Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

"Пятиточечный коррелятор в Матричных Моделях"

Студент 528 гр. Тарнопольский Г.М.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Белавин А.А.

Москва 2009 г.

Содержание

1 Введение

Существует два подхода к двумерной квантовой геометрии. Один из них это непрерывный подход, в котором теория определяется с помощью функционального интеграла по всем римановым метрикам $g_{ab}(X)$, с надлежащим образом проведенной фиксацией калибровки. Это приводит к квантовой теории Лиувилля, связанной с материальным сектором и духами, такая теория часто называется Гравитацией Лиувилля.

Другой путь — дискретный подход, основанный на идее приближения флуктуирующей двумерной геометрии ансамблем планарных графов. Такой способ называется Матричными Моделями, потому, что ансамбль графов обычно определяется интегралом по матрицам размера $N \times N$, где N затем устремляется к бесконечности.

Доказательством того, что эти два разных подхода описывают одну и туже сущность, является совпадение масштабных размерностей физических наблюдаемых в Гравитации Лиувилля — O_k^{LG} и в Матричных Моделях — O_k^{MM}. Но при первом рассмотрении корреляционные функции разных теорий не идентичны. Разрешение этой проблеммы — резонансное соотношение. В большинстве случаев несовпадение может быть устранено выбором параметров в соотношении между операторами O_k^{LG} и O_k^{MM}. Попытка сделать полное соответствие между корреляторами была предпринята в непрерывном подходе в Минимальной Гравитации $\mathcal{MG}_{2/2p+1}$, а в дискретном в одно-Матричной Моделе. В итоге обнаружилось совпадение для одно-, двух-, трех- и четырехточечной корреляционных функций. Расчет пятиточечной корреляционной функции в непрерывном подходе сильно усложнен по сравнению с предыдущими и требует неких дополнительных соображений, которые пока не были полностью придуманны. В дискретном же подходе, то есть в одно-Матричной Моделе, вычисление пятиточечной корреляционной функции может быть проведено, аналогично расчетам предыдущих функций, но заметно сложнее. В данной работе выполнено это вычисление. Текст разбит на три основных раздела. Первый раздел посвящен непрерывному подходу и Минимальной Гравитации, второй — дискретному подходу и одно-Матричной Моделе. А в третьем разделе приведено вычисление пятиточечной корреляционной функции и проверка выполнений правил отбора для неё.

2 Минимальная Гравитация

2.1 Функциональный интеграл Полякова в конформной калибровке.

Амплитуда перехода струны из начального состояния в конечное, определяется как сумма по всем поверхностям соединяющим начальную и конечную конфигурацию струны

$$Z = \sum_{\text{По поверхностям}} e^{-(\text{площадь})} = \int \mathcal{D}g\mathcal{D}X^{\mu} \exp(-S_P[X^{\mu}, g_{ab}]), \tag{1}$$

где $S_P[X^{\mu}, g_{ab}]$ — действие Полякова. Нам нужно учитывать каждую поверхность по одному разу, но из-за параметризационной инвариантности, каждая поверхность учитывается в функциональном интеграле (1) бесконечно много раз. Поэтому необходимо выделить фактор, учитывающий этот переучет поверхностей. Для этого проводится фиксация калибровки. Вкратце напомним основные пункты. Вначале выбирается в пространстве метрик поверхность Σ, на которой метрики имеют вид $e^{\sigma}\hat{g}$, где $\hat{g}$ "бэкграунд"метрика. Остальные метрики получаются из метрик на поверхности Σ в результате действия группы репараметризаций. Затем нужно перейти от интегрирования по всем метрикам, к интегрированию по метрикам на поверхности Σ и по элементам группы диффеоморфизмов. Объем орбиты группы диффеоморфизмов и является фактором переучета поверхностей. Поэтому переопределим меру в пространстве метрик, устранив этот фактор. И в итоге приходим к ответу

$$Z = \int \mathcal{D}_P\varphi \mathcal{D}_{e^{\varphi}\hat{g}}(B, C)\mathcal{D}_{e^{\varphi}\hat{g}}X^{\mu} \exp(-S_P[X^{\mu}, e^{\varphi}\hat{g}_{ab}] - S_{\mathrm{Gh}}[B, C, e^{\varphi}\hat{g}_{ab}]), \tag{2}$$

где норма на мере Полякова $\mathcal{D}_P\varphi$, определяется следующим выражением:

$$\|\delta\varphi\|_P^2 = \int e^{\varphi}(\delta\varphi)^2\sqrt{\hat{g}}d^2x. \tag{3}$$

Эта мера не является инвариантной при замене $\varphi(x) \to \varphi(x) + \eta(x)$, то есть не является линейной. Далее используя конформную аномалию, в итоге приходим к конечному ответу, который можно записать в таком виде

$$Z = \int \mathcal{D}_P\varphi\mathcal{D}_{\hat{g}}(B, C)\mathcal{D}_{\hat{g}}X \exp(-S_{\mathrm{tot}}^P[B, C, X, \varphi, \hat{g}_{ab}]), \tag{4}$$

где полное действие струны $S^P_{\rm tot}[B,C,X,\varphi,\hat g_{ab}]$, является суммой трех слагаемых

$$S^P_{\rm tot}[B,C,X,\varphi,\hat g]=S_P[X^\mu,\hat g]+S_{\rm Gh}[B,C,\hat g]+\frac{26-D}{48\pi}W[\varphi,\hat g]. \tag{5}$$

Последний член в формуле (5) появляющийся из-за учета конформной аномалии, описывает динамику гравитационного поля. Зависимость функционального интеграла (4) от $\hat g$ является кажущейся, поскольку в исходной формулировке интегрирование происходит по всем метрикам и никакая метрика не является выделенной. Это можно проверить явным вычислением.

Формулу (4) можно обобщить, предположив, что роль материи вместо D-мерного скалярного безмассового поля X^μ, играет некоторое поле, также обозначаемое X, динамика которого описывается произвольной Двумерной Конформной Теории Поля с действием $S_M[X,g]$ и центральным зарядом $c_{\rm M}$.

Изменив нормировку поля φ

$$\varphi\to\sqrt{\frac{24}{26-D}}\,\varphi, \tag{6}$$

мы получим выражение для действия струны

$$S^P_{\rm tot}[B,C,X,\varphi,\hat g]=S_P[X^\mu,\hat g]+S_{\rm Gh}[B,C,\hat g]+\tilde S_{\rm L}[\varphi,\hat g], \tag{7}$$

где

$$\tilde S_L[\tilde\varphi,\hat g]=\frac{1}{4\pi}\int\left[\hat g^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi+\tilde Q R^{[\hat g]}\varphi\right]\sqrt{\hat g}d^2x, \tag{8}$$

$$\tilde Q=\sqrt{\frac{26-D}{6}},\quad \tilde b=\sqrt{\frac{6}{26-D}}, \tag{9}$$

а выражение для меры (3) приобретет вид

$$\|\delta\varphi\|^2_P=\int e^{2\tilde b\varphi}(\delta\varphi)^2\sqrt{\hat g}d^2x. \tag{10}$$

2.2 Формулировка Давида - Дистлера - Каваи .

