

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

Факультет общей и прикладной физики
Кафедра "Проблемы теоретической физики"

Дипломная работа
студента 428 группы Лопатина В. В.

Структурная функция пассивного скаляра.

Научный руководитель:
д.ф.м.н. Лебедев В.В.

Москва
2008

Введение.

Рассмотрим скалярное поле $\theta(r, t)$, подчиняющиеся следующему уравнению:

$$\partial_t \theta + (\bar{v} \nabla \theta) = \kappa \nabla^2 \theta$$

Это уравнение на так называемый пассивный скаляр. Оно описывает, например, перемешивание различных добавок в жидкость за счет её термодинамического движения. (θ - может быть температурой или концентрацией примеси). "Пассивный" означает, что его обратной реакцией на жидкость можно пренебречь. Мы также предполагаем здесь, что жидкость несжимаема:

$$\nabla \bar{v} = 0$$

В ряде задач может присутствовать ещё и внешнее воздействие $\xi(r, t)$, так называемая "накачка". Уравнение на скаляр в этом случае выглядит так:

$$(\partial_t + \bar{v} \nabla - \kappa \nabla^2) \theta = \xi$$

Пусть l - длина корреляции нашей накачки ξ , рассмотрим статистику пассивного скаляра на масштабах $r \ll l$, а именно рассмотрим коррелятор

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle$$

где усреднение производится и по накачке и по скорости. Существует предположение, что

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle \sim r^{\xi_{2n}}$$

при $n \gg \ln \frac{r}{r_d}$, целью данной работы является определение этой степени ξ_{2n} в двумерном случае.

Для начала введем понятие Лагранжевой траектории, вдоль которых движутся частицы, эти траектории определяются уравнением:

$$\partial_t X = v(t, X)$$

Отсюда для вектора δX , концы которого движутся по двум близким лагранжевым траекториям, имеем

$$\delta X_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}(t) \delta X_\beta$$

где

$$\sigma_{\alpha\beta}(t) = \nabla_{\beta}v_{\alpha}(t, X)$$

решение этого уравнения можно символически записать в виде:

$$\delta X(t) = W(t, t_0)\delta X(t_0)$$

где W - хронологически упорядоченная экспонента:

$$W(t, t_0) = T e^{\int_{t_0}^t d\tau \sigma(\tau)}$$

заметим, кстати, также, что W удовлетворяет:

$$\partial_t W = \sigma W$$

с начальным условием

$$W(t_0, t_0) = 1$$

заметим, что условие несжимаемости запишется как $\sigma_{\alpha\alpha} = 0$ и $\det W = 1$. Теперь вернемся к нашему уравнению, и рассмотрим наш скаляр вблизи некоторой Лагранжевой траектории $X(t)$, и разложим поле скорости v в ряд Тейлора, мы получим:

$$\partial_t \theta + (\partial_t X + \sigma(r - X))\nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + \xi$$

Делаем преобразование Фурье по формуле:

$$\theta = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{ik(r-X)} \theta(k)$$

Мы получим:

$$\partial_t \theta(k) - \left(k\sigma \frac{\partial}{\partial k} \right) \theta(k) + \kappa k^2 \theta(k) = \xi(k)$$

Решением этого уравнения является [1] :

$$\theta_k = \int_0^{\infty} dt' \xi(t - t', W^{-1,T}(t')k) e^{-\kappa \int_0^{t'} d\tau k W^{-1}(\tau) W^{-1,T}(\tau)k}$$

Парная корреляция без диффузии.

