

Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Факультет Общей и Прикладной Физики
Кафедра проблемы теоретической физики
Институт теоретической физики им Л. Д. Ландау РАН

Дробный заряд в SINIS структуре

выпускная квалификационная
работа на степень бакалавра
студента 128 группы Садовского И. А.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Лесовик Г. Б.

Черноголовка - 2005

Оглавление

1	Введение	2
1.1	Постановка задачи	2
2	SINIS контакт	4
2.1	Установка	4
2.2	NININ переходы и резонансы	4
2.3	SINIS переходы и уравнения Боголюбова-де Женна	7
2.4	Заряд квазичастиц	9
2.5	Дебаевское экранирование	9
2.6	Самосогласованная задача	12
2.7	Транспорт в SINIS структуре	13
2.8	Время релаксации	13
2.9	Измерение зарядов	17
A	Приложение	18
A.1	Решение уравнений Боголюбова-де Женна	18
A.2	Вычисление времени перехода	20

Глава 1

Введение

1.1 Постановка задачи

В некоторых сверхпроводящих электронных переходах небольшого размера достигается квантование кондактанса в единицах $2e/h$ и квантование критического тока в единицах $e\Delta/\hbar$. В таких структурах кондактанс напрямую зависит от числа проводящих каналов. Как пример такой структуры можно привести SIS контакт (сверхпроводник - изолятор - сверхпроводник), SNS контакт (сверхпроводник - нормальный металл - сверхпроводник) или изломанный контакт (проводимость осуществляется через один единственный атом). Поведение макроскопических (с большим числом каналов) Джозефсоновских SNS контактов хорошо изучено [6]. Такие квантовые контакты реализуются на гетероструктурах [7], [8], с помощью надломанных контактов [9], [10], [11], или в сканирующем туннельном микроскопе (СТМ) [12]. SNS контакт с малым количеством проводящих каналов (или что то же самое адреевских уровней) был изготовлен из двух сверхпроводящих резервуаров, соединенных углеродной нанотрубкой [13]. Теоретически зависимость сверхпроводящего тока от фазы в мезоскопическом SNS переходе с дираковскими рассеивателями была проанализирована в работе Багвела [14], а явление квантования сверхпроводящего тока в коротких контактах [15]. Некие специальные особенности квантования сверхпроводящего тока выполнены в работе [16], но к сожалению лишь численно.

Эта работа сосредоточена в области структур мезоскопического размера, в ней изучается поведение SINIS (сверхпроводник - изолятор - нор-

мальный металл - изолятор - сверхпроводник) контакта в присутствии только одного проводящего канала. Рассчитывается энергия уровня и волновые функции этого уровня вне андреевского приближения для дираковских рассеятелей δ произвольной силы. Интересной особенностью этого состояния является то, что оно несет в себе локализованный дробный заряд. Именно это и является основным предметом исследования этой работы.

Глава 2

SINIS контакт

2.1 Установка

Модельная установка на рис. 2.1.а. Узкий металлический контакт длиной L соединен через тоненькие прослойки изолятора (например окиси этого же металла) с сверхпроводящими берегами. Вся система может быть рассмотрена как квазиодномерная. Предполагается, что сверхпроводящая щель Δ кусочно-гладкая. Пусть сверхпроводящая фаза в левом сверхпроводнике равна $-\varphi/2$, а в правом $\varphi/2$. Если выбрать систему координат посередине области нормального металла, то левый изолятор будет иметь координату $-L/2$, правый $L/2$, а щель можно будет представить в виде

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta e^{-i\varphi/2}, & x < -L/2, \\ 0, & |x| < L/2, \\ \Delta e^{i\varphi/2}, & x > L/2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Сверхпроводящие берега должны быть достаточно массивными, для того, чтобы в них не исчезала сверхпроводимость из-за размерного эффекта.

2.2 NININ переходы и резонансы

Давайте на секунду отвлечемся от сверхпроводников и рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть у нас есть одномерная система с двумя дيراковскими рассеивателями на расстоянии L друг от друга. Потенциал

