспомогательных фермионов	3
2.1	Метод решения	3
2.2	Общий вид спектра	4
2.3	Характер спектра при $x = 1, y = 1, 0 < z < 1$	5
3	Корреляционная длина	5
4	Расщепление между топологическими секторами на торе	6
4.1	Введение	6
4.2	Вычисление $f(\mathbf{R})$	7
4.3	Вычисление Δ	9
5	Связь классической и квантовой моделей димеров	11
6	Заключение	14

1 Введение

Некоторые задачи статистической физики (например, модель Изинга) сводятся к так называемой классической модели димеров. Рассмотрим граф, состоящий из узлов и связей между ними. По определению, димер - это объект, занимающий два узла, соединенные связью. Таким образом, на имеющийся граф (решетку) можно поместить некоторое количество таких объектов (какие-то связи и узлы могут оставаться свободными). В дальнейшем будем рассматривать конфигурации, в которых каждый узел занят ровно одним димером. Для возможности такого рассмотрения минимум необходимо, чтобы общее количество узлов в графе было четным. Пусть все димеры разбиты на несколько классов C_1, C_2, \dots, C_n (например, занимающие горизонтальные и вертикальные связи для случая квадратной решетки), причем димеры из разных классов имеют разные веса x_1, x_2, \dots, x_n соответственно, тогда можно ввести понятие стат суммы, поставив в соответствие каждой конфигурации L ее вес $x_1^{g_1(L)} x_2^{g_2(L)} \dots x_n^{g_n(L)}$, где $g_i(L)$ - число димеров из класса C_i в конфигурации L . Таким образом, получаем, что стат сумма определяется как

$$Z = \sum_L x_1^{g_1(L)} x_2^{g_2(L)} \dots x_n^{g_n(L)} \quad (1)$$

Кастелейном [1] показано, что при некоторых условиях эта стат сумма может быть вычислена при помощи пфаффианов.

Кроме вычисления стат суммы, в классической модели димеров может также возникнуть необходимость вычисления средних значений. Например, вероятность того, что на данной связи s находится димер определяется как отношение части суммы (1), в которой сумма берется только по конфигурациям, имеющим димер на рассматриваемой связи s , ко всей стат сумме. Аналогично определяются вероятности того, что на нескольких связях находятся димеры. Подобные задачи удобно решать при помощи метода, предложенного Самюэлем [2], который предложил квантополевою аналогию модели димеров, вводя на каждом узле по вспомогательному майорановскому фермиону. В результате, например, можно использовать такие средства, как теорема Вика, что очень облегчает решение некоторых задач. Например, вычисление описанных выше вероятностей нахождения димеров на связях сводится к вычислению многоточечного коррелятора ферми-операторов, который распадается на сумму произведений двухточечных.

Для описания свойств спиновой жидкости резонансных валентных связей Роксаром и Кивелсоном была предложена квантовая модель димеров [3]. Базис гильбертова пространства этой модели - это всевозможные классические конфигурации димеров. В простейшем случае модельный гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{\square} [-t(|\Rightarrow\rangle\langle\parallel| + |\parallel\rangle\langle=|) + v(|\Rightarrow\rangle\langle=| + |\parallel\rangle\langle\parallel|)], \quad (2)$$

где сумма берется по всем элементарным четырехугольникам. Известно, что при $v = t$ (в точке Роксара-Кивелсона) основное состояние (2) для треугольной и квадратной решеток является суперпозицией всех базисных векторов (т.е. всех конфигураций), взятых с одинаковыми амплитудами. В этой точке усреднение по основному состоянию эквивалентно усреднению по всем классическим конфигурациям для случая изотропной решетки (т.е. все веса в (1) равны единице). Исследование свойств основного состояния (2) для случая треугольной решетки было проведено в [4].