Теперь приступим непосредственно к вычислению корреляторов. Пусть наша накачка такова, что для неё справедливо:

$$\langle \xi(r_1, t_1)\xi(r_2, t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2)\eta(r_1 - r_2)$$

где корреляция по расстоянию имеет гауссову форму:

$$\eta(r) = \frac{\eta_0}{l^2} e^{-\frac{r^2}{l^2}}$$

Для начала посчитаем коррелятор без диффузии. Начнем с выражения для скаляра:

$$\theta(r, t) = \int_0^\infty dt' \xi(t - t', W(t')r)$$

Имеем:

$$K(r) = \langle \theta(r, t)\theta(0, t) \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty dt_1 dt_2 \langle \xi(t - t_1, W(t_1)r)\xi(t - t_2, 0) \rangle$$

Усреднив по накачке, мы получим:

$$K(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty dt_1 dt_2 \delta(t_1 - t_2)\eta(W(t_1)r)$$

Итого:

$$K(r) = \frac{\eta_0}{l^2} \int_0^\infty dt \langle e^{-\frac{|W(t)r|^2}{l^2}} \rangle = \frac{\eta_0}{l^2} \int_0^\infty dt \langle e^{-\frac{rW^T(t)W(t)r}{l^2}} \rangle$$

Для матрицы W используем представление:

$$W = OPT = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\rho & 0 \\ 0 & e^{-\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \chi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\rho \cos\phi & \chi e^\rho \cos\phi + e^{-\rho} \sin\phi \\ -\sin\phi e^\rho & -\chi \sin\phi e^\rho + e^{-\rho} \cos\phi \end{pmatrix}$$

Положим:

$$\bar{r} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итого:

$$K(r) = \frac{\eta_0}{l^2} \int_0^{\infty} dt \langle e^{-\frac{r^2}{l^2} e^{2\rho}} \rangle$$

И мы усредняем по ρ , используя функцию распределения [4]:

$$P(\rho, t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda t}} e^{-\frac{(\rho - \lambda t)^2}{2\lambda t}}$$

Введем тут сразу две константы, которые понадобятся нам в будущем:

$$r_d^2 = \frac{\kappa}{\lambda}$$

$$\mu^2 = 8 \frac{r_d^2}{l^2}$$

Получающийся интеграл:

$$\frac{\eta_0}{l^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt d\rho \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda t}} e^{-\frac{r^2}{l^2} e^{2\rho} - \frac{(\rho - \lambda t)^2}{2\lambda t}}$$

Возьмем методом перевала. Функция:

$$-\frac{(\rho - \lambda t)^2}{2\lambda t} = -\frac{\rho^2}{2\lambda t} + \rho - \frac{\lambda t}{2}$$

Имеет экстремум при:

$$t = \frac{\rho}{\lambda}$$

Раскладывая в с точностью до членов второго порядка, получаем:

$$-\frac{\lambda^2}{2\rho} \left(t - \frac{\rho}{\lambda} \right)^2$$

Таким образом, после интегрирования по t , мы получаем:

$$\frac{\eta_0}{\lambda l^2} \int_0^{\infty} d\rho e^{-\frac{r^2}{l^2} e^{2\rho}}$$

Так как в нашем случае $r \ll l$, то интеграл набирается в интервале от нуля до значения ρ , удовлетворяющего $e^{2\rho} \sim \frac{l^2}{r^2}$, или $\rho \sim \ln \frac{l}{r}$, таким образом с логарифмической точностью:

$$K(r) \sim \frac{\eta_0}{\lambda l^2} \ln \frac{l}{r}$$

Парная корреляция с диффузией.

Итак, добавим теперь в нашу модель диффузию. Стартуем с выражения для фурье компоненты решения уравнения на пассивный скаляр.

$$\theta_k = \int_0^\infty dt' \xi(t-t', W^{-1,T}(t')k) e^{-\kappa \int_0^{t'} d\tau k W^{-1}(\tau) W^{-1,T}(\tau) k}$$

Делаем преобразование Фурье:

$$\theta(r, t) = \int \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} dt' e^{ikr} \xi(t-t', W^{-1,T}(t')k) e^{-\kappa \int_0^{t'} d\tau k W^{-1}(\tau) W^{-1,T}(\tau) k}$$

