

Туннелирование в магнитном поле: евклидов резонанс (одномерная система)

I. Вступление

Туннелированием в квантовой механике называется переход частицы через классически недоступную область. Это удивительное, не очевидное с классической точки зрения, явление возможно благодаря тому, что под барьером имеется некоторая вероятность нахождения частицы. Как правило, вероятность туннелирования экспоненциально падает при увеличении отношения длины потенциального барьера к дебройлевской длине волны частицы.

Но такое поведение наблюдается не всегда. Простейший пример другой ситуации - резонансный α -распад ядра. При некоторых значениях энергии, близких к энергии уровней в яме, вероятность оказаться α -частице в области за потенциального барьера перестает быть экспоненциально малой (рис. ??).

Резонансное туннелирование в магнитном поле бывает разных сортов. К примеру:

1. обусловленное изменением плотности состояний в магнитном поле. Рассмотрим туннелирование между двумерными электронными слоями в магнитном поле. В отсутствие магнитного поля энергия:

$$E = E_z + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}, \quad (1)$$

где E_z уровень энергии в яме. Условия туннелирования:

$$E_{z1} = E_{z2}, \quad p_{x1} = p_{x2}, \quad p_{y1} = p_{y2}. \quad (2)$$

При включении магнитного поля энергия:

$$E = E_z + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - e/cH\langle z \rangle)^2}{2m}, \quad (3)$$

$\langle z \rangle$ - среднее значение координаты для частицы в яме. С магнитным полем перестает выполняться условие $p_{y1} = p_{y2}$. При нулевом магнитном поле наблюдается пик в проводимости.

При увеличении магнитного поля точка пересечения парабол поднимается. Вблизи уровня Ферми за счет возросшей плотности состояний снова наблюдается увеличение проводимости. Резонансное значение магнитного поля B_R определяется из условия:

$$eB_R\Delta z = 2p_F. \quad (4)$$

Значения, взятые из эксперимента: $\Delta z=30$ нм, $n=3 * 10^{11}$ см⁻¹, $B_R=6$ Тл. Воздействие магнитного поля на систему состоит в том, что расплывается волновая функция и при определенном значении магнитного поля наблюдается пик в проводимости.

2. резонанс в прыжковой проводимости. Резонанс наблюдается из-за рассеяния на примесях. Без этого рассеяния электрон двигался бы все время в потенциале $\sim y^2$ (из-за магнитного поля), но при рассеянии на примесях этот потенциал сбрасывается (качественная оценка⁷, вычисления с использованием диаграммной техники⁷). То есть без рассеяния на примесях, вероятность оказаться в точке на расстоянии R от начального положения $\sim \exp(-\frac{r^2}{4\lambda^2})$ ($\lambda = \hbar/eH$ - магнитная длина), а с учетом нерезонансного рассеяния на примесях (то есть без возврата электрона в начальную точку) $\sim \exp(-r/b)$, где $b \sim \lambda R^{-1}$, $R = N^{-3}$, N - концентрация примесей.

3. евклидов резонанс, который рассматривается в данной работе. В этом случае наблюдается увеличение вероятности выхода частицы из связанного состояния в яме из-за наложения одновременно магнитного поля и внешнего потенциала.

Ранее Б.И.Ивлевым и В.И. Мельниковым⁴ был подробно исследован евклидов резонанс в переменном внешнем поле. В вероятность выхода частота переменного поля входит в комбинации $\exp(\Omega\tau_s)$, где τ_s - зависит от свойств постоянного потенциала. Этому явлению можно дать простое качественное объяснение - происходит конкуренция между двумя процессами - туннелированием, вероятность, которого экспоненциально мала без внешнего поля, и поглощением квантов электромагнитного поля, благодаря которому частица приобретает энергию, сравнимую с высотой барьера.

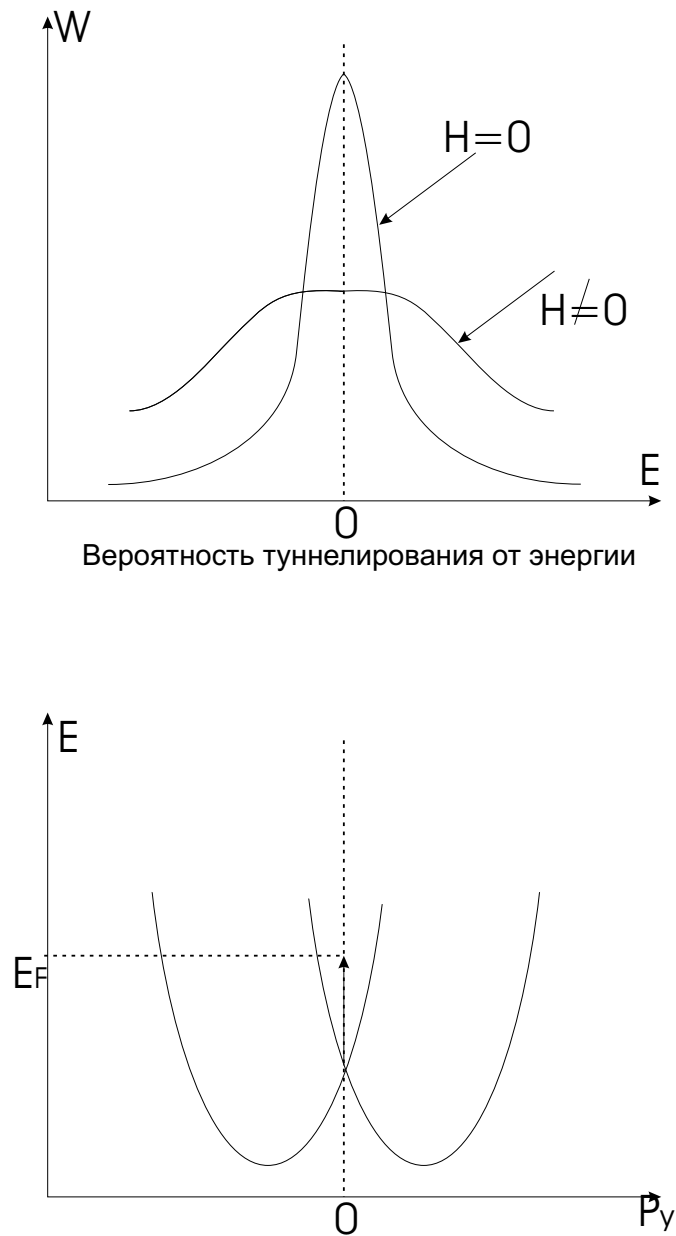


Рис. 1: К условиям резонансного туннелирования в двумерной системе: а) 2 двумерных электронных слоя, между которыми происходит туннелирование; б) размытие волновой функции при включении магнитного поля; в) изменение в спектре при включении магнитного поля; г) зависимость проводимости от магнитного поля

Для эвклидова резонанса в магнитном поле, такое объяснение явления, конечно, не подходит. Тут резонанс можно объяснить подбарьерной интерференцией циклотронных орбит.

