Московский Физико-Технический Институт
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Дипломная работа
На степень бакалавра
Студента 4 курса

Алексеева О.В.

Операторное разложение и Рекуррсионные соотношения для конформных блоков В модели Весса-Зумино.

Научный руководитель
Белавин А.А.

Москва, 2007

Содержание

1 Введение.

Конформная симметрия налагает ряд ограничений на локальную операторную алгебру в двумерном пространстве. Трансформационные свойства полей при локальных конформных преобразованиях описываются представлением алгебры Вирасоро, а центральный заряд этой алгебры является параметром теории. Важную роль в конформной теории поля играет конформный блок, или амплитуда рассеяния в промежуточном канале, который представляет собой вклад промежуточных амплитуд всех полей принадлежащих к определенному конформному классу, в четырехточечную функцию заданных полей. Условие ассоциативности операторной алгебры может быть сформулировано в виде бесконечной системы уравнений, куда входит конформный блок. Предполагается, что эта система уравнений полностью фиксирует операторную алгебру, т.е. позволяет найти весь спектр полей теории, а так же структурных констант. Поэтому, для решения задачи о нахождении спектра теории, необходимо знать конформный блок.

Решение задачи о вычислении конформного блока может быть реализовано несколькими методами. Во-первых, четырехточечный конформный блок является функцией одного проективного параметра z. В принципе, конформный блок можно искать в виде разложения в ряд по этому проективному параметру. При этом на каждом уровне необходимо будет решать систему уравнений, возникающую из требования конформной инвариантности вектора состояния. К сожалению, этот способ не очень удобен, т.к. количество уравнений в системе быстро растет с уровнем. Поэтому, другой способ основан на изучении аналитических свойств конформного блока [1]. Из общих соображений, конформный блок, как функция размерности поля Δ в промежуточном канале, имеет простые полюса в точках $\Delta = \Delta_{mn}$, где Δ_{mn} определяется формулой Каца. В этих точках представление алгебры Вирасоро становится вырожденным. Вычеты в этих полюсах пропорциональны конформным блокам, в которых в промежуточном канале распространяется поле с размерностью нуль вектора вырожденного представления. Эти аналитические свойства конформного блока позволяют написать рекуррентное соотношение для конформного блока, которое позволяет вычислять эту функцию в виде суммирования полюсов по центральному заряду. При этом регулярная часть конформного блока может быть найдена взятием классического предела $c \to \infty$.

В теории Весса-Зумино бесконечная калибровочная симметрия проявляется в наличии локальных токов, которые, по аналогии с обычной конформной теорией, позволяют развить бутстрапный подход.

Работа построена следующим образом. В части 2 мы исследуем задачу о нахождении конформного блока в конформной теории поля. Мы найдем эту функцию двумя способами, решая уравнения, возникающие из требования конформной инвариантности состояний на каждом уровне. Затем мы получим рекуррентную формулу для вычисления конформного блока. В части 3 мы исследуем модель Весса-Зумино. Мы найдем какие ограничения на операторное разложение локальных полей накладывает требование инвариантности относительно алгебры токов. Эти ограничения позволяют вычислить коэффициенты операторного разложения. После этого, используя найденные коэффициенты, мы найдем конформный блок для первых двух уровней. Затем мы исследуем аналитические свойства конформного блока модели Весса-Зумино. Это позволит найти рекуррентное соотношение для вычисления конформного блока в виде суммирования полюсов по параметру t теории.

2 Конформный блок в конформной теории поля.

2.1 Операторное разложение.

Локальные поля в конформной теории поля распадаются на конформные классы, которые отвечают представлению со старшим весом прямого произведения двух алгебр Вирасоро. Генераторы алгебры Вирасоро задаются следующими коммутационными соотношениями

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \qquad (1)$$

Центральный заряд алгебры c является параметром конформной теории. Каждому старшему вектору представления в каждом классе отвечает локальное поле $\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z})$. Будем рассматривать такие представления, которые распадаются на прямое произведение голоморфного и антиголоморфного секторов. Поэтому, в дальнейшем мы везде будем писать только голоморфную часть, антиголоморфная часть восстанавливается тривиальным образом. Локальные поля, отвечающие старшему вектору (примарные поля), подчиняются условиям $L_n\Phi_\Delta(z) = 0, \ \ n > 0$ и $L_0\Phi_\Delta(z) = \Delta\Phi_\Delta(z)$. Поля, принадлежащие данному конформному классу, но не являющиеся примарными мы будем называть потомками. Операторное разложение двух полей

$$\Phi_{\Delta_1}(z_1)\Phi_{\Delta_2}(z_2) = \sum_i C^{\Delta_i}_{\Delta_1,\Delta_2}(z_1-z_2)^{\Delta_i-\Delta_1-\Delta_2}[\Phi_{\Delta_i}(z_2)] \qquad (2)$$

включает бесконечную сумму по всем конформным классам локальных полей. Скобками в формуле обозначен вклад всех полей, принадлежащих данному конформному классу. Требование конформной инвариантности полностью определяет коэффициенты, с которыми поля, принадлежащие данному конформному классу, входят в операторное разложение.
Четырехточечная функция

$$\langle \Phi_{\Delta_4}(z_4)\Phi_{\Delta_3}(z_3)\Phi_{\Delta_{2(z_2)}}\Phi_{\Delta_1}(z_1)\rangle \tag{3}$$

является функцией одного проективного параметра $z = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4)/(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)$. Действительно, с помощью проективного преобразования, мы можем поместить три точки z_1, z_3 и z_4 в 0, 1 и ∞.
Принимая во внимание операторное разложение (2), четырехточечная функция может быть представлена следующим образом

$$\langle \Phi_{\Delta_4}(\infty)\Phi_{\Delta_3}(1)\Phi_{\Delta_{2(z)}}\Phi_{\Delta_4}(0)\rangle = \sum_k G_k \mathcal{F}(c, \Delta_i, \Delta_k, z)\mathcal{F}(c, \bar{\Delta_i}, \bar{\Delta_k}, \bar{z}) \tag{4}$$

где $\mathcal{F}(c, \Delta, \Delta_i, z)$ - конформный блок, включающий в себя вклад всех потомков поля Φ_Δ в четырехточечную функцию.
Произвольный вектор на уровне N может быть представлен в виде

$$|k\rangle \equiv \mathcal{L}_{-\mathbf{k}}\Phi_\Delta = L_{-k_1}L_{-k_2}...L_{-k_N}\Phi_\Delta\ ,\ \mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_N)\ ,\ k_1 \leqslant k_2 \leqslant ... \leqslant k_N \tag{5}$$

тогда операторное разложение, включающее в себе сумму по потомкам в явном виде для определенного конформного класса

$$\Phi_1(z)\Phi_2(0) = z^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2}\sum_{N=0}^{\infty} z^N |N\rangle \tag{6}$$

где $|N\rangle = \sum_k \beta(k)\mathcal{L}_{-\mathbf{k}}|\Phi_\Delta\rangle$ представляет сумму всех потомков данного конформного класса на уровне N в операторное разложение, а коэффициенты $\beta(k)$, появляющиеся в операторном разложении, однозначно фиксируются требованием конформной инвариантности обеих частей равенства (6).

2.2 Уравнения цепочки.

Для нахождения уравнений на коэффициенты необходимо рассмотреть действие генераторов алгебры L_k на произведение двух полей

$$L_k(\Phi_{\Delta_1}(z)\Phi_{\Delta_2}(0)) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\xi T(\xi)\xi^{k+1}\Phi_{\Delta_1}(z)\Phi_{\Delta_2}(0) \tag{7}$$

где контур C охватывает точки z и 0 на комплексной плоскости. Интеграл сводится к интегралу по маленьким окружностям вокруг этих точек. В результате, мы получаем

$$L_k(\Phi_{\Delta_1}(z)\Phi_{\Delta_2}(0)) = (z^{k+1}\frac{\partial}{\partial z} + (k+1)z^k\Delta_1)\Phi_{\Delta_1}(z)\Phi_{\Delta_2}(0) + \Phi_{\Delta_1}(z)L_k\Phi_{\Delta_2}(0) \tag{8}$$

отметим, что если $k = 0$ или $k > 0$ то второй член в правой части (8) даёт Δ_2 либо 0 соответственно. Подставляя в это уравнение разложение (6) мы получим

$$L_k|N\rangle = [\Delta + k\Delta_1 - \Delta_2 + N - k]|N - k\rangle \tag{9}$$

из этих уравнений, только уравнения для $k = 1$ и $k = 2$ являются независимыми, в то время как остальные можно получить из этих двух с помощью коммутационных соотношений алгебры Вирасоро. Отметим, что уравнения (9) имеют вид рекурсии, поэтому вектор состояния $|N\rangle$ может быть найден решением системы уравнений последовательно, уровень за уровнем. Таким образом, возможно определение всех коэффициентов $\beta(\mathbf{k})$ операторного разложения.
Продемонстрируем возможности такого подхода на примере первых двух уровней. Для векторов

$$|1\rangle = \beta(1)L_{-1}|\Delta\rangle \tag{10}$$

$$|1\rangle = (\beta(1,1)L_{-1}^2 + \beta(2)L_{-2})|\Delta\rangle \tag{11}$$

уравнения цепочки (9) приводят к

$$\begin{aligned} 2\Delta\beta(1) &= \Delta + \Delta_1 - \Delta_2 \\ 2(2\Delta+1)\beta(1,1) + \beta(2) &= (\Delta + \Delta_1 - \Delta_2 + 1)\beta(1) \\ 6\Delta\beta(1,1) + (4\Delta + \frac{c}{2})\beta(2) &= \Delta + 2\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned} \tag{12}$$

Эта система уравнений может быть решена и, таким образом, коэффициенты β на первых двух уровнях определены. Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
\beta(1) &= \frac{\Delta+\Delta_1-\Delta_2}{2\Delta} \\
\beta(2) &= \frac{\frac{\beta(1)(\Delta+\Delta_1-\Delta_2+1)}{2(2\Delta+1)}-\frac{\Delta+2\Delta_1-\Delta_2}{6\Delta}}{\frac{3}{2(2\Delta+1)}-\frac{4\Delta+c/2}{6\Delta}} \\
\beta(1,1) &= \frac{\Delta+2\Delta_1-\Delta_2}{6\Delta}-\frac{4\Delta+c/2}{6\Delta}\beta(2)
\end{aligned} \tag{13}$$