Делаем замену координат:

$$q = W^{-1,T}(t')k$$

И, вспоминая, что $\det W = 1$, получаем:

$$\theta(r, t) = \int \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} dt' e^{iq^T W(t')r} \xi(t-t', q) e^{-\kappa \int_0^{t'} d\tau q^T W(t') W^{-1}(\tau) W^{-1,T}(\tau) W^T(t') q}$$

Обозначая:

$$I(t) = W(t) \left[\int_0^t d\tau W^{-1}(\tau) W^{-1,T}(\tau) \right] W^T(t)$$

мы получаем, после переобозначений:

$$\theta(r, t) = \int \int \frac{k^2 q}{(2\pi)^2} dt' \xi(t-t', k) e^{ik^T W(t')r - \kappa k^T I(t') k}$$

наконец, заметим, что:

$$\xi(t - t', k) = \int d^2 r_1 e^{-ikr_1} \xi(t - t', r_1)$$

и получим окончательную формулу:

$$\theta(r, t) = \int \int \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^2} dt' d^2 r_1 \xi(t - t', r_1) e^{-ikr_1 + ikWr - \kappa k I(t')k}$$

С помощью этой формулы посчитаем коррелятор, пишем:

$$\theta(r_1, t_1) = \int \int \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^2} dt' d^2 r' \xi(t_1 - t', r') e^{-ik'r' + ik'Wr_1 - \kappa k' I(t')k'}$$

$$\theta(r_1, t_1) = \int \int \int \frac{d^3 k''}{(2\pi)^2} dt'' d^2 r'' \xi(t_2 - t'', r'') e^{-ik''r'' + ik''Wr_2 - \kappa k'' I(t'')k''}$$

$$\langle \xi(t_1 - t', r') \xi(t_2 - t'', r'') \rangle = \delta(t_1 - t_2 + t'' - t') \eta(r' - r'')$$

$$\eta(r) = \frac{\eta_0}{l^2} e^{-\frac{r^2}{l^2}}$$

Подставляем это всё в коррелятор:

$$\langle \theta(r_1, t_1) \theta(r_2, t_2) \rangle$$

В результате мы получим (после интегрирования по одному из времён и замены переменной):

$$\frac{\eta_0}{l^2} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^2} \frac{d^3 k''}{(2\pi)^2} dt d^2 r' d^2 r'' e^{-\frac{(r' - r'')^2}{l^2} - ik'r' - ik''r'' + ik'Wr_1 + ik''Wr_2 - \kappa k' I(t - t_2)k' - \kappa k'' I(t - t_1)k''}$$

Сначала проинтегрируем по r' и r'' :

$$\int e^{-\frac{(r')^2}{l^2} + 2\frac{r'r''}{l^2} - \frac{(r'')^2}{l^2} - ik'r' - ik''r''} d^2 r' d^2 r'' = \pi l^2 (2\pi)^2 \delta(k'' + k') e^{-\frac{l^2(k'')^2}{4}}$$

проинтегрировав по одному из k и сделав замену переменной, получаем:

$$\langle \theta(r_1, t_1) \theta(r_2, t_2) \rangle = \eta_0 \pi \int_{\max(t_1, t_2)}^{\infty} d\tau \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{ikW(r_1 - r_2)} e^{-\frac{1}{4}k(l^2 + 4\kappa I(\tau - t_1) + 4\kappa I(\tau - t_2))k}$$

Используем формулу для гауссовых интегралов:

$$\int e^{-\frac{1}{2}k^T M k + ik^T A} d^2 k = \frac{2\pi}{\sqrt{\det M}} e^{-\frac{1}{2}A^T M^{-1} A}$$

В результате мы получим окончательную формулу для нашего коррелятора:

$$\langle \theta(r_1, t_1) \theta(r_2, t_2) \rangle = \eta_0 \int_{\max(t_1, t_2)}^{\infty} d\tau \frac{e^{-(r_1 - r_2)W^T G^{-1} W(r_1 - r_2)}}{\sqrt{\det G}}$$

где:

$$G = l^2 + 4\kappa I(\tau - t_1) + 4\kappa I(\tau - t_2)$$

В частном случае:

$$\langle \theta(r, t) \theta(r', t) \rangle = \eta_0 \int_0^{\infty} d\tau \left\langle \frac{e^{-(r-r')W^T \frac{1}{l^2 + 8\kappa I(\tau)} W(r-r')}}{\sqrt{\det(l^2 + 8\kappa I(\tau))}} \right\rangle$$

Структурная функция S_2 .