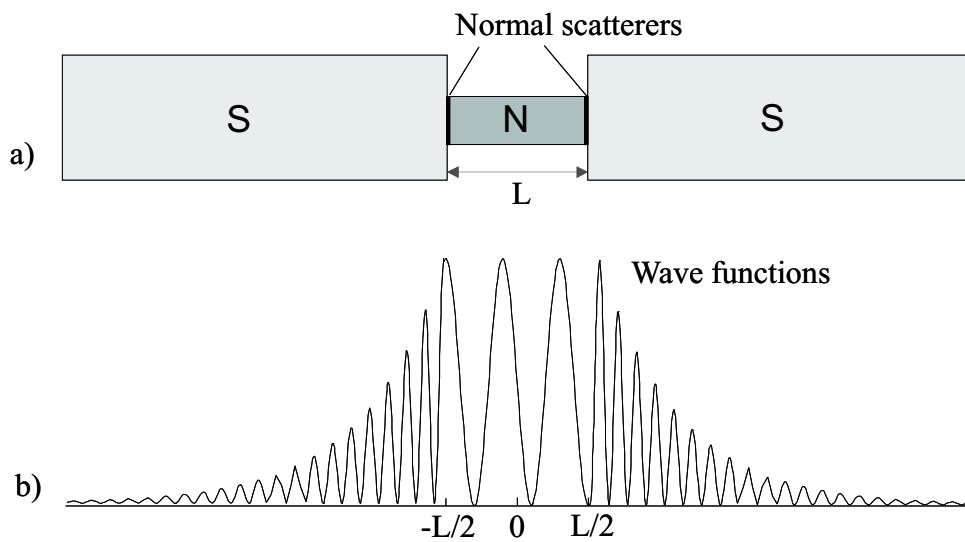


Рис. 2.1: а) Схема установки. S - сверхпроводник, N - прослойка нормального металла длиной L . На каждой NS границе расположен нормальный рассеиватель I. Благодаря ему на NS границе происходит не только андреевское рассеяние, но и нормальное. б) Волновые функции боголюбовских квазичастиц в нормальной области представляют собой волну с постоянным квадратом амплитуды и экспоненциально затухают вглубь сверхпроводника на характерном расстоянии ξ_0 (длине когерентности)

такой системы дается выражением

$$U_\delta(x) = \varepsilon_F + \frac{\hbar^2 \varkappa}{2m} [\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)]. \quad (2.2)$$

Тут ε_F представляет собой энергию Ферми, а \varkappa имеет размерность волнового вектора и характеризует силу рассеивателя. Обычно вводят безразмерную модельную константу $Z = \varkappa/2k_F$, нормируя \varkappa на фермиевский волновой вектор $k_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}/\hbar$.

Давайте посчитаем резонансные уровни энергии ε_{res} в этой системе и их ширины Γ

$$T = \frac{\Gamma^2/4}{\Gamma^2/4 + (\varepsilon - \varepsilon_{\text{res}})^2}, \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\text{res}}.$$

Прозрачность потенциала (2.2) для частицы с энергией ε над уровнем Ферми и волновым вектором $k = \sqrt{2m(\varepsilon + \varepsilon_F)}/\hbar$ есть прозрачность интерферометра Фабри-Перо

$$T = \frac{T_1^2}{1 + R_1^2 - 2R_1 \cos 2\chi}, \quad (2.3)$$

тут T_1 - прозрачность одного барьера, $R_1 = 1 - T_1$, а $\chi = kL + \arctan(2k/\varkappa)$ - фаза, которую набирает частица отразившись сначала от обеих стенок и оказавшись в первоначальном месте. Для одного δ -барьера прозрачность равна $T_1 = 1/(1 + Z^2)$. Резонанс определяется условием $T = 1$ или $\chi = \pi n$. Итого, для резонансов можно записать

$$kL + \arctan \frac{2k}{\varkappa} = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

$$\Gamma = 2\sqrt{2} \left[\frac{\partial^2(T^{-1})}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{\text{res}}} \right]^{-2}, \quad (2.5)$$

Следует отметить важный случай, когда можно пренебречь энергией ε по сравнению с энергией Ферми ε_F . Тогда формулы (2.4) и (2.5) приобретают вид

$$\varepsilon_{\text{res}} = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left(\pi n - \arctan \frac{1}{Z} \right)^2, \quad (2.6)$$

$$\Gamma = \frac{\hbar^2}{mL^2} \frac{\pi n - \arctan(1/Z)}{Z\sqrt{1+Z^2}}. \quad (2.7)$$

2.3 SINIS переходы и уравнения Боголюбова-де Женна

Вернемся теперь к основной задаче. Спектр квазичастиц определяется уравнениями Боголюбова-де Женна

$$\begin{pmatrix} -\hbar^2 \partial_x^2 / 2m - \varepsilon_F & \Delta(x) \\ \Delta^*(x) & \hbar^2 \partial_x^2 / 2m + \varepsilon_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\nu \\ v_\nu \end{pmatrix} = \varepsilon_\nu \begin{pmatrix} u_\nu \\ v_\nu \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Это есть ни что иное как преобразование, диагонализующее многочастичный гамильтониан в сверхпроводнике. Однако имеется наглядная интерпретация этих уравнений. Они имеют симметрию по отношению к замене знака у энергии ε_ν

$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \quad u \rightarrow -v^*, \quad v \rightarrow u^*.$$

Соответственно можно рассматривать u как электронную компоненту волновой функции, а v - как дырочную. И действительно, положив $\Delta = 0$ в уравнении (2.8) можно видеть что оно распадается на два уравнения Шредингера для частиц с энергией $\varepsilon_F + \varepsilon$ (электрон) и $\varepsilon_F - \varepsilon$ (дырка). В дальнейшем мы будем выбирать только состояния с $\varepsilon > 0$.

Для SINIS контакта уравнения (2.8) имеют решение в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{cases} L_1 \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2-i\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} e^{px+ikx} + L_2 \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2+i\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} e^{px-ikx}, & x < -\frac{L}{2} \\ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik+x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik+x} + \\ C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik-x} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik-x}, & |x| < \frac{L}{2} \\ R_1 \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2+i\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-px+ikx} + R_2 \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2-i\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-px-ikx}, & x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (2.9)$$

где

$$p = \sqrt{-\frac{k_F^2}{2} + \sqrt{\frac{k_F^4}{4} + \left(\frac{m\Delta \sin \alpha}{\hbar^2}\right)^2}}, \quad (2.10)$$

$$k = \sqrt{\frac{k_F^2}{2} + \sqrt{\frac{k_F^4}{4} + \left(\frac{m\Delta \sin \alpha}{\hbar^2}\right)^2}} \quad (2.11)$$

действительная и мнимая части экспоненциального коэффициента в сверхпроводниках,

$$k_{\pm} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\varepsilon \pm \varepsilon_F)} \quad (2.12)$$

электронный и дырочные волновые вектора в нормальном металле, а также введена удобная параметризация

$$\varepsilon = \Delta \cos \alpha. \quad (2.13)$$

Для произвольных соотношений между Δ и ε_F выражения для коэффициентов $L_1, L_2, C_1, C_2, C_3, C_4, R_1, R_2$ приведены в приложении А.1.