Все эти коэффициенты являются рациональными функциями от Δ, Δ_1, Δ_2 и центрального заряда c. Отметим, что эти коэффициенты имеют полюса в точке $\Delta = 0$, а коэффициенты на втором уровне ещё и полюса в точках, определяемых условием равенства нулю детерминанта матрицы, когда Δ и c удовлетворяют уравнению

$$(2\Delta+1)c + 2\Delta(8\Delta-5) = 0 \tag{14}$$

Эти сингулярности отражают неоднозначность решения уравнений цепочки (9) при определенной связи между Δ и c. При этих значениях, решения либо вовсе не существуют, либо они неоднозначны при некоторых дополнительных условиях между размерностями полей Δ, Δ_1 и Δ_2. Например, если условие (14) выполнено, то решение системы уравнений существует, если

$$\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{\Delta(\Delta-1)}{2(2\Delta+1)}-\frac{3(\Delta_1-\Delta_2)^2}{2(2\Delta+1)} = 0 \tag{15}$$

Такая неоднозначность связана с тем, что при определенной связи между значениями Δ и c представление алгебры Вирасоро становится приводимым. В модуле, порождаемом старшим вектором размерности Δ, возникает подмодуль с новым старшим вектором. Такое вырождение неприводимого представления будет наблюдаться и на более высоких уровнях, если между размерностью поля и центральным зарядом существует связь, определяемая формулой Каца. Поэтому, коэффициенты операторного разложения β, начиная с уровня N будут иметь простые полюса в точках $\Delta = \Delta_{mn}(\mathrm{c})$, $mn = N$ и $m, n > 0$. В этих точках решение системы (9) становиться неоднозначным, и для его существования необходимы дополнительные условия на размерности полей Δ, Δ_1 и Δ_2, подобные (15). Эти условия определяют правила слияния полей Φ_{Δ_1} и Φ_{Δ_2}.
Теперь, зная коэффициенты операторного разложения на первых двух уровнях, мы можем легко найти первые два члена разложения конформного блока по проективному параметру

$$\mathcal{F}(\Delta,\Delta_i,c,z) = z^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}\sum_{N=0}^{\infty} F_N(\Delta,\Delta_i,c)z^N = z^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}\sum_{N=0}^{\infty}\langle N|N\rangle z^N \tag{16}$$

которые оказываются равны

$$\begin{aligned}
F^1 &= \frac{(\Delta+\Delta_2-\Delta_1)(\Delta+\Delta_4-\Delta_2)}{2\Delta} \\
F^2 &= \frac{(\Delta+\Delta_2-\Delta_1)(\Delta+\Delta_2-\Delta_1+1)(\Delta+\Delta_3-\Delta_4)(\Delta+\Delta_3-\Delta_4+1)}{4\Delta(2\Delta+1)} + \\
&+ \frac{2\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{\Delta(\Delta-1)}{2(2\Delta+1)}-\frac{3(\Delta_1-\Delta_2)^2}{2(2\Delta+1)}\right)^2\left(\frac{\Delta_3+\Delta_4}{2}+\frac{\Delta(\Delta-1)}{2(2\Delta+1)}-\frac{3(\Delta_3-\Delta_4)^2}{2(2\Delta+1)}\right)^2}{c+\frac{2\Delta(8\Delta-5)}{2\Delta+1}}
\end{aligned} \tag{17}$$

Мы продемонстрировали, как конформная симметрия фиксирует коэффициенты операторного разложения, тем самым явно определяя общий вид вектора на уровне N. Знание этого вектора позволяет находить коэффициенты разложения конформного блока по проективному параметру. Однако такой подход становиться довольно трудоемким с увеличением уровня. Поэтому было бы удобно построить несколько другой способ вычисления конформного блока, который базируется на аналитических свойствах конформного блока, как функции параметров Δ, Δ_i и c. Этот подход позволит находить конформный блок по рекурсии.

2.3 Аналитические свойства операторного разложения.

Прежде всего, заметим, что при стремлении размерности промежуточного поля Δ к одному из специальных значений Δ_{mn}, определяемых формулой Каца, система уравнений (9) не имеет однозначного решения, так как, детерминант правой части этой системы обращается в нуль. Коэффициенты операторного разложения имеют простые полюса в этих точках. Прямой подстановкой в уравнения цепочки (9) вектора

$$|N = mn\rangle = \frac{X_{mn} D_{mn} |\Delta\rangle}{\Delta - \Delta_{mn}} \tag{18}$$

этим уравнениям удовлетворяет, то есть является решением этих уравнений на уровне $N = mn$. В формуле (**??**) представлен новый оператор D_{mn}, который переводит вектор старшего веса в нуль вектор на уровне $N = mn$. В частности

$$\begin{aligned} D_{12} &= L_{-1}^2 + b^2 L_{-2} \\ D_{13} &= L_{-1}^3 + 4b^2 L_{-2} L_{-1} + 2b^2(1 + 2b^2) L_{-3} \end{aligned} \tag{19}$$

Вычеты в полюсах X_{mn} уравнениями цепочки не определяются. Для их определения рассмотрим трехточечную функцию, причем одно из полей вырожденно на уровне mn.

$$\langle \Phi_\Delta D_{mn}^+ \Phi_1(x) \Phi_2 \rangle = x^{mn} Y_{mn} \langle \Phi_\Delta \Phi_1(x) \Phi_2 \rangle \tag{20}$$

С другой стороны, мы можем применить операторное разложение (2) между двумя невырожденными полями, а затем применить асимптотический вид вектора на уровне $N = mn$. Тогда получим

$$\langle \Phi_\Delta D_{mn}^+ \Phi_2(x) \Phi_3 \rangle \to \frac{C_{2,\ 3}^{\Delta} x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 + mn} X_{mn}}{\Delta - \Delta_{mn}} \langle \Phi_\Delta D_{mn}^+ D_{mn} \Phi_\Delta \rangle = C_{2,\ 3}^{\Delta} x^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2 + mn} X_{mn} r_{mn} \tag{21}$$

где коэффициенты r_{mn} это логарифмические нормы сингулярных векторов, определяемые следующим образом

$$\langle \Delta | D_{mn}^+ D_{mn} | \Delta \rangle = r_{mn} (\Delta - \Delta_{mn}) \tag{22}$$

При этом при выборе соответствующей нормировки полей, имеем

$$\langle \Phi_\Delta \Phi_1(x) \Phi_2 \rangle = \frac{C_{2,\ 3}^{\Delta}}{x^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta}} \tag{23}$$

Сравнивая (21) с (20) получаем следующее выражение определяющее вычеты нуль вектора в полюсах

$$X_{mn} = \frac{Y_{mn}}{r_{mn}} \tag{24}$$

Для вычисления коэффициента Y_{mn} заметим, что оператор D_{mn} является полиномом по генераторам алгебра Вирасоро $D_{mn} = L_{-1}^{mn} + ...$ При вставке этого оператора в корреляционную функцию мы получим полином от размерностей полей, причем максимальная степень этого полинома равна mn

$$P_{mn} = (\Delta_1 - \Delta_2)^{mn} + ... \tag{25}$$

Вводя новый параметр λ, связанный с размерностью поля Δ соотношением

$$\Delta = \frac{Q^2}{4} - \lambda^2 \tag{26}$$

и переходя от переменных Δ к новым переменным λ мы получим перед новым полиномом нормировочный множитель 2^{mn}. Далее заметим, что хотя мы и не знаем общего вида этого полинома, но мы знаем все его нули. Действительно, левая часть равенства (20) тождественно обращается в нуль, когда выполняется условие $\lambda_1 \pm \lambda_2 = \lambda_{kl},\ k \in [-m+1, ..., 1-m],\ \ l \in [-n+1, ..., 1-n]$. При этом заметим, что количество нулей в точности совпадает со степенью полинома, то есть этот полином имеет вид

$$P_{mn}(\lambda_1, \lambda_2) = \prod_k \prod_l (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{kl}) \prod_k \prod_l (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{kl}) \tag{27}$$

Поэтому вычеты в полюсах в

$$X_{mn} = \frac{2^{-mn} P_{mn}(\lambda_1, \lambda_2)}{r_{mn}} \tag{28}$$

Первые несколько коэффициентов r_{mn} несложно вычислить напрямую, используя только операторную алгебру и явный вид сингулярных векторов (19)

$$\begin{aligned} r_{12} &= -4b^{-1}(1 - b^2)(1 + b^2)(1 + 2b^2) \\ r_{13} &= 24b^{-1}(1 - 2b^2)(1 - b^2)(1 + b^2)(1 + 2b^2)(1 + 3b^2) \end{aligned} \tag{29}$$

В статье [2] была получена общая формула для этих коэффициентов

$$r'_{mn} = 2^{1-mn} \prod_{(k,l) \in [m,n]} (kb^{-1} + lb),\ k = -m+1, -m+3, ...m-1 \setminus 0,\ l = -n+1, -n+3...n-1 \setminus 0 \tag{30}$$

2.4 Аналитические свойства конформного блока.

Аналитические свойства, полученные ранее, позволяют не только понять аналитические свойства конформного блока как функции параметров Δ, Δ_i и c, но позволяют получить соотношение, позволяющее находить конформный блок путем суммирования по особенностям. Подставляя в определение конформного блока (16) асимптотический вид векторов (18)

$$\mathcal{F}(x,\Delta) \longrightarrow_{\Delta\to\Delta_{mn}} \frac{R_{mn}}{\Delta-\Delta_{mn}}\mathcal{F}(x,\Delta_{mn}+mn)R_{mn} = \frac{P_{mn}(\lambda_1,\lambda_2)P_{mn}(\lambda_3,\lambda_4)}{r_{mn}} \tag{31}$$

Для вычисления регулярной части конформного блока проще всего поступить следующим образом. Прежде всего, перейдем от суммирования полюсов по размерности полей к суммированию полюсов по центральному заряду. В этом случае спектр размерностей определяется положением полюсов детерминанта Каца, как функции центрального заряда. Полюса возникают, когда центральный заряд равен специальному значению c_{mn}

$$c_{mn} = 13-6(T_{mn}+T_{mn}^{-1}) \tag{32}$$

$$T_{mn} = (2\Delta+mn-1)+\frac{\sqrt{(2\Delta+mn-1)^2-(m^2-1)(n^2-1)}}{n^2-1} \tag{33}$$

Учитывая якобиан перехода к новым переменным, получаем соотношение

$$\mathcal{F}(c,\Delta,\Delta_i,x) = f(\Delta,\Delta_i,x)+\sum_{m,n}\frac{R'_{mn}(\Delta,\Delta_i)\mathcal{F}(c_{mn},\Delta+mn,\Delta_i,x)}{c-c_{mn}} \tag{34}$$

Регулярная часть конформного блока $f(\Delta,\Delta_i,x)$ может быть вычислена взятием предела $c\to\infty$. В этом пределе выживают только квазиклассические поля вида $|N\rangle = \alpha(k)L_{-1}^N|\Delta\rangle$, поэтому уравнения цепочки сильно упрощаются и их удаётся решить явно. В этом предел коэффициенты операторного разложения удовлетворяют уравнениям

$$\alpha(N) = \alpha(N-1)\frac{(\Delta+\Delta_1-\Delta_2+N-1)}{N(2\Delta+n-1)} \tag{35}$$

Решения которых записывается в виде

$$\alpha(N) = \frac{(\Delta+\Delta_1-\Delta_2)_N}{N!(2\Delta)_N} \tag{36}$$

В свою очередь, знание коэффициентов операторного разложения позволяет вычислить конформный блок в виде ряда по проективному параметру. В данном случае этот ряд имеет вид обыкновенного гипергеометрического ряда. Поэтому, c-рекуррсионное соотношение, позволяющее вычислять конформный блок путем суммирования полюсов по центральному заряду, принимает вид

$$\mathcal{F}(c,\Delta,\Delta_i,x) = x^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}F(\Delta+\Delta_1-\Delta_2,\Delta+\Delta_3-\Delta_4,2\Delta,x)+\sum_{m,n}\frac{R'_{mn}(\Delta,\Delta_i)\mathcal{F}(c_{mn},\Delta+mn,\Delta_i,x)}{c-c_{mn}} \tag{37}$$

Основная цель этой работы заключается в выявлении условий на коэффициенты операторного разложения модели Весса-Зумино, накладываемых требованием инвариантности относительно операторной алгебры, а так же в исследовании аналитических свойств этой теории и получении рекуррентного соотношения, аналогичного (37), в данной модели, позволяющего довольно просто находить коэффициенты разложения конформного блока на каждом уровне, путем суммирования по положениям особых векторов.