Мы пишем:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(r', t))^2 \rangle = \langle \theta(r, t) \theta(r, t) \rangle - 2 \langle \theta(r, t) \theta(r', t) \rangle + \langle \theta(r', t) \theta(r', t) \rangle$$

Итого:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(r', t))^2 \rangle = 2\eta_0 \int_0^{\infty} d\tau \left\langle \frac{1 - e^{-(r-r')W^T \frac{1}{l^2 + 8\kappa I(\tau)} W(r-r')}}{\sqrt{\det(l^2 + 8\kappa I(\tau))}} \right\rangle$$

Оценим этот коррелятор, для этого перепишем его в другой форме (это можно сделать так как $\det W = 1$):

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^2 \rangle = 2\eta_0 \int_0^{\infty} d\tau \left\langle \frac{1 - e^{-rG^{-1}r}}{\sqrt{\det G}} \right\rangle$$

Приближенно имеем [2]:

$$G = O^T \begin{pmatrix} e^{2\rho} & 0 \\ 0 & P e^{-2} + e^{-2\rho} \end{pmatrix} O \approx O^T \begin{pmatrix} e^{2\rho} & 0 \\ 0 & \max(P e^{-2}, e^{-2\rho}) \end{pmatrix} O$$

Где

$$O = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Вывод этого выражения следует из выражения для $I(t)$, в общем случае оно очень громоздко (если использовать параметризацию $W = OPT$):

$$I(t) = O(t) \begin{pmatrix} e^{2\rho(t)} \int_0^t d\tau (e^{-2\rho(\tau)} + e^{2\rho(\tau)} (\chi(t) - \chi(\tau))^2) & \int_0^t d\tau (\chi(t) - \chi(\tau)) e^{2\rho(\tau)} \\ \int_0^t d\tau (\chi(t) - \chi(\tau)) e^{2\rho(\tau)} & e^{-2\rho(t)} \int_0^t d\tau e^{2\rho(\tau)} \end{pmatrix} O^T(t)$$

Но, согласно [3] его можно упростить:

$$I(t) \sim \frac{e^{2\rho(t)}}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Собственно, выражение для G следует из:

$$l^2 + \kappa I(t) = \begin{pmatrix} l^2 + \frac{\kappa}{\lambda} e^{2\rho} & 0 \\ 0 & l^2 \end{pmatrix} = l^2 \begin{pmatrix} 1 + P e^{-2} e^{2\rho} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Положим:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $P(\rho, t)$ - функция распределения ρ в момент t , тогда мы получим:

$$2\eta_0 \int \int \int \frac{1 - e^{-\frac{r^2}{2}(e^{-2\rho} \cos^2\phi + \frac{\sin^2\phi}{n^2})}}{n e^\rho} P(\rho, t) \frac{d\phi}{2\pi} dt d\rho$$

где

$$n = \max(P e^{-1}, e^{-\rho})$$

$$P(\rho, t) = C e^{-\frac{(\rho - \lambda t)^2}{2\lambda t}}$$

Приближенно:

$$2\eta_0 \int \int \int \frac{1 - e^{-\frac{r^2}{2} \frac{\sin^2\phi}{n^2}}}{n e^\rho} P(\rho, t) \frac{d\phi}{2\pi} dt d\rho$$

