МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

Факультет Общей и Прикладной Физики
кафедра "Проблемы теоретической физики"

Квалификационная выпускная работа на соискание степени бакалавра

студента 328 группы Сербина М.Н.

Флуктуационный Эффект Нернста в Сверхпроводниках

Научный руководитель
к. ф.-м. н., М.А. Скворцов

Москва
2007 г.

Содержание

1 Введение. Мотивация и постановка задачи

В данной работе изучается флуктуационный эффект Нернста-Эттингсгаузена в сверхпроводниках находящихся выше области сверхпроводящего перехода. Эффект заключается в возникновении разности потенциалов при наличии градиента температуры и перпендикулярного к нему внешнего магнитного поля[1]. В металлах и полупроводниках эффект Нернста обусловлен зависимостью времени релаксации носителей тока при взаимодействии с решеткой от их энергии (или скорости) и поэтому чувствителен к механизму рассеяния носителей тока.

В недавно вышедшей экспериментальной работе [1] измерялся эффект Нернста в сверхпроводящих аморфных пленках $Nb_{0.15}Si_{0.85}$. В силу необычайно малой длины свободного пробега вклад в эффект Нернста от свободных электронов исчезающе мал, таким образом в эксперименте напрямую измерена величина вклада от флуктуационных куперовских пар [5]. При этом значительная величина сигнала была обнаружена в очень широком диапазоне температур (вплоть до $30 \times T_c$) и магнитных полей (до $4 \times B_{c2}$).

В области слабых магнитных полей и температуры в окрестности перехода величина эффекта согласуется с теоретическими предсказаниями из работы Уссишкина [2] — коэффициент Нернста зависит от единственного параметра — сверхпроводящей корреляционной длины. При высоких температурах/сильных магнитных полях величина коэффициента отклоняется от имеющихся теоретических предсказаний. В данной работе делаются первые шаги по вычислению флуктуационного коэффициента Нернста в далекой от сверхпроводящего перехода области: в разделе **2** мы определяем коэффициент Нернста-Эттингсгаузена на языке диаграммной техники и воспроизводим результат Уссишкина вблизи T_c. Раздел **3** полностью посвящен вычислению намагниченности вклад от которой надо вычесть чтобы получить физически наблюдаемую величину. Сначала рассматриваются всевозможные случаи допускающие аналитическое рассмотрение, затем выводится общая формула и полная картина поведения намагниченности во всем диапазоне температур и полей.

2 Коэффициент Нернста и диаграммная техника

2.1 Определение коэффициента Нернста

Рассмотрим схему эксперимента по наблюдению эффекта Нернста-Эттингсгаузена (в дальнейшем мы будем называть его просто эффектом Нернста). Пусть имеются градиент температуры $(-\nabla T)\|\hat{\mathbf{x}}$ и магнитное поле $H\|\hat{\mathbf{z}}$ и мы измеряем отклик электрического поля вдоль оси $\hat{\mathbf{y}}$. Тогда, по определению, коэффициент Нернста равен

$$\nu_N = \frac{E_y}{(-\nabla T)_x H}$$

Однако теоретическое рассмотрение позволяет получить коэффициенты связывающие электрический и тепловой транспортные токи с электрическим полем и градиентом температуры:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{tr}^{(e)\alpha} &= \sigma^{\alpha\beta}\mathbf{E}^{\beta} + \beta^{\alpha\beta}\nabla^{\beta}T \\ \mathbf{j}_{tr}^{(h)\alpha} &= \gamma^{\alpha\beta}\mathbf{E}^{\beta} - \kappa^{\alpha\beta}\nabla^{\beta}T \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\beta^{\alpha\beta}, \gamma^{\alpha\beta}$ и $\kappa^{\alpha\beta}$ — тензоры термоэлектрических коэффициентов и теплопроводности. Тензоры $\beta^{\alpha\beta}$ и $\gamma^{\alpha\beta}$ связаны между собой соотношением Онсагера, $\gamma^{\alpha\beta}(H) = -T\beta^{\alpha\beta}(-H)$. Применяя уравнения (1), можно получить для коэффициента Нернста следующий результат:

$$\nu_N = \frac{1}{H}\frac{\beta^{xy}\sigma^{xx} - \beta^{xx}\sigma^{xy}}{(\sigma^{xx})^2 + (\sigma^{xy})^2}$$

Мы предполагаем наличие симметрии между электронами и дырками, другими словами пренебрегаем всеми вкладами вызванными асимметрией различных свойств (к примеру, плотности состояний) по разные стороны от ферми-поверхности. В данном приближении $\sigma^{xy} = \beta^{xx} = \kappa^{xy} = 0$ и для вычисления коэффициента Нернста нам необходимо найти вклад от сверхпроводящих флуктуаций в компоненту β^{xy} тензора β (считается что спаривание происходит в s канале [2]). При этом в формуле

$$\nu_N = \frac{1}{H}\frac{\beta^{xy}}{\sigma^{xx}}$$

можно считать σ^{xx} равной обычной проводимости не сильно близко от T_c (точнее, в области $\frac{T-T_c}{T_c}, \ \frac{H-H_{c2}}{H_{c2}} \gg \mathrm{Gi} \sim \frac{1}{g}$, где $g = \frac{\hbar}{e^2}\frac{1}{R_\square}$ — безразмерный кондактанс пленки).

[1] этот эффект связан с противоположным эффектом Нернста (иногда его называют эффектом Эттингсгаузена) — возникновением градиента температуры при протекании тока через проводник в магнитном поле.

2.2 Определение теплового тока, тепловая вершина

Ситуация с записью оператора теплового тока является куда более сложной в сравнении с электрическим током, поскольку понятие количества тепла не имеет четкого определения в гамильтоновом формализме. Чтобы понять выражение для теплового тока, надо начать рассмотрение с определения дифференциала количества тепла при фиксированном объеме:

$$\delta Q(t) = T\delta S = \delta\mathcal{E}(t) - \mu\delta N(t) + \mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{2}$$

Причем здесь векторный потенциал $\mathbf{A}(r,t)$ состоит из двух слагаемых, одно из которых соответствует магнитному полю и не зависит от времени, а второе слагаемое, ответственное за электрическое поле, является малым, так как само электрическое поле мало. Аналогично можно записать $\mathbf{j}^{(e)} = \mathbf{j}^{(e)}_{tr} + \mathbf{j}^{(e)}_{magn}$ и пренебречь малым (опять таки, в силу малости электрического поля) $\mathbf{j}^{(e)}_{tr}$. Оставшийся ток $\mathbf{j}^{(e)}_{magn}(\mathbf{r})$ не зависит от временной части векторного потенциала и выражается через намагниченность образца $\mathbf{M}$ как $\mathbf{j}^{(e)} = \mathbf{j}^{(e)}_{magn} = \nabla\times\mathbf{M}$. Рассмотрев временную вариацию от обоих частей уравнения (2), учитывая все вышесказаное, можно записать:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta t} - \mu\frac{\delta N}{\delta t} + \nabla\times\mathbf{M}\cdot\frac{\delta\mathbf{A}_E(\mathbf{r},t)}{\delta t} \tag{3}$$

Естественно определить полный тепловой ток $\mathbf{j}_{(Q)}$ и полный поток энергии $\mathbf{j}_{(\mathcal{E})}$ потребовав

$$\mathrm{div}\ \mathbf{j}_{(Q)} = -\frac{\delta Q}{\delta t}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{j}_{(\mathcal{E})} = -\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta t}$$

Слагаемое $\mu\frac{\delta N}{\delta t}$ соответствует потоку энергии вызванному упорядоченным движением частиц, поэтому транспортный ток соответствует первым двум слагаемым в (3):

$$\mathrm{div}\ \mathbf{j}^{(h)}_{(tr)} = -\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta t} + \mu\frac{\delta N}{\delta t}$$

$$\mathbf{j}^{(h)}_{(tr)} = \mathbf{j}_{(\mathcal{E})} - \frac{\mu}{e^*}\,\mathbf{j}^{(e)}_{tr}$$

(e^* — заряд частицы). Наконец, $\nabla\times\mathbf{M}\cdot\mathbf{E} = \mathrm{div}\ (\mathbf{M}\times\mathbf{E}) = \mathrm{div}\ \mathbf{j}^{(h)}_{magn}$. В результате, учтя (3), мы можем записать для $\mathbf{j}_{(Q)}$:

$$\mathbf{j}_{(Q)} = \mathbf{j}^{(h)}_{tr} + \mathbf{j}^{(h)}_{magn}\ ,\quad \mathbf{j}^{(h)}_{magn} = \mathbf{M}\times\mathbf{E}$$