3 WZW модель.

3.1 Модель Весса-Зумино и алгебра Каца-Муди.

Действие для Модели Весса-Зумино в фиксированной точке

$$S^{WZW} = \frac{k}{16\pi}\int d^2x \mathrm{Tr}(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g) + k\Gamma \tag{38}$$

где дополнительный член в правой части называется членом Весса-Зумино и имеет вид

$$\Gamma(g) = \frac{k}{24\pi}\int d^3x \epsilon^{abc}\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_a g g^{-1}\partial_b g g^{-1}\partial_c g 2) \tag{39}$$

Матричные поля $g(x)$ принадлежат к группе $SU(2)\times SU(2)$. Действие Весса-Зумино инвариантно относительно преобразований

$$g(z,\bar{z}) \to \Omega(z)g(z,\bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \tag{40}$$

где $\Omega(z)$ произвольные матрицы, принадлежащие группе $SU(2)$. Эта симметрия порождает бесконечное количество сохраняющихся токов

$$\begin{aligned} J = J^a t^a &= -\frac{k}{2}\partial_z g g^{-1} \\ \bar{J} = \bar{J}^a t^a &= -\frac{k}{2}\partial_{\bar{z}} g g^{-1} \end{aligned} \tag{41}$$

которые являются генераторами группы $SU(2)$. Так как теория Весса-Зумино находится в фиксированной точке ренорм группы, то существует инвариантность относительно бесконечномерной группы координатных преобразований $z \to f(z)$. Любое локальное поле $\Phi(z,\bar{z})$ является тензорным полем, соответствующее некоторому представлению левой и правой группы симметрий. Определим примарные поля следующим образом: при произвольных конформных и калибровочных преобразованиях они преобразуются

$$\begin{aligned} g(z,\bar{z}) &\to \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)^{\Delta}\left(\frac{\partial \bar{f}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}} g(f,\bar{f}) \\ g(z,\bar{z}) &\to \Omega(z)g(z,\bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \end{aligned} \tag{42}$$

При этом операторное разложение тока с примарными полями и с самим собой, имеет вид

$$\begin{aligned} J^a(z)\Phi_j(z',\bar{z}') &= \frac{t^a_j}{z-z'}\Phi_j(z',\bar{z}') + ... \\ J^a(z)J^b(z') &= \frac{k}{2}\frac{q^{ab}}{(z-z')^2} + \frac{f^{ab}_c}{z-z'}J^c(z') + ... \end{aligned} \tag{43}$$

многоточие в правой части отвечает менее сингулярным членам, f^{ab}_c и q^{ab} являются структурными константами и метрическим тензором соответственно. Матрицы t^a_j соответствуют левому представлению спина j группы $SU(2)$. Операторное разложение примарных полей с тензором энергии импульса имеет стандартный вид. Операторное разложение позволяют написать тождества Уорда, которым должны удовлетворять все корреляционные функции примарных полей, в частности

$$\langle J^a(z)\Phi(z_1)...\Phi(z_N)\rangle = \sum_{j=1}^{N}\frac{t^a_j}{z-z_j}\langle\Phi(z_1)...\Phi(z_N)\rangle \tag{44}$$

Бесконечно малые вариации примарных полей, под действием группы калибровочных преобразований, генерируемых оператором J(z), можем записать в виде

$$J^a_n\Phi_j(z,\bar{z}) = \oint_z J^a(u)(u-z)^n t^a_j\Phi_j(z,\bar{z}) \tag{45}$$

где J^a_n представляют собой коэффициенты разложения тока $J(z)$ в ряд Лорана. Примарные поля удовлетворяют условиям

$$J^a_n\Phi_j(z,\bar{z}) = 0, \quad n>0, \qquad J^a_0\Phi_j(z,\bar{z}) = t^a_j\Phi(z,\bar{z}) \tag{46}$$

Коммутационные соотношения для операторов J_n^a немедленно следуют из(43) и определяют алгебру Каца-Муди

$$[J_n^a, J_m^b] = f_c^{ab} J_{n+m}^c + \frac{k}{2} n q^{ab} \delta_{n+m,0} \tag{47}$$

причем k играет роль центрального заряда.
Модель Весса-Зумино имеет важную специфическую особенность, а именно, тензор энергии импульса выражается квадратично через токи

$$(k+2)T(z) =: J^a(z) J^a(z) : \tag{48}$$

следовательно, между генераторами конформных и калибровочных преобразований справедливо соотношение

$$(k+2)L_n = \sum : J_m^a J_{n-m}^a : \tag{49}$$

Так как тензор энергии импульса выражается через токи, представления $[\Phi(z)]_j$ являются представлениями **только** алгебры токов. Поэтому, полная система полей теории, помимо примарных полей, содержит все поля вида

$$J_{-n_1}^{a_1} ... J_{-n_N}^{a_N} \Phi_j(z) \tag{50}$$

которые мы будем называть потомками поля Φ_j. При этом все поля теории распадаются на классы, характеризующиеся индексом j. К каждому классу принадлежит примарное поле, а так же все его поля потомки. При этом, конформная размерность примарного поля $\Phi_j(z)$ равна

$$\Delta(j) = \frac{j(j+1)}{k+2} \tag{51}$$

А размерности полей потомков (50) равна $(\Delta(j) + n_1 + ... + n_N)$. Нашей задачей является изучение теории Весса-Зумино, когда центральный заряд k является произвольным комплексным числом. Воспользуемся следующим приемом. Воспользуемся следующим приемом, впервые примененном в [3]. Как известно, алгебра Ли $\hat{sl}(2)$ имеет представление в виде дифференциальных операторов, действующих на пространстве дифференцируемых функций

$$\begin{aligned} t_j^+ &= -x^2\partial + 2jx \\ t_j^0 &= -x\partial + j \\ t_j^- &= \partial \end{aligned} \tag{52}$$

Определим базис операторов $J_n(x)$ относительно произвольной точки в "изотопическом" пространстве

$$J_n^-(x) = J_n^- \ , \quad J_n^0(x) = J_n^0 + xJ_n^- \ , \quad J_n^+(x) = J_n^+ - 2xJ_n^0 - x^2 J_n^- \tag{53}$$

Эти операторы удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям алгебры Каца-Муди (47).
Полное пространство полей является пространством дифференцируемых функций $\Phi_j(z,x)$. При этом, представление примарных полей $\Phi_j(z,x)$ является представлением со старшим весом относительно алгебры генераторов $J_n^a(x)$. Дйствительно, действие линейной комбинации дифференциальных операторов, входящих в ток $J_n^+(x)$, на примарных полях тождественно обращается в нуль. Таким образом, задачу об изучении представлений со спином, являющимся произвольным c-числом, удается свести к задаче об изучении представлений со старшим весом относительно "повернутой"в "изотопическом"пространстве алгебры $J_n^a(x)$.
В новом базисе киральный ток примет вид

$$J(x,z) = J^+(z) - 2xJ^0(z) - x^2 J^-(z) \tag{54}$$

Операторное разложение примарных полей с генераторами в новом базисе

$$J(x_1,z_1)\Phi_j(x_2,z_2) = -2j\frac{x_{12}}{z_{12}} - \frac{x_{12}^2}{z_{12}}\partial\Phi_j(x_2,z_2) + O(1) \tag{55}$$

3.2 Нуль вектора.

Так как задача сводится к изучению неприводимых представлений алгебры Каца-Муди, нам необходимо знать положение всех нуль векторов в каждом модуле Верма $[\Phi_j(z,x)]$, которые порождают новый подмодуль и, поэтому, представление становится приводимым. Для получения неприводимых представлений необходимо провести факторизацию по этим нуль векторам. Все приводимые представления известны и даются теоремой Каца-Каждана [4] и явный вид нуль векторов получен в работе [5]. Выберем следующую параметризацию для веса

$$2j_{rs} = r - st \tag{56}$$

где $t = k + 2$
Определим понятия уровня N и заряда Q с помощью собственных значений операторов L_0 и J_0^0 соответственно

$$J_0^0(x)\Phi_j(z,x) = (j+Q)\Phi_j(z,x), \qquad L_0\Phi_j(z,x) = (\Delta(j)+N)\Phi_j(z,x) \tag{57}$$

Тогда справедлива

Теорема

Для любого $t \in C \setminus \{0\}$ и любого старшего вектора с весом j_{rs} существует вырожденный вектор $|\chi_{rs}\rangle \in \Phi_j j_{rs}$ на уровне $N = rs$ и зарядом $Q = -r$. Этот вектор имеет вид

Для (1) (r,s)>0

$$|\chi\rangle = (J_0^-)^{r+st}(J_{-1}^+)^{r+(s-1)t}...(J_{-1}^+)^{r-(s-1)t}(J_0^-)^{r-st}|j_{rs}\rangle \tag{58}$$

Для (2) (r,s)<0

$$|\chi\rangle = (J_{-1}^+)^{-r-(s+1)t}(J_0^-)^{-r-(s+2)t}...(J_0^-)^{-r+(s+2)t}(J_{-1}^+)^{-r+(s+1)t}|j_{rs}\rangle \tag{59}$$

Используя коммутационные соотношения (47) возможно найти явный вид нуль векторов. Например, для нуль вектора $j_{1,1} = -t/2$ согласно теореме имеем

$$|\chi_{1,1}\rangle = (J_0^-)^{1+t}J_{-1}^+(J_0^-)^{1-t}|j_{1,1}\rangle \tag{60}$$