Существует другая формулировка некритической теории струн, принадлежащая Давиду-Дистлеру-Каваи (DDK) [7], которая предполагается эквивалентной исходному подходу Полякова. В формулировке DDK выражение для функционального интеграла в конформной калибровке

$$Z=\int\mathcal D_{\hat g}\varphi\mathcal D_{\hat g}(B,C)\mathcal D_{\hat g}X\exp(-S_M[X,\hat g]-S_{\rm Gh}[B,C,\hat g]-S_L[\varphi,\hat g]) \tag{11}$$

отличается тем, что мера интегрирования в пространстве поля φ является линейной

$$\|\delta\varphi\|^2=\int(\delta\varphi(x))^2\sqrt{\hat g}d^2x, \tag{12}$$

а действие $S_L[\varphi,\hat g]$, называемое действием Лиувилля принимает вид

$$S_L[\varphi,\hat g]=\frac{1}{4\pi}\int\left[\hat g^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi+QR^{[\hat g]}\varphi+4\pi\mu e^{2b\varphi}\right]\sqrt{\hat g}d^2x, \tag{13}$$

где μ — космологическая постоянная, а Q и b — некоторые константы. Основное предположение состоит в том, что единственным следствием от замены меры интегрирования является конечная перенормировка параметров в $S_{\rm L}[\varphi,\hat g]$. Перенормированные параметры Q и b определяются из условия независимости функционального интеграла от "бэкграунд" метрики $\hat g$. Так как при репараметризациях выражение (11) является инвариантным, остается обеспечить инвариантность относительно преобразований Вейля. Поскольку мы знаем, что происходит с функциональными интегралами, описывающими конформную материю и духи при преобразовании $\hat g_{ab}\to g_{ab}=e^\sigma\hat g_{ab}$, остается рассмотреть как изменяется функциональный интеграл по лиувиллевскому полю

$$e^{-S^{\rm eff}_{\rm L}[\hat g]}=\int\mathcal D_{\hat g}\varphi e^{-S_{\rm L}[\varphi,\hat g]}. \tag{14}$$

Для начала обратимся к случаю, в котором экспоненциальный член в формуле (13) отсутствует, т.е. $\mu=0$.

Учитывая формулу

$$\sqrt{g}R^{[g]}(x)=\sqrt{\hat{g}}(R^{[\hat{g}]}(x)+\Delta_0^{[\hat{g}]}\sigma(x)),\quad \text{где}\quad g_{ab}=e^{\sigma}\hat{g}_{ab},\quad \Delta_0^{[\hat{g}]}=-\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}}\partial_a\hat{g}^{ab}\sqrt{\hat{g}}\partial_b, \tag{15}$$

для действия (13) получаем

$$S_L[\varphi,e^{\sigma}\hat{g}]=\frac{1}{4\pi}\int\left[\hat{g}^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi+QR^{[\hat{g}]}\varphi+Q\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma\partial_b\varphi\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x, \tag{16}$$

где мы уже произвели интегрирование по частям

$$\int Q\varphi(x)\Delta_0^{[\hat{g}]}\sigma(x)\sqrt{\hat{g}}d^2x=\int Q\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma\partial_b\varphi\ \sqrt{\hat{g}}d^2x. \tag{17}$$

Теперь перейдем к новому полю $\tilde{\varphi}(x)$, сдвигом поля $\varphi(x)$ на фиксированную функцю $\frac{Q}{2}\sigma(x)$

$$\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)+\frac{Q}{2}\sigma(x). \tag{18}$$

Выражение (16) в терминах поля $\tilde{\varphi}$ можно записать в виде

$$S_L[\varphi,e^{\sigma}\hat{g}]=\frac{1}{4\pi}\int\left[\hat{g}^{ab}\partial_a\tilde{\varphi}\partial_b\tilde{\varphi}+QR^{[\hat{g}]}\tilde{\varphi}-\frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma\partial_b\sigma+R^{[\hat{g}]}\sigma\right)\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x, \tag{19}$$

или, что эквивалентно,

$$S_{\mathrm{L}}[\varphi,e^{\sigma}\hat{g}]=S_{\mathrm{L}}[\tilde{\varphi},\hat{g}]-\frac{Q^2}{8\pi}W[\sigma,\hat{g}], \tag{20}$$

где

$$W[\sigma,\hat{g}]=\int\left[\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\sigma(x)\partial_b\sigma(x)+R^{[\hat{g}]}(x)\sigma(x)\right]\sqrt{\hat{g}}d^2x. \tag{21}$$

В силу линейности меры поля φ, мы имеем

$$\mathcal{D}_{e^{\sigma}\hat{g}}\varphi=\mathcal{D}_{e^{\sigma}\hat{g}}\tilde{\varphi}. \tag{22}$$

Учет квантовой аномалии в мере приводит к дополнительному слагаемому в соотношении между эффективными действиями теории Лиувилля в метрике $e^{\sigma}\hat{g}$ и $\hat{g}$, в результате чего мы получаем

$$S_{\mathrm{L}}^{\mathrm{eff}}[e^{\sigma}\hat{g}]=S_{\mathrm{L}}^{\mathrm{eff}}[\hat{g}]-\frac{1+6Q^2}{48\pi}W[\sigma,\hat{g}]. \tag{23}$$

Таким образом мы доказали, что теория Лиувилля задаваемая (14) при $\mu=0$ является Конформной Теорией Поля, в смысле стандартного определения, с центральным зарядом

$$c_{\mathrm{L}}=1+6Q^2. \tag{24}$$

Тензор энергии-импульса этой теории в плоском пространстве имеет вид

$$T_{ab}=-\partial_a\varphi\partial_b\varphi+\frac{\hat{g}_{ab}}{2}(\partial_a\varphi)^2+Q\left(\partial_a\partial_b\varphi-\frac{\hat{g}_{ab}}{2}\partial_a^2\varphi\right). \tag{25}$$

Как обычно в Конформной Теории Поля существуют две компоненты тензора энергии-импульса

$$T_{zz}=T(z)=-(\partial\varphi)^2+Q\partial^2\varphi, \tag{26}$$
$$T_{\bar{z}\bar{z}}=\bar{T}(\bar{z})=-(\bar{\partial}\varphi)^2+Q\bar{\partial}^2\varphi. \tag{27}$$

которые являются голоморфным и антиголоморфным полями соответственно.

Примарными полями в теории Лиувилля, являются поля $V_a(x)=:e^{2a\varphi(x)}:$. Их операторное разложение с тензором энергии-импульса легко получить, пользуясь теоремой Вика,

$$T(u)V_a(z,\bar{z})=\frac{\Delta_a}{(u-z)^2}V_a(z,\bar{z})+\frac{1}{u-z}\partial_zV_a(z,\bar{z})+\text{рег.}, \tag{28}$$

где $\Delta_a=a(Q-a)$ — размерность поля $V_a(z,\bar{z})$.

Составное экспоненциальное поле $V_a =: e^{2a\varphi(x)}$: требует для своего определения регуляризации и перенормировки. В результате этого возникает зависимость поля V_a от метрики

$$[e^{2a\varphi(x)}]_{e^\sigma\hat{g}} = e^{a^2\sigma(x)}[e^{2a\varphi(x)}]_{\hat{g}}. \tag{29}$$

Поэтому в результате комбинации преобразований

$$\hat{g}_{ab} \to e^\sigma \hat{g}_{ab}, \tag{30}$$

$$\varphi(x) \to \varphi(x) - \frac{Q}{2}\sigma(x), \tag{31}$$

поле V_a трансформируется по закону

$$V_a(x) \to e^{-\Delta(a)\sigma(x)}V_a(x). \tag{32}$$

Пусть параметр b таков, что $\Delta(b) = 1$, что эквивалентно

$$Q = b + b^{-1}, \tag{33}$$

тогда поле

$$V_b(x) \to e^{-\sigma(x)}V_b(x). \tag{34}$$

Интеграл

$$\int V_b\sqrt{g}d^2x \tag{35}$$

остается инвариантным при (30) и (31).

Отсюда следует, что функциональный интеграл по полю Лиувилля с действием (13), в котором присутствует космологический член с $\mu \neq 0$, также преобразуется по закону (23). Иначе говоря эта теория является Конформной Теорией Поля с $c_{\mathrm{L}} = 1 + 6Q^2$.