Таким образом, тензор $\tilde{\beta}^{\alpha\beta}$ определенный как

$$\mathbf{j}^{\alpha}_{(Q)} = -T\tilde{\beta}^{\alpha\beta}\mathbf{E}^{\beta} \tag{4}$$

связан с наблюдаемой величиной $\beta^{\alpha\beta}$, которая входит в выражение для коэффициента Нернста, следующим образом:

$$\beta^{\alpha\beta} = \tilde{\beta}^{\alpha\beta} + \frac{1}{T}\ e^{\alpha\beta\gamma}M^{\gamma} \tag{5}$$

Мы рассматриваем тензор $\tilde{\beta}$ вместо β поскольку существует простое выражение для вершины оператора именно теплового тока, т.н. ε-представление тепловой вершины в котором

$$\hat{\gamma}^{i}_{(Q)} = \frac{i(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+\nu})}{2}\frac{p_i}{m_e} \tag{6}$$

Что касается вершины соответствующей оператору электрического тока, то она имеет вид

$$\hat{\gamma}^{i}_{(e)} = e^*\frac{p_i}{m_e} \tag{7}$$

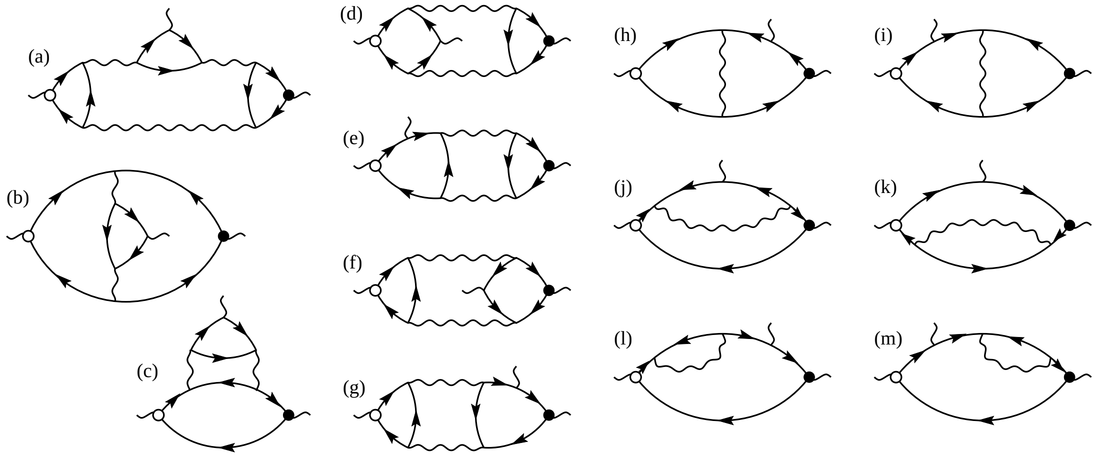

Рис. 1: Диаграммы, дающие вклад в $Q^{\alpha\beta}_{(eQ)}(\omega_\nu)$ в слабом магнитном поле. Диаграммы (a, d-g) соответствуют вставке магнитной вершины в АЛ диаграмму, (b, h, i) — в МТ диаграмму, (c, j, l, k, m) — в диаграмму плотности состояний. Из работы [2].

2.3 Вычисление ν_N в слабом магнитном поле вблизи T_c

Мы проведем вычисление β^{xy} аналогично тому как это было сделано в работах [2], [3] (см. также работу [7]). Согласно формуле Кубо, мы можем записать для тензора $\tilde{\beta}^{\alpha\beta}$ определенного в (4):

$$\tilde{\beta}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{T}\lim_{\omega\to 0}\frac{\operatorname{Im} Q^{\alpha\beta}_{(eQ)}(\omega)}{\omega}$$

где $Q^{\alpha\beta}_{(eQ)}$ — фурье образ запаздывающей корреляционной функции операторов электрического и теплового тока $\hat{\mathbf{J}}^{\alpha}_{(e)}$, $\hat{\mathbf{J}}^{\beta}_{(Q)}$ в представлении гейзенберга. Его можно получить аналитическим продолжением функции $Q^{\alpha\beta}_{(eQ)}(k,\omega_\nu)$ определенной на мацубаровских частотах, которая представляется петлей точных гриновских функций с двумя вершинами (6), (7). Поправки первого порядка к $Q^{\alpha\beta}_{(eQ)}(k,\omega_\nu)$ определяются тремя типами диаграмм, т.н. диаграммой Асламазова-Ларкина (АЛ), Маки-Томпсона (МТ) и перенормировкой плотности состояний.

В случае слабого магнитного поля, его можно учесть (в главном порядке) вводя в диаграммы дополнительную токовую вершину соответствующую магнитному полю. Тогда мы получаем набор диаграмм изображенный на рис. 1.

Если мы находимся вблизи T_c, наибольший вклад дают диаграммы содержащие максимальное количество флуктуационных пропагаторов. Это значит, что нам необходимо вычислить только диаграмму (a) (и ее зеркальное отражение). Мы выбираем векторный потенциал в виде $A^y = H\hat{x} = -iH\frac{\partial}{\partial q_x}$ и учитываем его наличие используя градиентно-инвариантный импульс в пропагаторе флуктуационных пар. Тогда общее выражение для $Q^{\alpha\beta}_{(eQ)}(\omega_\nu)$, с учетом связи между тепловой и электрической вершинами, записывается как

$$Q^{\alpha\beta(AL)}_{(eQ)}(H,\omega_\nu) = \frac{2iT}{e}\sum_{\Omega_k}\int\frac{\Omega_k d^2q}{(2\pi)^2}B^{\alpha}_{(e)}(q)B^{\beta}_{(e)}(q)L(q-2eA,\Omega_k)L(q-2eA,\Omega_k+\omega_\nu)$$

(выражение написано для $d = 2$, все формулы и рассуждения написанные ранее применимы как к двумерному, так и к трехмерному случаю), где L — флуктуационный пропагатор куперовских пар вблизи перехода, точное выражение для которого приведено ниже, а $B^{\alpha}_{(e)}$ — эффективная вершина взаимодействия электромагнитного поля с куперовскими парами. При разложении пропагатора появляется производная от поляризационного оператора, которая снова может быть переписана через $B^{\alpha}_{(e)}(q)$, и, в линейном приближении по магнитному полю, можно записать:

$$Q^{xy(AL)}_{(eQ)}(H,\omega_\nu) = \frac{8H}{e^2D}T\sum_{\Omega_k}\int\frac{\Omega_k d^2q}{(2\pi)^2}\left[B^{x}_{(e)}(q)B^{y}_{(e)}(q)\right]^2 L(q,\Omega_k+\omega_\nu)L(q,\Omega_k)\left\{L^2(q,\Omega_k)+L^2(q,\Omega_k+\omega_\nu)\right\}$$

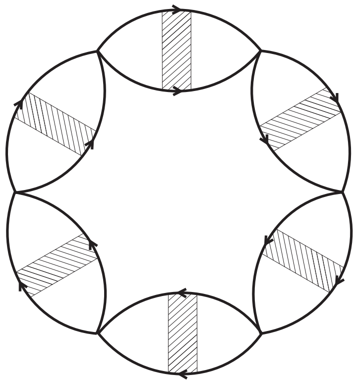

Рис. 2: Диаграммы определяющие поправку к флуктуационной энергии.

Преобразуя сумму в контурный интеграл и совершая аналитическое продолжение, после вычисления интеграла получим

$$\frac{\mathbf{j}^x_{(Q)}}{\mathbf{E}^y} = -\frac{e^2TH}{2\pi}\frac{\eta}{\epsilon}$$

(мы используем обозначения Уссишкина из [2], где η связано с корреляционной длиной при нулевой температуре $\xi(0)$ как $\eta = \xi^2(0)$) Для намагниченности на единицу площади имеем (ср. формулу (13) и сноску на той же странице)

$$M^z = M \cdot d = -\frac{e^2TH}{3\pi}\frac{\eta}{\epsilon}$$

Таким образом, токи намагниченности составляют значительную долю эффекта, и, с помощью (4), для $\beta^{xy(AL)}$ мы получаем:

$$\beta^{xy(AL)} = \tilde{\beta}^{xy(AL)} + \frac{1}{T}\ M^z = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{e^2TH}{\pi}\frac{\eta}{\epsilon} = \frac{e}{6\pi}\frac{\xi^2(T)}{l_H^2} \sim \frac{1}{T-T_c}$$

где $l_H = (1/eH)^{1/2}$ — магнитная длина [2].