Параметр t, в случае общего положения, не является целым числом, поэтому, чтоб получить хорошо определенное выражение, необходимо вычислить явно правую часть. Для нахождения явного вида нуль вектора, воспользуемся следующим приемом. Во первых, рассмотрим тождество

$$e^{xJ_0^-}J_{-1}^+ = (J_{-1}^+ - 2xJ_{-1}^0 - x^2J_{-1}^-)e^{xJ_0^-} \tag{61}$$

Раскладывая по степеням x и сравнивая почленно левую и правую части получаем

$$(J_0^-)^pJ_{-1}^+ = J_{-1}^+(J_0^-)^p - 2pJ_{-1}(J_0^-)^{p-1} - p(p-1)J_{-1}^-(J_0^-)^{p-2} \tag{62}$$

Отсюда немедленно получаем явный вид нуль вектора

$$|\chi_{1,1}\rangle = \{J_{-1}^+(J_0^-)^2 - 2(1+t)J_{-1}^0J_0^- - t(1+t)J_{-1}^-\}|j_{1,1}\rangle \tag{63}$$

Важно отметить, что на представление со старшим весом становится приводимым, если вес j принимает либо целые, либо полуцелые значения, что, согласно теореме Каца-Каждана соответствует вектор, соответствует случаю целых, действительных k. Это утверждение более подробно обсуждается в **Приложении** на примере нескольких векторов.
Знание явного вида нулевых векторов позволяет получить правило слияния ("*fussion rule*"). Действительно, рассмотрим трехточечную функцию, причем пусть одно из полей вырожденно на уровне rs, и его заряд j_3+r. Конформная инвариантность фиксирует общий вид трехточечной функции с точностью до произвольной функции от j_i

$$\langle j_3|\phi_{j_2}|\chi_{rs}\rangle = \mathrm{C}_{123}f_{rs}(j,j_1,j_2)z^{-\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-rs}x^{j_1+j_2-j_3-r}$$

используя теорему Каца-Каждана, а так же реализацию операторов тока в виде дифференциальных операторов, получим, что функциональная зависимость от весов j следующая [6]

Для (1)

$$f_{rs}(j_1,j_2,j_3)=\prod_{n=0}^{r-1}\prod_{m=0}^{s}(j_1+j_2-j_3-n+mt)\prod_{n=1}^{r}\prod_{m=1}^{s}(-j_1+j_2+j_3+n-mt) \qquad (64)$$

Для (2)

$$f_{rs}(j_1,j_2,j_3)=\prod_{n=0}^{-r-1}\prod_{m=0}^{-s-1}(-j_1+j_2+j_3-n+mt)\prod_{n=1}^{-r}\prod_{m=1}^{-s-1}(j_1+j_2-j_3+n-mt) \qquad (65)$$

Правила слияния следуют из "fusion" полиномов

$$j_3\pm j_2=j_{nm}, \qquad n\in[1-r,...r], \quad m\in[-s,...s]$$

Если параметр t является рациональным числом $t=p/q$, причем числа p и q взаимно простые, то в модуле Верма существует два независимых нуль вектора, т.к. $j_{r,s}=j_{r-p,s-q}$

3.3 Норма оператора D_{rs} .

Этот раздел посвящен нахождению логарифмической нормы сингулярных векторов, которая, согласно части 2, необходимо возникает при исследовании аналитических свойств конформного блока. Рассмотрим произвольный нуль вектор на уровне $N=rs$ и с зарядом $Q=-r$. Этот вектор может быть представлен в виде в виде

$$|\chi_{r,s}\rangle=D_{r,s}|j_{r,s}\rangle$$

где введен оператор $D_{r,s}$ переводит старший вектор представления в нуль вектор на уровне $N=rs$ и зарядом $Q=-r$. Норма этого оператора в самой точке $j=j_{r,s}$ обращается в нуль, поэтому в окрестности этой точки мы имеем

$$\langle j|D^+_{r,s}D_{r,s}|j\rangle=(j-j_{r,s})\cdot r_{rs}+O((j-j_{r,s})^2) \qquad (66)$$

Найдем норму этого оператора для первого нетривиального нуль вектора. Для вычисления нормы нуль вектора, необходимо найти форму Шаповалова, определяющую скалярное произведение между базисными векторами и с ее помощью вычислить скалярное произведение $\langle j|D^+_{r,s}D_{r,s}|j\rangle$. Определим дуальный вектор с помощью следующего правила

$$J^{a_1}_{n_1}...J^{a_N}_{n_N}|j\rangle\leftrightarrow\langle j|J^{-a_N}_{-n_N}...J^{-a_1}_{-n_1} \qquad (67)$$

Вычислим теперь форму Шаповалова

$$\begin{pmatrix} \langle (J_0^+)^2J_1^1J_{-1}^+(J_0^-)^2\rangle & \langle (J_0^+)^2J_1^1J_{-1}^0J_0^-\rangle & \langle (J_0^+)^2J_1^1J_{-1}^-\rangle \\ \langle J_0^+J_1^0J_{-1}^+(J_0^-)^2\rangle & \langle J_0^+J_1^0J_{-1}^0J_0^-\rangle & \langle J_0^+J_1^0J_{-1}^-\rangle \\ \langle J_1^+J_{-1}^+(J_0^-)^2\rangle & \langle J_1^+J_{-1}^0J_0^-\rangle & \langle J_1^+J_{-1}^-\rangle \end{pmatrix} \qquad (68)$$

После вычисления коммутаторов, получаем

$$\begin{pmatrix} 4j(2j-1)(-2j+2+t) & 4j(2j-1) & 0 \\ 4j(2j-1) & (t-2)j & -2j \\ 0 & -2j & 2j+t-2 \end{pmatrix} \qquad (69)$$

Детерминант формы Шаповалова должен обращаться в нуль в особых точках. Для примера, вычислим детерминант этой матрицы

$$\det\hat{A}=16\,j^3t+8\,j^2t^2-32\,j^5t-16\,j^4t-16\,j^3t^2+8\,j^3t^3-4\,j^2t^3 \qquad (70)$$

Корни этого уравнения определяют специальные размерности поля Φ^j, когда представление становиться приводимым и в модуле Верма возникает новый подмодуль со старшим весом. Корни данного уравнения расположены в точках

$$j=0, \qquad j=0, \qquad j=\frac{1}{2}, \qquad j=-\frac{1}{2}t, \qquad j=-1+\frac{1}{2}t \qquad (71)$$

Перейдем теперь к нашей основной задаче о вычислении логарифмической нормы нуль вектора. После несложных вычислений, получаем

$$||D||=-16\ (j+1/2\,t)\left(-1/8\,t^4+3/8\,t^2+(j+1/4)\,t+j^2+1/2\,j\right) \qquad (72)$$

При $j \to j_{12} = -t/2$ имеем $||D|| = (2j - 2j_{12}) \cdot r_{1,1}$. Коэффициент $r_{1,1}$, а так же несколько других коэффициентов, вычисленных с помощью операторной алгебры, имеют вид:
а) $r, s > 0$

$$r_{1,1} = t^2(t^2 - 1) \tag{73}$$

б) $r, s < 0$

$$\begin{aligned} r_{-1,-1} &= 1 \\ r_{-2,-1} &= 2 \\ r_{-3,-1} &= 12 \end{aligned} \tag{74}$$

Существует ли общее выражение для этих коэффициентов? Общая схема вычисления не известна, поэтому сделаем следующее предположение
Предложение.
Коэффициенты r_{rs} имеют следующий вид

$$r_{rs} = 2 \prod_{n=1-r}^{r} \cdot \prod_{m=-s}^{s} (n + mt) \ , \qquad (r, s > 0) \tag{75}$$

$$r_{rs} = 2 \prod_{n=1+r}^{-r} \cdot \prod_{m=1+s}^{-s-1} (n + mt) \ , \qquad (r, s < 0) \tag{76}$$

3.4 Операторное разложение WZW модели.

Перейдем теперь к изучению операторного разложения в модеи Весса-Зумино. В этом разделе мы установим, какие ограничения на коэффициенты операторного разложения налагает требование инвариантности относительно операторной алгебры, а так же явно вычислим эти коэффициенты для первых трех уровней. Рассмотрим операторное разложение

$$\Phi^{j_1}(z, x)\Phi^{j_2}(0, 0) = \sum_j z^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} x^{j_1 + j_2 - j} C^j_{j_1, j_2} [\Phi^j(z, x)] \tag{77}$$

в правую часть входит сумма по всем конформным классам. Кроме того, $[\Phi^j(z, x)]$ означает вклад всех полей, принадлежащих данному конформному классу. Коэффициенты $C^j_{j_1,j_2}$ называются структурными константами и в дальнейшем обсуждаться не будут. Инвариантность относительно операторной алгебры полностью фиксирует коэффициенты, с которыми все поля, принадлежащие данному конформному классу входят в операторное разложение. Поля потомки в каждом конформном классе характеризуются двумя параметрами, уровнем N и зарядом m. Запишем операторное разложение более подробно

$$\Phi^{j_1}(z, x)\Phi^{j_2}(0, 0) = \sum_j z^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} x^{j_1 + j_2 - j} C^j_{j_1, j_2} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=-N}^{\infty} z^N x^m |N, m\langle \tag{78}$$

где

$$|N, m\rangle = J^{a_1}_{-1} ... J^{a_N}_{-1} (J^-_0)^a_0 \Phi_j \tag{79}$$

причем $\sum_{i=0}^N a_i = m$
Покажем, что разложение в правой части (77) начинается с членов $z^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2}$ и $x^{j_1 + j_2 - j}$. Для этого предположим произвольную зависимость от z и x. После чего применим к обеим частям равенства операторы L_0 и J^0_0. Получим

$$L_0 \Phi^{j_1}(z)\Phi^{j_2}(0) = (\Delta_1 + \Delta_2 + z\partial)\Phi^{j_1}(z)\Phi^{j_2}(0) = (\Delta_1 + \Delta_2 + z\partial)C(z, x) = \Delta C(z, x) \tag{80}$$

$$J^0_0 \Phi^{j_1}(z)\Phi^{j_2}(0) = (j_1 + j_2 - x\partial)\Phi^{j_1}(z)\Phi^{j_2}(0) = (j_1 + j_2 - x\partial)C(z, x) = jC(z, x) \tag{81}$$

эти уравнения имеют очевидное решение

$$C(z, x) = C^j_{j_1, j_2} z^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} x^{j_1 + j_2 - j} \tag{82}$$

3.5 Уравнения цепочки в WZW модели.