Поэтому теория струны является суммой трех Конформных Теорий Поля с центральными зарядами равными c_{M}, $c_{\mathrm{Gh}} = -26$ и $c_{\mathrm{L}} = 1 + 6Q^2$. Для достижения независимости статистической суммы струны задаваемой функциональным интегралом (11), теперь достаточно потребовать зануление полного центрального заряда теории

$$c_{\mathrm{tot}} = c_{\mathrm{M}} + c_{\mathrm{Gh}} + c_{\mathrm{L}} = 0. \tag{36}$$

Это соотношение, которое эквивалентно формуле

$$Q = \sqrt{\frac{25 - c_{\mathrm{M}}}{6}}, \tag{37}$$

выражает константу связи Лиувилля b через центральный заряд конформной материи.

Кроме статистической суммы в Теории струн объектом изучения являются также корреляционные функции наблюдаемых. Наблюдаемые или физические поля также должны быть инвариантными относительно преобразований Вейля. Простейшие физические поля определяются следующим образом. Пусть Φ_Δ — некоторое примарное поле из материального сектора с размерностью Δ_{M} . При конформных преобразованиях метрики поле Φ_Δ преобразуется

$$[\Phi_\Delta]_{e^\sigma\hat{g}} = e^{-\Delta_{\mathrm{M}}\sigma}[\Phi_\Delta]_{\hat{g}}. \tag{38}$$

Произведение поля Φ_Δ и "одевающего" экспоненциального поля V_a из лиувиллевского сектора

$$U_a = \Phi_\Delta V_a, \tag{39}$$

при выполнении условия

$$\Delta_{\mathrm{M}} + \Delta(a) = 1 \tag{40}$$

которое равносильно формуле

$$\Delta_{\mathrm{M}} + a(Q - a) = 1, \tag{41}$$

и при растяжении метрики и соответствующем сдвиге поля φ, трансформируется по закону

$$\Phi_\Delta V_a \to e^{-\sigma(x)}\Phi_\Delta V_a, \tag{42}$$

а наблюдаемые вида

$$O_a = \int \Phi_\Delta V_a \sqrt{g} d^2x \tag{43}$$

остаются инвариантными. Таким образом мы приходим к определению корреляционных функций

$$\langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle, \tag{44}$$

которые не меняются при преобразованиях Вейля, поэтому не зависят от "бэкграунд" метрики $\hat{g}$, т.е. являются корректно определенными.

2.3 Спектр гравитационных размерностей.

Обратимся теперь к масштабной зависимости коррелятора (44). Он выражается формулой

$$\langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle = \int \mathcal{D}_{\hat{g}} \varphi e^{-\frac{1}{4\pi} \int \left[\hat{g}^{ab} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + Q R^{[\hat{g}]} \varphi + 4\pi\mu e^{2b\varphi}\right] \sqrt{\hat{g}} d^2x} \prod_{i=1}^{N} \int d^2 x_i e^{2\sum_i a_i \varphi(x_i)} \langle \Phi_1(x_1) ... \Phi_N(x_N) \rangle_{\mathrm{M}}, \tag{45}$$

где $O_{a_i} = \int \Phi_{\Delta_i} V_{a_i} \sqrt{\hat{g}} d^2x$, а $\langle \Phi_1(x_1) ... \Phi_N(x_N) \rangle_{\mathrm{M}}$ является N-точечной корреляционной функцией материальной теории

В формуле (45) есть только один размерный параметр — это космологическая постоянная μ. Поэтому зависимость корреляционной функции от μ и представляет ее масштабную зависимость. Посмотрим, как изменяется коррелятор (45) при растяжении μ

$$\mu \to e^\rho \mu, \tag{46}$$

где ρ константа. Очевидно, чтобы компенсировать растяжение в космологическом члене, нам необходимо сделать сдвиг поля $\varphi(x)$ по формуле

$$\varphi(x) \to \varphi(x) - \frac{\rho}{2b}. \tag{47}$$

Так как мера в функциональном интеграле (45) линейна

$$\mathcal{D}_{\hat{g}} \left(\varphi - \frac{\rho}{2b}\right) = \mathcal{D}_{\hat{g}} \varphi, \tag{48}$$

изменение действия $S_{\mathrm{L}}[\varphi, \hat{g}]$ при таком сдвиге произойдет лишь из-за члена с кривизной. Учитывая теорему Гаусса- Бонне

$$\frac{1}{4\pi} \int R^{[\hat{g}]} \sqrt{\hat{g}} d^2x = \chi_E = 2 - 2h, \tag{49}$$

где χ_E — Эйлерова характеристика, а h — количество ручек, а также изменение полей $e^{2a\varphi}$ при сдвиге (47), получим связь между коррелятором от $e^\rho \mu$ и коррелятором от μ

$$\langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle (e^\rho \mu) = e^{\rho\left(\frac{\chi_E Q}{2b} - \sum_i \frac{a_i}{b}\right)} \langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle (\mu). \tag{50}$$

Из этой формулы следует, что масштабная зависимость $\langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle$ дается выражением

$$\langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle (\mu) = \mu^{\left(\frac{\chi_E Q}{2b} - \sum_i \frac{a_i}{b}\right)} F(a_1, ..., a_N, b), \tag{51}$$

где $F(a_1, ..., a_N, b)$ — функция которая уже не зависит от μ. Коэффициенты

$$\delta_i = -\frac{a_i}{b} \tag{52}$$

называются гравитационными размерностями. Они описывают вклад от преобразования полей O_{a_i} при масштабном преобразовании. Величина

$$\Gamma_{\mathrm{str}} = 2 - \frac{Q}{b} \tag{53}$$

называется струнной восприимчивостью, и показывает, как изменяется статистическая сумма при масштабном преобразовании.

Выполним преобразование Лапласа корреляционной функции физических полей (44) по космологической постоянной

$$\langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle = \int_0^\infty \langle O_{a_1} ... O_{a_N} \rangle_A e^{-\mu A} dA. \tag{54}$$

Образ Лапласа $\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle_A$ является корреляционной функцией от полей, задаваемой функциональным интегралом по поверхностям с фиксированной площадью

$$\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle_A = \int \langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle_{\mathrm{M}} e^{-S_0[\varphi,\hat{g}]}\delta\left(A - \int e^{2b\varphi(x)}\sqrt{\hat{g}}d^2x\right)\mathcal{D}_{\hat{g}}\varphi, \tag{55}$$

а $S_0[\varphi,\hat{g}]$ действие Лиувилля (13) без экспоненциального члена

$$S_0[\varphi,\hat{g}] = \frac{1}{4\pi}\int [\hat{g}^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi + QR^{[\hat{g}]}\varphi]\sqrt{\hat{g}}d^2x. \tag{56}$$

Зависимость коррелятора (55) от площади поверхностей A, также является степенной

$$\langle O_{a_1}...O_{a_N}\rangle_A \sim A^{-\frac{\chi_E Q}{2b}-1+\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{b}}. \tag{57}$$

2.4 Минимальная 2-мерная Гравитация Лиувилля.

Вариант некритической Теории Струн, в которой конформная материя описывается одной изминимальных моделей называется Минимальной Теорией Струн или Минимальной Лиувиллевской Гравитацией (MLG).