3 Вычисление намагниченности

Исходным пунктом наших вычислений будет выражение для однопетлевой поправки к флуктуационной части свободной энергии (ср. с [3], стр. 262). Она дается суммой диаграмм изображенных на рис. 2:

$$F(H,T) = -T\sum_{\Omega_k}\mathrm{tr}[\log(1 - g\Pi(\Omega_k, n))]$$

Где g — константа взаимодействия в БКШ теории, Π — поляризационный оператор, след вычисляется по пространственным переменным, сумма идет по мацубаровским частотам $\Omega_k = 2\pi kT$. Учитывая, что число состояний на одном уровне Ландау равно $dN = \frac{e^*HS}{2\pi\hbar c}$, мы можем представить след как $\mathrm{tr} \longrightarrow \frac{e^*HS}{2\pi\hbar c}\sum_n$, $e^* = -2e$. Таким образом, в системе единиц $c = \hbar = k_B = 1$, мы получаем:

$$\frac{F(H,T)}{V} = +\frac{eHT}{\pi d}\sum_{\Omega_k, n}\log(1 - g\Pi(\Omega_k, n))$$

где d толщина нашего двумерного образца, а V — его объем.

L — пропагатор флуктуационных куперовских пар выражается через Π как:

$$L = \frac{-g}{1 - g\Pi}$$

Теперь, используя общее выражение для L [3], справедливое как вблизи, так и вдали от сверхпроводящего перехода,

$$L^{-1} = -\nu\left[\log\frac{T}{T_c} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{|\Omega_k| + 4DeH(n+1/2)}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] \quad (8)$$

[2] в трехмерном случае мы имеем $\beta^{xy(AL)} = \frac{e}{12\pi}\frac{\xi(T)}{l_H^2} \sim \frac{1}{\sqrt{T-T_c}}$

мы получим

$$\frac{F(H,T)}{V} = +\frac{eHT}{\pi d} \sum_{\Omega_k,n} \log \mathcal{L}(\Omega_k, n) \tag{9}$$

где $\mathcal{L}$ определено как

$$\mathcal{L}(\Omega_k, n) = \log \frac{T}{T_c} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{|\Omega_k| + 4DeH(n+1/2)}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

Перед тем как привести это выражение к виду позволяющему делать численные вычисления с помощью компьютера, мы рассмотрим некоторые случаи, допускающие аналитическое рассмотрение.

3.1 Случаи допускающие аналитическое рассмотрение

В некоторых специальных случаях выражение для поправки к свободной энергии (9), содержащее двойную сумму, может быть значительно упрощено. Это, в частности, возможно в слабых магнитных полях H при произвольных температурах T, а также при нулевой температуре и вблизи произвольной точки на плоскости (T, H) принадлежащей линии сверхпроводящего перехода. В данном разделе мы рассмотрим все три случая.

3.1.1 Слабое магнитное поле и произвольная температура $T > T_c$

Мы рассматриваем случай малых магнитных полей, т.е. делаем вычисления в главном порядке по полю. Двойная сумма в общей формуле (9) может быть преобразована в интеграл используя следующие соотношения для суммы по частотам и по уровням Ландау:

$$T \sum_{\Omega} \log \mathcal{L}(\Omega, n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \log \mathcal{L}(i\omega, n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \mathrm{Im}\left[\log \mathcal{L}(i\omega, n)\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \tanh \pi x \ f(ix)$$

После чего для $F(H,T)$ мы получаем:

$$\frac{F(H,T)}{V} = -\frac{eH}{2\pi^2 id} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \log \mathcal{L}(i\omega, n) =$$

$$= +\frac{eH}{2\pi^2 id} \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \tanh \pi x \log \mathcal{L}(i\omega, ix) =$$

$$= -\frac{eH}{4\pi^2 d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \tanh \pi x \log \mathcal{L}(i\omega, ix)$$

Определив функцию

$$f(x) \equiv \log\left\{\log \frac{T}{T_c} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{11}$$

мы можем записать это как:

$$\frac{F(H,T)}{V} = -\frac{eH}{4\pi^2 d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \tanh \pi x f(i\omega + 4iDeHx)$$

Производя замену переменной $x \to 4DeHx$ имеем:

$$\frac{F(H,T)}{V} = -\frac{1}{16\pi^2 Dd} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \tanh\left(\frac{\pi x}{4DeH}\right) f(i\omega + ix)$$

$$\mathcal{F} \equiv -16\pi^2 Dd \frac{F(H,T)}{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \tanh\left(\frac{\pi x}{4DeH}\right) f(i\omega + ix)$$

Преимущество полученной формулы заключается в том что магнитное поле входит в нее только в знаменателе аргумента tanh. Вычитание (бесконечной) константы не зависящей от магнитного поля не изменит ответа для намагниченности и восприимчивости, поэтому выражение для $\mathcal{F}$ можно записать как:

$$\mathcal{F}=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{0}^{\infty}dx\coth\left(\frac{\omega}{2T}\right)\left(\tanh\left(\frac{\pi x}{4DeH}\right)-1\right)[f(i\omega+ix)-f(i\omega-ix)]$$

Раскладывая $[f(i\omega+ix)-f(i\omega-ix)]$ по x (интеграл набирается на $x\sim DeH$, разложение идет по параметру DeH/T который является малым), мы получим:

$$[f(i\omega+ix)-f(i\omega-ix)]=2f'(i\omega)ix-\frac{1}{3}f'''(i\omega)ix^3+\dots$$

Используя значения интегралов

$$\int_0^{\infty}dyy(\tanh y-1)=-\frac{\pi^2}{24}\ ;\quad\int_0^{\infty}dyy^3(\tanh y-1)=-\frac{7\pi^4}{960}$$

мы имеем (тремя точками обозначены опущенные слагаемые следующих порядков по полю):

$$\mathcal{F}=-\frac{4}{3}(DeH)^2\int_0^{\infty}d\omega\coth\frac{\omega}{2T}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(f(i\omega)+f(-i\omega)\right)+\dots=-\frac{8}{3}(DeH)^2\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty}d\omega\coth\frac{\omega}{2T}\frac{\partial}{\partial\omega}f(i\omega)$$

Вычитая и прибавляя к coth единицу, можем записать это как:

$$\mathcal{F}=-\frac{8}{3}(DeH)^2\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty}d\omega\Big(\coth\frac{\omega}{2T}-1+1\Big)\frac{\partial}{\partial\omega}f(i\omega)=$$
$$=-\frac{8}{3}(DeH)^2\,\mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty}d\omega\frac{2}{e^{\frac{\omega}{T}}-1}\frac{\partial}{\partial\omega}f(i\omega)+\int_0^{\infty}d\omega\frac{\partial}{\partial\omega}f(i\omega)\right]=\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2$$

Вычисление $\mathcal{F}_2$ тривиально, так как под интегралом стоит полная производная

$$\mathcal{F}_2=-\frac{8}{3}(DeH)^2\,\mathrm{Re}(f(i\tau^{-1})-f(0))=-\frac{8}{3}(DeH)^2\left(\log\log\frac{1}{T_c\tau}-\log\log\frac{T}{T_c}\right)$$

$$M_2=-\frac{T_ce}{\pi^2d}h\frac{\pi}{6\gamma_E}\left(\log\log\frac{1}{T_c\tau}-\log\log\frac{T}{T_c}\right)\tag{12}$$

Для $\mathcal{F}_1$ в случае T близкого к T_c, можно получить ответ использованный в работе [2]. Подставляя в качестве L выражение верное вблизи перехода, $f(x)$ представляется в виде

$$f(x)=\log\left(\epsilon+\frac{x}{4\pi T}\psi'\left(\frac{1}{2}\right)\right),\quad\epsilon=\log\frac{T}{T_c}=\frac{T-T_c}{T_c}$$