Название эвклидов происходит от того, что резонанс можно получить, используя квазиклассическое приближение. Действие во мнимом времени называется эвклидовым.

Задача ставится во втором разделе. В третьем разделе приведено квазиклассическое решение, в котором видно, что при некотором соотношении параметров задачи вероятность туннелирования растет, перестает быть экспоненциально малой. В четвертом разделе описывается метод численного решения и приводятся основные результаты, полученные с его помощью. В пятом разделе предлагаются возможные экспериментальные реализации для изучения данного эффекта.

Резонансное туннелирование (РТ) может стать одним из примечательных явлений, на основе которых работают приборы.

II. Постановка задачи

Рассматривается следующая модельная задача. Частица находится в связанном состоянии в потенциале $U(x, y) = V(x) + u(y)$ в магнитном поле с вектор-потенциалом $A(-Hy, 0, 0)$, где

$$V(x) = -\hbar\sqrt{\frac{2|E|}{m}}(\delta(x) + \delta(R-x)), \quad (5)$$

$$u(y) = u_0\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^4}{a^4}\right). \quad (6)$$

Частица движется в плоскости xy . Такой потенциал соответствует двум квантовым проволочкам, направленным параллельно оси Oy , а между ними (вдоль них) потенциал, зависящий от y . Уравнение Шредингера в этом

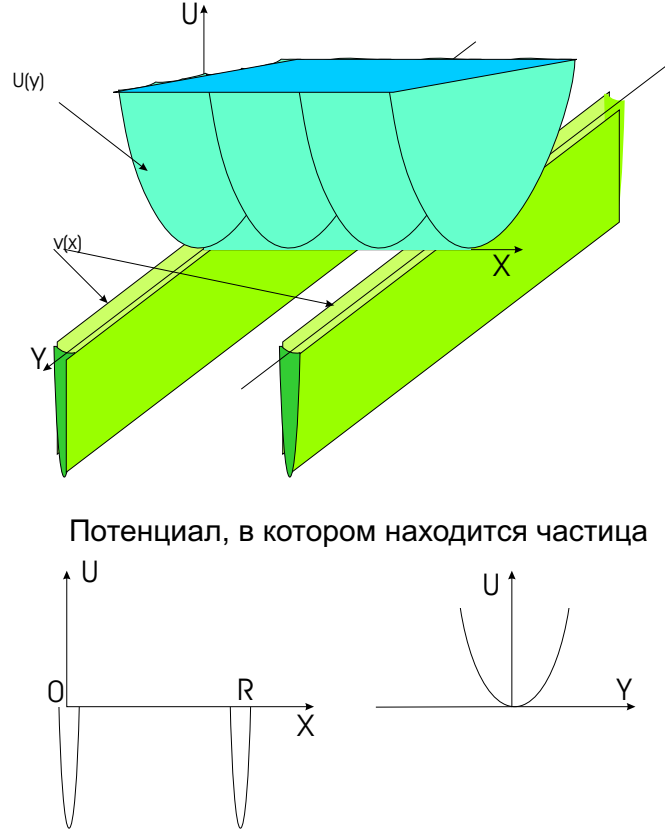


Рис. 2: Потенциал, в котором движется частица: $V(x) + u(y)$

случае:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{im\omega_c}{\hbar}y\right)^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + (u(y) + V(x))\psi = E\psi, \quad (7)$$

со следующими граничными условиями на ψ , которые следуют из (5) и затухания волновой функции на бесконечности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\Big|_{x=0} &= -\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}\psi(0, y), \quad \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\Big|_{x=R} = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}\psi(0, y), \\ \frac{\partial\Re\psi(x, y)}{\partial y}\Big|_{y=0} &= 0, \quad \Re\psi(x, \infty) = 0, \\ \Im\psi(0, y) = \Im\psi(R, y) &= 0, \quad \Im\psi(x, 0) = 0, \quad \Im\psi(x, \infty) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Вероятность выхода частицы в точке (R, y_{exit}) определяется как:

$$w = \left| \frac{\psi(R, y_{exit})}{\psi(0, 0)} \right|^2. \quad (9)$$

Аналитического решения ур. (7) не имеет. Евклидов резонанс, т.е. резонансное квантовое туннелирование можно получить, рассматривая эту задачу в квазиклассическом приближении. При некотором значении магнитного поля вероятность выхода частицы из ямы увеличивается на много порядков.

III. Квазиклассическое решение

A. Метод мнимых траекторий

Волновая функция ищется в виде:

$$\psi \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x)\right) \quad (10)$$

где $S(x)$ классическое действие для частицы в магнитном поле и во внешнем потенциале. Вероятность туннелирования частицы:

$$W \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}(S(R, y_{exit}) - S(0, 0))\right). \quad (11)$$

Гамильтониан частицы:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x - m\omega_c y)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + u(y) + V(x). \quad (12)$$

Отсюда следуют уравнения движения:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -m\omega_c \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \\ m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= m\omega_c \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (13)$$

Действие удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} - m\omega_c y \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + u(y) + V(x) = E. \quad (14)$$

Его полный дифференциал:

$$dS(x, y) = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy, \quad (15)$$

и с учетом того, что вдоль траектории движения

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = m \frac{\partial x}{\partial t} + m\omega_c y, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = m \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (16)$$

получаем:

$$S[x(t), y(t)] - S(0, 0) = \int_0^t dt_1 \left(p_x \frac{\partial x}{\partial t_1} + p_y \frac{\partial y}{\partial t_1} \right). \quad (17)$$

В классической механике:

$$p_x \frac{\partial x}{\partial t_1} + p_y \frac{\partial y}{\partial t_1} = L + H, \quad (18)$$

где L - лагранжиан, H - гамильтониан. В магнитном поле лагранжиан свободной частицы:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} Av - e\phi. \quad (19)$$

С учетом (19) из (17), (18), $H = E$:

$$S[x(t), y(t)] - S(0, 0) = \int_0^t dt_1 \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t_1} \right)^2 + m\omega_c y \frac{\partial x}{\partial t_1} - U(x, y) + E \right]. \quad (20)$$

Полная энергия электрона, движущегося по классической траектории:

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + U(x, y). \quad (21)$$

При движении под барьером $E < U(x, y)$, то есть кинетическая энергия становится отрицательной. Для избежания этой проблемы можно сделать формальную замену переменных $t = i\tau$. Тогда кинетическая энергия будет положительной. Такой трюк является основой метода траекторий во мнимом времени. Чтобы координаты в уравнениях движениях (13) были действительными, сделаем еще одну замену:

$$y(\tau) = -i\eta(\tau). \quad (22)$$

Тогда получаем уравнения движения в новых переменных:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} &= -m\omega_c \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \frac{\partial U(x, -i\eta)}{\partial x} \\ m \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} &= m\omega_c \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial U(x, -i\eta)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (23)$$

и полную энергию:

$$E = -\frac{m}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right)^2 + U(x, -i\eta). \quad (24)$$

Но замене (22) соответствует не физическое значение в $S[x(t), y(t)]$. Выражение (20) будет иметь физический смысл только при $y(\tau) = 0$. Значит, для рассмотрения туннелирования данным методом необходимо взять следующие граничные условия:

$$x(0) = R, \quad y(0) = 0, \quad x(i\tau_0) = 0, \quad y(i\tau_0) = 0. \quad (25)$$

Вероятность туннелирования:

$$A = \frac{2}{\hbar} \int_0^{\tau_0} d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right)^2 + m\omega_c y \frac{\partial x}{\partial \tau} - U(x, -i\eta) - E \right]. \quad (26)$$

Для уравнений движения (23) добавляется еще условие на нулевую скорость в точках поворота:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \Big|_0 = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \Big|_{\tau_0} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} \Big|_0 = \frac{\partial x}{\partial \tau} \Big|_{\tau_0} = 0. \quad (27)$$

Система уравнений (23) имеет два типа решений: четные и нечетные по $\frac{\partial x}{\partial \tau}$ и η относительно $\tau - \tau_0/2$. Из симметрии задачи нужно выбрать четное. Это определит одну из четырех констант, от которых зависит решение. Получается решение с четырьмя граничными условиями, зависящими от трех констант. Этому можно удовлетворить, так как есть дополнительная константа τ_0 .

В. Применение метода комплексных траекторий для поставленной задачи

Применим метод комплексных траекторий к рассматриваемой задаче с полем $m\omega_c^2 a^2 \sim U$. Туннелирование при этом условии существенно отличается от туннелирования в сильном магнитном поле.

Из уравнений движения (23) для рассматриваемого потенциала U получаем:

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = -m\omega_c \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \quad (28)$$

$$m \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = m\omega_c \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial u(-i\eta)}{\partial \eta} \quad (29)$$

и граничные условия:

$$x(0) = R, x(i\tau_0) = 0, \frac{\partial x}{\partial \tau}|_0 = \frac{\partial x}{\partial \tau}|_{\tau_0} = -\sqrt{\frac{2u_0}{m}}, \quad (30)$$

условия на η не изменяются.

Решение первого уравнения (29):

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -(v + \omega_c \eta) \quad (31)$$

и полная энергия:

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right)^2 + v(\eta), \quad (32)$$

с потенциальной энергией:

$$v(\eta) = u(-i\eta) - \frac{m}{2} (v + \omega_c \eta)^2. \quad (33)$$

Чтобы было справедливым граничное условие $\eta(\tau_0)=0$, движение в потенциале (33) должно быть периодическим, то есть потенциал (33) должен иметь форму ямы.

Видим, что для чистого гармонического потенциала это условие не выполнялось бы, не удалось бы вычислить ни единой точки при так введенном методе комплексных траекторий.

Период движения в потенциале (33)

$$\Delta \tau = \sqrt{2m} \int_0^{\Delta \eta} \frac{d\eta}{\sqrt{E - v(\eta)}}. \quad (34)$$

За период частица сдвигается по x на

$$\Delta x = \sqrt{2m} \int_0^{\Delta \eta} d\eta \frac{v + \omega_c \eta}{\sqrt{E - v(\eta)}}. \quad (35)$$

Действие для потенциала (33) из (26) с учетом (32) :

$$A = A_{WKB} - \frac{2m}{\hbar} \int_0^{\tau_0} d\tau \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right)^2, A_{WKB} = \frac{2\sqrt{2|E|m}}{\hbar} R. \quad (36)$$

A_{WKB} - действие в классическом случае без внешнего потенциала, для движения свободной частицы.

Как говорилось ранее, метод траекторий применим лишь для точек с $\eta=0$. Значит, для конечно точки $x=R$ должно выполняться (чтоб можно было что-то посчитать данным методом) $R=N\Delta x$, где N - натуральное число. Действие при смещении на Δx (без учета A_{WKB}):

$$\Delta A = -\frac{4\sqrt{m}}{\hbar} \int_0^{\Delta \eta} d\eta \sqrt{E - v(\eta)}. \quad (37)$$

Волновая функция при $x=n\Delta x$:

$$|\psi(n\Delta x, 0)|^2 \sim \exp \left[- \left(\frac{2\sqrt{2mu_0}}{\hbar} - \frac{\Delta A}{\Delta x} \right) n\Delta x \right]. \quad (38)$$

То есть за счет слагаемого $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ происходит не уменьшение волновой функции, а увеличение.

Получили, что при некотором значении поля действие $A \rightarrow 0$ по закону $A \sim (H_R - H)R$, и $\exp(-A) \sim (H_R - H)R \sim 1$.

Применимость метода траекторий. Обычно метод применяется, когда $\exp(-A) \ll 1$. При увеличении этой величины нужно учитывать не одну траекторию, а много.

Сделаем численные оценки для вероятности туннелирования согласно выведенным соотношениям. Введем безразмерный параметр $p = \frac{m\omega_c^2 a^2}{2u_0}$. Тогда действие (36) переписывается в виде:

$$A = \left(1 - \frac{f_1(p)}{f_2(p)}\right) A_{WKB}, \quad (39)$$

со следующими функциями $f_1(p), f_2(p)$:

$$f_1(p) = 2 \int_0^{z_0} dz \sqrt{z^2 - z^4 + 2z\sqrt{p} + pz^2}, f_2(p) = 2 \int_0^{z_0} dz \frac{1 + z\sqrt{p}}{\sqrt{z^2 - z^4 + 2z\sqrt{p} + pz^2}}. \quad (40)$$

Из численной оценки $f_1(p) = f_2(p) \sim 6.52$ при $p = p_R \sim 1.76$. Для действия получаем:

$$A \sim 0.31(p_R - p)A_{WKB} \quad (41)$$

и для вероятности туннелирования:

$$W(H) \sim \exp\left(\frac{H_R - H}{H_R} A_{WKB}\right). \quad (42)$$

H_R с учетом $p = \frac{m\omega_c^2 a^2}{2u_0}$:

$$H_R = \frac{p_R e \sqrt{2m} \sqrt{u_0}}{c a}. \quad (43)$$

Исходя из численных значений, близких к наблюдаемым экспериментально для подобных систем, проведем оценки. Энергетический уровень в квантовой яме $E = -10^{-3} eV$, параметр потенциала вдоль проволок $a = 140 \text{ \AA}$. Эти параметры дают $H_R \sim 10$ Тс, $\Delta A \sim 29.6$, $\Delta x \sim 913 \text{ \AA}$, $A_{WKB} \sim 0.032 R(\text{ \AA})$. Вероятность туннелирования в магнитном поле на расстояние Δx без потенциала вдоль проволок мала 10^{-13} .