Вычисление показывают, что андреевский уровень определяется выражением

$$\begin{aligned} & \left\{ 2 [ks \cos \alpha + r(p + \varkappa) \sin \alpha] \sin \left(\frac{\varphi}{2} - rL \right) + \right. \\ & \quad \left. [k^2 + k_+ k_- + (p + \varkappa)^2] \cos \left(\frac{\varphi}{2} - rL \right) \sin \alpha \right\} \\ & \left\{ 2 [ks \cos \alpha + r(p + \varkappa) \sin \alpha] \sin \left(\frac{\varphi}{2} + rL \right) - \right. \\ & \quad \left. [k^2 + k_+ k_- + (p + \varkappa)^2] \cos \left(\frac{\varphi}{2} + rL \right) \sin \alpha \right\} = \\ & \left\{ 2 [-kr \cos \alpha - s(p + \varkappa) \sin \alpha] \sin \left(\frac{\varphi}{2} - sL \right) - \right. \\ & \quad \left. [k^2 - k_+ k_- + (p + \varkappa)^2] \cos \left(\frac{\varphi}{2} - sL \right) \sin \alpha \right\} \\ & \left\{ 2 [-kr \cos(\alpha) - s(p + \varkappa) \sin \alpha] \sin \left(\frac{\varphi}{2} + sL \right) + \right. \\ & \quad \left. [k^2 - k_+ k_- + (p + \varkappa)^2] \cos \left(\frac{\varphi}{2} + sL \right) \sin \alpha \right\} \quad (2.14) \end{aligned}$$

(обозначения взяты из приложения А.1). В пределе $\Delta \ll \varepsilon_F$ он совпадает с ранее найденным в статье [1]. Эти энергии в зависимости от положения нормального резонанса при разных значениях разности фаз на сверхпроводящих берегах приведены на рис. 2.2.

2.4 Заряд квазичастиц

Заряд квазичастиц в области нормального металла (в единицах элементарного заряда e)

$$Q_N = f q_u + (1 - f) q_v, \quad (2.15)$$

где q_u и q_v – электронные и дырочные заряды соответственно¹

$$q_u = \int_{-L/2}^{+L/2} |u|^2 dx, \quad q_v = \int_{-L/2}^{+L/2} |v|^2 dx, \quad (2.16)$$

а f – число функция распределения Ферми с энергией ε

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{\varepsilon/T}}.$$

Полный заряд квазичастиц, в который входит и заряд нормальной части и заряд сверхпроводящих берегов Q_{SNS} получается из формул (2.15) и (2.16), если в последней брать интегралы по всему пространству.

Удивительно, но заряд (2.15) выходит дробным. Его зависимость от положения нормального резонанса показано на рис. 2.3.

Вдобавок можно рассматривать величину заряда возбуждения

$$Q_{\text{ex}} = q_u - q_v. \quad (2.17)$$

Именно эту величину можно измерить на практике.

2.5 Дебаевское экранирование

Давайте расположим неподвижный дополнительный заряд внутри металла. Оказывается, что поле от такого заряда будет убывать отнюдь не

¹Подробнее о зарядах квазичастиц можно посмотреть в книге В.В. Шмидта [2].