Обозначим результат интегрирования экспоненты по ϕ через $\nu(r/n)$ очевидно, что при $r/n \gg 1$

$$\nu\left(\frac{r}{n}\right) \sim \frac{n}{r}$$

так как получится гауссов интеграл, а при $r/n \ll 1$ очевидно ввиду малости экспоненты:

$$\nu\left(\frac{r}{n}\right) \sim 1$$

Дальше, если мы $P(\rho, t)$ разложим около экстремума, то у меня получилось приближенно :

$$\int P(\rho, t) dt \sim \frac{1}{\lambda} = const$$

Итого мы имеем:

$$\sim 2\eta_0 \int \frac{1 - \nu\left(\frac{r}{n}\right)}{ne^\rho} d\rho$$

Соответственно при $\rho > \ln Pe$

$$\sim 2\eta_0 \int \frac{1 - \nu(rPe)}{Pe^{-1}e^\rho} d\rho$$

Будет экспоненциальный спад, при $\rho < \ln Pe$

$$\sim 2\eta_0 \int (1 - \nu(re^\rho)) d\rho$$

И мы снова рассматриваем два варианта:

Вариант 1. $\rho > \ln(1/r)$, тогда $\nu \sim 0$

Вариант 2. $\rho < \ln(1/r)$, тогда $\nu \sim 1$

Таким образом, интеграл набирается от $\ln Pe$ до $\ln(1/r)$ и мы получим:

$$\sim \ln Pe - \ln \frac{1}{r} = \ln Per = \ln \frac{r}{r_d}$$

Структурная функция S_{2n} .

Для вывода нужной нам формулы, быстренько проделаем аналогичные выкладки:

$$\theta(r, t) - \theta(r', t) = \int \int \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} dt' d^2 r_1 \xi(t-t', r_1) e^{-ikr_1 - \kappa k I(t') k} (e^{ikWr} - e^{ikWr'})$$

Отсюда наш коррелятор имеет вид:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(r', t))^{2n} \rangle = \int \int \int \prod_{i=1}^{2n} \left\langle \frac{d^2 k_i}{(2\pi)^2} dt_i d^2 r_i \xi(t - t_i, r_i) e^{-ik_i r_i - \kappa k_i I(t_i) k_i} (e^{ik_i W r} - e^{ik_i W r'}) \right\rangle$$

Где я использовал индекс:

$$i = 1 \dots 2n$$

Дальше удобнее будет использовать два набора индексов (для теоремы Вика)

$$i \rightarrow i_l, k_l; l = 1 \dots n$$

Пишем теорему Вика:

$$\langle \xi(t - t_1, r_1) \dots \xi(t - t_{2n}, r_{2n}) \rangle = \sum_{i, k} \langle \xi(t - t_{i_1}, r_{i_1}) \xi(t - t_{k_1}, r_{k_1}) \rangle \dots \langle \xi(t - t_{i_n}, r_{i_n}) \xi(t - t_{k_n}, r_{k_n}) \rangle$$

Или что тоже самое:

$$\sum_{i, k} \prod_l \langle \xi(t - t_{i_l}, r_{i_l}) \xi(t - t_{k_l}, r_{k_l}) \rangle$$

Заметим, что число слагаемых в теореме Вика равно:

$$(2n - 1)!!$$

Итого подставив в исходную формулу и вычислив, я получил:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(r', t))^{2n} \rangle = (2n - 1)!! (2\eta_0)^n \left\langle \left(\int_0^\infty d\tau \frac{1 - e^{-(r-r')W^T \frac{1}{l^2 + 8\kappa I(\tau)} W(r-r')}}{\sqrt{\det(l^2 + 8\kappa I(\tau))}} \right)^n \right\rangle$$

Для того, чтобы оценить данное выражение, пишем:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^2 \rangle = 2\eta_0 \int_0^\infty d\tau \frac{1 - e^{-rG^{-1}r}}{\sqrt{\det G}} \sim \int_{t_r}^{t_d} dt = \tau$$