В данной работе исследуется анизотропная треугольная решетка, которая получается из квадратной добавлением диагональных связей. При этом димеры в трех разных направлениях имеют разные веса (x, y - в направлении сторон квадратов, z - в направлении диагонали). В разделе 2 исследуется спектр вспомогательных майорановских фермионов, в разделе 3 - их корреляционная длина для случая $x = y = 1, z \ll 1$, в разделе 4 - расщепление между топологическими секторами на торе для аналогичного случая, в разделе 5 предложен вид гамильтониана, соответствующий анизотропному случаю. Случай классической модели на анизотропной треугольной решетке рассматривался в [5], но там не обсуждался вопрос о расщеплении между топологическими секторами и о соответствующем квантовом случае.

2 Спектр вспомогательных фермионов

2.1 Метод решения

Рассмотрим треугольную решетку димеров, получающуюся из квадратной добавлением диагональных связей. Пусть x, y - веса димеров, лежащих на сторонах квадратов, а z - вес диагональных

димеров. Как показано в [1], стат сумму можно выразить через пфаффиан некой антисимметричной матрицы, т.е. $Z = Pfaff(A_{ij})$ (i, j обозначают номера узлов на решетке), удовлетворяющей следующим свойствам: 1) $A_{ij} = 0$, если между узлами i и j отсутствует связь, 2) $|A_{ij}|$ равно весу соответствующего направления (т.е. x, y, z), если связь присутствует, 3) $A_{ij} = -A_{ji}$, 4) $\prod A_{ij} = -1$ при обходе вокруг любого элементарного четырехугольника. Для рассматриваемого случая выбор знаков A_{ij} показан на рис.1. Спектр вспомогательных майорановских фермионов совпадает со спектром матрицы A_{ij} , который находится после фурье-преобразования.

2.2 Общий вид спектра

Пусть (x_i, y_i) - координаты узла i (обычные декартовы координаты с единицей длины равной стороне квадрата). Как видно из рис.1, элементарная ячейка решетки удвоилась. Поэтому собственные вектора матрицы $A_{ij} = A(x_i, y_i; x_j, y_j)$ $\psi = (\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n)^T = (\psi(x_i, y_i))$ разумно искать в виде

$$\psi(x_j, y_j) = \psi_1 e^{i(k_x x_j + k_y y_j)} \text{ для нечетных } x_j,$$

$$\psi(x_j, y_j) = \psi_2 e^{i(k_x x_j + k_y y_j)} \text{ для четных } x_j,$$

где ψ_1, ψ_2 зависят только от волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$. В результате уравнение на

собственные значения $A\psi = E\psi$ приобретает вид $A(\mathbf{k})\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}$, где $\tilde{\psi} = (\psi_1 \psi_2)^T$, а

$$A(\mathbf{k}) = 2i \begin{pmatrix} -y \sin k_y & x \sin k_x - iz \cos(k_x - k_y) \\ x \sin k_x + iz \cos(k_x - k_y) & y \sin k_y \end{pmatrix} \quad (3)$$

Получаем, что собственные значения появляются парами $E = \pm iE(\mathbf{k})$, где

$$E(\mathbf{k}) = 2\sqrt{x^2 \sin^2 k_x + y^2 \sin^2 k_y + z^2 \cos^2(k_x - k_y)} \quad (4)$$

Или в более симметричном виде (со сдвинутым центром зоны Бриллюэна):

$$E(\mathbf{k}) = 2\sqrt{x^2 \cos^2 k_x + y^2 \cos^2 k_y + z^2 \cos^2 k_z}, \quad (5)$$

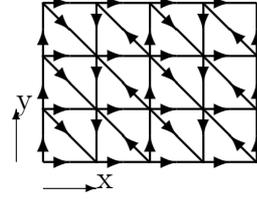


Рис. 1: Выбор знаков A_{ij} . $A_{ij} > 0$, если стрелка указывает от i к j .

где $k_x + k_y + k_z = 0$. Легко заметить, что при любых x, y, z , отличных от нуля, щель в спектре имеется. Пропадает она только если какой-то из весов зануляется, т.е. решетка становится квадратной или "ромбовидной". Это согласуется с характером спада корреляций на больших расстояниях. Полученный результат совпадает с результатом, полученным в [5].