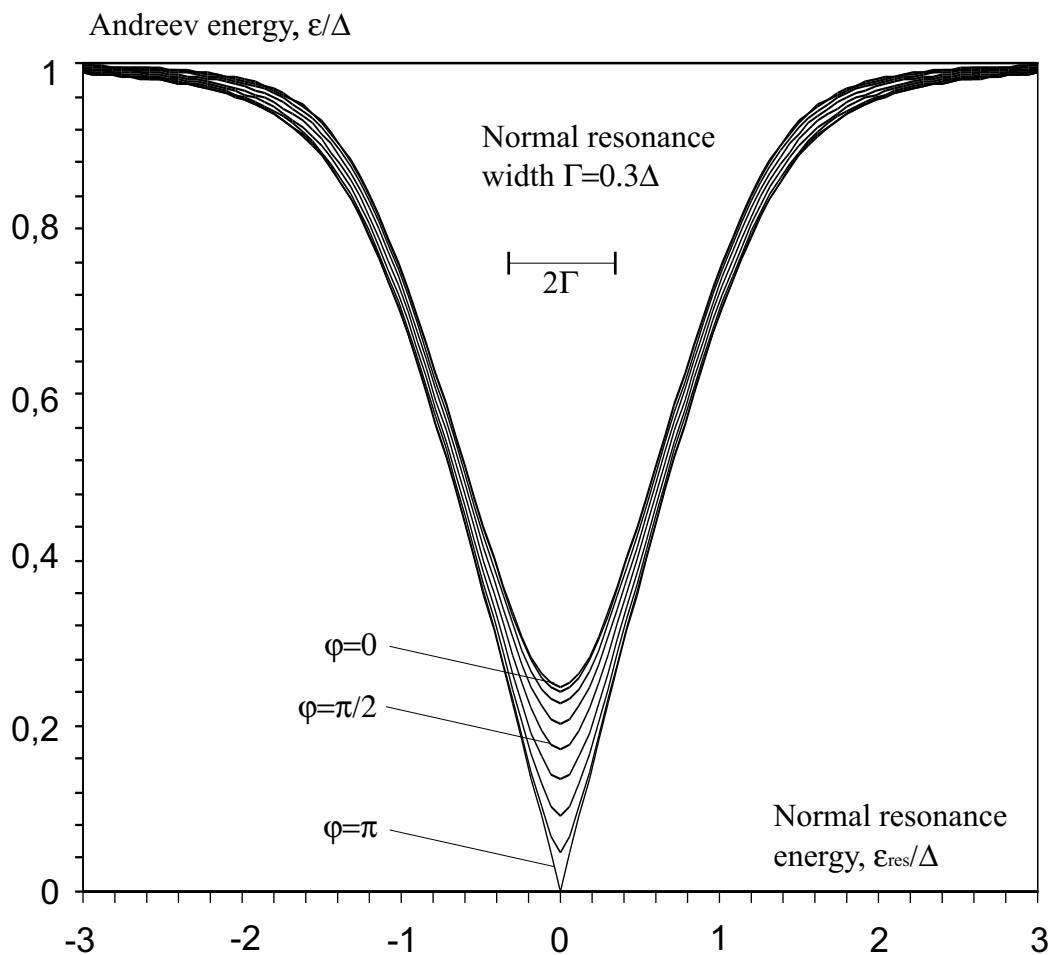


Рис. 2.2: Зависимость энергии андреевского уровня в зависимости от положения нормального резонанса при разных значениях разности фаз на сверхпроводящих берегах. Номер резонанса $n = 100$, ширина резонанса $\Gamma = 0.3\Delta$ (см. формулы (2.6), (2.7)).

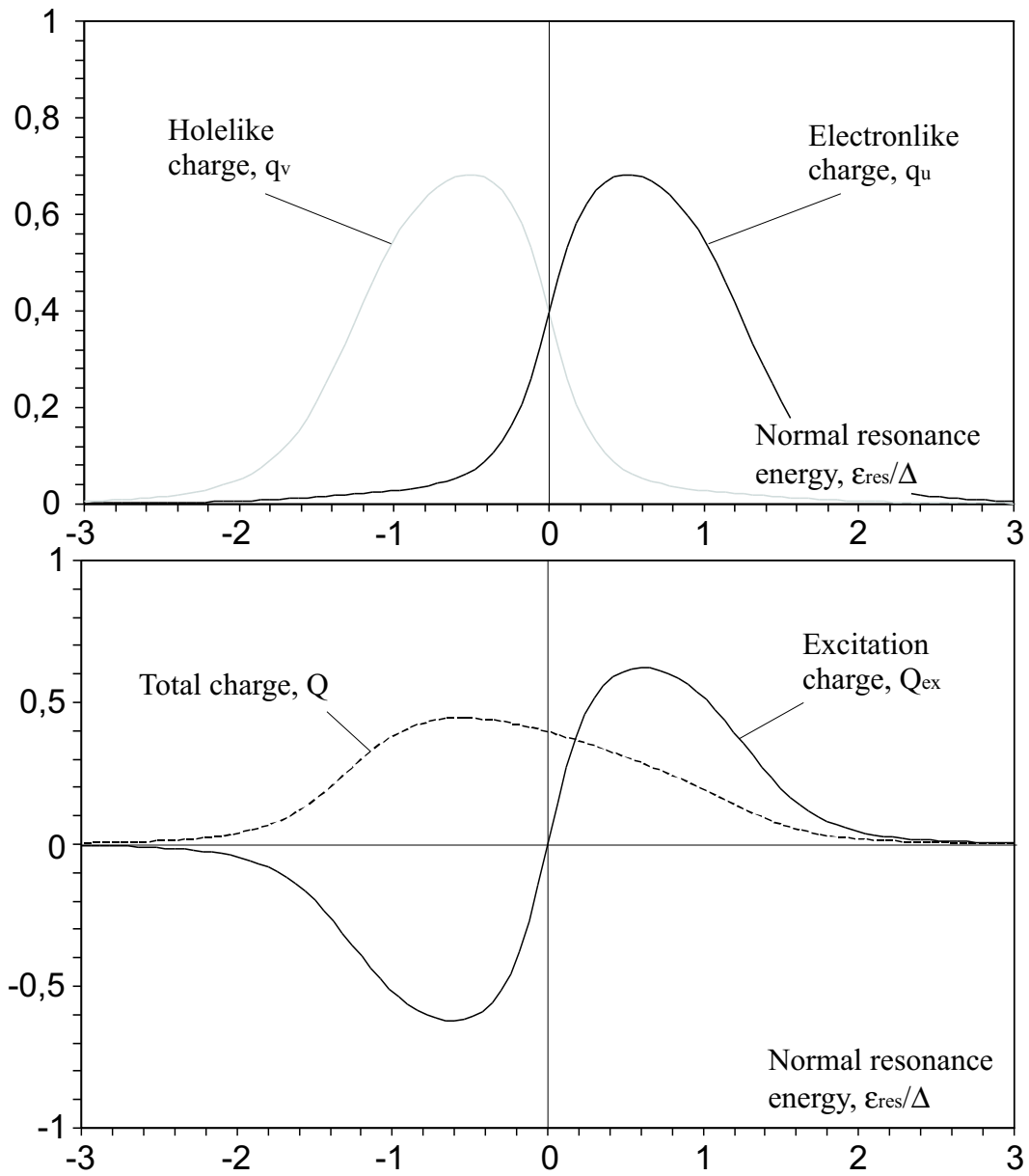


Рис. 2.3: Заряды квазичастиц от положения нормального резонанса. Первый график: Заряды электронов q_u (черная линия) и дырок q_v (серая линия). Вторым график: Полный заряд при температуре равной щели в сверхпроводнике (сплошная линия) и заряд возбуждения (пунктирная линия).