и используя тот факт что интеграл по ω набирается при $\omega\ll T$ (точнее на $\omega\sim\epsilon T$) мы раскладываем экспоненту $\frac{2}{e^{\frac{\omega}{T}}-1}=2T/\omega$ и получаем

$$\mathrm{Re}\int_0^{\infty}d\omega\frac{2}{e^{\frac{\omega}{T}}-1}\frac{\partial}{\partial\omega}f(i\omega)=\frac{\psi'(1/2)}{4\epsilon}=\frac{\pi T\eta}{\epsilon D}$$

Для $\mathcal{F}$ и F/V это дает

$$\mathcal{F}=-\frac{8}{3}(DeH)^2\frac{\psi'(1/2)}{4\epsilon},\quad\frac{F}{V}=\frac{1}{48}\frac{De^2H^2}{d\epsilon}$$

Соответственно, флуктуационная намагниченность, равная по определению $M=-\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial H}$,

$$M=-\frac{1}{24}\frac{De^2H}{d}\frac{1}{\epsilon}$$

или, выделив размерную константу, окончательно получим

$$M=-\frac{T_ce}{\pi^2d}h\frac{\pi^3}{48\gamma_E}\frac{1}{\epsilon},\quad h=\frac{H}{H_{c2}(0)}\tag{13}$$

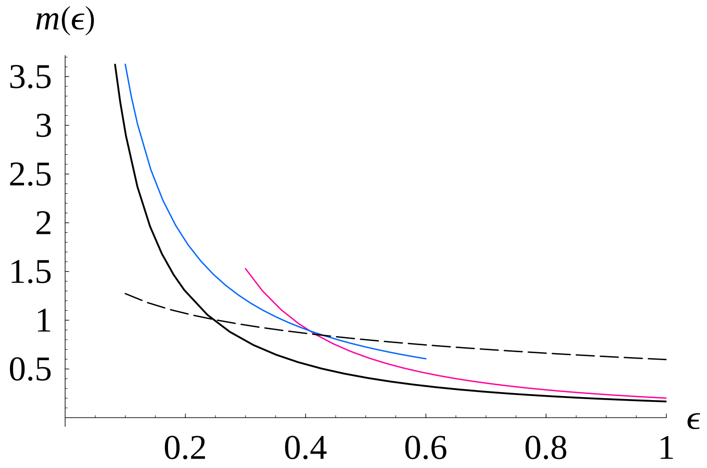

Рис. 3: зависимость обезразмеренной намагниченности $m = m(\epsilon) = M/\left(-\frac{T_c e}{\pi^2 d} h\right)$ от ϵ. Черная сплошная линия соответствует M_1 из (14), пунктирная — M_2 (на данном графике выбрано $\tau T_c = 1000$, M_2 очень слабо зависит от обрезания), синим и красным цветом показаны соответственно асимптотики M_1 вблизи и далеко от T_c, см. формулы (13) и (15)

Что в точности совпадает с результатом полученным в [6] и использованным в [2][3]. Вклад $\mathcal{F}_2$ в данном случае несущественен, поскольку он зависит от температуры менее сингулярным образом, как $\log \epsilon$, и не заметен на фоне $\frac{1}{\epsilon}$.

В противоположном случае, когда $T \gg T_c$ результат для $\mathcal{F}_1$ может быть получен после разложения по параметру $(\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right))/\epsilon$. Общая формула дает для $\mathcal{F}_1, M_1$:

$$\mathcal{F}_1 = \frac{8}{3}(DeH)^2 \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^\infty dx \frac{1}{e^x - 1} \left[\frac{\psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{ix}{4\pi}\right)}{\epsilon + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{ix}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$M_1 = -\frac{T_c e}{\pi^2 d} h \left(-\frac{1}{12\gamma_E}\right) \operatorname{Im} \int_0^\infty dx \frac{1}{e^x - 1} \left[\frac{\psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{ix}{4\pi}\right)}{\epsilon + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{ix}{4\pi}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)} \right] \tag{14}$$

(мы заменили переменную интегрирования ω безразмерной переменной $x = \omega/T$). Разложение знаменателя до первого порядка по ϵ и численное вычисление полученных интегралов дает:

$$M_1 = -\frac{T_c e}{\pi^2 d} h \frac{1}{24\gamma_E} \left(\frac{A}{\epsilon} + \frac{B}{\epsilon^2}\right), \quad A = 3.85603, \quad B = 4.72586 \tag{15}$$

На рис. 3 видно что уже при $\epsilon \gtrsim 1$ и $\epsilon \lesssim 0.1$ значение M_1 из асимптотик хорошо согласуется с намагниченностью полученной из точной формулы.

3.1.2 Нулевая температура и произвольное $H > H_{c2}(0)$

Начнем наше рассмотрение с нахождения значения верхнего критического поля $H_{c2}(0)$ при нулевой температуре. Оно определяется появлением полюса у пропагатора (8) при $\Omega_k = 0$, $n = 0$. Используя значение $\psi(1/2)$ и асимптотику ψ функции на больших значениях аргумента, мы получаем [4]:

$$H_{c2}(0) = \frac{\pi T_c}{2\gamma_E De}$$

где $\gamma_E = 1.78$ — константа Эйлера. Для $\mathcal{L}(\Omega_k, n)$ определенной в (11) при $T = 0$ мы получаем:

$$\mathcal{L}(\Omega_k, n) = \log \frac{|\Omega_k| + 4DeH(n + \frac{1}{2})}{x_0} \text{ где } x_0 = \frac{\pi T_c}{\gamma_E}$$

[3]Использовав обозначения Уссишкина, $\frac{\psi'(1/2)}{4\epsilon} = \frac{\pi T \eta}{\epsilon D}$, для намагниченности мы получим $M = -\frac{e^2 T H}{3\pi d} \frac{\eta}{\epsilon}$, что воспроизводит формулу (37) из [2]

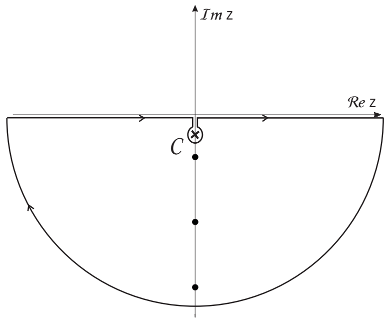

Рис. 4: Контур интегрирования при $\Omega < x_0$

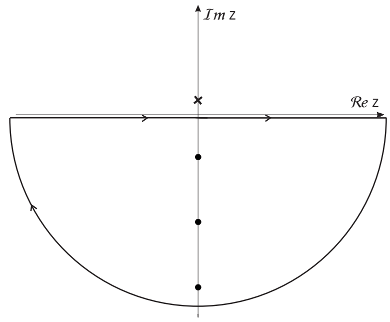

Рис. 5: контур интегрирования при $\Omega > x_0$

Суммирование по Ω_k превращается в интеграл: $T\sum_{\Omega_k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\Omega$, однако сумма по уровням Ландау не может быть напрямую превращена в интеграл по x, так как $f(x)$ имеет особенности, которые нельзя пересекать, деформируя контур. Обозначим $z = 4DeH(n+\frac{1}{2})$ и рассмотрим $\mathcal{L}$ как функцию комплексной переменной iz. $\mathcal{L}(\Omega, iz)$ зануляется в точке $iz^* = x_0 - \Omega$, и для $\Omega < x_0$ эта существенная особенность пересекается при «наивной» деформации контура. Однако, если $\Omega > x_0$, особенность лежит в плоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и контур можно деформировать как и раньше. Таким образом, при $\Omega < x_0$,

$$\sum_n \log\mathcal{L}(\Omega,n) = -\frac{1}{8iDeH}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dz \tanh\frac{\pi z}{4DeH}\log\mathcal{L}(\Omega,iz) + \int_C dz\tanh\frac{\pi z}{4DeH}\log\mathcal{L}(\Omega,iz)\right\}$$

где C — контур изображенный на рис. 4. Если же $\Omega > x_0$, то положение особенностей на комплексной плоскости становится таким как на рис. 5, и мы имеем:

$$\sum_n \log\mathcal{L}(\Omega,n) = -\frac{1}{8iDeH}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dz \tanh\frac{\pi z}{4DeH}\log\mathcal{L}(\Omega,iz)\right\}$$

Возвращаясь к общей формуле

$$\frac{F}{V} = \frac{eHT}{\pi d}\sum_{\Omega_k,n}\log\mathcal{L} = \frac{eH}{\pi^2 d}\int_0^{\infty} d\Omega\sum_n\log\mathcal{L}$$