2.3 Характер спектра при $x = 1, y = 1, 0 < z < 1$

Рассмотрим подробнее переход от квадратной к треугольной решетке. Этот переход осуществляется путем добавления к изотропной квадратной решетке ($x = y = 1$) диагональных связей и увеличения их веса от $z = 0$ до $z = 1$. Пусть $E(\mathbf{k}) = 2\sqrt{D(\mathbf{k})}$. Переходя к другим переменным, получаем

$$D(\mathbf{k}) = 1 + \sin k \sin 2q + z^2 \sin^2 k$$

Исследуя полученное выражение на минимум, получаем, что при $0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\min D(k, q) = z^2$, а при $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq 1$ $\min D(k, q) = 1 - 1/4z^2$. Получаем, что в спектре имеется щель, причем ее величина равна

$$d(z) = 2z \quad \text{при } 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$d(z) = \sqrt{4 - \frac{1}{z^2}} \quad \text{при } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq 1 \quad f(z) = 1 - 1/4z^2$$

Заметим, что щель с ростом z монотонно растет, причем от 0 до $1/\sqrt{2}$ зависимость линейная. Кроме того, можно показать, что при $0 < z < 1/\sqrt{2}$ минимум в спектре достигается в одних и тех же точках (не зависит от z). При малых z минимум в спектре достигается в четырех точках в зоне Бриллюэна: при $k_x, k_y = 0, \pi$. При этом, например, вблизи минимума $k_x = k_y = 0$ спектр имеет вид

$$E(\mathbf{k}) = 2\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + z^2} \tag{6}$$

3 Корреляционная длина

Корреляционную длину можно найти, воспользовавшись методом, указанным в [4]. В направлении, задаваемом единичным вектором \mathbf{k} ,

корреляционная длина определяется выражением $\xi_{\mathbf{n}}^{-1} = -\text{Re}(i\mathbf{k}_{\mathbf{n}}\mathbf{n})$, где вектор $\mathbf{k}_{\mathbf{n}}$ определяется из уравнений $E(\mathbf{k}_{\mathbf{n}}) = 0$ и $\nabla E(\mathbf{k}_{\mathbf{n}}) \parallel \mathbf{n}$. Получившийся результат для случая $z \ll 1$ в приближении того, что спектр имеет вид (6):

$$\xi = \frac{1}{z}, \quad (7)$$

т.е. в этом приближении корреляционная длина не зависит от направления. Также выражение для корреляционной длины следует из результатов, полученных в следующем разделе.

Получившийся результат означает, что корреляции в системе дальнедействующие (корреляционная длина много больше расстояния между соседними узлами). Этот вывод легко объясняется тем, что рассматриваемый случай ($x = 1, y = 1, z \ll 1$) соответствует квадратной решетке, возмущенной диагональными связями, а на квадратной решетке корреляции спадают степенным образом [6] (не экспоненциально), т.к. щель в спектре отсутствует. При малых же z было получено, что величина щели мала, что соответствует большой корреляционной длине.

4 Расщепление между топологическими секторами на торе

4.1 Введение

Топологические сектора на торе можно определить, задавая периодические или антипериодические условия на границах [4], при этом будут квантоваться обе проекции волнового вектора \mathbf{k} . Для получившихся четырех секторов получаются соответствующие стат суммы $Z_{++}, Z_{+-}, Z_{-+}, Z_{--}$, где плюс обозначает периодические условия на одной из границ, а минус - антипериодические. В этом разделе будет рассмотрено расщепление между двумя из них и исследована его зависимость от размеров системы.

Рассмотрим расщепление между статистическими суммами Z_{++} и Z_{+-} . Как показано в [4], эта величина равна

$$\Delta = \frac{Z_{++} - Z_{+-}}{Z} = \sum_{\mathbf{R}} f(\mathbf{R}), \quad (8)$$

где $f(\mathbf{R})$ - фурье-преобразование $\ln E(\mathbf{k})$ и сумма берется по всем таким $\mathbf{R} = (R_x, R_y)$, что

$$R_x = nL_x, R_y = (2m + 1)L_y, \quad (9)$$

где n, m - целые числа, а L_x, L_y - размеры тора (выраженные в количествах узлов в двух направлениях по поверхности тора).