Значение центрального заряда конформной материи в этом случае

$$c_{\mathrm{M}} = 1 - 6q^2, \quad q = \beta^{-1} - \beta. \tag{58}$$

Выражение же для конформной размерности примарного поля Φ_{mn} в Обобщенной Минимальной Модели удобно записать в виде

$$\Delta^{\mathrm{M}}_{mn} = \alpha_{mn}(\alpha_{mn} - q), \tag{59}$$

где

$$\alpha_{mn} = \frac{(n-1)\beta - (m-1)\beta^{-1}}{2}. \tag{60}$$

Поэтому требование зануления полного центрального заряда струны

$$c_{\mathrm{L}} + c_{\mathrm{M}} = 26, \quad \text{где} \quad c_{\mathrm{L}} = 1 + 6(b^{-1}+b)^2 \tag{61}$$

эквиваелентно соотношению

$$\beta = b, \tag{62}$$

а условие баланса размерностей $\Delta^{\mathrm{M}} + \Delta^{\mathrm{L}} = 1$, то есть

$$\Delta_{mn} + a(Q-a) = 1 \tag{63}$$

эквивалентно соотношению

$$a = a_{m,-n}, \quad \text{где} \quad a_{k,l} = \frac{(1-k)b^{-1} + (1-l)b}{2}. \tag{64}$$

Таким образом физические Наблюдаемые в Минимальной Теории Струн задаются выражением

$$O_{mn} = \int \Phi_{mn}(x)e^{2a_{m,-n}\varphi(x)}d^2x. \tag{65}$$

Из формул (52) и (53) тогда следует, что струнная восприимчивость в MLG(b)

$$\Gamma_{\mathrm{str}} = 1 - \frac{1}{b^2}, \tag{66}$$

а спектр гравитационных размерностей имеет вид $\delta_{mn} = -\frac{a_{m,-n}}{b}$ или

$$\delta_{mn} = \frac{(m-1)}{2}b^{-2} - \frac{n+1}{2}. \tag{67}$$

Теперь рассмотрим более подробно Минимальную Модель $\mathcal{M}_{2/2p+1}$.

2.5 Минимальная Модель $\mathcal{M}_{2/2p+1}$

Таблица Каца для Минимальной КТП $\mathcal{M}_{2/2p+1}$ является рядом длины $2p$. Поля являются вырожденными $\Phi_{(1,n)}$, где $n = 1, 2, ..., 2p$. Благодаря тому, что $\Phi_{(1,n)} = \Phi_{(1,2p+1-n)}$, модель по сути содержит только p независимых примарных полей. Мы будем использовать следующее обозначение

$$\Phi_k = \Phi_{(1,k+1)}. \tag{68}$$

Откуда следует, что Φ_0 — тождественный оператор. Все независимые примарные поля, нумеруются числом k, пробегающим значения $k = 1, 2, ..., p-1$, но часто удобно расширить этот ряд, до полной таблицы Каца, $k = 1, 2, ..., 2p$, с следующим обозначением

$$\Phi_{2p-k-1} = \Phi_k. \tag{69}$$

В частности, с таким условием, правила отбора для $\mathcal{M}_{2/2p+1}$ принимают простую форму

$$[\Phi_{k_1}][\Phi_{k_2}] = \sum_{k=|k_1-k_2|:2}^{k_1+k_2} [\Phi_k], \tag{70}$$

где $[\Phi_k]$, как обычно означает неприводимое представление алгебры Вирасоро, связанное с примарным полем Φ_k. Здесь и ниже символ $\sum\limits_{k=m:2}^{m'}$ означает сумму с шагом 2, в которой k пробегает значения $m, m+2, m+4, ..., \leqslant m'$. В то время, как в (70), предполагается, что k_1 и k_2 лежат в области $[0, 1, ..., p-1]$, индекс суммирования k может пробегать значения вне этого ряда, и тогда $[\Phi_k]$ понимается, как $[\Phi_{2p-k-1}]$. Заметим, что отождествление (69), разрушает четную симметрию $\Phi_k \to (-1)^k \Phi_k$ в (70), поэтому $[\Phi_k]$ с нечетным(четным) k может возникать в правой части (70) при четном(нечетном) $k_1 + k_2$. В частности, корреляционная функция

$$\langle \Phi_{k_1}(X_1)\Phi_{k_2}(X_2)...\Phi_{k_n}(X_n)\rangle \tag{71}$$

не обязанна изчезать, когда $k_1 + k_2 + ... + k_n$ нечетно.

С другой стороны, конформная инвариантность и правила отбора (70), заставляют исчезнуть большинство корреляционных функций. Конформная инвариантность требует изчезновение всех одно-точечных корреляторов кроме $\langle \Phi_0(X)\rangle$, и мы можем написать следующие правила отбора

$$\langle \Phi_k(X)\rangle = 0, \quad \text{при} \quad k \neq 0, \tag{72}$$

$$\langle \Phi_{k_1}(X_1)\Phi_{k_2}(X_2)\rangle = 0, \quad \text{при} \quad k_1 \neq k_2. \tag{73}$$

Обобщением правил отбора на многоточечную корреляционную функцию являются неравенства

$$\langle \Phi_{k_1}(X_1)\Phi_{k_2}(X_2)...\Phi_{k_n}(X_n)\rangle = 0, \quad \text{если} \quad \begin{cases} k_1 + ... + k_{n-1} < k_n, & \text{при} \quad k_1 + ... + k_n \quad \text{четном}, \\ k_1 + ... + k_n < 2p-1, & \text{при} \quad k_1 + ... + k_n \quad \text{нечетном}, \end{cases} \tag{74}$$

здесь полагается, что k_i лежит в ряде $[0, 1, ..., p-1]$ и, что k_n наибольший индекс, то есть $k_i \leqslant k_n$. В дальнейшем мы будем говорить, что находимся в **четном(нечетном) секторе**, если $k_1 + ... + k_n$ четно(нечетно). Гравитационные размерности в Минимальной Моделе, исходя из формулы (67), равны

$$\delta_k = -\frac{a_k}{b} = -\frac{k+2}{2}. \tag{75}$$

2.6 Корреляторы в Минимальной Гравитации

Главными объектами в Квантовой Гравитации являются n-точечные "корреляционные числа"

$$C_{k_1...k_n} = \langle O_{k_1}...O_{k_n}\rangle. \tag{76}$$

Производящая функция может быть записанна в виде

$$Z(\{\lambda_k\}) = Z_0 \langle \exp\{\sum_k \lambda_k O_k\}\rangle. \tag{77}$$

Для $n = 3$ трехточечная корреляционная функция получается просто перемножением "материальной" трехточечной функции (71) на трехточечный коррелятор Лиувилля

$$\langle e^{2a_{k_1}\varphi(x_1)}...e^{2a_{k_3}\varphi(x_3)}\rangle_{\text{Liouville}}, \tag{78}$$

результат данного вычисления принимает простую форму [14]

$$\langle O_{k_1}O_{k_2}O_{k_3}\rangle = -\mu^{\delta_{k_1}+\delta_{k_2}+\delta_{k_3}}N_{k_1k_2k_3}\mathcal{N}_p\prod_{i=1}^{3}\mathrm{Leg}_{\mathrm{L}}(k_i), \tag{79}$$

здесь

$$\mathcal{N}_p = (2p-1)(2p+1)(2p+3), \tag{80}$$

и "лег" факторы равны

$$\mathrm{Leg}_{\mathrm{L}}(k) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2\pi^{\frac{k}{2}}}\left[\gamma\left(\frac{2}{2p+1}\right)\right]^{-\frac{k+1}{2}}\left[\gamma\left(\frac{2(k+1)}{2p+1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(p-k-1/2)}, \tag{81}$$

где $\gamma(t) = \Gamma(t)/\Gamma(1-t)$. От них можно легко избавиться , переопределив O_k и параметры λ_k в (77), как

$$O_k \to \frac{1}{\mathrm{Leg}_{\mathrm{L}}(k)}O_k, \quad \lambda_k \to \mathrm{Leg}_{\mathrm{L}}(k)\lambda_k. \tag{82}$$

Обратим внимание, на входящие в (79) "коэффициенты отбора" $N_{k_1k_2k_3}$, которые принимают значение 1, если правила отбора выполнены, и принимают значение 0 в обратном случае. В явном виде

$$N_{k_1k_2k_3} = \begin{cases} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k_1+k_2+k_3 \geqslant 2p-1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} & \text{при} \quad k_1+k_2+k_3 \quad \text{нечетном} \\ \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k_1+k_2 \geqslant k_3, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} & \text{при} \quad k_1+k_2+k_3 \quad \text{четном} \end{cases} \tag{83}$$

здесь мы полагаем, что $k_1, k_2 \leqslant k_3$. Фактор $N_{k_1k_2k_3}$ берет начало из "материальной" трехточечной функции $\langle\Phi_{k_1}\Phi_{k_2}\Phi_{k_3}\rangle$.