и подставляя сюда полученные соотношения для суммы по уровням Ландау, имеем:

$$\frac{F}{V} = -\frac{1}{8\pi^2 Dd}\frac{1}{i}\left[\int_0^{x_0} d\Omega\left\{\int_0^{\infty} dz\tanh\frac{\pi z}{4DeH}2i\arctan\frac{\arctan\frac{z}{\Omega}}{\log\frac{\sqrt{z^2+\Omega^2}}{x_0}} + \int_0^{\sqrt{x_0^2-\Omega^2}} dz\tanh\frac{\pi z}{4DeH}2i\pi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^{z^*} dz\tan\frac{\pi z}{4DeH}2i\pi\right\} + \int_{x_0}^{\infty} d\Omega\int_0^{\infty} dz\tanh\frac{\pi z}{4DeH}2i\arctan\frac{\arctan\frac{z}{\Omega}}{\log\frac{\sqrt{z^2+\Omega^2}}{x_0}}\right]$$

$$\frac{F}{V} = -\frac{1}{8\pi^2 Dd}\left[\int_0^{x_0} d\Omega\left\{\int_0^{\sqrt{x_0^2-\Omega^2}} dz\tanh\frac{\pi z}{4DeH}2\pi + \int_0^{x_0-\Omega} dz\tan\frac{\pi z}{4DeH}2\pi\right\}\right.$$
$$\left. + \int_0^{\infty} d\Omega\int_0^{\infty} dz\tanh\frac{\pi z}{4DeH}2\arctan\frac{\arctan\frac{z}{\Omega}}{\log\frac{\sqrt{z^2+\Omega^2}}{x_0}}\right]$$

Обезразмерив переменные интегрирования: $\Omega \to x_0 w$, $z \to x_0 y$, $x_0 = \frac{\pi T_c}{\gamma_E} = 2DeH_{c2}$ и явно взяв интеграл по z во втором слагаемом, получим (мы вычли независящую от H константу):

$$\frac{F}{V} = -\frac{De^2H_{c2}^2}{2\pi^2 d}\left[\int_0^{\infty} dw\int_0^{\infty} dy\left(\tanh\frac{\pi H_{c2}y}{2H} - 1\right)2\arctan\frac{\arctan\frac{y}{w}}{\log\sqrt{y^2+w^2}} + \right.$$
$$\left. + 2\pi\left(\frac{2H}{\pi H_{c2}}\right)\int_0^1 dw\log\cosh\left(\frac{\pi H_{c2}}{2H}\sqrt{1-w^2}\right) - 2\pi\left(\frac{2H}{\pi H_{c2}}\right)^2\int_0^{\frac{\pi H_{c2}}{2H}} dw\log\cos w\right]$$

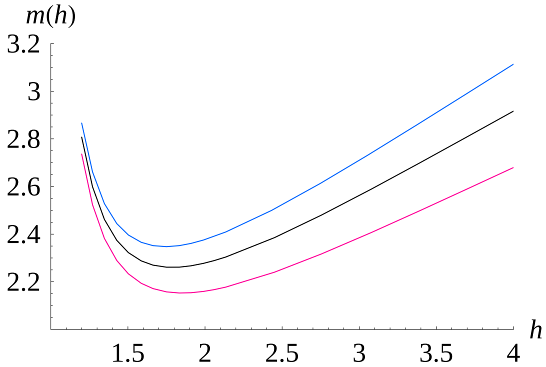

Рис. 6: зависимость безразмерной намагниченности от обрезания, для значений $\tau T_c = 500,\ 2000$ и 8000 (нижняя, средняя и верхняя кривые соответственно)

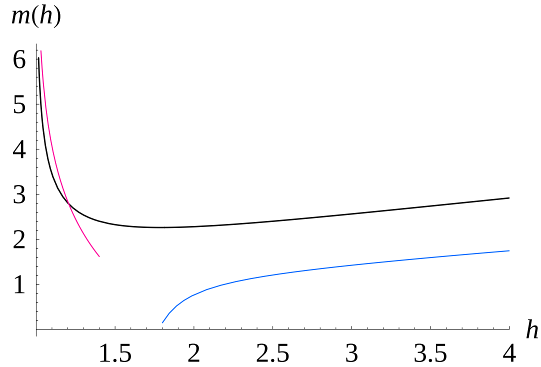

Рис. 7: зависимость безразмерной намагниченности и асимптотики при больших h и h близких к 1, из форумул (18), (16)

Единственный параметр в этой формуле — безразмерная величина $\frac{\pi H_{c2}}{2H}$, поэтому данную формулу можно напрямую использовать для численных вычислений. Однако в случае близости к $H_{c2}(0)$, можно получить ответ аналитически: основной вклад дает последнее слагаемое, так как его производная, по полю (равная намагниченности) расходится логарифмически при $H = H_{c2}$. В результате:

$$\frac{F}{V}(H \to H_{c2}) = \frac{4De^2H^2}{\pi^3 d} \int_0^{\frac{\pi H_{c2}}{2H}} dw \log\cos w$$

$$M = -\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial H} = -\frac{2De^2H_{c2}}{\pi^2 d}\log\eta^{-1} = -\frac{T_c e}{\pi^2 d}\frac{\pi}{\gamma_E}\log\eta^{-1}; \quad \eta = \frac{H - H_{c2}}{H_{c2}} \tag{16}$$

где η измеряет относительную близость к точке сверхпроводящего перехода. Таким образом мы воспроизвели результат полученный в работе [8].

Возвращаясь к намагниченности при произвольных значениях магнитного поля (в эксперименте [1] магнитное поле изменялось вплоть до $4 \times H_{c2}$), мы вычисляем функцию:

$$\mathcal{Q}(h) = -\int_0^{\frac{1}{\tau x_0}} dw \int_0^{\infty} dy \left(\tanh\frac{\pi y}{2h} - 1\right) 2\arctan\frac{\arctan\frac{y}{w}}{\log\sqrt{y^2+w^2}} -$$
$$-2\pi\left(\frac{2h}{\pi}\right)\int_0^1 dw \log\cosh\left(\frac{\pi}{2h}\sqrt{1-w^2}\right) + 2\pi\left(\frac{2h}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2h}} dw \log\cos w$$

где $h = \frac{H}{H_{c2}}$ — безразмерное магнитное поле. Теперь для намагниченности $M = -\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial H}$ мы получаем следующее выражение через $\mathcal{Q}(h)$:

$$M = -\frac{T_c e}{\pi^2 d} m(h)$$

$$m(h) = \frac{\pi}{4\gamma_E}\mathcal{Q}'(h) = \frac{\pi}{4\gamma_E}\left\{\frac{\pi}{h^2}\int_0^{\frac{1}{\tau x_0}} dw \int_0^{\infty} dy \frac{y}{\cosh^2\frac{\pi y}{2h}} \arctan\frac{\arctan\frac{y}{w}}{\log\sqrt{y^2+w^2}} - 4\int_0^1 dw \log\cosh\left(\frac{\pi}{2h}\sqrt{1-w^2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{2\pi}{h}\right)\int_0^1 dw \sqrt{1-w^2}\tanh\left(\frac{\pi}{2h}\sqrt{1-w^2}\right) + \frac{16h}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2h}} dw \log\cos w - 4\log\cos\frac{\pi}{2h}\right\} \tag{17}$$

Как и в предыдущем разделе, представляет интерес получение асимптотики при $H \gg H_{c2}$. В этом пределе два последних слагаемых в $\mathcal{Q}$ дает пренебрежимо малый вклад по сравнению с первым слагаемым (они ведут себя как $\frac{1}{h}$ при больших h). Простая оценка для первого слагаемого дает

$$\mathcal{Q}(h) \simeq \frac{h^2}{3}(\log\log\frac{1}{\tau x_0} - \log\log\frac{2h}{\pi}) \tag{18}$$

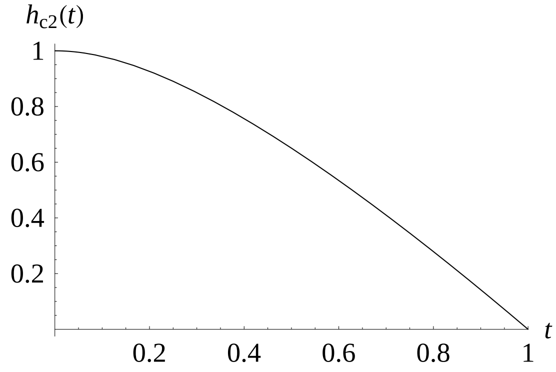

Рис. 8: линия сверхпроводящего перехода, $h_{c2}(t) = \frac{H_{c2}(T)}{H_{c2}(0)}$, $t = \frac{T}{T_c}$

Однако область применимости этой асимптотики по сути никогда не достигается (см рис. 7), поскольку для этого необходимо чтобы двойной логарифм $\log\log\frac{1}{\tau x_0}$ был много больше единицы, а это в реальности никогда не происходит.