4.2 Вычисление $f(\mathbf{R})$

$$f(\mathbf{R}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \ln(E(\mathbf{k})) e^{ik_x R_x} e^{ik_y R_y} \quad (10)$$

Поскольку при целых R_x, R_y (а только такие и рассматриваются) из (4) следует $E(k_x + \pi, k_y) = E(k_x, k_y)$, а $e^{i(k_x + \pi)R_x} = (-1)^{R_x} e^{ik_x R_x}$, то получается, что $f(\mathbf{R}) = 0$ для нечетных R_x . Аналогичное утверждение получается и для R_y . Т.е. из (8) (9) следует, что $\Delta = 0$ для нечетных L_y , а при нечетных L_x в сумме (8) пропадают члены с $R_x = (2k + 1)L_x$. Итак, рассматривая в дальнейшем только случай с четными R_x, R_y , получаем интеграл по четверти зоны Бриллюэна

$$f(\mathbf{R}) = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \ln(E(\mathbf{k})) e^{ik_x R_x + ik_y R_y} \quad (11)$$

Полученное выражение легче вычислять, т.к. в области интегрирования находится только один минимум функции $E(\mathbf{k})$, т.е. ее можно разложить в ряд вблизи него. Легко видеть, что это выражение не зависит от знаков R_x и R_y , т.е. при дальнейших вычислениях можно считать $R_x \geq 0, R_y > 0$. Так как из (9) $R_y \neq 0$, то $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \neq 0$ (также считаем $R \gg 1$, для этого необходимо условие $L_y \gg 1$). Если $E(\mathbf{k}) = 2\sqrt{D(\mathbf{k})}$, то

$$f(\mathbf{R}) = 4 \int (2 + 1/2 \ln D(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} = 2 \int \ln D(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}$$

После интегрирования по частям по dk_y из π -периодичности подинтегрального выражения получаем с учетом (4):

$$f(\mathbf{R}) = -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \frac{2 \sin 2k_y - 2z^2 \sin 2(k_y - k_x)}{iR_y D(k_x, k_y)} e^{ik_x R_x + ik_y R_y}$$

Т.к. значение знаменателя в минимуме $\sim z$ много меньше значения в максимуме ~ 1 , а экспонента быстро осциллирует, то основной вклад в интеграл дает окрестность этого минимума, т.е. подинтегральное выражение (кроме экспоненциальной части!) можно разложить вблизи него и заменить пределы интегрирования на бесконечные:

$$f(\mathbf{R}) = -8 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \frac{k_y}{iR_y(k_x^2 + k_y^2 + z^2)} e^{ik_x R_x + ik_y R_y} \quad (12)$$

Пусть $\mathbf{R} = (R \cos \varphi, R \sin \varphi)$. Повернем систему координат:

$$\begin{aligned} u &= k_x \cos \varphi + k_y \sin \varphi, \\ v &= -k_x \sin \varphi + k_y \cos \varphi. \end{aligned}$$

После чего получим, что

$$f(\mathbf{R}) = -8 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dudv}{(2\pi)^2} \frac{u \sin \varphi - v \cos \varphi}{iR_y(u^2 + v^2 + z^2)} e^{iuR}$$

В получившемся выражении часть интеграла с v в числителе в силу нечетности функции равна нулю. С учетом того, что $R_y = R \sin \varphi$, получаем

$$f(\mathbf{R}) = -8 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dudv}{(2\pi)^2} \frac{ue^{iuR}}{iR(u^2 + v^2 + z^2)} \quad (13)$$

При интегрировании по u замыкаем контур в верхней полуплоскости, в которой находится один полюс $u_0 = i\sqrt{v^2 + z^2}$. Получаем

$$\begin{aligned} f(\mathbf{R}) &= -8 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{2\pi} \frac{u_0 e^{iu_0 R}}{2u_0 R} = -4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{2\pi} \frac{e^{-R\sqrt{v^2+z^2}}}{R} = \\ &= -\frac{8}{2\pi R^2} \int_0^{+\infty} dx e^{-\sqrt{x^2+(Rz)^2}} = -\frac{8}{2\pi R^2} g(Rz), \end{aligned} \quad (14)$$