IV. Численное решение

Хотелось бы получить численное решение ур. (7), чтобы знать вероятность туннелирования во всей плоскости, а не только в определенных точках, что возможно с помощью квазиклассического приближения.

A. Идея решения

Приведем уравнение Шредингера (7) к безразмерному виду:

$$-\left(B \frac{\partial}{\partial x} + iqu\right)^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + y^2 \left(1 + \frac{y^2}{B^2}\right) \psi = -\lambda B^2 \psi, \quad (44)$$

где сделана линейная замена переменных:

$$x' = \beta x, y' = -\alpha y \quad (45)$$

и введены параметры, связанные с физическими величинами:

$$\alpha^4 = \frac{2mu_0}{\hbar^2 a^2}, q = \frac{m\omega_c}{\hbar\alpha^2}, B = a\alpha, \lambda = \frac{2m|E|}{\hbar^2}, \beta = a\alpha^2. \quad (46)$$

Для упрощения сделаем еще одну линейную замену $z = y(1 + q^2)^{1/4}$:

$$-B^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2iqBz}{(1 + q^2)^{1/4}} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{z^4}{B^2(1 + q^2)} \psi + \sqrt{1 + q^2} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + z^2 \psi\right) = -\lambda B^2 \psi \quad (47)$$

Обезразмеренное уравнение (47), разложим по полиномам Эрмита $H_n(z)$ относительно координаты z :

$$\psi(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} [P_m(x)\phi_{2m}(z) + iQ_m(x)\phi_{2m+1}(z)], \quad (48)$$

$$\phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(z) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad (49)$$

а по x - в ряд Фурье:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \cos \frac{2\pi kx}{R}, Q_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \sin \frac{2\pi kx}{R}. \quad (50)$$

Приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} a_{nk} \left[\left(\frac{2\pi k}{R} B \right)^2 + (1+4n)\sqrt{1+q^2} + \lambda B^2 \right] + \frac{1}{(1+q^2)B^2} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mk} \alpha_{2n}^{2m} \\ + \frac{4\pi k B q}{R(1+q^2)^{\frac{1}{4}}} \sum_{m=0}^{\infty} b_{mk} \beta_{2n}^{2m+1} = \frac{2B^2}{R} (2 - \delta_{k,0}) \sum_{l=0}^{\infty} a_{nl}, k = 0, 1, 2, \dots \\ b_{nk} \left[\left(\frac{2\pi k}{R} B \right)^2 + (3+4n)\sqrt{1+q^2} + \lambda B^2 \right] + \frac{1}{(1+q^2)B^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_{mk} \alpha_{2n+1}^{2m+1} \\ + \frac{4\pi k B q}{R(1+q^2)^{\frac{1}{4}}} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mk} \beta_{2n+1}^{2m} = 0, k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям по x в правую часть первого набора уравнений добавлено слагаемое, соответствующее бесконечному набору дельта-функций (возникает при разложении коэффициентов в ряд Фурье). Коэффициенты α_n^m, β_n^m :

$$\alpha_n^m = \int_{-\infty}^{\infty} dz \phi_m(z) \phi_n(z) z^4, \beta_n^m = \int_{-\infty}^{\infty} dz \phi_m(z) \phi_n(z) z. \quad (52)$$

Используя результат задачи о матричных элементах степеней координаты для осциллятора, выписываются ненулевые коэффициенты:

$$\beta_n^{n-1} = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \beta_n^{n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{2}}, \alpha_n^n = \frac{3(2n^2 + 2n + 1)}{4}, \quad (53)$$

$$\alpha_n^{n+4} = \alpha_{n+4}^n = \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{4}, \quad (54)$$

$$\alpha_n^{n+2} = \alpha_{n+2}^n = \frac{(2n-1)\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2}. \quad (55)$$

Решалась конечная неоднородная система линейных уравнений (СЛУ):

$$\begin{aligned} a_{nk} \left[\left(\frac{2\pi k}{R} B \right)^2 + (1+4n)\sqrt{1+q^2} + \lambda B^2 \right] + \frac{1}{(1+q^2)B^2} \sum_{m=0}^p a_{mk} \alpha_{2n}^{2m} \\ + \frac{4\pi k B q}{R(1+q^2)^{\frac{1}{4}}} \sum_{m=0}^p b_{mk} \beta_{2n}^{2m+1} - \frac{2B^2}{R} (2 - \delta_{k,0}) \sum_{l=0}^p a_{nl} = c_{nk}, k = 0, 1, 2, \dots, p \\ b_{nk} \left[\left(\frac{2\pi k}{R} B \right)^2 + (3+4n)\sqrt{1+q^2} + \lambda B^2 \right] + \frac{1}{(1+q^2)B^2} \sum_{m=0}^p b_{mk} \alpha_{2n+1}^{2m+1} \\ + \frac{4\pi k B q}{R(1+q^2)^{\frac{1}{4}}} \sum_{m=0}^p a_{mk} \beta_{2n+1}^{2m} = d_{nk}, k = 1, 2, 3, \dots, p \end{aligned} \quad (56)$$