Трансформационные свойства левой и правой частей операторного разложения (77) под действием операторной алгебры, однозначно определяют коэффициенты перед полями потомками, принадлежащими определенному конформному классу. Для получения уравнений для коэффициентов, подействуем на произведение двух полей генератором алгебры

$$J_k^a(\Phi^{j_1}(z_1,x_1)\Phi^{j_2}(0,0)) = z^k(D_{j_1}^a)\Phi(z,x)\Phi(0,0) + \Phi(z,x)J_k^a\Phi(0,0) \tag{83}$$

При $k>0$ второй член равен нулю. Теперь, подставляя в это уравнение операторное разложение (77), мы получим

$$\begin{aligned} J_k^+|N,m\rangle &= (j+j_1-j_2-m+1)|N-k,m-1\rangle \quad k\geq 0 \\ J_k^-|N,m\rangle &= (-j+j_1+j_2+m+1)|N-k,m+1\rangle \quad k\geq 1 \\ J_k^0|N,m\rangle &= (j-j_2-m)|N-k,m\rangle \qquad\qquad k\geq 1 \end{aligned} \tag{84}$$

Из этой системы уравнений только два, для J_0^+ и J_1^- являются независимыми, а остальные могут бать получены путем применения коммутационных соотношений (47). Отметим, что в силу структуры операторного разложения (77) уравнения цепочки для оператора J_0^+ определяют связь между коэффициентами операторного разложения внутри одного уровня по z, в то время как уравнения цепочки для оператора J_1^- связывают между собой коэффициенты на двух соседних уровнях. Это наблюдение позволяет находить коэффициенты операторного разложения по следующей схеме. Сначала мы применяем только J_0^+ и полностью определяем связь между коэффициентами внутри одного уровня. Это приводит к рекуррентным соотношениям между коэффициентами, которые можно решить в общем виде. Единственный произвол остаётся лишь для начальных условий при которых эти рекуррентные соотношения решаются. Эти начальные условия однозначно фиксируются применением оператора J_1^-, связывающего разные уровни. Таким образом, задача определения коэффициентов операторного разложения сводится к поэтапному решению уровень за уровнем уравнений цепочки. Для первых нескольких уровней коэффициенты могут быть найдены явно.

3.5.1 Коэффициенты операторного разложения на нулевом уровне.

На нулевом уровне вектор состояния

$$|0\rangle = \sum_{m=0} x^m \beta(m)(J_0^-)^m|j\rangle \tag{85}$$

представляет собой сумму всех полей с $L_0|0\rangle = \Delta_0|0\rangle$ и различными значениями "проекций"спина $m \in [-j...j]$, которые входят с различными коэффициентами. Действие оператора J_0^+ и уравнения цепочки (84) приводит к следующим рекурсивным уравнениям для этих коэффициентов

$$m(2j-m+1)\beta(m) = (j+j_1-j_2-m+1)\beta(m-1) \tag{86}$$

Это рекурсивное уравнение вместе с выбором нормировки $\beta(0)=1$, позволяет последовательно определять коэффициенты операторного разложения на нулевом уровне

$$\beta(m) = \frac{(j+j_1-j_2)_m}{m!(2j)_m} \tag{87}$$

$$x_k = \frac{x!}{(x-k)!} \tag{88}$$

Таким образом

$$[\Phi^j(z,x)] = 1 + \frac{j+j_1-j_2}{2j}x + \frac{(j+j_1-j_2-1)(j+j_1-j_2)}{4(2j)(2j-1)}x^2 + ... + z[\Phi_1^j(x)] + z^2[\Phi_2^j(x)] + ... \tag{89}$$

3.5.2 Коэффициенты операторного разложения на первом уровне.

вклад всех потомков первого уровня в операторное разложение (77)

$$[\Phi_2^j(x)] = \sum_{x=-1} x^m[A(m)J_{-1}^-(J_0^-)^{m-1} + B(m)J_{-1}^0(J_0^-)^m + C(m)J_{-1}^+(J_0^-)^{m+1}]\Phi_j\rangle \tag{90}$$

Непосредственное применение уравнений цепочки приводит к рекурсивной системе уравнений для коэффициентов

$$\begin{aligned}
(j+j_1-j_2-m+1)A(m-1) &= (m-1)(2j-m+2)A(m) \\
(j+j_1-j_2-m+1)B(m-1) &= m(2j-m+1)B(m)+A(m) \\
(j+j_1-j_2-m+1)C(m-1) &= (m+1)(2j-m)C(m)-B(m) \\
(-j+j_1+j_2+m+1)\beta(m+1) &= B(m)+(-2(j-m-1)+k)C(m)
\end{aligned} \tag{91}$$

последнее уравнение в системе следует из действия J_1^-. Уравнение для $A(m)$ отщепляется от остальной системы и может решаться независимо. После этого, второе уравнение, определяющее коэффициент $B(m)$ становится неоднородным рекурсивным уравнением и так же может быть решено. То же самое относится и к третьему уравнению системы. Последнее уравнение необходимо для нахождения нормировочного коэффициента для полей первого уровня. Решение системы имеет вид

$$\begin{aligned}
A(m) &= A(1)\cdot\frac{(j+j_1-j_2-1)_{m-1}}{(m-1)!(2j)_{m-1}} \\
B(m) &= [B(0)+\mathcal{R}m]\cdot\frac{(j+j_1-j_2)_m}{(m)!(2j)_m} \\
C(m) &= [C(-1)+\mathcal{P}(m+1)+\mathcal{Q}(m^2-1)]\cdot\frac{(j+j_1-j_2+1)_{m+1}}{(m+1)!(2j)_{m+1}}
\end{aligned} \tag{92}$$

где $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ функции, не зависящие от m

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= -\frac{2A(1)}{j+j_1-j_2} \\
\mathcal{Q} &= \frac{\mathcal{R}}{2(j+j_1-j_2+1)} \\
\mathcal{P} &= \frac{1}{j+j_1-j_2+1}(B(0)+\frac{\mathcal{R}}{2})
\end{aligned} \tag{93}$$

Нормировочные коэффициенты

$$\begin{aligned}
C(-1) &= \frac{j_1+j_2-j}{(k-2j)} \\
B(0) &= \frac{-2(j+j^2+j_1+j_1^2-jt+j_2(-1-j_2+t))}{t(-2-2j+t)} \\
A(1) &= (j+j_1-j_2)\frac{(1-\frac{2(j+j^2+j_1+j_1^2-jt+j_2(-1-j_2+t))}{t(-2-2j+t)})}{2j+t}
\end{aligned} \tag{94}$$

Представляется целесообразным рассмотреть коэффициенты (92) вблизи специальных значений $j \to j_{sr}$, определяемых (56)

При $j \to j_{-1,-1} = -1+t/2$ коэффициенты имеют особенности в виде полюсов первого порядка и пропорциональны друг другу

$$\begin{aligned}
C(0) &= \frac{(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2+t/2)}{t(-2-2j+t)} \\
B(0) &= -\frac{2(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2+t/2)}{t(-2-2j+t)} \\
A(1) &= \frac{(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2+t/2)}{(-1+t)t(2+2j-t)} \\
B(1) &= \frac{2(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2+t/2)}{(-1+t)t(2+2j-t)} \\
C(1) &= -\frac{(j_1+j_2+1-t)(j_1-j_2-1+t)(j_1-j_2+t/2)}{2(-1+t)t(2+2j-t)}
\end{aligned} \tag{95}$$

то же самое относится и к случаю $j \to j_{1,1} = -t/2$. Полюсные особенности возникают начиная с коэффициентов с $m=1$

$$\begin{aligned} A(1) &= -\frac{(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2+t/2)}{(-1+t)t(2j+t)} \\ B(1) &= -\frac{2(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2+t/2)}{(-1+t)t^2(2j+t)} \\ C(1) &= \frac{(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2+t/2)}{(-1+t)(1+t)t^2(2j+t)} \end{aligned} \tag{96}$$

Мы обсудим сингулярное поведение коэффициентов более подробно в разделе, посвященном аналитическим свойствам операторного разложения.

3.5.3 Коэффициенты операторного разложения на втором уровне.

Вектор состояния второго уровня

$$\begin{aligned} |2,m\rangle = \; & A_{1,1}(J^+_{-1})^2(J^-_0)^{m+2} + A_{1,0}J^+_{-1}J^0_{-1}(J^-_0)^{m+1} + A_{1,-1}J^+_{-1}J^-_{-1}(J^-_0)^{m} + \\ & A_{0,1}J^0_{-1}J^+_{-1}(J^-_0)^{m+1} + A_{0,0}(J^0_{-1})^2(J^-_0)^{m} + A_{0,-1}J^0_{-1}J^-_{-1}(J^-_0)^{m-1} + \\ & A_{-1,1}J^-_{-1}J^+_{-1}(J^-_0)^{m} + A_{-1,0}J^-_{-1}J^0_{-1}(J^-_0)^{m-1} + A_{-1,-1}J^-_{-1}J^-_{-1}(J^-_0)^{m-2} \end{aligned}$$

включает уже девять базисных векторов на каждом зарядовом уровне. Применения уравнений цепочки приводит к системе рекурсивных уравнений

$$\begin{aligned} \mu(m)A_{1,1}(m-1) &= (m+2)(2j-m-1)A_{1,1}(m) - A_{0,1}(m) - A_{1,0}(m) \\ \mu(m)A_{1,0}(m-1) &= (m+1)(2j-m)A_{1,0}(m) - A_{0,0}(m) + 2A_{1,-1}(m) \\ \mu(m)A_{1,-1}(m-1) &= (m)(2j-m+1)A_{1,-1}(m) - A_{0,-1}(m) \\ \mu(m)A_{0,1}(m-1) &= (m+1)(2j-m)A_{0,1}(m) + 2A_{-1,1}(m) - A_{0,0}(m) \\ \mu(m)A_{0,0}(m-1) &= (m)(2j-m+1)A_{0,0}(m) + 2A_{-1,0}(m) + 2A_{0,-1}(m) \\ \mu(m)A_{0,-1}(m-1) &= (m-1)(2j-m+2)A_{0,-1}(m) + 2A_{-1,-1}(m) \\ \mu(m)A_{-1,1}(m-1) &= (m)(2j-m+1)A_{-1,1}(m) - A_{-1,0}(m) \\ \mu(m)A_{-1,0}(m-1) &= (m-1)(2j-m+2)A_{-1,0}(m) + 2A_{-1,-1}(m) \\ \mu(m)A_{-1,-1}(m-1) &= (m-2)(2j-m+3)A_{-1,-1}(m) \end{aligned}$$

где

$$\mu(m) = (j+j_1-j_2-m+1) \tag{97}$$

Уравнения могут быть решены последовательно, в силу того, что уравнения, расположены в системе ниже, не зависят от уравнений, расположенных выше. Явное решение системы уравнений представлено в Приложении

3.5.4 Коэффициенты операторного разложения на произвольном уровне.