Так как Φ_0 является тождественным оператором в $\mathcal{M}_{2/2p+1}$, вставка O_0 в (76) эквивалентна взятию производной по μ

$$\langle O_0O_{k_1}...O_{k_n}\rangle = -Z_0^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_0\langle O_{k_1}...O_{k_n}\rangle), \tag{84}$$

где

$$Z_0 \sim \mu^{\frac{2p+3}{2}} \tag{85}$$

есть статистическая сумма Лиувилля на сфере. Поэтому одно- и двухточечные корреляционные числа легко выводятся из (79) и равны

$$\langle O_kO_{k'}\rangle = \delta_{k,k'}\frac{\mathcal{N}_p\mu^{2\delta_k}}{2p-2k-1}\mathrm{Leg}_{\mathrm{L}}^2(k), \quad \langle O_k\rangle = -\delta_{k,0}(p+3/2)\mu^{-1}. \tag{86}$$

В статье [2] был подсчитан четырех-точечный коррелятор. Результат может быть записан как

$$\langle O_{k_1}O_{k_2}O_{k_3}O_{k_4}\rangle = \mathcal{N}_p\mu^{\sum\delta_{k_i}}C_{k_1k_2k_3k_4}\prod_{i=1}^{4}\mathrm{Leg}_{\mathrm{L}}(k_i), \tag{87}$$

где, если выбрать число k_1 наименьшим из всех (т.е. $k_1 \leqslant k_2, k_3, k_4$), то фактор $C_{k_1k_2k_3k_4}$ примет вид

$$C_{k_1k_2k_3k_4} = (k_1+1)(p+k_1+3/2) - \sum_{i=2}^{4}\sum_{s=-k_1:2}^{k_1}\left|p-k_i-s-\frac{1}{2}\right|. \tag{88}$$

Как было сказанно во введении, Минимальная Гравитация $\mathcal{MG}_{2/2p+1}$, выглядит подобной p - критической точке в одно-Матричной Моделе. Это подобие было подтверждено совпадением одноточечной и двухточечной корреляционных функций [3].

3 Матричные Модели

В Матричных Моделях рассматриваются различные дискретизации поверхностей. В частности "случайная триангуляция", в которой поверхность составлена из треугольников [10]. Треугольники полагаются равносторонними, поэтому если N_i (— число прилегающих треугольников в вершине i) больше(меньше) чем шесть, кривизна в вершине отрицательная(положительная), при $N_i = 6$ кривизна равна нулю. Предположение состоит в том, что сумма по всем случайным триангуляциям является дискретным аналогом интеграла $\int \mathcal{D}g$ по всем метрикам

$$\sum_{\text{род}\, h} \int \mathcal{D}g \to \sum_{\substack{\text{по случайным} \\ \text{триангуляциям}}} \tag{89}$$

Дискретный аналог бесконечно малого элемента объема $\sqrt{g}$ есть $\sigma_i = \frac{N_i}{3}$, поэтому полную площадь поверхности мы можем записать, как $|S| = \sum_i \sigma_i$, что есть просто полное число треугольников, так как полагается, что треугольники имееют единичную площадь. Дискретный аналог скалярной кривизны R в вершине i, есть $R_i = 2\pi \frac{6-N_i}{N_i}$, поэтому

$$\int \sqrt{g} R \to \sum_i 4\pi \left(1 - \frac{N_i}{6}\right) = 4\pi \left(V - \frac{1}{2}F\right) = 4\pi(V - E + F) = 4\pi\chi, \tag{90}$$

где χ — характеристика Эйлера, а V, E и F — количество вершин, ребер и граней соответственно. Сами по себе треугольники не играют особую роль в дискретизации поверхности и могут быть заменены любыми другими многоугольниками. Следующее утверждение зкалючается в том, что дискретные поверхности являются диаграммами Фейнмана, которые появляются при разложении по теории возмущений интеграла

$$Z = \log \int dM e^{-N\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}M^2 - \sum_{n=3} \frac{\alpha_n}{n!} M^n\right)}, \tag{91}$$

где M — эрмитовы матрицы $N \times N$. Статистическая сумма представляется в виде ряда по N, как

$$Z = N^2 Z_0 + Z_1 + ... + N^{2-2h} Z_h + ..., \tag{92}$$

где каждый член Z_h есть вклад от дискретных поверхностей рода h, сделанных из треугольников и других многоугольников, причем доля в количестве каждых определяется коэффициентами α_i. Мы будем рассматривать поверхности с топологией сферы ($h = 0$), то есть нам нужно учесть только Z_0.

3.1 Одно-Матричная Модель

Одно-Матричная Модель илюстрирует бесконечный набор мульти-критических точек, занумерованных целым числом $p = 1, 2, 3, ...$ В скейлинговом пределе, вблизи p-критической точки, статистическая сумма в этой теории выражается через решение "струнного уравнения"

$$\mathcal{P}(u) = 0, \tag{93}$$

где $\mathcal{P}(u)$ полином степени $p + 1$

$$\mathcal{P}(u) = u^{p+1} + t_0 u^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} t_k u^{p-k-1}, \tag{94}$$

с параметрами t_k описывающими релевантное отклонение от p-критической точки. Сингулярная часть статистической суммы Матричных Моделей $Z(t_0, t_1, ...t_{p-1})$ выражается через (94), как

$$Z = \frac{1}{2} \int_0^{u_*} \mathcal{P}^2(u) du, \tag{95}$$

где $u_* = u_*(t_0, t_1, ..., t_{p-1})$ — максимальный корень полинома (94), то есть $\mathcal{P}(u_*) = 0$. Важно помнить, что (95) дает только сингулярную часть статистической суммы Матричных Моделей. Полный матричный интеграл включает в себя также и регулярную часть, аналитическую по всем параметрам t_k при $\{t_k\} = 0$. Eё рассмотрение не имеет смысла. Существуют весомые аргументы [3], [4], в пользу того, что статистическая сумма (95), выражает Матричное описание Минимальной Гравитации $\mathcal{MG}_{2/2p+1}$. В таком описании $-t_0$

интерпретируется, как космологическая постоянная μ. Уравнение (93), позволяет установить размерность параметров t_k,

$$t_k \sim [\mu]^{\frac{k+2}{2}}, \tag{96}$$

откуда следует, что $Z \sim [\mu]^{\frac{2p+3}{2}}$, что находится в соответствии с (75) и (85).

Сравнение корреляционных чисел содержит две тонкости, подмеченные в работе [3]. Во первых, из (75), очевидно , что при достаточно большом p, имеется много резонансов, то есть равенств вида

$$\delta_k = \delta_{k_1} + ... + \delta_{k_n}. \tag{97}$$

Поэтому соотношение между параметрами t_k в (93) и параметрами λ_k в Минимальной Гравитации может вовлекать резонансные члены [1]

$$t_k = C_k\lambda_k + \sum_{n=2}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} \sum_{k_1,...,k_n=0}^{p-1} C_k^{k_1...k_n}\lambda_{k_1}...\lambda_{k_n}, \tag{98}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$C_k^{k_1...k_n} = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{n} k_i \neq k + 2 - 2n. \tag{99}$$

Сумма по $k_i = 0, 1, ..., p-1$ в (98) включает $k_i = 0$, чтобы учесть возможность того, что целые степени космологической постоянной возникают в правой части уравнения. По определению

$$\lambda_0 = -\mu. \tag{100}$$

Коэффициенты C_k играют не значительную роль. Они могут быть устранены простой перенормировкой параметров λ_k (или t_k), подобной (82). Физическая эквивалентность между p-критической Матричной Моделью и Минимальной Гравитацией $\mathcal{MG}_{2/2p+1}$, подразумевается в том смысле, что специальным выбором коэффициентов $C_k^{k_1...k_n}$ в замене (98), статистическая сумма (95), выраженная через параметры $\{\lambda_k\}$, может быть сделана подобной производящей функции (77) в Минимальной Гравитации, с точностью до регулярных членов. Эта идея впервые была высказанна в [3], где также было проверенно совпадение одно- и двухточечных корреляционных чисел.