Оценка неоднородной части была произведена следующим образом. Из (56) видно, что для конечного решения системы коэффициенты должны иметь следующий порядок убывания: $a_{nk} \sim \frac{1}{n^2 k^2}, b_{nk} \sim \frac{1}{n^2 k^2}$. Основываясь на этом предположении, неоднородность:

$$\begin{aligned}
c_{nk} &= k_4 \sum_{l=p+1}^{\infty} a_{nl} = \frac{1}{(p+1)n^2}, n < p-1, \\
c_{nk} &= k_4 \sum_{l=p+1}^{\infty} a_{nl} + k_2 \alpha_{2(p-1)}^{2(p+1)} a_{p+1,k} = \frac{1}{(p+1)n^2} + k_2 \alpha_{2(p-1)}^{2(p+1)} \frac{1}{(p+1)^2 k^2}, n = p-1 \\
c_{nk} &= k_4 \sum_{l=p+1}^{\infty} a_{nl} + k_2 \left(\alpha_{2p}^{2(p+1)} a_{p+1,k} + \alpha_{2p}^{2(p+2)} a_{p+2,k} \right) = \\
&= \frac{1}{(p+1)n^2} + k_2 \left(\alpha_{2p}^{2(p+1)} \frac{1}{(p+1)^2 k^2} + \alpha_{2p}^{2(p+2)} (p+2)^2 k^2 \right), n = p
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
d_{nk} &= 0, n < p-1 \\
d_{nk} &= k_2 b_{p+1,k} \alpha_{2(p-1)}^{2(p+1)} = k_2 \frac{1}{(p+1)^2 k^2} \alpha_{2(p-1)}^{2(p+1)}, n = p-1 \\
d_{nk} &= k_2 (b_{p+1,k} \alpha_{2p}^{2(p+1)} + b_{p+2,k} \alpha_{2p}^{2(p+2)}) + k_3 a_{p+1,k} \beta_{2p+1}^{2(p+1)} = \\
&= k_2 \left(\frac{1}{(p+1)^2 k^2} \alpha_{2p}^{2(p+1)} + \frac{1}{(p+2)^2 k^2} \alpha_{2p}^{2(p+2)} \right) + k_3 \frac{1}{(p+1)^2 k^2} \beta_{2p+1}^{2(p+1)}, n = p
\end{aligned} \tag{58}$$

Было проведено исследование устойчивости решения линейной системы по отношению к изменению параметра обрезки p (фактически решалась система линейных уравнений размера $n_0 * n_0, n_0 = (p+1)^2 + p(p+1)$). Найдено граничное значение p , при котором решение системы имеет физический смысл (не накапливаются вычислительные погрешности): $p = 38$. В дальнейшем использовалось $p = 35$, чтобы был запас по отношению к изменению численных параметров задачи.

Проведено исследование для различных приближения коэффициентов a_{nk}, b_{nk} при больших n, k . Действительно выбранное приближение наиболее физично рис. (??).

В. Техническая часть

Для решения СЛУ применялся численный алгоритм, основанный на LU -разложении матрицы.

$$\begin{aligned}
Ax &= b, \\
A &= LU, \\
LUx &= b.
\end{aligned}$$

К решению x^0 , полученному таким способом применялось итерационное улучшение, т.е. решалось уравнение:

$$\begin{aligned}
Ax^1 &= b^1, \\
b^1 &= b - Ax^0.
\end{aligned}$$

Получалось отклонение малое, из чего можно сделать вывод о корректности решения задачи с использованием примененного численного алгоритма.

С. Оценка точности используемого метода

Была рассмотрена задача, имеющая точное решение: есть две квантовые проволоочки, описываемые потенциалом (5) и гармонический потенциал вдоль y :

$$u(y) = u_0 \frac{y^2}{a^2}. \tag{59}$$

Безразмерное уравнение Шредингера:

$$-B^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + y^2 \psi + \alpha(\delta(x) + \delta(x - R)) = -\lambda B^2 \psi, \quad (60)$$

$$\frac{\alpha}{B^2} = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\psi(0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=R} = \psi(R). \quad (61)$$

Собственные функции основного состояния:

$$\psi(x, y) = A \cosh(x - R/2) \exp(-y^2/2) \quad (62)$$

и собственное значение:

$$\lambda = -1/2. \quad (63)$$

Полученное численное решение сравнивалось с точным.

В сечении $x = 0$ получаются следующие зависимости $|\psi(y)|^2$ от y для различных λ рис. (3). По срыву в решении при $\lambda \sim 0.4$ выделяется собственное значение параметра λ .

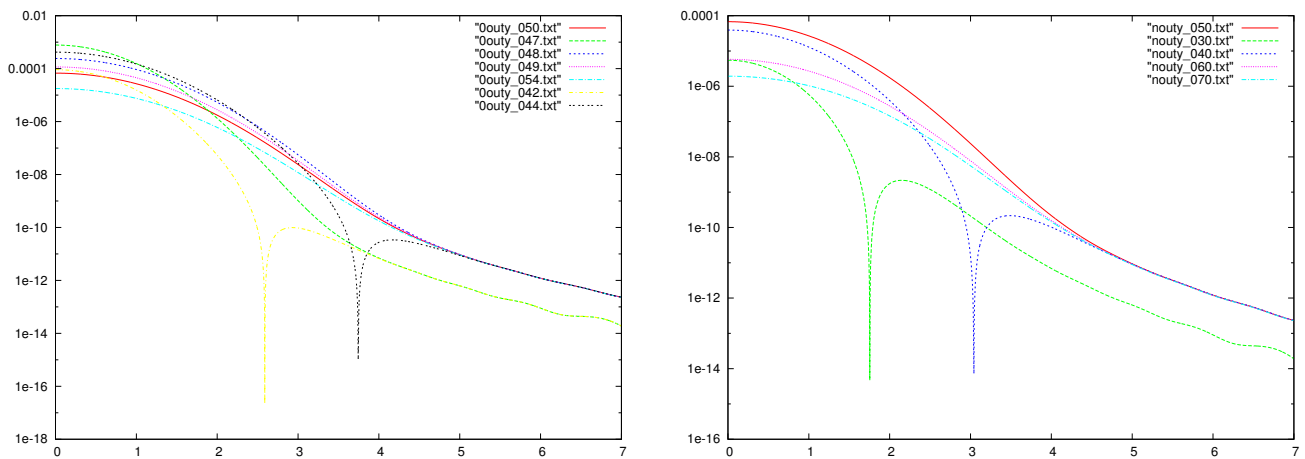


Рис. 3: Сечение $x = 0$ для различных λ . Особенность в волновой функции при уменьшении параметра λ от собственного значения $\lambda=0.5$. Слева мелкий шаг по λ , справа - больше

В сечении $y = 0$ отклонение от точного решения больше рис. (4), чем в сечении $x = 10$.