Обсудим структуру уравнений цепочки для произвольного уровня. Отметим, что уравнения цепочки не зависят от уровня N. Если представлять вектора на произвольном уровне в виде вектора $(A_{a_1\ldots a_N}, \ldots., A_{a_N\ldots a_1})$, то матрица, связывающая между собой два соседних зарядовых уровня, имеет треугольный вид. Отсюда немедленно следует, что решение рекуррентной системы возможно, путем поэтапного отщепления уравнений для коэффициентов. Общая структура этих уравнений такова

$$\mu(m)A_{a_1\ldots a_N}(m-1) = (m+\sum_{i=1}^N a_i)(2j-m+1-\sum_{i=1}^N a_i)A_{a_1\ldots a_N}(m) + \sum_{i=1}^N(-1)^{a_i}(2-a_i)A_{a_1,\ldots,a_i-1,\ldots,a_N} \tag{98}$$

Обратим внимание, на следующее замечательное свойство коэффициентов операторного разложения. Если в наборе $(a_1,...a_N)$ не все a_i одинаковы, то для любой перестановки $\sigma(a_1,...,a_N)$ справедливо утверждение

$$A_{(a_1,\dots,a_N)}(m) \propto A_{\sigma(a_1,\dots,a_N)} \tag{99}$$

непосредственно следующее из (98).

3.6 Конформный блок в модели WZW.

Рассмотрим четырехточечную функцию четырех примарных полей. В силу проекционной инвариантности три точки из четырех можно поместить в определенные наперед заданные точки.

$$\langle \Phi_{j_1}(z,x)\Phi_{j_2}(0,0)\Phi_{j_3}(1,1)\Phi_{j_4}(\infty,\infty)\rangle = \sum C^j_{j_1,j_2}C^j_{j_3,j_4}|\mathcal{F}(\{j_i\},j|x,z)|^2 \tag{100}$$

Функция $\mathcal{F}(j_1,j_2,j_3,j_4,j)$ называется конформным блоком и представляет собой вклад всех полей в промежуточном канале, принадлежащих определенному конформному классу $[\Phi_j]$, в амплитуду рассеяния. Конформный блок представим в виде

$$\mathcal{F} = z^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}x^{j_1+j+2-j}\sum_N z^N F^N(j_i,j|x) \tag{101}$$

Коэффициент $F^N(j_i,j|x) = \ {}_{34}\langle N|N\rangle_{12}$ включает в себя вклад всех полей N-го уровня в конформный блок и может быть разложен по степеням x

$$F^N(j_i,j|x) = \sum x^m F^{(N|m)}(j_i,j) \tag{102}$$

коэффициенты этого разложения представляют собой вклад полей определенного уровня и определенного заряда. Знание коэффициентов операторного разложения позволяет вычислять уровень за уровнем коэффициенты F^N.

3.6.1 Нулевой уровень.

Вклад всех полей нулевого уровня в конформный блок имеет вид

$$[\Phi_j(z,x)] = \sum_{m=0}^{\infty} x^m\beta(m)(J_0^-)^m\Phi_j(z,x) \tag{103}$$

Коэффициенты операторного разложения были вычислены явно (87). Поэтому задача о вычислении конформного блока нулевого уровня может быть решена точно. Действительно

$$F^0 = \ {}_{34}\langle 0|0\rangle_{12} = \sum_m x^m\beta^{34}(m)\beta^{12}(m)\langle j|(J_0^+)^m(J_0^-)^m|j\rangle \tag{104}$$

скалярное произведение между базисными векторами (форма Шаповалова) в правой части (104) равна

$$\langle j|(J_0^+)^m(J_0^-)^m|j\rangle = m!(2j)_m \tag{105}$$

что приводит к следующему виду $F^0(j_i,j|x)$

$$F^0 = F(j_2-j_1-j;j_4-j_3-j;-2j|x) \tag{106}$$

где $F(\alpha,\beta,\gamma|x)$ гипергеометрический ряд Отметим важное обстоятельство. В случае, когда $2j=\mathrm{k}$ гипергеометрический ряд обрывается на члене с $m=\mathrm{k}$. Это связано с тем, что при значениях $2j\in\mathrm{N}$ в модуле возникают нуль вектора.

3.6.2 Первый уровень.

Найдем вклад в конформный блок полей первого уровня. Коэффициенты операторного разложения были вычислены (92). Форма Шаповалова

$$\begin{pmatrix} \langle (J_0^+)^{m-1}J_1^+J_{-1}^-(J_0^-)^{m-1}\rangle & \langle (J_0^+)^{m}J_1^0J_{-1}^-(J_0^-)^{m-1}\rangle & \langle (J_0^+)^{m+1}J_1^-J_{-1}^-(J_0^-)^{m-1}\rangle \\ \langle (J_0^+)^{m-1}J_1^+J_{-1}^0(J_0^-)^{m}\rangle & \langle (J_0^+)^{m}J_1^0J_{-1}^0(J_0^-)^{m}\rangle & \langle (J_0^+)^{m+1}J_1^-J_{-1}^0(J_0^-)^{m}\rangle \\ \langle (J_0^+)^{m-1}J_1^+J_{-1}^+(J_0^-)^{m+1}\rangle & \langle (J_0^+)^{m}J_1^0J_{-1}^+(J_0^-)^{m+1}\rangle & \langle (J_0^+)^{m+1}J_1^-J_{-1}^+(J_0^-)^{m+1}\rangle \end{pmatrix} \tag{107}$$

Равна

$$\begin{pmatrix} (m-1)!(2j)_{m-1}(2(j-m+1)+k) & -m!(2j)_m & 0 \\ -m!(2j)_m & \frac{k}{2}m!(2j)_m & (m+1)!(2j)_{m+1} \\ 0 & (m+1)!(2j)_{m+1} & (m+1)!(2j)_{m+1}(-2(j-m-1)+k) \end{pmatrix} \quad (108)$$

тогда имеем

$$F^{(1,m)} = A^{34}(m)A^{12}(m)\cdot K_{11} + A^{34}(m)B^{12}(m)\cdot K_{12} + A^{34}(m)C^{12}(m)\cdot K_{13} + ... \quad (109)$$

Вычисления в окрестностях значений $j_{-1,-1}$ и $j_{1,1}$ приводят к асимптотическому виду конформного блока. Первые несколько членов разложения конформного блока на первом уровне.

В окрестности точки $j \to -1 + t/2$

$$\begin{aligned}
&F^{1,-1} = \frac{(j_1+j_2+1-t/2)(12\to 34)}{t-2-2j} \quad (110)\\
&F^{1,0} = \frac{(j_1-j_2+t/2)(j_1+j_2+1-t/2)(12\to 34)}{t(2+2j-t)}\\
&F^{1,1} = \frac{(j_1-j_2+t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1+j_2+1-t/2)(12\to 34)}{2(-1+t)t(2+2j-t)}\\
&F^{2,1} = -\frac{(j_1-j_2+t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2-2+t/2)(j_1+j_2+1-t/2)(12\to 34)}{6(-2+t)(-1+t)t(2+2j-t)}\\
&F^{3,1} = -\frac{(j_1-j_2+t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2-2+t/2)(j_1-j_2-3+t/2)(j_1+j_2+1-t/2)(12\to 34)}{24(-3+t)(-2+t)t(2+2j-t)}\\
&F^{4,1} = -\frac{(j_1-j_2+t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2-2+t/2)(j_1-j_2-3+t/2)(j_1-j_2-4+t/2)(j_1+j_2+1-t/2)}{120(-4+t)(-3+t)(-2+t)(-1+t)t(2+2j-t)}
\end{aligned}$$

В окрестности точки $j \to -t/2$

$$\begin{aligned}
&F^{1,1} = \frac{(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2+t/2)(-j_1+j_2+t/2)(12\to 34)}{t^2(-1+t^2)(2j+t)} \quad (111)\\
&F^{2,1} = \frac{(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2+t/2)(-j_1+j_2+t/2)(-j_1+j_2+1+t/2)(12\to 34)}{(-1+t)t^2(1+t)(2+t)(2j+t)}\\
&F^{3,1} = -\frac{(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2+t)(-j_1+j_2+t/2)(-j_1+j_2+1+t/2)(-j_1+j_2+2+t)(12\to 34)}{2(-1+t)t^2(1+t)(2+t)(3+t)(2j+t)}\\
&F^{4,1} = \frac{(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2+t/2)(-j_1+j_2+t/2)(-j_1+j_2+1+t/2)(-j_1+j_2+2+t/2)(-j_1+j_2+3+t/2)}{6(-1+t)t^2(1+t)(2+t)(3+t)(4+t)(2j+t)}
\end{aligned}$$

3.7 Аналитические свойства операторного разложения.

Как видно, с увеличением уровня количество вычислений быстро увеличивается. Поэтому имеет смысл исследовать аналитические свойства конформного блока в модели Весса-Зумино и построить простой алгоритм его вычисления с помощью суммирования по особенностям. Для этого необходимо исследовать аналитические свойства самого операторного разложения, в частности, определить асимптотический вид векторов состояний при стремлении заряда поля к одному из специальных значений j_{rs}.

Аналитические свойства операторного разложения модели Весса-Зумино во много схожи с аналитическими свойствами в обычной конформной теории поля.

Асимптотическое поведение вектора на уровне N и зарядом m имеет вид

$$|N = rs, m = j \pm r\rangle \to \frac{X^{\pm}_{rs} D^{\pm}_{rs}\Phi_j}{j - j^{\pm}_{rs}} + ... \quad (112)$$

многоточие означает менее сингулярные члены. Вычет в полюсе $X^{\pm}_{rs}$ ищется аналогично (21).

$$\begin{aligned}
X^{\pm}_{rs} &= \frac{Y^{\pm}_{rs}}{r^{\pm}_{rs}} \quad (113)\\
Y^{\pm}_{rs} &= \frac{\langle \Phi_{j_1} D^{\pm}_{rs}\Phi_j(x)\Phi_{j_2}\rangle}{x^{\pm r}\langle \Phi_{j_1}\Phi_j(x)\Phi_{j_2}\rangle}\\
r^{\pm}_{rs} &= \langle \Phi_j (D^{\pm}_{rs})^{+} D^{\pm}_{rs}\Phi_j\rangle
\end{aligned}$$

При этом явный вид оператора $D^{\pm}_{rs}$ позволяет вычислить Y^{rs}_{rs}, который равен "fusion" полиному

$$Y^{+}_{rs} = \prod_{n=0}^{r-1}\prod_{m=0}^{s}(j_1+j_2-j_3-n+mt)\prod_{n=1}^{r}\prod_{m=1}^{s}(-j_1+j_2+j_3+n-mt) \tag{114}$$

$$Y^{-}_{rs} = \prod_{n=0}^{-r-1}\prod_{m=0}^{-s-1}(-j_1+j_2+j_3-n+mt)\prod_{n=1}^{-r}\prod_{m=1}^{-s-1}(j_1+j_2-j_3+n-mt) \tag{115}$$

Проверим эти рассуждения прямым вычислением. Рассмотрим вектор веса $j = j_{1,1}$. Явный вид коэффициентов операторного разложения вблизи этой точки был найден (96). Поэтому, асимптотический вид этого вектора

$$\begin{aligned}|\chi_{1,1}\rangle &= \frac{(j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2+t/2)}{2(-1+t^2)t^2(2j+t)}\times \\ &\times[J^{+}_{-1}(J^{-}_{0})^2-2(1+t)J^{0}_{-1}J^{-}_{0}-t^2(1+t)J^{-}_{-2}]|j\rangle\end{aligned} \tag{116}$$

Полезно сравнить полученное выражение с (63). Отсюда сразу видно, что асимптотика нуль вектора имеет вид (112)

$$|\chi_{1,1}\rangle = \frac{X^{+}_{1,1}D^{+}_{1,1}\Phi_j}{j-j_{1,1}} \tag{117}$$

где

$$\begin{aligned}X_{1,1} &= \frac{Y_{1,1}}{r_{1,1}} \\ Y_{1,1} &= (j_1+j_2+1-t/2)(j_1-j_2-1+t/2)(j_1-j_2+t/2) \\ r_{1,1} &= 2(-1+t^2)t^2\end{aligned} \tag{118}$$

Коэффициент $r_{1,1}$ в точности совпадает с нормой оператора $D^{+}_{1,1}$, а $Y^{+}_{1,1}$ равен полиному слияния ("fusion" полиному)

3.8 Аналитические свойства конформного блока.