Итак, величинами которые должны сравниваться с корреляционными функциями в $\mathcal{MG}_{2/2p+1}$ являются коэффициенты в разложении

$$Z = Z_0 + \sum_{k=1}^{p-1}\lambda_k Z_k + \sum_{k_1,k_2=1}^{p-1}\frac{\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}}{2}Z_{k_1k_2} + ... + \sum_{k_1,...k_n=1}^{p-1}\frac{\lambda_{k_1}...\lambda_{k_n}}{n!}Z_{k_1...k_n} + ... \tag{101}$$

статистической суммы Матричных Моделей (95) по степеням $\lambda_1, ..., \lambda_{p-1}$, с $\lambda_0 = -\mu$, при $\lambda_1 = ... = \lambda_{p-1} = 0$. С помощью размерного анализа получаем

$$[Z_{k_1...k_n}] = [\mu]^{\frac{2p+3-2n-\sum k_i}{2}}. \tag{102}$$

При четной сумме $\sum_{i=1}^n k_i$ (**четный сектор**), степень над μ в формуле (102) является полуцелой, и поэтому такие $Z_{k_1...k_n}$ принадлежат сингулярной части статистической суммы. Если же $\sum_{i=1}^n k_i$ нечетна (**нечетный сектор**), степень над μ целая. Когда также

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leqslant 2p + 3 - 2n, \tag{103}$$

коэффициенты в нечетном секторе не отрицательны по μ, и поэтому велечины $Z_{k_1...k_n}$ принадлежат регулярной части статистической суммы и следовательно не подлежат рассмотрению. Заметим, что неравенство (103) всегда выполняется для $n = 1, 2$, но при $n \geqslant 3$ возникают отрицательные степени μ. Итак мы видим, что следует сравнивать корреляционные числа из нечетного сектора с $\sum k_i > 2p + 3 - 2n$ с результатами в $\mathcal{MG}_{2/2p+1}$.

3.2 Одно- и Двухточечная корреляционные функции

Если произвести замену (98) в формуле (94), то получим, что

$$\mathcal{P}(u) = \mathcal{P}_0(u) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \mathcal{P}_k(u) + ... + \sum_{k_i=1}^{p-1} \frac{\lambda_{k_1}...\lambda_{k_n}}{n!} \mathcal{P}_{k_1...k_n}(u) + ..., \tag{104}$$

где $\mathcal{P}_0(u)$ и $\mathcal{P}_{k_1...k_n}(u)$ полиномы, коэффициенты которых включают неотрицательные степени μ. С помощью размерного анализа находим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(u) &= u^{p+1} + C_0' \mu u^{p-1} + C_0'' \mu^2 u^{p-3} + ..., \\ \mathcal{P}_k(u) &= C_k u^{p-k-1} + C_k' \mu u^{p-k-3} + C_k'' \mu^2 u^{p-k-5} + ..., \end{aligned} \tag{105}$$

и в общем случае $\mathcal{P}_{k_1...k_n}(u)$ полиномы степени

$$p + 1 - 2n - \sum k_i, \tag{106}$$

подобной структуры. В сумму (104) входят только полиномы с не отрицательной степенью, поэтому сумма конечна. Также следует заметить, что все полиномы являются четными или нечетными функциями u

$$\mathcal{P}_{k_1...k_n}(-u) = (-1)^{p+1-\sum k_i} \mathcal{P}_{k_1...k_n}(u), \tag{107}$$

так как могут быть только целые степени μ в (105). Используя это свойство можно представить (95) в более удобной форме, для этого разобьем интегрирование на две области

$$\int_0^{u_*} = \int_{u_0}^{u_*} + \int_0^{u_0}, \tag{108}$$

где u_0 корень многочлена $\mathcal{P}(u)$, при $\lambda_1, ..., \lambda_{p-1} = 0$. Заметим, что

$$u_0 = a_0 \mu^{\frac{1}{2}}, \tag{109}$$

где a_0 — некоторая константа. Интегрирование в (95) включает в себя произведения вида

$$\mathcal{P}_{k_1...k_m}(u) \mathcal{P}_{k_{m+1}...k_n}(u), \tag{110}$$

которые являются четными или нечетными функциями u, в зависимости от четности суммы $k_1 + ... + k_n$. Для четных членов, очевидно, можно продолжить интегрирование в формуле (108) на отрицательную ось

$$\int_0^{u_0} \to \frac{1}{2} \int_{-u_0}^{u_0}. \tag{111}$$

С другой стороны, видно, что вклад нечетных членов в эту часть содержит только не отрицательные члены по μ, и поэтому принадлежит к регулярной части статистической суммы. В итоге получаем

$$Z = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_*} \mathcal{P}^2(u) du + \frac{1}{4} \int_{-u_0}^{u_0} \mathcal{P}^2(u) du, \tag{112}$$

и исходя из того, что нас не интересуют регулярные члены, в дальнейшем будем изучать именно статистическую сумму (112). Так как $u_* = u_0 + O(\lambda_k)$, то легко получить из (101) и (112), что

$$Z_0 = Z|_{\lambda_1=0,...,\lambda_{p-1}=0} = \frac{1}{4} \int_{-u_0}^{u_0} \mathcal{P}_0^2(u) du, \tag{113}$$

$$Z_k = \left. \frac{\partial Z}{\partial \lambda_k} \right|_{\lambda_1=0,...,\lambda_{p-1}=0} = \frac{1}{2} \int_{-u_0}^{u_0} \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_k(u) du, \tag{114}$$

$$Z_{k_1 k_2} = \left. \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda_{k_1} \partial \lambda_{k_2}} \right|_{\lambda_1=0,...,\lambda_{p-1}=0} = \frac{1}{2} \int_{-u_0}^{u_0} [\mathcal{P}_{k_1}(u) \mathcal{P}_{k_2}(u) + \mathcal{P}_0(u) \mathcal{P}_{k_1 k_2}(u)] du. \tag{115}$$

И в общем виде

$$Z_{k_1...k_n} = \left. \frac{\partial^n Z}{\partial \lambda_{k_1} ... \partial \lambda_{k_n}} \right|_{\lambda_1,...,\lambda_{p-1}=0}. \tag{116}$$

Отсюда, исходя из ответов для одноточечной и двухточеченой корреляционных функций из непрерывного подхода, можно заключить, что полиномы $\mathcal{P}_k(u)$, с точностью до нормировки равны полиномам Лежандра

$$\mathcal{P}_k(u) = C_k g_k u_0^{p-k-1} L_{p-k-1}(u/u_0), \tag{117}$$

где C_k теже, что и в (105), и

$$g_k = \frac{(p-k-1)!}{(2p-2k-3)!!}. \tag{118}$$

Некоторые базовые формулы для полиномов лежандра приведены в Приложении Б. Далее, так как $\mathcal{P}_0(u)$ полином $p+1$ степени, и без членов вида u^p, а также равен нулю при $u = u_0$, лего найти, что

$$\mathcal{P}_0(u) = g u_0^{p+1}[L_{p+1}(u/u_0) - L_{p-1}(u/u_0)], \tag{119}$$

где константа нормировки, равная

$$g = \frac{(p+1)!}{(2p+1)!!}, \tag{120}$$

нужна для того, чтобы главный член полинома $\mathcal{P}_0(u)$ был равен u^{p+1}, также как в (94). Коэффициент перед u^{p-1} в (119) определяет соотношение между t_0 в (94) и космологической постоянной,

$$t_0 = -\frac{1}{2}\frac{p(p+1)}{2p-1}u_0^2. \tag{121}$$

Из уравнения (113) следует

$$Z_0 = u_0^{2p+3}\frac{g^2(2p+1)}{(2p+3)(2p-1)}, \tag{122}$$

и затем из (115) можно получить, что

$$\frac{Z_{kk'}}{Z_0} = \delta_{k,k'}\frac{\mathcal{N}_p \mu^{-k-2}}{2p-2k-1}\mathrm{Leg}_M^2(k), \tag{123}$$