3.1.3 Намагниченность вблизи линии сверхпроводящего перехода

Линия сверхпроводящего перехода определяется наличием полюса у пропагатора флуктуационных пар на нулевой частоте и наинизшем уровне Ландау [4]. Перейдя к обезразмеренным температуре и полю, $t = \frac{T}{T_c}$, $h = \frac{H}{H_{c2}(0)}$, мы получим что линия перехода $h_{c2}(t)$ определяется решением уравнения:

$$\log t + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{h_{c2}(t)}{4\gamma_E t}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

и изображена на рис. 8. Сначала мы рассмотрим намагниченность когда мы смещаемся с линии перехода по магнитному полю, т.е. увеличиваем поле от $H_{c2}(T)$ до H. Для этого нам необходимо изучить положение нулей функции (10) в зависимости от параметров T, H, Ω, n:

$$\mathcal{L}(T,H,\Omega,x) = \log\frac{T}{T_c} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega + 4DeHx}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

Легко видеть, что в случае когда точка (T,H) находится выше линии перехода, сингулярность для $x = n + \frac{1}{2}$ в плоскости Ω находится в точке $\Omega_0 < 0$. Таким образом, мы можем превратить сумму по Ω в интеграл не заботясь о пересечении нашим контуром особенностей. После чего, трансформируя сумму по n мы уже должны обратить внимание на особенности слагаемых:

$$\frac{F(H,T)}{V} = +\frac{eHT}{\pi d}\sum_{\Omega_k,n}\log\mathcal{L}(\Omega_k,n) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{eHT}{\pi d}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\coth\frac{\omega}{2T}\sum_n\log\mathcal{L}(i\omega,n)$$

При фиксированном действительном значении ω, $\mathcal{L}(i\omega,x)$ имеет ноль в точке $i\omega + 4DeHx = 4DeH_c(T)\cdot\frac{1}{2}$, а у логарифма там соответственно существенная особенность. Таким образом аналогично предыдущему случаю, при деформации контура он не должен пересекать особенность и мы опять имеем два слагаемых: одно — от интегрирования по действительной оси, другое — от части контура $C[\omega]$ обходящей особенность (см. рис. 9 в следующем разделе).

$$\sum_n\log\mathcal{L}(i\omega,n) = -\frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{\infty}dx\tanh\pi x\log\mathcal{L}(i\omega,ix) + \int_{C[\omega]}dx\tanh\pi x\log\mathcal{L}(i\omega,ix)\right]$$

После замены переменной $4DeHx \to z$ имеем:

$$\frac{F(H,T)}{V} = -\frac{1}{16\pi^2 Dd}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\coth\frac{\omega}{2T}\left[\int_{-\infty}^{\infty}dz\tanh\frac{\pi z}{4DeH}\log\mathcal{L}(i\omega,iz) + \int_{C[\omega]}dz\tanh\frac{\pi z}{4DeH}\log\mathcal{L}(i\omega,iz)\right] \quad (19)$$

$$F = F_{reg} + F_{sing}$$

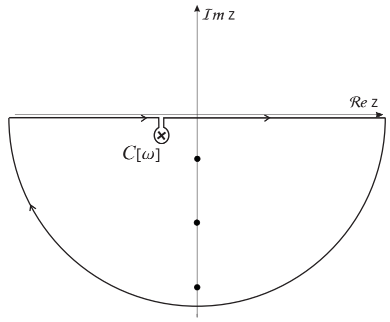

Рис. 9: Контур интегрирования при $T < T_c$

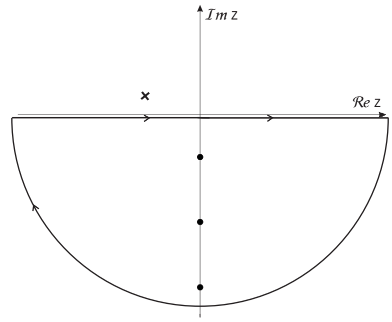

Рис. 10: контур интегрирования при $T > T_c$

Пока $H_{c2}(T)$ не сильно мало, основной вклад в F в случае близости к линии перехода происходит от интеграла по $C[\omega]$, поэтому мы можем написать (мы снова вычли не зависящую от H константу):

$$\frac{F_{sing}(H,T)}{V} = -\frac{1}{16\pi^2 Dd}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \coth\frac{\omega}{2T}\int_{C[\omega]} dz \left(\tanh\frac{\pi z}{4DeH} - 1\right)\log\mathcal{L}(i\omega, iz) = \tag{20}$$
$$= \frac{eH}{\pi^2 d}\int_0^{\infty} d\omega \coth\frac{\omega}{2T}\left[\frac{\pi}{2}\frac{H_{c2}(T)}{H} - \arctan\left(\tanh\frac{\pi\omega}{4DeH}\tan\frac{\pi H_{c2}(T)}{2H}\right)\right]$$

Для M, дифференцируя по H и оставляя лишь расходящееся слагаемое, получим:

$$M = -\frac{2De^2 H_{c2}(T)}{\pi^2 d}\int_0^{\infty} dw \coth\frac{2DeHw}{\pi T}\frac{\tanh w}{\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)^2 + \tanh^2 w} = -\frac{T_c e}{\pi^2 d}\;\frac{\pi T}{T_c}\frac{1}{\eta} \tag{21}$$

где η характеризует близость к линии перехода: $\eta = \frac{H-H_{c2}(T)}{H_{c2}(T)} \ll 1$, и это приближение годится при $\frac{2DeH}{\pi T}\eta = \frac{1}{\gamma_E}\frac{h\eta}{t} \ll 1$. В противоположном случае, если $\eta \ll 1$ но $\frac{1}{\gamma_E}\frac{h\eta}{t} \gg 1$, интеграл в (21) набирается когда coth уже равен единице, таким образом, опуская слагаемые порядка единицы, мы можем получить

$$M = -\frac{T_c e}{\pi^2 d}\; h_{c2}(t)\frac{\pi}{\gamma_E}\log\eta^{-1} \tag{22}$$

что при $T = 0$, поскольку $h_{c2}(0) = 1$ переходит в формулу (16). Мы видим что вблизи линии перехода существуют два режима — (21) и (22), переход между которыми происходит на линии

$$\frac{1}{\gamma_E}\frac{h\eta}{t} \approx 1 \tag{23}$$

Соответственно, для еще больших η мы имеем кроссовер к двойной логарифмической асимптотике, который происходит когда $\eta \approx 1$.

Случай движения вдоль оси температур мы можем рассматривать как сдвиг по H но из другой точки. Тогда $\eta = \frac{H-H_{c2}(T)}{H_{c2}(T)}$ и $\xi = \frac{T-T_c(H)}{T_c(H)}$ связаны след. образом:

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{T}{H_{c2}(T)}\frac{d}{dT}H_{c2}(T) = -\frac{d\log H_{c2}(T)}{d\log T}$$

И для M мы получаем:

$$M = -\frac{T_c e}{\pi^2 d}\;\frac{\pi T}{T_c}\frac{1}{\eta} = -\frac{T_c e}{\pi^2 d}\;\left(\left|\frac{d}{d(T/T_c)}\log(H_{c2}(T)/H_{c2}(0)\right|\right)^{-1}\frac{\pi}{\xi}$$

3.2 Выражение для M при произвольных H и T

Мы пользуемся формулами (19),(20) из предыдущего раздела, однако, учтя что при $T > T_c$ сингулярность сдвигается в область $\mathrm{Re}\, z < 0$ (см рис. 9,10), и вклад от интегрирования по $C[\omega]$ отсутствует, $F_{sing} = 0$. Первый вклад записывается как и раньше

$$\frac{F_{reg}}{V} = -\frac{1}{16\pi^2 Dd} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \coth\frac{\omega}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} dz \tanh\frac{\pi z}{4DeH} \log \mathcal{L}(i\omega, iz)$$