То, что нас интересует:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle = (2n - 1)!! (2\eta_0)^n \left\langle \left(\int_0^\infty d\tau \frac{1 - e^{-rW^T \frac{1}{l^2 + 8\kappa I(\tau)} W r}}{\sqrt{\det(l^2 + 8\kappa I(\tau))}} \right)^n \right\rangle$$

Теперь запишем это так:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle = (2n - 1)!! (2\eta_0)^n \langle \tau^n \rangle$$

С функцией распределения:

$$P(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\Delta\tau}} e^{-\frac{(\ln \frac{r}{r_d} - \lambda\tau)^2}{2\Delta\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta\tau}} e^{-\frac{(\rho_0 - \lambda\tau)^2}{2\Delta\tau}}$$

Таким образом, интересующий нас интеграл получается:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle \sim \int e^{(n - \frac{1}{2}) \ln \tau - \frac{(\rho_0 - \lambda\tau)^2}{2\Delta\tau}}$$

Будем брать этот интеграл методом перевала, обозначим:

$$F(\tau) = (n - \frac{1}{2}) \ln \tau - \frac{(\rho_0 - \lambda\tau)^2}{2\Delta\tau}$$

Другими словами:

$$F(\tau) = n_0 \ln \tau - \frac{\rho_0^2}{2\Delta\tau} + \frac{\lambda\rho_0}{\Delta} - \frac{\lambda^2\tau}{2\Delta}$$

Соответственно приравниваем производную к нулю

$$0 = F'(\tau) = n_0 \frac{1}{\tau} + \frac{\rho_0^2}{2\Delta\tau^2} - \frac{\lambda^2}{2\Delta}$$

Получается элементарное квадратное уравнение

$$\tau^2 - \frac{2\Delta}{\lambda^2} n_0 \tau - \frac{\rho_0^2}{\lambda^2} = 0$$

Отсюда

$$\tau_0 = \frac{\Delta}{\lambda^2} n_0 + \sqrt{\frac{\Delta^2}{\lambda^4} n_0^2 + \frac{\rho_0^2}{\lambda^4}}$$

Посчитаем также:

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{\lambda^2}{\rho_0^2} \left(-\frac{\Delta}{\lambda^2} n_0 + \sqrt{\frac{\Delta^2}{\lambda^4} n_0^2 + \frac{\rho_0^2}{\lambda^4}} \right)$$

Отсюда

$$F(\tau_0) = n_0 \ln \left(\frac{\Delta}{\lambda^2} n_0 + \sqrt{\frac{\Delta^2}{\lambda^4} n_0^2 + \frac{\rho_0^2}{\lambda^4}} \right) + \frac{\lambda \rho_0}{\Delta} - n_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \rho_0^2}{\Delta^2 n_0^2}}$$

Отсюда получаем окончательный ответ:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle \sim e^{n_0 \ln \left(\frac{\Delta}{\lambda^2} n_0 + \sqrt{\frac{\Delta^2}{\lambda^4} n_0^2 + \frac{\rho_0^2}{\lambda^4}} \right) + \frac{\lambda \rho_0}{\Delta} - n_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \rho_0^2}{\Delta^2 n_0^2}}}$$

Напомним здесь, что

$$\rho_0 = \ln \frac{r}{r_d}$$

Анализ общей формулы.

Рассмотрим два противоположных предельных случая:

Случай 1. $n \ll \ln \frac{r}{r_d}$

Тогда показатель экспоненты раскладываем по малому параметру $\frac{n_0}{\rho}$, и мы получаем:

$$F(\tau_0) \approx n_0 \ln \frac{\rho_0}{\lambda}$$

И ответ в нашей задаче:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle \sim \left(\frac{\rho_0}{\lambda} \right)^{n_0} = \left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r}{r_d} \right)^{n_0}$$

Этот ответ и следовало ожидать, так как он получается из теоремы Вика для наших значений $n \ll \ln \frac{r}{r_d}$.