$$g(a) = \int_0^{+\infty} dx e^{-\sqrt{x^2+a^2}} \quad (15)$$

Получается, что в сделанном приближении (когда значение спектра раскладывали вблизи минимума) функция $f(\mathbf{R})$ не зависит от направления. При $a \gg 1$ интеграл в (15), в основном, набирается при $x \ll a$ и подынтегральное выражение можно разложить:

$$g(a) \approx \int_0^{+\infty} dx \exp\left(-a - \frac{x^2}{2a}\right) = \sqrt{\frac{a\pi}{2}} e^{-a} \quad (16)$$

В другом предельном случае (при $a \ll 1$) имеем

$$g(a) = \left(\int_0^a + \int_a^{+\infty}\right) e^{-\sqrt{x^2+a^2}} dx \sim \int_0^a e^{-a} dx + \int_a^{+\infty} e^{-x} dx = (1+a)e^{-a} \quad (17)$$

Вычисление интеграла (15) численно (при помощи Maple) показывает, что с хорошей точностью формула (16) справедлива при $a > 5$, а (17) - при $a < 0.5$. При $a \approx 1$ обе формулы дают ошибку порядка 25%. Поскольку в данной задаче высокая точность не является необходимой (важен характер зависимости расщепления от некоторых параметров, но не его точное значение), то можно считать, что при $a < 1$ справедливо (17), а при $a > 1$ - (16). Таким образом, получаются выражения для $f(\mathbf{R})$:

$$\text{при } Rz < 1 \quad f(\mathbf{R}) \approx -\frac{4z^2(1+Rz)}{\pi(Rz)^2} e^{-Rz} \quad (18)$$

$$\text{при } Rz > 1 \quad f(\mathbf{R}) \approx -\frac{4z^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-Rz}}{(Rz)^{3/2}} \quad (19)$$

4.3 Вычисление Δ

При $zL_x, zL_y \gg 1$ в сумме (8) "выживает" один член (точнее, два - $R_y = \pm L_y$), поэтому получаем из (19):

$$\Delta \approx -\frac{8z^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-L_y z}}{(L_y z)^{3/2}} \propto \sqrt{z} \frac{e^{-L_y z}}{L_y} \quad (20)$$

При $L_x z \gg 1 \gg L_y z$ получаем, что при суммировании по R_x "выживает" член с $R_x = 0$, поэтому

$$\Delta \approx \sum_m f(0, (2m+1)L_y) \approx \int \frac{dR}{2L_y} f(R) \approx \int_{L_y}^{+\infty} \frac{dR}{L_y} f(R)$$

Интеграл "обрезан" снизу на минимальном значении аргумента в сумме. Далее получаем из (18)

$$\Delta \approx -4z^2 \int_{L_y}^{+\infty} \frac{e^{-Rz}}{(Rz)^2} \frac{dR}{L_y} = -\frac{4z}{L_y} \int_{L_y z}^{+\infty} \frac{e^{-a}}{a^2} da = -\frac{4z}{L_y} \left(\frac{e^{-L_y z}}{L_y z} - \int_{L_y z}^{+\infty} \frac{e^{-a}}{a} da \right)$$

В последнем интеграле, получившемся после интегрирования по частям, расходямость снизу логарифмическая. Пренебрегая ей по сравнению со степенной (т.е. учитывая только первое слагаемое), получаем:

$$\Delta \sim -\frac{e^{-L_y z}}{L_y^2} \quad (21)$$

В случае $L_y z \gg 1 \gg L_x z$ почти ничего нового по сравнению с первым ($zL_x, zL_y \gg 1$) не появляется (случай аналогичен именно первому, а не предыдущему, т.к. точка $R_y = 0$ в сумме не рассматривается), кроме того, что ответ зависит от четности L_x . Как было сказано выше, вычисление $f(\mathbf{R})$ проводилось для четных R_x, R_y , а при нечетных $f(\mathbf{R}) = 0$, т.е. в случае нечетного L_x в сумме просто пропадает половина слагаемых и ответ нужно разделить на 2.