Для уменьшения осцилляций проведена следующая процедура. Полученные из решения системы численно коэффициенты уравнения приближались следующей зависимостью:

$$a_{0k}^{appr} = \frac{1}{a + bk^2}. \quad (64)$$

Вид этой зависимости разумен. Коэффициенты разложения в ряд Фурье $\cosh(x - R/2)$:

$$a_{0k}^{ex} = 2 \int_0^{R/2} \cosh(x - R/2) \cos \frac{2\pi kx}{R} dx = 2 \frac{(-1)^k - \cosh R/2}{1 + (2\pi k/r)} k \neq 0. \quad (65)$$

При рассмотрении приближения функции $f(x) = \cosh(x - R/2)$ конечным рядом Фурье $F[f(x)] = \sum_{k=0}^{k_{max}} a_{0k}^{ex} \cos \frac{2\pi kx}{R}$ осцилляции в центре исчезают при значении обрезающего параметра $k_{max} \sim 200$.

Коэффициент $P_0(x)$ брался в виде:

$$P_0(x) = \sum_{k=0}^p a_{0k}^{comp} \cos \frac{2\pi kx}{R} + \sum_{k=p+1}^{p_{max}} a_{0k}^{appr} \cos \frac{2\pi kx}{R}, \quad (66)$$

где a_{0k}^{comp} - коэффициенты, полученные из численного решения системы, a_{0k}^{appr} - получены аппроксимацией вида (64) по коэффициентам a_{0k}^{comp} . На рис. (4) приведена зависимость вида решения от параметра обрезки. Решение существенно сглаживается, приближается к точному решению при увеличении членов аппроксимационного ряда, но точно к решению не сходится из-за того, что решалась все-таки конечная система уравнений.

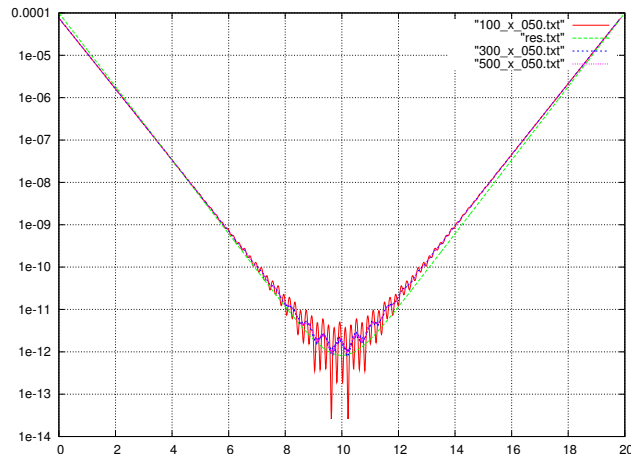


Рис. 4: Сечение $y = 0$ с учетом различного количества членов в аппроксимационном ряду. Зеленое - точное решение. Красное - без учета аппроксимации, синее - 300 слагаемых в аппроксимационном ряду.

D. Результаты (решение поставленной задачи)

Были взяты следующие численные параметры для УШ (7): $a = 140\text{\AA}$, $E = -10^{-4}eV$, $u_0 = |E|$, $H_R = 10\text{Tesla}$ (как и при численной оценке методом траекторий в соответствующем разделе)

Для УШ в безразмерном виде (47) коэффициенты имеют следующие значения: $q = 1.31$, $B = 1.22$.

Был проведен следующий анализ на основании аналогии с результатами, получаемыми для задачи с точным решением.

1. Найдено приближенно собственное значение $\lambda \sim 0.2 - 0.3$ по появлению особенности в поведении волновой функции при уменьшении параметра λ (рис. (5)).

Сечение волновой функции и $|\psi|^2$ при $\lambda = 0.2$ плоскостью $y = 0$ выглядит следующим образом рис. (6).

2. Уточнено значение λ после введения аппроксимационного ряда - при $\lambda = 0.3$ волновая функция, как и при уменьшении λ от 0.2 имеет не нужное поведение (рис. (7)).

Заметим, что у волновой функции на рис. (6) появляются осцилляции при увеличении y . Это связано с тем, что для построения волновой функции использовалась аппроксимация только для первых коэффициентов $P_n(x)$, $Q_n(x)$ (брались $n = 0, 1, 2, 3, 4$). Последующие коэффициенты на два порядка меньше, но при больших y , за которые отвечают $\phi_n(x)$ с большими n , существенны. В интересующей нас области малых y полученная численно волновая функция удовлетворяет физическим условиям достаточной гладкости.

V. Возможные реализации туннелирования в магнитном поле

1. Задача о туннелировании между краевыми состояниями в квантовом эффекте Холла (ее занимается Долгополов). Там происходит туннелирование между различными уровнями Ландау (из-за того, что есть магнитное поле параболы перекошены). Тут никакого резонанса экспериментально не наблюдалось, но и потенциала, как нашей задаче нет. К тому же нарушается когерентность при туннелировании, так как частица должна сбросить часть своего импульса для изменения своей координаты (из-за магнитного поля). А этот сброс импульса происходит на примесях в среде.
2. Одна из возможных реализаций образца для нашей задачи рис. (?). Создается двумерный электронный слой. Рассматривается место на краю. Вырезается тоненькая полосочка. Наносится металлическая пленка на края полоски (Разобраться с уровнями энергии в такой системе).
3. Еще один возможный способ постановки эксперимента для выявления данного эффекта. На подложке изготавливаются две квантовые проволоки и измеряется сопротивление рис. (?). Если есть резонанс, то есть волновая функция размыта, то будет происходить рассеяние на примесях между двумя проволочками, при этом проводимость понизится. Так как ожидается, что резонанс будет наблюдаться при различных значениях расстояния между проволочками, то зависимость проводимости от этого расстояния должна