Случай 2. $n \gg \ln \frac{r}{r_d}$

Теперь разложимся наоборот по параметру $\frac{\rho}{n_0}$, мы получим:

$$F(\tau_0) \approx n_0 \ln \frac{2\Delta n_0}{\lambda^2} + \frac{\lambda \rho_0}{\Delta} - n_0$$

Отсюда интересующая нас зависимость:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle \sim \left(\frac{r}{r_d} \right)^{\frac{\lambda}{\Delta}}$$

Функция Крамера.

А давайте теперь рассмотрим этот случай с $n \gg \ln \frac{r}{r_d}$ в общем виде, для этого заменим функцию распределения

$$e^{-\frac{(\rho_0 - \lambda \tau)^2}{2\Delta \tau}}$$

На функцию

$$e^{-tS\left(\frac{\rho}{t}\right)}$$

Где $S(x)$ - так называемая функция Крамера, или энтропия. Интересующий нас интеграл:

$$\int d\tau e^{n_0 \ln(\tau) - \tau S\left(\frac{\rho}{\tau}\right)}$$

опять берем его методом перевала, имеем:

$$F(\tau) = n_0 \ln(\tau) - \tau S\left(\frac{\rho}{\tau}\right)$$

$$0 = F'(\tau_0) = \frac{n_0}{\tau_0} - S\left(\frac{\rho}{\tau_0}\right) + \frac{\rho}{\tau_0} S'\left(\frac{\rho}{\tau_0}\right)$$

Произведем замену

$$x = \frac{\rho}{\tau_0}$$

Получим:

$$\frac{n_0}{\rho} x = S(x) - x S'(x)$$

Предположим, что мы решаем задачу графически, имея ввиду, что $n_0 \gg \rho$, тогда слева у нас будет почти вертикальная прямая, откуда

закключаем, что значение x находится где-то в окрестности нуля. Раскладываемся в окрестности нуля, получаем:

$$\frac{n_0}{\rho} x = S(0) - x^2 S''(0)$$

Отсюда примерно

$$x \approx \frac{\rho}{n_0} S(0)$$

Записываем выражение $F(x)$:

$$F(x) = n_0 \ln \frac{n_0}{S(0)} - n_0 - n_0 \frac{S'(0)}{S(0)} x$$

Подставив найденный x , получим:

$$F(x) = n_0 \ln \frac{n_0}{S(0)} - n_0 - \rho S'(0)$$

Отсюда получаем ответ для интересующей нас зависимости:

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle \sim \left(\frac{r}{r_d} \right)^{-S'(0)}$$

Проверим полученный ответ, для этого подставим Гауссово распределение

$$e^{-\frac{(\rho - \lambda t)^2}{2\Delta t}} = e^{-\frac{(\frac{\rho}{t} - \lambda)^2 t}{2\Delta}} = e^{-tS(\frac{\rho}{t})}$$

Отсюда

$$S(x) = \frac{(x - \lambda)^2}{2\Delta}$$

$$S'(0) = -\frac{\lambda}{\Delta}$$

Отсюда получаем

$$\langle (\theta(r, t) - \theta(0, t))^{2n} \rangle \sim \left(\frac{r}{r_d} \right)^{\frac{\lambda}{\Delta}}$$

То есть мы получили уже известный нам результат.

Литература.

- [1] В.В. Лебедев Флуктуационные эффекты в макрофизике. М.: МЦНМО 2004
- [2] Spatial Dependence of Correlation Functions in the Decay Problem for a Passive Scalar in a Large-Scale Velocity Field. S. S. Vergeles ISSN 1063-7761, Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2006, Vol. 102, No. 4, pp. 685701.
- [3] Strong effect of weak diffusion on scalar turbulence at large scales. M. Chertkov, I. Kolokolov and V. Lebedev, PHYSICS OF FLUIDS 19, 101703 2007
- [4] Theory of random advection in two dimensions. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov and V. Lebedev. International Journal of Modern Physics B, vol 10, Nos. 18 & 19 (1996) 2273 - 2309