по кулоновскому закон, а гораздо быстрее. Дело в том, что его экранируют свободные электроны металла. Расчет показывает, что потенциал будет вести себя следующим образом

$$\varphi(r) = \frac{1}{r} e^{-r/r_D}.$$

Этот эффект получил название дебаевского экранирования, а величина r_D - радиуса Дебая. Для металла с концентрацией свободных носителей n радиуса Дебая равен

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}}.$$

Обычно этот радиус составляет величину порядка одного или нескольких межатомных расстояний.

Характерная длина когерентности в сверхпроводниках составляет 100 Å, что намного больше радиуса Дебая. Следовательно "хвосты" волновой функции будут погашены экранированием на расстоянии порядка межатомного. Ввиду этого сосредоточимся на изучении заряда только в нормальной области.

2.6 Самосогласованная задача

SNS контакт представляет собой обкладки плоского конденсатора, а поэтому имеет свою собственную емкость C . Кроме того он может находиться во потенциальном поле U . Такие факторы приводят к локальному эффективному смещению химического потенциала, что в свою очередь, отражается на положении энергетического уровня и самом заряде. Поэтому имеет смысл решать самосогласованную задачу. Как один из подходов к этой задаче – ввести модельный потенциал

$$\Delta U = \left[\frac{Q^2}{2C} + UQ \right] \theta(|x| < L/2),$$

который представляет собой прямоугольную ступеньку, расположенную в области нормального металла. Сейчас эта задача в процессе решения.

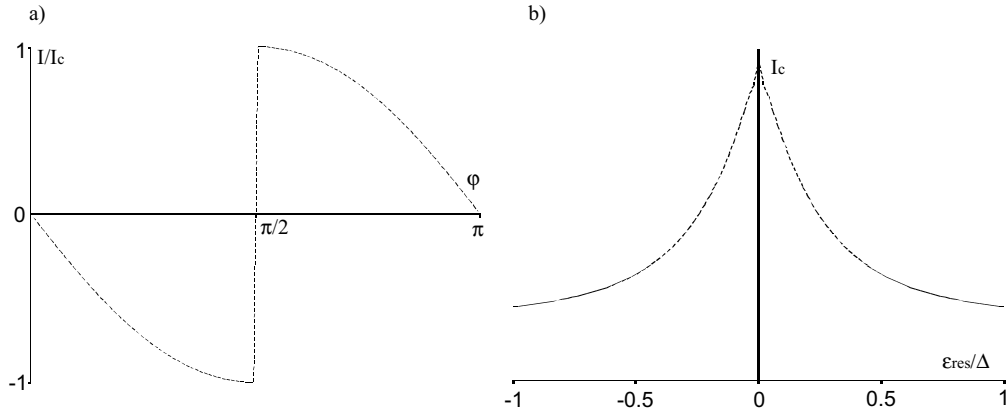


Рис. 2.4: а) Зависимость сверхпроводящего тока от фазы при резонансной энергии равной энергии Ферми. б) Зависимость критического тока от положения нормального резонанса.

2.7 Транспорт в SINIS структуре

Мы можем легко получить ток, текущий через SINIS контакт зная зависимость андреевской энергии от сверхпроводящей фазы (2.14).

$$j(\varphi) = 2\frac{e}{\hbar} \partial_{\varphi} \varepsilon. \quad (2.18)$$

Максимальное значение тока дает нам критический ток через контакт

$$j_c = \max_{\varphi} |j(\varphi)|. \quad (2.19)$$

Зависимость тока от фазы и критического тока от положения нормального резонанса приведены на рис. 2.4. Результаты для критического тока совпадают с посчитанными в [1].

2.8 Время релаксации

Уравнения Боголюбова-де Женна описывают поведение квазичастиц, которые являются фермионами со спином 1/2. В соответствии с принципом запрета Паули для таких квазичастиц на одном энергетическом уровне возможны четыре спиновых состояния. Эти состояния приведены в следующей таблице:

N	Состояние	Обозначение	Ток в баллистическом случае	Заряд контакта (без учета заряда основного состояния)
1	Ни одной квазичастицы	$ 0\rangle$	$2I$	0
2	Одна квазичастица со спином вверх	$ \uparrow\rangle = \gamma_{\uparrow}^{\dagger} 0\rangle$	0	Q
3	Одна квазичастица со спином вниз	$ \downarrow\rangle = \gamma_{\downarrow}^{\dagger} 0\rangle$	0	Q
4	Две квазичастицы с противоположными спинами	$ \uparrow\downarrow\rangle = \gamma_{\uparrow}^{\dagger}\gamma_{\downarrow}^{\dagger} 0\rangle$	$-2I$	$2Q$

Все эти состояния характеризуются различными значениями тока и заряда. При отсутствии нормальных рассеивателей эти токи были бы равны 0 , $2I$, $-2I$, где величина I определяется формулой (2.18), а заряды возбуждений соответственно равны 0 , Q , $2Q$ (формула (2.15)). Следует отметить, что это заряды без учета заряда основного состояния. При наличии нормальных рассеивателей нарушается электронно-дырочная симметрия, поэтому значение токов и зарядов изменяются. За счет электрон-фононного взаимодействия между состояниями 1-4 происходят переходы, а поэтому измеряемый ток представляет собой телеграфный сигнал.