где $\mathcal{N}_p$ дается формулой (80), а

$$\mathrm{Leg}_{\mathrm{M}}(k) = \frac{g_k C_k}{(2p+1) g a_0^{k+2}}. \tag{124}$$

3.3 Замена параметров

Прежде чем считать корреляционные функции более высоких порядков, удобно избавиться от громоздких нормировочных множителей в (117) и в (119). Сделаем замену λ_k по формуле

$$s_k = \frac{g_k u_0^{-k-2}}{g(2p+1)}\lambda_k, \tag{125}$$

получим, что полином (104) равен

$$\mathcal{P}(u) = g(2p+1)u_0^{p+1}Q(u/u_0), \tag{126}$$

где $Q(x)$ полиномы степени $p+1$, и аналогично формуле (104) имеем

$$Q(x) = Q_0(x) + \sum_{k=1}^{p-1} s_k Q_k(x) + \sum_{k_1,k_2=1}^{p-1}\frac{s_{k_1}s_{k_2}}{2}Q_{k_1k_2}(x) + ... \tag{127}$$

Из уравнений (119) и (117) следует, что

$$Q_0(x) = \frac{L_{p+1}(x) - L_{p-1}(x)}{2p+1} = \int L_p(x)dx \tag{128}$$

и

$$Q_k(x) = L_{p-k-1}(x) \tag{129}$$

Также удобно переписать статистическую сумму (95) с помощью безразмерной величины $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(s_1, ..., s_{p-1})$

$$Z = g^2(2p+1)^2 u_0^{2p+3}\mathcal{Z}. \tag{130}$$

Таким образом уравнение (112) запишется как

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2}\int_1^{x_*} Q^2(x) + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} Q^2(x)dx, \tag{131}$$

где $x_* = x_*(s_1, ..., s_{p-1})$ наибольший корень полинома $Q(x)$. Заметим, что $x_*(0,0,...,0) = 1$, и

$$Q_0'(1) = 1, \quad Q_k(1) = 1. \tag{132}$$

С точностью до Leg фактора корреляционные числа равны отношению

$$\mu^{\sum \delta_{k_i}} \mathcal{Z}_{k_1 k_2 \dots k_n}/\mathcal{Z}_0 \tag{133}$$

коэффициентов из разложения

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 + \sum_{k=1}^{p-1} s_k \mathcal{Z}_k + ... + \sum_{k_1,\dots k_n}^{p-1} \frac{s_{k_1}\dots s_{k_n}}{n!}\mathcal{Z}_{k_1 \dots k_n} + ... \tag{134}$$

Заметим, что из (128) и (131) следует

$$\mathcal{Z}_0 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} Q_0^2(x) = \mathcal{N}_p^{-1}, \tag{135}$$

где $\mathcal{N}_p$ фактор из (80).

3.4 Трехточечная корреляционная функция

В следующих разделах будем пользоваться удобными обозначениями, а именно

$$k = \sum_{i=1}^{N} k_i, \tag{136}$$

а также

$$k_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} = (k_{i_1} + ... + k_{i_n}) - (k_{j_1} + ... + k_{j_m}). \tag{137}$$

Чтобы упростить выражения нам понадобится запись симметризации, обозначаемая круглыми скобками, например

$$Q_{(ij}Q_{k)} = Q_{ij}Q_k + Q_{ik}Q_j + Q_{jk}Q_i, \tag{138}$$

отметим, что порядок индексов при каждом члене, нам не важен. Из формулы (115) следует, что

$$\begin{aligned} Z_{k_1k_2k_3} = \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u_0} [\mathcal{P}_{k_1k_2}(u)\mathcal{P}_{k_3}(u) + \mathcal{P}_{k_2k_3}(u)\mathcal{P}_{k_1}(u) + \mathcal{P}_{k_3k_1}(u)\mathcal{P}_{k_2}(u) + \mathcal{P}_0(u)\mathcal{P}_{k_1k_2k_3}(u)]du+ \\ + [\mathcal{P}_{k_1}(u_0)\mathcal{P}_{k_2}(u_0) + \mathcal{P}_0(u_0)\mathcal{P}_{k_1k_2}(u_0)]u_{k_3}, \end{aligned} \tag{139}$$

где также введено новое обозначение

$$u_k = \frac{\partial u_*}{\partial \lambda_k}. \tag{140}$$

Расчет для u_k приведен в Приложении A, здесь приведем лишь ответ

$$u_{k_i} = -\frac{\mathcal{P}_{k_i}}{\mathcal{P}'}, \quad \text{где} \quad \mathcal{P}' = \frac{\partial \mathcal{P}(u,\lambda)}{\partial u}. \tag{141}$$

Учитывая, что $\mathcal{P}_0(u_0) = 0$, а также, что $\mathcal{P}_0(u)$ ортогонален $\mathcal{P}_{k_1k_2k_3}(u)$ и переписывая корреляционную функцию (139) в терминах $Q(x)$, получим

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3} = -1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{(k_1k_2}Q_{k_3)}dx, \tag{142}$$

здесь мы учли формулы (132). Интеграл в формуле (142) выполняет роль фактора, учитвающего правила отбора. Заметим, что из формулы (103) следует, что в нечетном секторе при

$$k \leqslant 2p - 3 \tag{143}$$

члены в статистической сумме $\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3}$ регулярны, и их не имеет смысл рассматривать. Отсюда заключаем, что имеет смысл рассматривать только корреляционные числа с

$$k \geqslant 2p-1, \tag{144}$$

но при таких значениях k, правила отбора выполнены. Теперь обратимся к четному сектору. Когда правила отбора нарушены, интеграл в формуле (142) должен быть равен 1 чтобы обратить $\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3}$ в ноль. Мы будем полагать следующее упорядочение

$$0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3 \leqslant p-1, \tag{145}$$

тогда для выполнения правил отбора, должно быть

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{k_1k_2}(x)Q_{k_3}(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k_3^{12} > 0, \\ 0, & \text{если}, \quad k_3^{12}. \leqslant 0 \end{cases} \tag{146}$$

Так как $Q_k(x) = L_{p-k-1}(x)$, то находим (см. Приложение Б), что

$$Q_{k_1k_2}(x) = L'_{p-k_{12}-2}(x). \tag{147}$$

Напомним, что мы пользуемся обозначениями (137), то есть $k_{12} \equiv k_1 + k_2$. Штрих у полинома Лежандра здесь означает производную по переменной x. Теперь приведем общий окончательный ответ для $\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3}$, имеем

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3} = \begin{cases} \begin{cases} -1 & \text{при} \quad k_3^{12} \leqslant 0, \\ \;\;0 & \text{при} \quad k_3^{12} > 0, \end{cases} & \textbf{Четный сектор} \\ \begin{cases} -1 & \text{при} \quad k \geqslant 2p-1, \\ \text{рег.} & \text{при} \quad k < 2p-1, \end{cases} & \textbf{Нечетный сектор} \end{cases} \tag{148}$$

где "рег." означает регулярные члены.