Аналитические свойства векторов, которые обсуждались в предыдущем разделе, позволяют получить простой способ вычисления конформного блока. Как мы видели, первые несколько членов разложения конформного блока на первом уровне, представляют собой первые члены гипергеометрического ряда. Поэтому

$$F^1(j_1,j_2,j_3,j_4,j|x) = \frac{1}{x}\frac{(j_1+j_2-j)(j_3+j_4-j)}{2j+2-t}F(j_2-j_1-j-1;j_4-j_3-j-1;-2(j+1)|x) \tag{119}$$

В окрестности $j=-t/2$ сингулярные члены в коэффициентах разложения так же собираются в гипергеометрический ряд

$$\begin{aligned}F^1(j_1,j_2,j_3,j_4,j|x) &= x\frac{(j_1+j_2+j+1)(j_1-j_2-j)(-j_1+j_2-j)(j_3+j_4+j+1)(j_3-j_4-j)(-j_3+j_4-j)}{t^2(t^2-1)(2j+t)}\times \\ &\times \quad F(j_2-j_1-j+1;j_4-j_3-j+1;-2(j-1)|x)\end{aligned} \tag{120}$$

Перейдем теперь к аналитическим свойствам конформного блока, которые позволяют получить этот ответ путем суммирования по особенностям.
Итак, мы выяснили асимптотическое поведение вектора состояния вблизи сингулярной точки (112). Подставляя это выражение в определение конформного блока, получим

$$\mathcal{F}|_{j\to j^{\pm}_{rs}} \to \frac{X^{12}_{rs}X^{34}_{rs}\cdot r_{rs}}{j-j_{rs}}\mathcal{F}(j_i;j\mp r) \tag{121}$$

Теперь можем записать

$$\mathcal{F}(j_1,j_2,j_3,j_4;j|z,x) = f_0(\{j_i\}|z,x)+\sum_{rs}\frac{R^{\pm}_{rs}}{j-j^{\pm}_{r}s}\mathcal{F}(\{j_i\},j\mp r|z,x) \tag{122}$$

Для практического применения этой формулы, позволяющей вычислять конформный блок рекуррентно, необходимо знать регулярную часть конформного блока, т.е. функцию f_0. Намного легче определить регулярную часть конформного блока, переходя от суммирования по положениям особенностей размерности полей к суммированию по особенностям по центральному заряду. В этом случае рекурсия примет вид

$$\mathcal{F}(j_1, j_2, j_3, j_4; j|z, x) = f_0(\{j_i\}, j|z, x) + \sum_{rs} \frac{{R'^{\pm}}_{rs}}{t - t_{rs}^{\pm}} \mathcal{F}(\{j_i\}, j \mp r|z, x) \tag{123}$$

где R'_{rs} определяется через "fusion"полиномы (64), (65) и норму оператора $D_{rs}^{\pm}$ (75), (76)

$$R'^{+}_{rs} = \frac{\prod_{n=0}^{r-1} \prod_{m=0}^{s} (j_1 + j_2 - j_3 - n + mt) \prod_{n=1}^{r} \prod_{m=1}^{s} (-j_1 + j_2 + j_3 + n - mt)(12 \to 34)}{\prod_{n=1-r}^{r} \cdot \prod_{m=-s}^{s} (n + mt)} \tag{124}$$

и

$$R'^{-}_{rs} = \frac{\prod_{n=0}^{-r-1} \prod_{m=0}^{-s-1} (-j_1 + j_2 + j_3 - n + mt) \prod_{n=1}^{-r} \prod_{m=1}^{-s-1} (j_1 + j_2 - j_3 + n - mt))(12 \to 34)}{\prod_{n=1+r}^{-r} \cdot \prod_{m=1+s}^{-s-1} (n + mt)} \tag{125}$$

Вычислим асимптотику конформного блока при $t \to \infty$, тем самым мы определим регулярную часть конформного блока f_0. Прежде всего, отметим, что в этом пределе выживают только вектора нулевого уровня, вида $\beta(m)(J_0^-)^m \Phi_j$, так как коэффициенты при этих векторах не зависит от центрального заряда t, в то время, как коэффициенты операторного разложения на более высоких уровнях, в силу структуры уравнений цепочки, содержат t в знаменателе, и при взятии предела исчезают. Поэтому асимптотика конформного блока при $t \to \infty$ совпадает с коэффициентом разложения конформного блока на нулевом уровне (106)

$$f_0 = F(j_2 - j_1 - j; j_4 - j_3 - j; -2j|x) \tag{126}$$

Первые несколько коэффициентов R'_{rs}

$$\begin{aligned} {R'}_{-1,-1} &= \frac{(j_1 + j_2 - j)(j_3 + j_4 - j)(12 \to 34)}{1} \\ {R'}_{-2,-1} &= \frac{(j_1 + j_2 - j - 1)(j_1 + j_2 - j)(12 \to 34)}{2} \\ {R'}_{-3,-1} &= \frac{(j_1 + j_2 - j - 1)(j_1 + j_2 - j - 2)(j_1 + j_2 - j)(12 \to 34)}{6} \\ {R'}_{1,1} &= \frac{(j_1 + j_2 + j + 1)(j_1 - j_2 - j)(-j_1 + j_2 - j)(12 \to 34)}{2t^2(t^2 - 1)} \end{aligned} \tag{127}$$

4 Приложение.

A Уравнения цепочки.

A.1 Коэффициенты операторного разложения на первом уровне.

Здесь мы хотим продемонстрировать технику, позволяющую получать рекуррентные соотношения между коэффициентами операторного разложения из уравнений цепочки, на примере первого уровня. Рассмотрим произвольный вектор первого уровня

$$|1,m\rangle = [A(m)J^-_{-1}(J^-_0)^{m-1} + B(m)J^0_{-1}(J^-_0)^m + C(m)J^+_{-1}(J^-_0)^{m+1}]|0,0\rangle \tag{128}$$

Действие оператора J^+_0 переводит этот вектор в вектор

$$\begin{aligned}(m-1)(2j-m+2)A(m)J^-_{-1}(J^-_0)^{m-2} + [2A(m) + m(2j-m+1)B(m)]J^0_{-1}(J^-_0)^{m-1} + \\ +[-B(m) + (m+1)(2j-m)C(m)]J^+_{-1}(J^-_0)^m\end{aligned} \tag{129}$$

Используя уравнения цепочки, мы знаем, что этот вектор должен быть пропорционален вектору $|1,m-2\rangle$, причем коэффициент пропорциональности определяется из (84). Сравнивая между собой коэффициенты при соответствующих базисных векторах, приходим к следующим рекурсивным уравнениям для коэффициентов

$$\begin{aligned}(m-1)(2j-m+2)A(m) &= (j+j_1-j_2-m+1)A(m-1)\\ 2A(m) + m(2j-m+1)B(m) &= (j+j_1-j_2-m+1)B(m-1)\\ -B(m) + (m+1)(2j-m)C(m) &= (j+j_1-j_2-m+1)C(m-1)\end{aligned} \tag{130}$$

При этом $A(-1)=0$ и $A(0)=0$, в то время, как коэффициент $A(1)$ не определяется из этих уравнений, и для его нахождения необходимо смотреть как преобразуется вектор $|1,1\rangle$ под действием других операторов J^a_1. Это, в свою очередь, свяжет вектор на первом уровне, с векторами на нулевом. То же самое необходимо отметить и для коэффициентов $B(m)$ и $C(m)$. Действительно, $B(-1)=0$, а $B(0)$ и $C(-1)$ не определяются из полученных выше уравнения и опять необходимо применять операторы J^a_1. Но, если мы найдем эти коэффициенты, то на первом уровне мы сможем найти все коэффициенты из уравнений (130). Поэтому, сейчас мы покажем, как находятся коэффициенты $A(1)$, $B(0)$, $C(-1)$.

Коэффициент $C(-1)$.

Это самый простой случай. Имеем вектор

$$|1,-1\rangle = \mathrm{C}(-1)J^+_{-1}|0,0\rangle_j \tag{131}$$

Действуя на него оператором J^-_1 и принимая во внимание уравнения цепочки, получим уравнение

$$J^-_1|1,-1\rangle = (-2J^0_0 + k)C(-1)|0,0\rangle_j = (-j+j_1+j_2)|0,0\rangle_j \tag{132}$$

отсюда получаем

$$C(-1) = \frac{j_1+j_2-j}{(k-2j)} \tag{133}$$

Коэффициент $B(0)$.

Рассмотрим следующий вектор

$$|1,0\rangle = B(0)J^0_{-1}|0,0\rangle_j + C(0)J^+_{-1}J^-_0|0,0\rangle_j \tag{134}$$

Действуем на него J^0_1 и применяем уравнения цепочки. Получаем

$$J^0_1|1,0\rangle = (2jC(0) + \frac{k}{2}B(0))|0,0\rangle = (j-j_2)|0,0\rangle \tag{135}$$

Подействуем теперь оператором J^-_1. Получим

$$\frac{2j}{j_1+j_2-j}\left\{C(0)(-2(j-1)+k) + B(0)\right\}|0,1\rangle = (-j+j_1+j_2+1)|0,1\rangle \tag{136}$$

И после действия J_0^+

$$\frac{k-2j}{j_1+j_2-j}\left\{2jC(0)-B(0)\right\}|1,-1\rangle=(j+j_1-j_2+1)|1,-1\rangle \tag{137}$$

Таким образом, получаем систему из трех уравнений для нахождения $B(0)$, $C(0)$ и j

$$\begin{aligned} 2jC(0)+\frac{k}{2}B(0) &= (j-j_2) \\ (-2(j-1)+k)C(0)+B(0) &= \frac{(-j+j_1+j_2+1)(j+j_1+j_2)}{2j} \\ 2jC(0)-B(0) &= \frac{(j+j_1-j_2+1)(j_1+j_2-j)}{k-2j} \end{aligned} \tag{138}$$

Оказывается, что в этой системе только два линейно независимых уравнения, и решение имеет вид

$$\begin{aligned} B(0) &= 2\frac{-jt+j_2t+j^2+j_1^2+j_1+j-j_2^2-j_2}{t(-t+2+2j)} \\ C(0) &= \frac{j^2t-j_1^2t-j_1t-jt+j_2^2t+j_2t+2j^2+2j_1^2+2j_1+2j-2j_2^2-2j_2-2jj_2t}{2jt(-t+2+2j)} \\ j &= j \end{aligned} \tag{139}$$

что свидетельствует, что мы не сделали ошибок и получили самосогласованные уравнения. Таким образом, мы нашли $B(0)$.