Рассмотрим случай $L_x z, L_y z \ll 1$. В этом случае по обоим координатам суммирование заменяется на интегрирование. Для четного L_x

$$\Delta \approx \int \int \frac{dR_x}{L_x} \frac{dR_y}{2L_y} f(R_x, R_y)$$

В силу того, что f зависит только от модуля R , удобно перейти к интегрированию по R , при этом интеграл следует обрезать снизу на $R = \min(\sqrt{(nL_x)^2 + ((2m+1)L_y)^2}) = L_y$. Получается

$$\Delta \approx \int_{L_y}^{+\infty} \frac{2\pi R dR}{2L_x L_y} f(R) \approx -\frac{4}{L_x L_y} \int_{zL_y}^{+\infty} \frac{e^{-a}}{a} da \sim \frac{1}{L_x L_y} e^{-zL_y} \ln(zL_y) \quad (22)$$

Основным выводом этого раздела является то, что как и для изотропного случая [4], рассматриваемое расщепление экспоненциально падает с ростом размеров системы, только в связи с большой корреляционной длиной скорость этого падения существенно ниже.

5 Связь классической и квантовой моделей димеров

Для гамильтониана (2) основное состояние при $t = v$ является суперпозицией всех конфигураций с одинаковыми амплитудами и имеет собственное значение ноль, поэтому усреднение по основному состоянию эквивалентно классическому усреднению по всем конфигурациям, взятым с одинаковыми весами. В рассматриваемом анизотропном случае при усреднении произвольную конфигурацию C следует брать с весом $x^{\alpha(C)}y^{\beta(C)}z^{\gamma(C)}$, где $\alpha(C), \beta(C), \gamma(C)$ - количества димеров в конфигурации C , лежащих в соответствующих направлениях с весами x, y, z , поэтому логично рассматривать, что в таком случае усреднение должно проходить по состоянию

$$|ground\rangle = \sum_C x^{\frac{\alpha(C)}{2}} y^{\frac{\beta(C)}{2}} z^{\frac{\gamma(C)}{2}} |C\rangle \quad (23)$$

Таким образом, необходимо сконструировать гамильтониан, в котором (23) будет являться основным состоянием, причем по аналогии с (2) иметь собственное значение ноль.

Будем искать такой гамильтониан в виде, отличающимся от (2) некоторыми коэффициентами:

$$H = \sum_{\square} [-a_{\square} | \Rightarrow \rangle \langle \parallel | - b_{\square} | \parallel \rangle \langle = | + c_{\square} | \Rightarrow \rangle \langle = | + d_{\square} | \parallel \rangle \langle \parallel |] \quad (24)$$

Здесь коэффициенты $a_{\square}, b_{\square}, c_{\square}, d_{\square}$ зависят от элементарного четырехугольника \square . Представим (24) в виде $H = \sum_{\square} H_{\square}$ и потребуем более сильное условие:

$$H_{\square} |ground\rangle = 0 \quad (25)$$

Рассмотрим произвольный четырехугольник \square . Пусть для определенности он является квадратом (см. рис.1), т.е. димеры на его сторонах имеют веса x, y . Все конфигурации можно разделить на 3 класса: 1)имеющие в \square пару горизонтальных димеров, 2)имеющие в \square пару вертикальных димеров, 3)не имеющие в \square пары параллельных димеров. Соответственно этому

$$|ground\rangle = \left(\sum^{(1)} + \sum^{(2)} + \sum^{(3)} \right) x^{\frac{\alpha(C)}{2}} y^{\frac{\beta(C)}{2}} z^{\frac{\gamma(C)}{2}} |C\rangle$$

Поскольку все конфигурации из третьей суммы не имеют в \square параллельных димеров, то из (24) следует, что $H_{\square} \sum^{(3)} = 0$. Между конфигурациями в $\sum^{(1)}$ и $\sum^{(2)}$ можно установить взаимнооднозначное соответствие следующим образом: $|C_1\rangle$ из $\sum^{(1)}$ соответствует $|C_2\rangle$ из $\sum^{(2)}$, отличающейся от $|C_1\rangle$ только положением димеров в рассматриваемом четырехугольнике \square (т.е. $|C_1\rangle$ имеет в нем пару горизонтальных димеров, а $|C_2\rangle$ - пару вертикальных). Т.е.