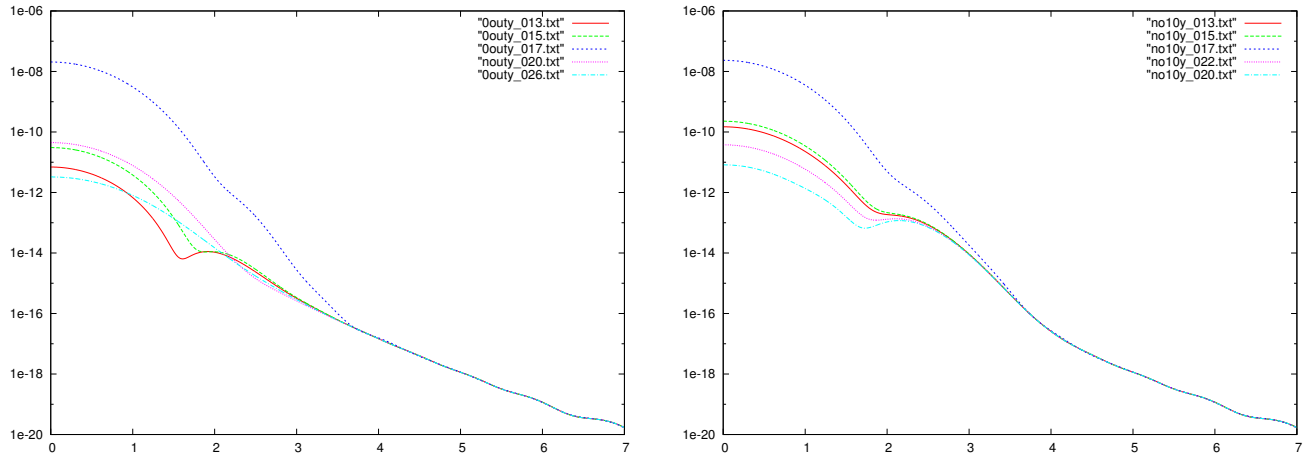


Рис. 5: Сечение $x = 0$ для функции $|\psi|^2$ для различных λ . Появление особенности в волновой функции при уменьшении параметра λ (разным кривым соответствуют разные значения λ). Слева - без учета аппроксимационных коэффициентов, справа - с учетом аппроксимации на 1000 слагаемых. Слева:

$\lambda=0.13$ - красная,
 $\lambda=0.15$ - зеленая,
 $\lambda=0.17$ - синяя,
 $\lambda=0.20$ - розовая,
 $\lambda=0.26$ - голубая;

Справа:

$\lambda=0.13$ - красная,
 $\lambda=0.15$ - зеленая,
 $\lambda=0.17$ - синяя,
 $\lambda=0.20$ - голубая,
 $\lambda=0.22$ - розовая.

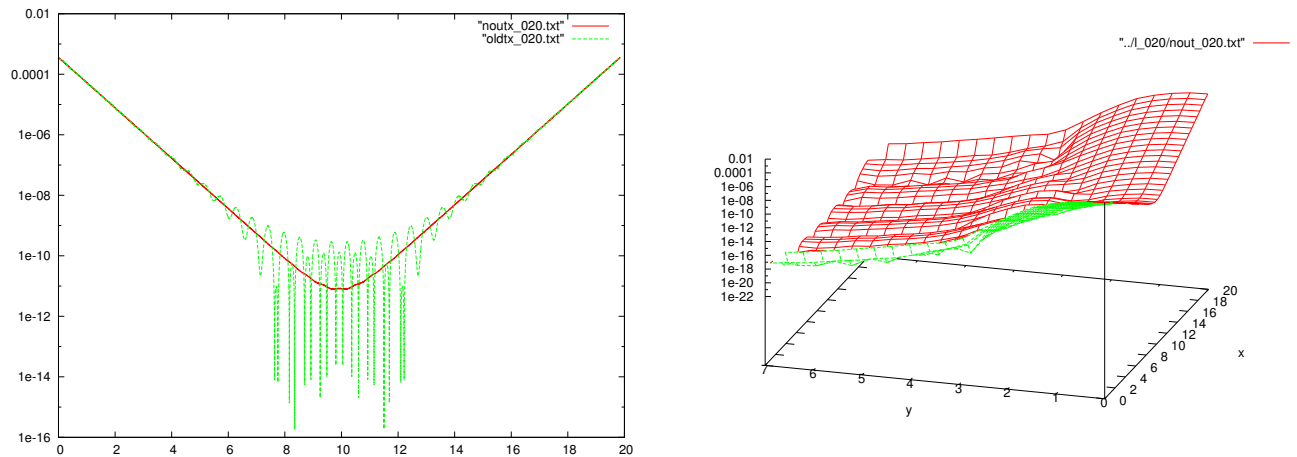


Рис. 6: Сечение $y = 0$ при $\lambda = 0.2$ с аппроксимацией (красная линия) и без нее (зеленая). Волновая функция при $\lambda = 0.2$ (с аппроксимацией коэффициентов) в логарифмическом масштабе по z

быть осциллирующей, что экспериментаторы могут обнаружить. Но при увеличении расстояния между проволоками нужно учитывать диссипацию. Проведем классическую оценку. Рассмотрим осциллятор с трением $mx'' + m\gamma x'$. Трение не играет значительной роли при условии $\gamma t < 1$, где t - время классического движения при туннелировании между ямами. Одновременно размытие уровня в системе $\delta E \sim \hbar\gamma$. Тогда

$$\frac{\delta E}{E} < \frac{1}{A_{WKB}}. \quad (67)$$

Для реальной системы $\delta E/E \sim 0,01$. Используя параметры, взятые раньше при численном решении

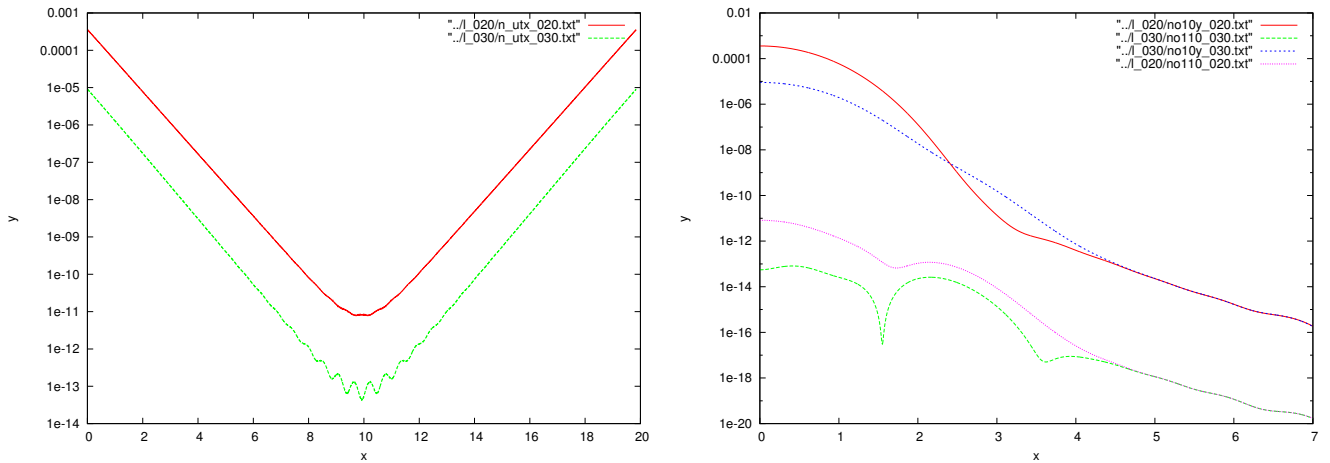


Рис. 7: Сечения $y = 0$, $x = 0$, $x = 10$ при $\lambda = 0.2$ и $\lambda = 0.3$. Слева сечение $y = 0$, зеленая линия - $\lambda = 0.3$, красная - $\lambda = 0.2$. Справа - сечения $x = 0$, красная линия с $\lambda = 0.2$, синия - $\lambda = 0.3$, сечения $x = 10$, розовая линия с $\lambda = 0.2$, зеленая - $\lambda = 0.3$.