Коэффициент $A(1)$.
Для нахождения $A(1)$ подействуем оператором J_1^+, что приводит к уравнению

$$A(1)(2j+k)+B(1)(-2j)=(j+j_1-j_2) \tag{140}$$

С учетом второго уравнения из (130) имеем

$$\begin{aligned} A(1)(2j+k)-2jB(1) &= (j+j_1-j_2) \\ 2A(1)+2jB(1) &= (j+j_1-j_2)B(0) \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует

$$A(1)=\frac{(j+j_1-j_2)(1+B(0))}{2j+k+2} \tag{141}$$

A.2 Коэффициенты операторного разложения на втором уровне.

$$A_{-1,-1}(2),\quad A_{-1,0}(1),\quad A_{-1,1}(0),\quad A_{0,-1}(1),\quad A_{0,0}(0),\quad A_{0,1}(-1),\quad A_{1,-1}(0),\quad A_{1,0}(-1),\quad A_{1,1}(-2) \tag{142}$$

применяя уравнения, аналогичные (**??**). Например

$$A_{1,1}(-2)=\frac{(-j+j_1+j_2-1)(-j+j_2-j_1)}{2(k-2j+1)(k-2j)} \tag{143}$$

Полученная система уравнений может быть решена в явном виде

$$\begin{aligned} A_{-1,0}(m)=A_{0,-1}(m) &= [A_{-1,0}(1)+\mathcal{R}m]\cdot\frac{(j+j_1-j_2-1)_{m-1}}{(m-1)!(2j)_{m-1}} \\ A_{-1,1}(m)=A_{1,-1}(m) &= [A_{-1,1}(0)+\mathcal{P}^{(-1)}m+\mathcal{Q}^{(-1)}m^2]\cdot\frac{(j+j_1-j_2)_m}{(m)!(2j)_m} \\ A_{0,1}(m)=A_{1,0}(m) &= [A_{0,1}(-1)+\mathcal{P}^{(0)}m+\mathcal{Q}^{(0)}m^2+\mathcal{Z}^{(0)}m^3]\cdot\frac{(j+j_1-j_2+1)_{m+1}}{(m+1)!(2j)_{m+1}} \\ A_{-1,-1}(m) &= A_{-1,-1}(2)\cdot\frac{(j+j_1-j_2-2)_{m-2}}{(m-2)!(2j)_{m-2}} \\ A_{0,0}(m) &= [A_{-1,1}(0)-4\mathcal{P}^{(-1)}m-4\mathcal{Q}^{(-1)}m^2]\cdot\frac{(j+j_1-j_2)_m}{(m)!(2j)_m} \\ A_{1,1}(m) &= [A_{1,1}(0)+\mathcal{P}^{(1)}m+\mathcal{Q}^{(1)}m^2+\mathcal{Z}^{(1)}m^3+\mathcal{T}^{(1)}m^4]\cdot\frac{(j+j_1-j_2+2)_{m+2}}{(m+2)!(2j)_{m+2}} \end{aligned} \tag{144}$$

Где введены следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \frac{-2A_{-1,-1}}{j+j_1-j_2-1} \\
\mathcal{Q}^{(-1)} &= \frac{1}{2(j+j_1-j_2)}\mathcal{R} \\
\mathcal{P}^{(-1)} &= \frac{1}{(j+j_1-j_2)}(A_{-1,0}(1)+\mathcal{R}) \\
\mathcal{Z}^{(0)} &= \frac{1}{3(j+j_1-j_2+1)}\mathcal{Q}^{(-1)} \\
\mathcal{Q}^{(0)} &= \frac{1}{2(j+j_1-j_2+1)}(\mathcal{P}^{(-1)}+\mathcal{Q}^{(-1)}) \\
\mathcal{P}^{(0)} &= \frac{1}{1(j+j_1-j_2+1)}(A_{-1,1}(0)+\frac{1}{2}\mathcal{P}^{(-1)}-\frac{1}{6}\mathcal{Q}^{(-1)}) \\
\mathcal{T}^{(1)} &= \frac{1}{4(j+j_1-j_2+2)}\mathcal{Z}^{(0)} \\
\mathcal{Z}^{(1)} &= \frac{1}{3(j+j_1-j_2+2)}(\mathcal{Q}^{(0)}+\frac{3}{2}\mathcal{Z}^{(0)}) \\
\mathcal{Q}^{(1)} &= \frac{1}{2(j+j_1-j_2+2)}(\mathcal{P}^{(0)}+\mathcal{Q}^{(0)}+\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{(0)}) \\
\mathcal{P}^{(1)} &= \frac{1}{1(j+j_1-j_2+2)}(A_{0,1}(-1)+\frac{1}{2}\mathcal{P}^{(0)}+\frac{1}{6}\mathcal{Q}^{(0)})
\end{aligned}
\tag{145}
$$

B Сингулярные вектора.

Представления с целыми либо полуцелыми спинами обязательно содержат в своем Модуле нуль вектора. Рассмотрим это на нескольких примерах. Вектор нулевого уровня $|0,1\rangle$ становиться старшим при $j=0$. Вектор $|0,2\rangle$ будет старшим вектором при $j=1/2$ и т.д.

Исследуем подробнее первый уровень.

Рассмотрим вектор $|1,-1\rangle$. Этот вектор является старшим, т.к. $J_0^+|1,-1\rangle=0$. Следующий вектор $|1,0\rangle$ имеет вид

$$[C(0)J_{-1}^+J_0^-+B(0)J_{-1}^0]|j\rangle \tag{146}$$

Определим, при каких условиях этот вектор является старшим. Т.к. Старший вектор представления уничтожается повышающим оператором J_0^+, а так же, например J_1^-. Отсюда получаем систему на коэффициенты этого вектора

$$
\begin{gathered}
2jC(0)-B(0)=0 \\
(-2(j-1)+k)C(0)+B(0)=0
\end{gathered}
\tag{147}
$$

Уравнения системы совместны, если $k=-2$. Можно проверить согласованность этих двух условий с другими и убедиться, что точка $t=k+2=0$ соответствует появлению нуль вектора $|1,0\rangle$.

Следующий вектор $|1,1\rangle$. Рассмотрение, аналогичное приведенному выше (см. Приложение), показывает, что этот вектор является старшим, если

$$j=-\frac{t}{2} \qquad \text{или} \qquad j=-\frac{1}{2},\ \ t=1 \tag{148}$$

Как видно и приведенных примеров, сингулярные вектора возникают при $t=0,\pm1,\pm2....$ Эти особенности должны сохраниться и для более высоких уровней, так как, учитывая параметризацию (56), особые точки параметра t соответствуют представлениям с целыми, либо полуцелыми спинами.

Вектор $|1,1\rangle$

Действуем, оператором J_0^+ на вектор

$$|1,1\rangle=C(1)J_{-1}^+(J_0^-)^2|0,0\rangle_j+B(1)J_{-1}^0J_0^-|0,0\rangle_j+A(1)J_{-1}^-|0,0\rangle_j \tag{149}$$

Это приводит к следующему уравнению

$$\left\{[2(2j-1)C(1)-B(1)]J_{-1}^+J_0^-+[2jB(1)+2A(1)]J_{-1}^0\right\}|0,0\rangle=0 \tag{150}$$

Подействуем теперь на тот же самый вектор оператором J_1^0. Получим

$$\left\{(4j-2)C(1)+\frac{k}{2}B(1)-A(1)\right\}J_0^-\left|0,0\right\rangle=0 \tag{151}$$

Действие оператора J_1^+ дает

$$\left\{(-2j)B(1)+(2j+k)A(1)\right\}\left|0,0\right\rangle=0 \tag{152}$$

И вектор имеет вид

$$\left|\chi\right\rangle=\left\{C(1)J_{-1}^+J_0^-J_0^-+B(1)J_{-1}^0J_0^-+J_{-1}^-\right\}\left|0,0\right\rangle_j \tag{153}$$

где

$$\begin{aligned} B(1) &= \frac{2j+k}{2j} \\ C(1) &= \frac{4j-(k+2j)k}{4j(4j-2)} \end{aligned} \tag{154}$$

подействуем оператором J_1^-. Получим

$$\left\{(k-2(j-2))C(1)+B(1)\right\}J_0^-J_0^-\left|0,0\right\rangle=0 \tag{155}$$

Это уравнение позволяет найти связь между j и k. Действительно, подставляя в него полученные ранее $B(1)$ и $C(1)$, производя несложные преобразования, приходим к квадратному уравнению

$$2(2j+k)(4j-2)=(2j-4-k)(4j-k(2j+k)) \tag{156}$$

Введем так же параметр $t=k+2$, тогда два решения этого уравнения принимают вид

$$j_1=-\frac{t}{2} \qquad j_2=\frac{t}{2}-1 \tag{157}$$

Вспомним теперь про условия (150). Легко проверить, что первый корень тождественно удовлетворяет этим условиям, в то время как второй корень дает условие $k=-2$. Поэтому, для $j=-t/2$ окончательный вид нуль-вектора следующий

$$\left|\chi\right\rangle_{1,1}=\left\{J_{-1}^+J_0^-J_0^--2(t+1)J_{-1}^0J_0^--t(t+1)J_{-1}^-\right\}\left|0,0\right\rangle \tag{158}$$

Таким образом, явные вычисления подтвердили предсказания теоремы не только относительно размерности j нуль вектора, но и его явный вид.

Список литературы

[1] Al.B.Zamolodchikov, Commun.Math.Phys. 96,419-422 (1984)

[2] Al.Zamolodchikov, Higher Equations of Motion in Liouville Field Theory, hep-th/031227004158.

[3] A.B.Zamolodchikov and V.A.Fateev, Yad.Fiz. 43, 1031-1044 (1986)

[4] V.G.Kac and D.A.Kazhdan, Adv.Math. **34** (1979) 97.

[5] F.G.Malikov, B.L.Feigin and D.B.Fuks,

[6] Awata and Yamada, Mod.Phys.Lett.A7:1185-1196,1992.