$$\alpha(C_1) = \alpha(C_2) + 2, \beta(C_1) = \beta(C_2) - 2, \gamma(C_1) = \gamma(C_2), \quad (26)$$

$$|\parallel\rangle\langle = ||C_1\rangle = |C_2\rangle, |=\rangle\langle\parallel ||C_2\rangle = |C_1\rangle \quad (27)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} H_{\square} \left(\sum^{(1)} + \sum^{(2)} + \sum^{(3)} \right) &= H_{\square} \left(\sum^{(1)} + \sum^{(2)} \right) = \\ &= \sum_{\{|C_1\rangle, |C_2\rangle\}} H_{\square} \left[x^{\frac{\alpha(C_1)}{2}} y^{\frac{\beta(C_1)}{2}} z^{\frac{\gamma(C_1)}{2}} |C_1\rangle + x^{\frac{\alpha(C_2)}{2}} y^{\frac{\beta(C_2)}{2}} z^{\frac{\gamma(C_2)}{2}} |C_2\rangle \right] \end{aligned}$$

Далее потребуем, чтобы для любой пары состояний $\{|C_1\rangle, |C_2\rangle\}$ выражение под знаком суммы было равно нулю. Из (26) и (27) следует, что

$$\begin{aligned} &H_{\square} \left[x^{\frac{\alpha(C_1)}{2}} y^{\frac{\beta(C_1)}{2}} z^{\frac{\gamma(C_1)}{2}} |C_1\rangle + x^{\frac{\alpha(C_2)}{2}} y^{\frac{\beta(C_2)}{2}} z^{\frac{\gamma(C_2)}{2}} |C_2\rangle \right] = \\ &= x^{\frac{\alpha(C_1)}{2}} y^{\frac{\beta(C_1)}{2}} z^{\frac{\gamma(C_1)}{2}} \left[-a_{\square} |=\rangle\langle\parallel | - b_{\square} |\parallel\rangle\langle = | + c_{\square} |=\rangle\langle = | + d_{\square} |\parallel\rangle\langle\parallel | \right] (|C_1\rangle + \frac{y}{x} |C_2\rangle) = \\ &= x^{\frac{\alpha(C_1)}{2}} y^{\frac{\beta(C_1)}{2}} z^{\frac{\gamma(C_1)}{2}} \left((c - a \frac{y}{x}) |C_1\rangle + (d \frac{y}{x} - b) |C_2\rangle \right) \end{aligned}$$

Требуемое будет достигнуто при условиях

$$ay = cx, bx = dy \quad (28)$$

Аналогично рассматривая четырехугольники других видов (имеющие стороны, параллельные диагоналям квадратной решетки), получаем для них похожие соотношения.

Таким образом можно построить (24), у которого будет собственное состояние (23) с нулевой энергией. Но этого не достаточно. Требуется, чтобы это состояние было основным. Таким образом, нужно найти условие, при котором (23) будет основным состоянием (24).

Рассмотрим произвольное состояние $|\psi\rangle = \sum_C \lambda_C |C\rangle$ и будем искать соотношение между коэффициентами в H такое, чтобы при любом $|\psi\rangle$ было справедливо $\langle\psi|H|\psi\rangle \geq 0$, тогда получим, что все собственные значения неотрицательны, т.е. состояние с собственным значением, равным нулю - основное. При этом будем принимать во внимание уже найденные соотношения (28). Рассмотрим более сильное условие - чтобы для любого четырехугольника \square выполнялось $\langle\psi|H_\square|\psi\rangle \geq 0$ ($H = \sum_\square H_\square$). Как и при получении условий (28), разделим все состояния $|c\rangle$ на три группы (две имеющих параллельные димеры в четырехугольнички и одну не имеющую), затем выделим пары $\{|C_1\rangle, |C_2\rangle\}$, отличающиеся перестановкой димеров только в рассматриваемом четырехугольнике. Поскольку H_\square перемешивает только такие пары состояний, то в результате получим:

$$\langle\psi|H_\square|\psi\rangle = \sum_{\{|C_1\rangle, |C_2\rangle\}} (\lambda_{C_1}^* \langle C_1| + \lambda_{C_2}^* \langle C_2|) H_\square (\lambda_{C_1} |C_1\rangle + \lambda_{C_2} |C_2\rangle).$$