превратив $\int_{-\infty}^{\infty}$ в $\int_{0}^{\infty}$ имеем:

$$\frac{F_{reg}}{V} = -\frac{1}{16\pi^2 Dd} \int_{0}^{\infty} d\omega \coth\frac{\omega}{2T} \int_{0}^{\infty} dz \left(\tanh\frac{\pi z}{4DeH} - 1\right) \log\frac{\mathcal{L}(i\omega, iz)\mathcal{L}(-i\omega, -iz)}{\mathcal{L}(-i\omega, iz)\mathcal{L}(i\omega, -iz)}$$

F_{sing} умножается на $\theta(T_c - T)$, поскольку для всех $T > T_c$ должно быть $F_{sing} = 0$:

$$\frac{F_{sing}}{V} = \theta(T_c - T)\frac{eH}{\pi^2 d} \int_{0}^{\infty} d\omega \coth\frac{\omega}{2T} \left[\frac{\pi}{2}\frac{H_{c2}(T)}{H} - \arctan\left(\tanh\frac{\pi\omega}{4DeH} \tan\frac{\pi H_{c2}(T)}{2H}\right)\right]$$

После обезразмеривания переменных интегрирования и определения $\mathcal{L}(w, y)$ для новых переменных, получаем формулу пригодную для вычислений:

$$t = \frac{T}{T_c}, \quad h = \frac{H}{H_{c2}(0)}, \quad h_{c2}(t) = \frac{H_{c2}(T)}{H_{c2}(0)}, \quad w = \frac{\omega}{T_c}, \quad y = \frac{z}{2DeH_{c2}(0)}$$

$$\mathcal{L}(w, y) = \log t + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{w}{4\pi t} + \frac{y}{4\gamma_E t}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{F_{reg}(t,h)}{V} = -\frac{T_c^2}{16\pi\gamma_E Dd} \int_{0}^{\infty} dw \coth\frac{w}{2t} \int_{0}^{\infty} dy \left(\tanh\frac{\pi y}{2h} - 1\right) \log\frac{\mathcal{L}(iw, iy)\mathcal{L}(-iw, -iy)}{\mathcal{L}(-iw, iy)\mathcal{L}(iw, -iy)}$$

$$\frac{F_{sing}(t,h)}{V} = \theta(T_c - T)\frac{T_c^2}{2\pi\gamma_E Dd} \int_{0}^{\infty} dw \coth\frac{w}{2t} \left[\frac{\pi}{2}h_{c2}(t) - h \arctan\left(\tanh\frac{\gamma_E w}{2h} \tan\frac{\pi h_{c2}(t)}{2h}\right)\right]$$

Намагниченность равна

$$M = -\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial H} = -\frac{1}{V}\frac{1}{H_{c2}(0)}\frac{\partial F(t,h)}{\partial h}$$

Собирая оба слагаемых

$$M = -\frac{T_c e}{\pi^2 d}\frac{\partial}{\partial h}\left\{\theta(T_c - T)\int_{0}^{\infty} dw \coth\frac{w}{2t}\left[\frac{\pi}{2}h_{c2}(t) - h\arctan\left(\tanh\frac{\gamma_E w}{2h}\tan\frac{\pi h_{c2}(t)}{2h}\right)\right] - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{8}\int_{0}^{\infty} dw \coth\frac{w}{2t}\int_{0}^{\infty} dy\left(\tanh\frac{\pi y}{2h} - 1\right)\log\frac{\mathcal{L}(iw, iy)\mathcal{L}(-iw, -iy)}{\mathcal{L}(-iw, iy)\mathcal{L}(iw, -iy)}\right\}$$

и вычисляя производную, окончательно получаем:

$$M = -\frac{T_c e}{\pi^2 d}\left\{\theta(T_c - T)\int_{0}^{\infty} dw \coth\frac{w}{2t}\left[\frac{1}{2h}\frac{\gamma_E w \sin\frac{\pi h_{c2}(t)}{h} + \pi h_{c2}(t)\sinh\frac{\gamma_E w}{h}}{\cos\frac{\pi h_{c2}(t)}{h} + \cosh\frac{\gamma_E w}{h}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \arctan\left(\tanh\frac{\gamma_E w}{2h}\tan\frac{\pi h_{c2}(t)}{2h}\right)\right] + \frac{\pi}{16h^2}\int_{0}^{\infty} dw \coth\frac{w}{2t}\int_{0}^{\infty} dy \frac{y}{\cosh^2\frac{\pi y}{2h}}\log\frac{\mathcal{L}(iw, iy)\mathcal{L}(-iw, -iy)}{\mathcal{L}(-iw, iy)\mathcal{L}(iw, -iy)}\right\} \quad (24)$$

Эта формула может быть использована для численных подсчетов в произвольной области значений полей выше линии сверхпроводящего перехода. В частности, на рис. 11 показан зависимость $m(h,t)$ в области $h, t = 0 \ldots 1.5$.

3.3 Сшивка результатов

Для получения общей картины поведения намагниченности во всей плоскости (h,t) полученных асимптотик (13), (16), (21), (22) оказывается еще недостаточно. Остается невыясненным поведение намагниченности вблизи точки T_c при различных значениях магнитного поля. Рассмотрением данных случаев мы и займемся перед построением общей картины поведения $m(h,t)$.

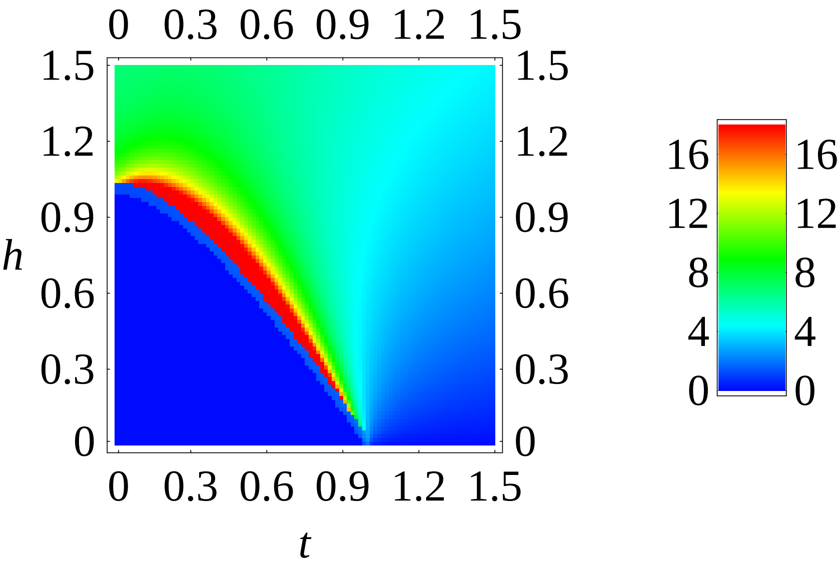

Рис. 11: зависимость безразмерной намагниченности $m(h,t)$ от h,t при $\tau T_c = 1000$ в области $H = 0 \ldots 1.5\ H_{c2}(0)$, $T = 0 \ldots 1.5\ T_c(0)$.

3.3.1 Окрестность T_c, более подробное рассмотрение

В силу нашего выбора контура интегрирования при получении формулы (24) из (9), ответ содержит два слагаемых, одно из которых исчезает при $T > T_c$. Поэтому вывод асимптотики следует производить разными способами по разные стороны от линии $t = 1$, однако, следует подчеркнуть, что эта линия не несет никакого физического смысла, и является результатом определенного выбора контура интегрирования.