В этом разделе мы займемся расчетом времени перехода между состояниями 1 и 4. Этот переход может идти двумя каналами.

- Первый канал – это переход между дискретными состояниями 1 и 4 с испусканием (поглощением) фонона.
- Второй же канал возможен, благодаря непрерывному спектру над сверхпроводящей щелью Δ . Для определенности рассмотрим переход $1 \rightarrow 4$. В начальном состоянии не было ни одной квазичастицы. Теперь, пусть в непрерывном спектре может возбудилась пара фермионов с противоположными спинами. Ничего не препятствует

этой паре сесть на рассматриваемый андреевский уровень и, тем самым, образовать состояние 4. Аналогичным образом могут происходить переходы между остальными состояниями из таблицы, приведенной выше.

Ограничимся первым каналом².

Гамильтониан электронно-фононного взаимодействия запишем в виде

$$H_{e-ph} = g \int d^3\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_\sigma(\mathbf{r}), \quad (2.20)$$

где φ – деформационный потенциал даваемый выражением

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(b_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t} + b_k^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega_k t} \right). \quad (2.21)$$

Фононные операторы b_k нормированы на единицу $[b_{k_1} b_{k_2}^\dagger] = \delta_{k_1 k_2}$, g – константа электрон-фононного взаимодействия. Обычно вместо g вводят безразмерную постоянную ζ посредством

$$g^2 = \frac{\pi^2 v_F^{3/2}}{2\varepsilon_F} \zeta. \quad (2.22)$$

Частота переходов дается золотым правилом Ферми (см. [4])

$$\tau^{-1} = 2\pi \sum_k |\langle 0, k | H_{e-ph} | \uparrow \downarrow \rangle|^2 \delta(\omega_k - 2\varepsilon). \quad (2.23)$$

В предположении линейного изотропного спектра фононов $\omega_k = s|\mathbf{k}|$ (s – скорость звука) выражение для τ^{-1} представимо в виде

$$\tau^{-1} = 8 \cdot 2^{2/3} \zeta \hbar^{-1} \frac{\varepsilon_F \varepsilon^2}{k_B^2 \Theta_D^2} \int_{-1}^1 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u v e^{i2\varepsilon \lambda x/s} dx \right|^2 d\lambda, \quad (2.24)$$

где Θ_D – температура Дебая. Подробнее о выводе этой формулы написано в приложении А.2.

Теперь мы можем оценить частоту переходов используя выражения (2.9) и приложение А.1. Результаты представлены на рис. 2.5.

²В статье Д.А. Иванова и М.В. Фейгельмана [3] рассматривается аналогичная задача для SIS контакта.

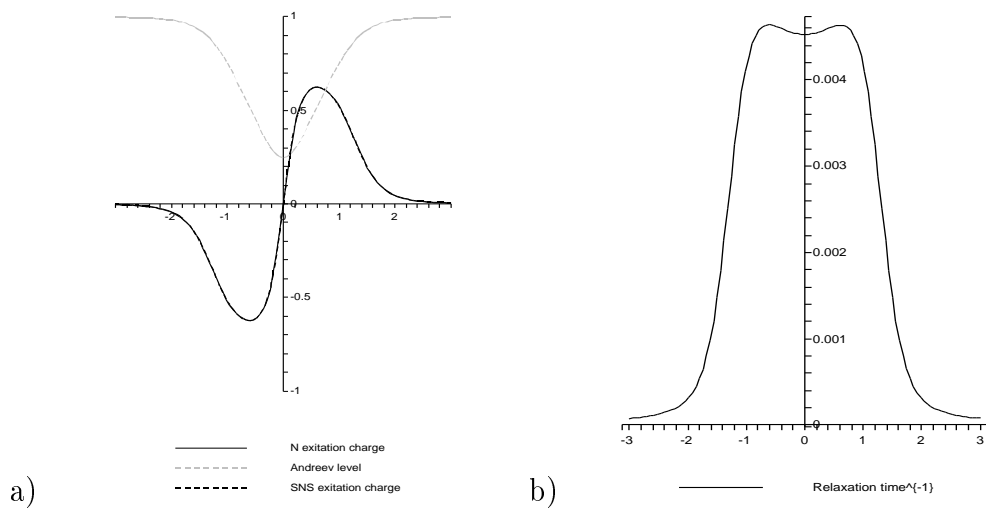


Рис. 2.5: Axe OX: position of normal resonance ε_{res} . Intermediate scatterers, $Z = 10$. a) Energy level and excitation charge. *Gray dashed line* - Andreev energy ε , *black solid line* - excitation charge $Q_{ex}^N = q_u^N - q_v^N$ in normal part, *black dashed line* - excitation charge $Q_{ex}^{SNS} = q_u^{SNS} - q_v^{SNS}$ in the whole system. b) Relaxation time.

2.9 Измерение зарядов

Измерение заряда предлагается производить с помощью одноэлектронного транзистора (SET).