С учетом (27):

$$\langle\psi|H_\square|\psi\rangle = \sum_{\{|C_1\rangle, |C_2\rangle\}} (\lambda_{C_1}^* \langle C_1| + \lambda_{C_2}^* \langle C_2|) ((c\lambda_{C_1} - a\lambda_{C_2})|C_1\rangle + (d\lambda_{C_2} - b\lambda_{C_1})|C_2\rangle)$$

С учетом (28):

$$\langle\psi|H_\square|\psi\rangle = \sum_{\{|C_1\rangle, |C_2\rangle\}} (\lambda_{C_1}^* a - \lambda_{C_2}^* d) \left(\frac{y}{x} \lambda_{C_1} - \lambda_{C_2}\right)$$

Замечаем, что при условии

$$\frac{a}{d} = \frac{y}{x} \tag{29}$$

получаем требуемое:

$$\langle\psi|H_\square|\psi\rangle = \sum_{\{|C_1\rangle, |C_2\rangle\}} d \left|\frac{y}{x} \lambda_{C_1} - \lambda_{C_2}\right|^2 \geq 0 \tag{30}$$

Получаем, что условия (28) и (30) являются достаточными для того, чтобы (23) было основным состоянием (24) (если выписать также аналогичные условия для четырехугольников других типов). В результате можно в качестве искомого гамильтониана взять (если обозначить в качестве \square_1 квадраты со сторонами, параллельными осям x

и y , \square_2 - ромбы с одной стороной, параллельной оси x , другой - диагонали квадратов, \square_3 - ромбы с одной стороной, параллельной оси y , другой - диагонали квадратов)

$$\begin{aligned}
H = & \sum_{\square_1} [-xy(|\rightarrow\rangle\langle\leftarrow| + |\leftarrow\rangle\langle\rightarrow|) + y^2|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| + x^2|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|] + \\
& + \sum_{\square_2} [-xz(|\rightarrow\rangle\langle\searrow| + |\searrow\rangle\langle\rightarrow|) + z^2|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| + x^2|\searrow\rangle\langle\searrow|] + \\
& + \sum_{\square_3} [-yz(|\leftarrow\rangle\langle\searrow| + |\searrow\rangle\langle\leftarrow|) + z^2|\leftarrow\rangle\langle\leftarrow| + y^2|\searrow\rangle\langle\searrow|] \quad (31)
\end{aligned}$$

6 Заключение

В результате проделанной работы получен вид спектра вспомогательных майорановских фермионов для случая анизотропной треугольной решетки, в котором присутствует щель. Ее величина растет от нуля при переходе от квадратной к изотропной треугольной решетке путем добавления диагональных связей и увеличения их веса от нуля до единицы. При малом весе диагональных связей (когда они действуют как возмущение для квадратной решетки) величина щели линейна по величине этого веса. Для последнего случая получено, что корреляции становятся дальнедействующими с корреляционной длиной, много большей расстояния между соседними узлами. Для этого же случая рассмотрено расщепление между стат суммами на разных топологических секторах на торе, которое экспоненциально мало с размером системы. В конце предложен гамильтониан для квантовой модели, соответствующий рассматриваемому анизотропному случаю.

Список литературы

- [1] P.W. Kasteleyn, J. Math. Phys. **4**, 287(1963)
- [2] S.Samuel, J. Math. Phys. **21**, 2806(1980)
- [3] D.S. Rokhsar and S.A. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **61**, 2376 (1988)
- [4] A.S. Ioselevich, D.A. Ivanov, M.V. Feigelman, cond-mat/0206451
- [5] P. Fendley, R. Moessner, S.L. Sondhi, cond-mat/0206159
- [6] M.E.Fisher and J.Stephenson. Phys. Rev. **132**, 1411 (1963)