При $t \geq 1$ слагаемое с θ-функцией отсутствует и мы вычисляем только последний член в (24), разлагая пропагатор в силу близости к переходу и заменяя $\coth \frac{w}{2t} \to \frac{2t}{w}$ (мы находимся при $\epsilon \ll 1$ и поэтому такое разложение допустимо), получаем:

$$\int_0^\infty dw \coth \frac{w}{2t} \log \frac{\mathcal{L}(iw,iy)\mathcal{L}(-iw,-iy)}{\mathcal{L}(-iw,iy)\mathcal{L}(iw,-iy)} = 2\pi \arctan \frac{\pi^2 y}{8\gamma_E t\epsilon}$$

(напомним, $\epsilon = \log \frac{T}{T_c} = \frac{T-T_c}{T_c}$). После чего для намагниченности имеем

$$m(h,t) = -\frac{\partial}{\partial h}\left\{\frac{\pi t}{2}\int_0^\infty dy \left(\tanh \frac{\pi y}{2h} - 1\right) \arctan \frac{\pi^2 y}{8\gamma_E t\epsilon}\right\} \tag{25}$$

При $h \ll \epsilon$, мы воспроизводим ответ (13), $m = \frac{\pi^3}{48\gamma_E}\frac{h}{\epsilon}$. А для $h \gg \epsilon$, получаем

$$M = -\frac{T_c e}{\pi^2 d}\,\frac{\pi^3}{48}t, \quad \text{т.е.} \quad m \sim 1 \tag{26}$$

Переход от (13) к (26) происходит при $h \approx 1$

В области $t < 1$ результат (25) остается таким же, только вместо $\epsilon < 0$ надо писать $|\epsilon|$. Первый член из (24) ведет себя как $\frac{1}{\eta}$ при $\eta < 1$, как мы получили ранее. Если же $\eta \gg 1$ и при этом $h \ll t$ (что прекрасно выполняется вблизи T_c, так как там $t = 1$, а h мы считаем малым но много большим $h_{c2}(t)|_{t\to 1} \to 0$), то можно получить для второго слагаемого

$$m_2 = \pi t \frac{h_{c2}(t)}{h}, \quad m_2 \ll 1$$

Это означает, так как m_1 этой области такое же как в (26) (конечно при $h > |\epsilon|$), что m_2 можно пренебречь по сравнению с m_1 когда $h > |\epsilon|,\ h > h_{c2}(t)$. Таким образом окончательно мы получаем

$$m = \frac{\pi^3}{48}t \sim 1 \quad \text{при} \quad h \gg |\epsilon|,\ h \gg h_{c2}(t) \tag{27}$$

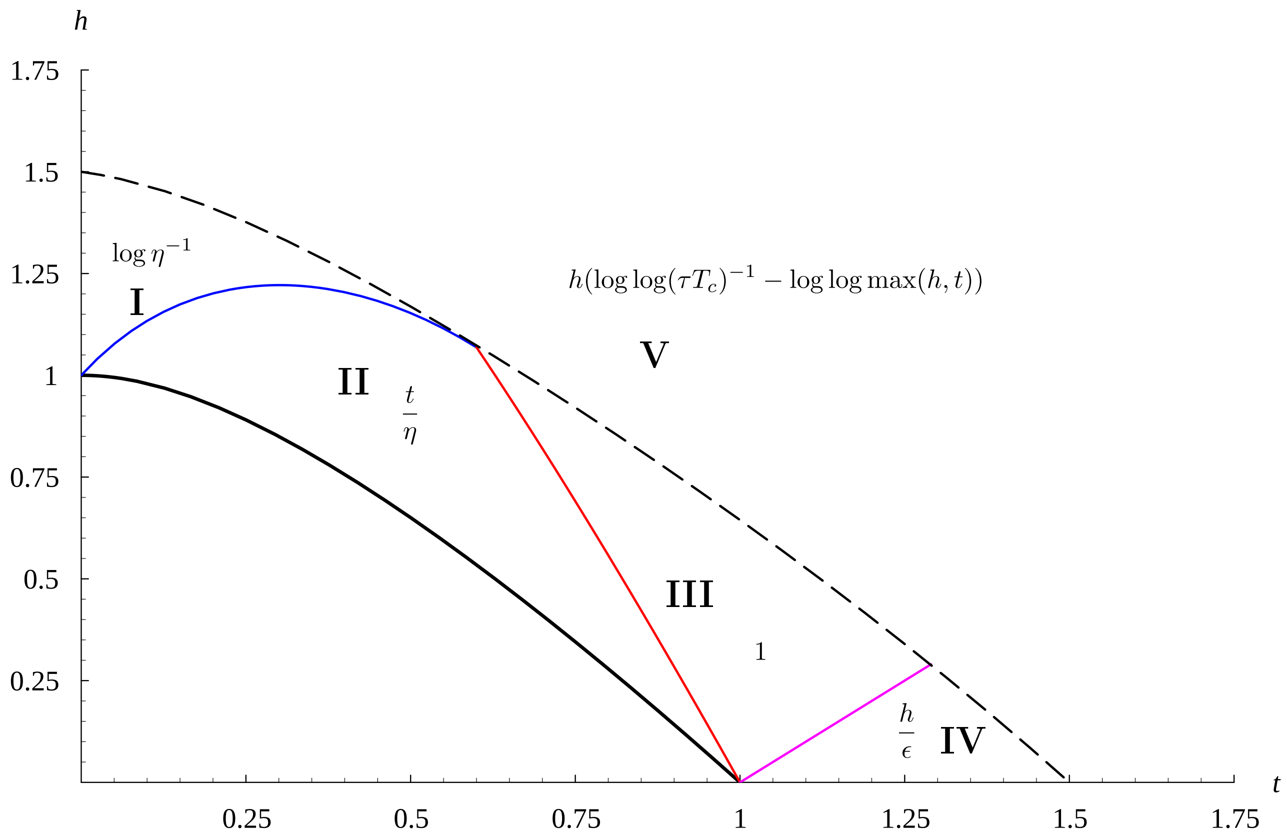

Рис. 12: Зависимость $m(h,t)$ в различных областях с точностью до численного коэффициента. Синяя линия соответствует условию $\frac{\eta h}{t} \sim 1$, красная — $\eta \sim 1$, фиолетовая — $h \sim \epsilon$. Различные области поведения пронумерованы цифрами, точные асимптотики приведены в таблице.

3.3.2 Общая картина

Теперь мы можем нарисовать общую картину поведения намагниченности во всей плоскости (h,t), собирая воедино асимптотики и линии на которых происходит кроссовер между ними из формул (13), (21), (22), (27). В результате получаем рис. 12. и таблицу в которой сведены все асимптотики в единой форме.

Область	$m(h,t)$
I	$h_{c2}(t)\frac{\pi}{\gamma_E}\log\eta^{-1}$
II	$\frac{\pi T}{T_c}\frac{1}{\eta}$
III	$\frac{\pi^3}{48}t$
IV	$\frac{\pi^3}{48\gamma_E}\frac{h}{\epsilon}$
V	$h\frac{\pi}{6\gamma_E}(\log\log(\tau T_c)^{-1} - \log\log\max(h,t))$

4 Выводы и план дальнейших исследований

В данной работе мы наметили схему вычисления коэффициента Нернста в произвольной области полей и температур и вычислили намагниченность, которую необходимо вычесть из ответа даваемого диаграммной техникой. Следующим шагом является вывод эффективной вершины взаимодействия электромагнитного поля с флуктуационными куперовскими парами. После чего, поскольку выражение для пропагатора известно, станет возможной запись выражения для трех диаграмм и их непосредственное вычисление. Вычитая из полученного ответа намагниченность, мы найдем β^{xy} и коэффициент Нернста ν_N.

Список литературы

[1] A. Pourret et al., *A length scale for the superconducting Nernst signal above* T_c *in* $Nb_{0.15}Si_{0.85}$, cond-mat/0701376.

[2] I. Ussishkin, *Superconducting fluctuations and the Nernst effect: A diagrammatic approach*, Phys. Rev. **B 68**, 024517 (2003).

[3] Варламов А.А., Ларкин А.И., *Теория флуктуаций в сверхпроводниках*, Добросвет, Москва 2007.

[4] E. Helfand and N. R. Werthamer, Phys. Rev. **147**, 288-294 (1966).

[5] Л.Г. Асламазов, А.И. Ларкин, *Влияние флуктуаций на свойства сверхпроводника при температурах выше критической*, Физ. тверд. тела **10**, 1104 (1968).

[6] Л.Г. Асламазов, А.И. Ларкин, *Флуктуационная магнитная восприимчивость сверхпроводников и нормальных металлов*, ЖЭТФ **67**, 647 (1974);
Л.Н Булаевский *Диамагнитные флуктуации в слоистых сверхпроводниках и маленьких сверхпроводящих частицах*, ЖЭТФ **66**, 2213 (1974).

[7] M. Y. Reizer and A. V. Sergeev, Phys. Rev. **B 50**, 9344 (1994) [CAS].

[8] V.M Galitski, A.I Larkin *Superconducting fluctuation at low temperature*, Phys.Rev.**B. 63,** 174506 (2001).