Во-первых нужно убедиться, что он дробный. Проблема заключается в том, что при измерении происходит некая перенормировка заряда, поэтому даже целый заряд может оказаться дробным. Эта проблема решается достаточно просто. Следует предположить, что заряд изначально целый, измерить его, а потом поменять фазу φ и измерить его снова. Если значения не будут отличаться в целое число раз, то хотя бы один зарядов – дробный.

Во-вторых следует удостовериться что он локализован. Для этого сначала измерим заряд на длине $L + 2\xi_0$ (область нормального металла и хвосты в сверхпроводнике), а потом увеличим эту длину вдвое. Если заряды будут отличаться экспоненциально слабо, то они локализованы.

Дополнительно, для проверки теории можно измерять не только телеграфный сигнал заряда, но и тока.

Приложение А

А.1 Решение уравнений Боголюбова-де Женна

Используя граничные условия, даваемые потенциалом (2.2)

$$\psi(\pm L/2 - 0) = \psi(\pm L/2 + 0), \quad (\text{A.1})$$

$$\psi'(\pm L/2 + 0) - \psi'(\pm L/2 - 0) = \varkappa\psi(\pm L/2), \quad \psi = u, v \quad (\text{A.2})$$

и сшивая с их помощью решение (2.9) получаем выражения для коэффициентов $L_1, L_2, C_1, C_2, C_3, C_4, R_1, R_2$.

$$\begin{aligned} C_2 = -C_1 \left\{ 2 [ks \cos \alpha + r(p + \varkappa) \sin \alpha] \sin \left(\frac{\varphi}{2} - rL \right) + \right. \\ \left. [k^2 + k_+k_- + (p + \varkappa)^2] \cos \left(\frac{\varphi}{2} - rL \right) \sin \alpha \right\} / \\ \left\{ 2 [-kr \cos(\alpha) - s(p + \varkappa) \sin \alpha] \sin \left(\frac{\varphi}{2} + sL \right) + \right. \\ \left. [k^2 - k_+k_- + (p + \varkappa)^2] \cos \left(\frac{\varphi}{2} + sL \right) \sin \alpha \right\}, \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 = \frac{e^{i\varphi/2}}{4kk_-} \left\{ C_1 e^{-irL} [(q_+ + k_- - i\varkappa)(q_- + k_+ + i\varkappa)e^{i\alpha} - \right. \\ \left. (q_- - k_- + i\varkappa)(q_+ - k_+ - i\varkappa)e^{-i\alpha}] + \right. \\ \left. C_2 e^{isL} [(q_+ + k_- - i\varkappa)(q_- - k_+ + i\varkappa)e^{i\alpha} - \right. \\ \left. (q_- - k_- + i\varkappa)(q_+ + k_+ - i\varkappa)e^{-i\alpha}] \right\}, \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = \frac{e^{i\varphi/2}}{4kk_-} \{ & C_1 e^{-isL} [-(q_+ - k_- - i\kappa)(q_- + k_+ + i\kappa)e^{i\alpha} + \\
& (q_- + k_- + i\kappa)(q_+ - k_+ - i\kappa)e^{-i\alpha}] + \\
& C_2 e^{irL} [-(q_+ - k_- - i\kappa)(q_- - k_+ + i\kappa)e^{i\alpha} + \\
& (q_- + k_- + i\kappa)(q_+ + k_+ - i\kappa)e^{-i\alpha}] \}, \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1 = e^{i\varphi/2+i\alpha} \frac{e^{iq_+L/2}}{2k} \{ & C_1 e^{-ik_+L/2} (q_- + k_+ + i\kappa) \\
& + C_2 e^{ik_+L/2} (q_- - k_+ + i\kappa) \}, \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 = e^{i\varphi/2-i\alpha} \frac{e^{-iq_-L/2}}{2k} \{ & C_1 e^{-ik_+L/2} (q_+ - k_+ - i\kappa) \\
& + C_2 e^{ik_+L/2} (q_+ + k_+ - i\kappa) \}, \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 = e^{-i\varphi/2-i\alpha} \frac{e^{-iq_-L/2}}{2k} \{ & C_1 e^{ik_+L/2} (q_+ + k_+ - i\kappa) \\
& + C_2 e^{-ik_+L/2} (q_+ - k_+ - i\kappa) \}, \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 = e^{-i\varphi/2+i\alpha} \frac{e^{-iq_+L/2}}{2k} \{ & C_1 e^{ik_+L/2} (q_- - k_+ + i\kappa) \\
& + C_2 e^{-ik_+L/2} (q_- + k_+ + i\kappa) \}, \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

тут для краткости введены обозначения

$$s, r = \frac{k_+ \pm k_-}{2}, \quad (\text{A.10})$$

$$q_{\pm} = k \mp ip. \quad (\text{A.11})$$

Постоянная L_1 определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [|u|^2 + |v|^2] dx = 1. \quad (\text{A.12})$$

Для того, чтобы система уравнений (A.1) и (A.2) имела решение, нужно, чтобы ее детерминант обращался в нуль. Это дает нам уровень энергии квазичастицы (2.14).