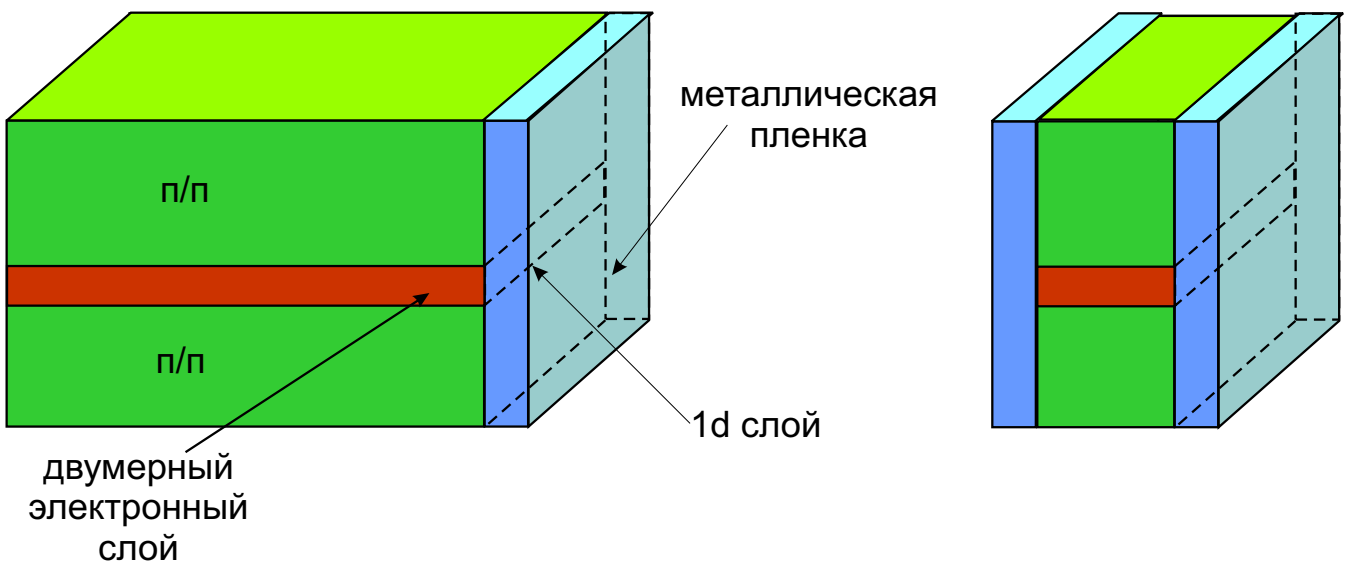


Рис. 8: Образец для измерения евклидова резонанса в магнитном поле

уравнения получаем $R \sim 3000 \text{ \AA}$.

4. Есть возможность измерять волновую функцию с помощью туннелирования из двумерной электронной системы на проволочку (эксперимент английской группы Бетона и Ивеса). Для этого включается магнитное поле вдоль проволочки. Можно ввести вторую проволочку и перпендикулярное магнитное поле. Так можно померить, будет ли наш резонанс. Но возникает вопрос не разрушит ли поле вдоль проволочки, которое необходимо для измерения нашего эффекта?

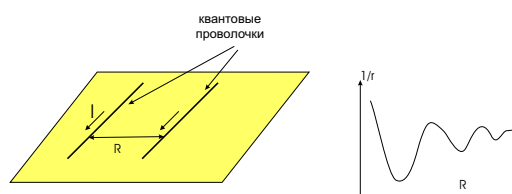


Рис. 9: Две квантовые проволочки на подложке

VI. Заключение

Остается сделать эксперимент, чтоб проверить существование, а точнее возможность возникновения данного эффекта. При постановке эксперимента нужно учесть неоднородность образца - между квантовыми проволочками будет возникать еще модулирующий потенциал (!!!картинка), из-за которого может возникнуть дополнительный эффект, сходный с эвклидовым резонансом или с резонансом в прыжковой проводимости. Для предсказания этого эффекта можно ввести в численную задачу дополнительный модулирующий потенциал между проволочками. За помощь в работе благодарю своего научного руководителя Шура Льва Николаевича, Ивлева Бориса, который предложил задачу, и всех-всех людей, которые окружали меня на протяжении последних трех месяцев, всех с кем пыталась поделиться темой своей дипломной работы, и кто мне говорил, что я в этом ничего не понимаю. Они очень помогли, ведь человек может себя совершенствовать, работать, только когда осознает собственную ничтожность. В осознании последней особая благодарность Фейгельману Михаилу Викторовичу и Иорданскому Сергею Викторовичу. Отдельное спасибо нашей "хозяйке" библиотеки Людмиле Николаевне. За введение в круг возможных экспериментов для изучения р.т. в одномерных системах спасибо Владимиру Попову (ИПТМ). За помощь с изучением синтаксиса языка *Fortran*, на котором написана программа, о обсуждение результатов ее работы нужно поблагодарить Крашакова Сергея Александровича. За помощь по разным вопросам, связанным с компьютером, спасибо Меньшутину Антону.

Мир тесен и бывает, что судьбы людей, находящихся на гигантских расстояниях, связаны так же, как и разделенные огромным, по квантовым меркам, расстоянием две проволочки, между которыми возможно удивительное туннелирование при наложении магнитного поля и внешнего потенциала.

VII. Список литературы

-
- ¹ IvlevMagn) V. Ivlev Tunneling in a magnetic field
 - ² Л. Ландау, . Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, (М.: Физматлит, 2002. - 808 с.).
 - ³ Ивлев, Письма в ЖЭТФ, **41**, вып.3, стр. 116-118 (1985).
 - ⁴ Б.И. Ивлев, В.И. Мельников, ЖЭТФ, **90**, стр. 2208-2224 (1986).
 - ⁵ В.Г. Попов, Ю.В. Дубровский, Ж.-К. Портал, ЖЭТФ, **129**, стр. 1-9.
 - ⁶ Шкловский, Письма в ЖЭТФ, **36**, вып.2, стр. 43-46 (1982).
 - ⁷ Б.И. Шкловский, А.Л. Эфрос, ЖЭТФ, **84**, вып.2, стр. 811-822 (1983).