A.2 Вычисление времени перехода

Расписывая выражение (2.23) получаем

$$\begin{aligned} \tau^{-1} = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \left| \left\langle 0, \mathbf{k} \left| g \int_V d^3\mathbf{r} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sum_{\mathbf{q}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{2V}} (b_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} + b_{\mathbf{q}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}) \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \right| \uparrow \downarrow \right\rangle \right|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - 2\varepsilon) \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Используя преобразования Боголюбова для одного энергетического уровня под щелью

$$\begin{cases} \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})\gamma_{\sigma} + \text{sign}\sigma v^*(\mathbf{r})\gamma_{\sigma}^{\dagger} \\ \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) = u^*(\mathbf{r})\gamma_{\sigma}^{\dagger} + \text{sign}\sigma v(\mathbf{r})\gamma_{\sigma} \end{cases}$$

вычисляем матричный элемент в уравнении (A.13). Получаем

$$\tau^{-1} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \left| \langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rangle \langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rangle \right|^2 g^2 \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \delta(s|\mathbf{k}| - 2\varepsilon) \left| \int uv e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \right|^2, \quad (\text{A.14})$$

тут $\langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rangle$ есть бозевское среднее, а $\langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rangle$ - фермеевское. Усредняя последнюю формулу по направлениям фононов \mathbf{k} получаем и заменяя суммирование на интегрирование получаем

$$\tau^{-1} = \frac{g^2 k_0^3}{\pi} \int_{-1}^1 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{ik_0\lambda x} dx \right|^2 d\lambda, \quad (\text{A.15})$$

где введено обозначение $k_0 = 2\varepsilon/s$. Переписывая это уравнение, используя определение температуры Дебая Θ_D и энергии Ферми ε_F

$$\Theta_D = \frac{2\pi\hbar s}{k_B} \left(\frac{3n}{4\pi}\right)^{1/3}, \quad \varepsilon_F = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m} \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3} \quad (\text{A.16})$$

получаем выражение (2.24). Конечная расчетная формула

$$\begin{aligned} \tau^{-1} = & 8 \cdot 2^{2/3} \zeta \hbar^{-1} \frac{\varepsilon_F \varepsilon^2}{k_B^2 \Theta_D^2} \int_{-k_0}^{k_0} \left| e^{-pL} \left[e^{-i\varphi/2} e^{-i\eta L/2} \left(\frac{L_1^2 e^{-ikL} e^{-i\alpha}}{2p + 2ik + i\eta} + \right. \right. \right. \\ & + \frac{L_2^2 e^{ikL} e^{i\alpha}}{2p - 2ik + i\eta} + \frac{2L_1 L_2 \cos \alpha}{2p + i\eta} \left. \right) + e^{i\varphi/2} e^{i\eta L/2} \left(\frac{R_1^2 e^{ikL} e^{i\alpha}}{-2p + 2ik + i\eta} + \right. \\ & + \frac{R_2^2 e^{-ikL} e^{-i\alpha}}{-2p - 2ik + i\eta} + \frac{2R_1 R_2 \cos \alpha}{-2p + i\eta} \left. \right) + 2C_1 C_2 \frac{\sin[(2s + \eta)L/2]}{2s + \eta} + \\ & + 2C_1 C_4 \frac{\sin[(2r + \eta)L/2]}{2r + \eta} + 2C_2 C_3 \frac{\sin[(-2r + \eta)L/2]}{-2r + \eta} + \\ & \left. \left. + 2C_2 C_4 \frac{\sin[(-2s + \eta)L/2]}{-2s + \eta} \right] \right|^2 d\eta, \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Литература

- [1] N.M. Chtchelkatchev, G.B. Lesovik, and G. Blatter, Phys. rev. B **62**, 3559 (2000).
- [2] В.В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников*, МЦНМО (2000).
- [3] D.A. Ivanov and M.V. Feigel'man, JETP Lett. **68**, 890 (1998).
- [4] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука (1989).
- [5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика. Часть 1*, Наука-Физматлит (1995).
- [6] I.O.Kulik, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **57**, 1745 (1969) [Sov. Phys. JETP **30**, 944 (1970)]; C. Islii, Prog. Theor. Phys. **44**, 1525 (1970).
- [7] D.A. Wharam, T.J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J.E.F. Frost, D.G. Hasko, D.C. Peacock, D.A. Richie and G.A.C. Jones, J. Phys. C **21**, L209 (1988); B.G. van Wees, H. van Houten, C.W.J. Beenakker, J.G. Williamson, L.P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C.T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).
- [8] H. Takayanagi, T. Akazaki, and J. Nitta, Phys. Rev. Lett. **75**, 3533 (1995).
- [9] C.J. Muller, J.M. van Ruitenbeek, and L.J. de Longh, Phys. Rev. Lett. **69**, 140, (1992).
- [10] J.M. Karns, C.J. Muller, I.K. Yanson, Th.C.M. Govaert, R. Hesper, and J.M. van Ruitenbeek, Phys. Rev. B **48**, R14 721 (1993).
- [11] B.D. Josephson, Phys. Rev. Lett. **1**, 251 (1962).

- [12] A.P. Sutton, *Curr. Opin. Solid State Mater. Sci.* **1**, 827 (1996).
- [13] A.Yu. Kasumov et al., *Science* **284**, 1508 (1999).
- [14] P.F. Bagwel, *Phys. Rev. B* **46**, 12 573 (1992).
- [15] L.I. Glazman and A.V. Khaetskii, *J. Phys.: Condens. Matter* **1**, 5005 (1989).
- [16] A. Furusaki, H. Takayanagi, and M. Tsakada, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 132 (1991); *Phys. Rev. B* **45**, 10 563 (1992).