3.5 Четырехточечная корреляционная функция

Из формулы (139) следует, что

$$\begin{aligned} Z_{k_1k_2k_3k_4} = \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u_0} &([\mathcal{P}_{k_1k_2k_3}\mathcal{P}_{k_4} + \mathcal{P}_{k_2k_3k_4}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_3k_4k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_4k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3}] + \\ &+[\mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3k_4} + \mathcal{P}_{k_2k_3}\mathcal{P}_{k_1k_4} + \mathcal{P}_{k_3k_1}\mathcal{P}_{k_2k_4}] + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_3k_4})\, du + \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3} + \mathcal{P}_{k_2k_3}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_3k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_3}]u_{k_4} + \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1k_4}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_2k_4}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_4} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_4}]u_{k_3} + \\ &+ [\mathcal{P}'_{k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}'_{k_2}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}'_0\mathcal{P}_{k_1k_2} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}'_{k_1k_2}]u_{k_3}u_{k_4} + \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2}]u_{k_3k_4}, \end{aligned} \tag{149}$$

где введено обозначение

$$u_{k_1k_2} = \frac{\partial^2 u_*}{\partial\lambda_{k_1}\partial\lambda_{k_2}}. \tag{150}$$

Используя то, что (см. Приложение А)

$$u_{k_ik_j} = -\frac{\mathcal{P}_{k_ik_j}}{\mathcal{P}'} + \frac{\mathcal{P}'_{(k_i}\mathcal{P}_{k_j)}}{(\mathcal{P}')^2} - \frac{\mathcal{P}''\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}}{(\mathcal{P}')^3}. \tag{151}$$

И подставляя значения для u_{k_i} и $u_{k_ik_j}$ в формулу (149), получим

$$\begin{aligned} Z_{k_1k_2k_3k_4} = \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u_0} &\left(\mathcal{P}_{(k_1}\mathcal{P}_{k_2k_3k_4)} + \mathcal{P}_{(k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3k_4)} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_3k_4}\right) du - \\ &- \frac{\mathcal{P}_{(k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4)}}{\mathcal{P}'_0} + \frac{\mathcal{P}'_{(k_1}\mathcal{P}_{k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4)}}{(\mathcal{P}'_0)^2} - \frac{\mathcal{P}''_0\mathcal{P}_{k_1}\mathcal{P}_{k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}}{(\mathcal{P}'_0)^3}. \end{aligned} \tag{152}$$

Учитывя, что $\mathcal{P}_0(u)$ ортогонален $\mathcal{P}_{k_1k_2k_3k_4}(u)$ и переписывая корреляционную функцию (152) в терминах $Q(x)$, имеем

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(Q_{(k_1}Q_{k_2k_3k_4)} + Q_{(k_1k_2}Q_{k_3k_4)})dx - \sum_{i<j}^{4} Q_{k_ik_j}(1) + \sum_{i=1}^{4} Q'_{k_i}(1) - Q''_0(1), \tag{153}$$

здесь мы учли формулы (132). Введем новое обозначение

$$F(k_i) = L'_{p-k_i-2}(1) = \frac{1}{2}(p-k_i-1)(p-k_i-2)\Theta_{p-1,k_i}, \tag{154}$$

где $\Theta_{a,b}$ функция-ступенька

$$\Theta_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad a \geqslant b, \\ 0, & \text{при} \quad a < b, \end{cases} \tag{155}$$

возникает вследствие того, что полином Лежандра отрицательного порядка должен быть равен нулю. Введем также функцию

$$\tilde{F}(k_i) = \frac{1}{2}(p-k_i-1)(p-k_i-2), \tag{156}$$

в которой уже отсутствует фактор Θ_{p-1,k_i}.

Теперь учтем (см Приложение Б), что

$$Q'_{k_i}(1) = F(k_i-1), \quad Q''_0(1) = \frac{p(p+1)}{2} = F(-2), \quad Q_{k_ik_j}(1) = F(k_i+k_j), \tag{157}$$

а также, что

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{k_ik_j}Q_{k_lk_m}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L'_{p-k_{ij}-2}L'_{p-k_{lm}-2}dx = E_k\left[\Theta_{k_{ij}^{lm}}F(k_{ij}) + \Theta_{k_{lm}^{ij}}F(k_{lm})\right], \tag{158}$$

где E_k функция четности

$$E_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k - \text{четно}, \\ 0, & \text{если} \quad k - \text{нечетно}. \end{cases} \tag{159}$$

В итоге можно записать ответ в удобной форме [1]

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4} = \mathcal{Z}^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} + \mathcal{Z}^{(\mathrm{I})}_{k_1k_2k_3k_4}, \tag{160}$$

где

$$\mathcal{Z}^{(0)}_{k_1k_2k_3k_4} = -F(-2) + \sum_{i=1}^{4} F(k_i-1) - F(k_{(12|34)}) - F(k_{(13|24)}) - F(k_{(14|23)}), \tag{161}$$

$$\mathcal{Z}^{(\mathrm{I})}_{k_1k_2k_3k_4} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{(k_1}Q_{k_2k_3k_4)}dx. \tag{162}$$

Тут используется обозначение

$$k_{(ij|lm)} = \min(k_i+k_j, k_l+k_m). \tag{163}$$

Теперь полагая, что

$$0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3 \leqslant k_4 \leqslant p-1, \tag{164}$$

Можно написать иерархию неравенств следующих из такого упорядочения

$$0 \leqslant k_{12} \leqslant k_{13} \leqslant k_{23}, k_{14} \leqslant k_{24} \leqslant k_{34} \leqslant 2p-2 \tag{165}$$

Исходя из формулы (165) получим

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{(k_1}Q_{k_2k_3k_4)}dx - F(-2) + \sum_{i=1}^{4} F(k_i-1) - F(k_{12}) - F(k_{13}) - F(k_{(14|23)}) \tag{166}$$

Аналогично рассуждениям для трех-точечного коррелятора находим, что для выполнения правил отбора, при $k_4 > k_{123}$ необходимо

$$Q_{k_1k_2k_3}(x) = L''_{p-k_{123}-3}(x). \tag{167}$$

Теперь если рассмотреть нечетный сектор, то из формулы (103) следует, что при

$$k \leqslant 2p-5 \tag{168}$$

члены статистической суммы регулярны. И остается лишь "критическая" точка $k = 2p-3$, в которой должны выполняться правила отбора. Из формулы (166), легко вычислить, что в этом случае они действительно выполняются, т.е $\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4} = 0$.

Приведем окончательный ответ для четырех-точечного коррелятора

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4} = \begin{cases} \begin{cases} 0 & k_4^{123} > 0 \\ -\frac{1}{2}(k_4^{123}-2)(2p-3-k), & k_{14}^{23} \geqslant 0,\ k_{23} \leqslant p-1 \\ (1+k_1)(2p-3-k) & k_{14}^{23} < 0,\ k_{14} \leqslant p-1 \\ (1+k_1)(2p-3-k) + \tilde{F}(k_{14}), & k_{13} \leqslant p-1 < k_{14}, k_{23} \\ (1+k_1)(2p-3-k) + \tilde{F}(k_{14}) + \tilde{F}(k_{13}), & k_{12} \leqslant p-1 < k_{13} \\ \frac{1}{2}(3p^2-5p-(2p-1)k+\sum k_i^2), & p-1 < k_{12} \end{cases} & \textbf{Четный сектор} \\ \\ \begin{cases} \text{рег. }, & k \leqslant 2p-5, \\ -\frac{1}{2}(k_4^{123}-2)(2p-3-k), & k_{14}^{23} \geqslant 0,\ k_{23} \leqslant p-1,\ k \geqslant 2p-3, \\ (1+k_1)(2p-3-k), & k_{14}^{23} < 0,\ k_{14} \leqslant p-1,\ k \geqslant 2p-3, \\ (1+k_1)(2p-3-k) + \tilde{F}(k_{14}), & k_{13} \leqslant p-1 < k_{14}, k_{23}, \\ (1+k_1)(2p-3-k) + \tilde{F}(k_{14}) + \tilde{F}(k_{13}), & k_{12} \leqslant p-1 < k_{13}, \\ \frac{1}{2}(3p^2-5p-(2p-1)k+\sum k_i^2), & p-1 < k_{12} \end{cases} & \textbf{Нечетный сектор} \end{cases} \tag{169}$$

4 Пятиточечная корреляционная функция

4.1 Вычисление

Приступим к вычислению пяти-точеченого коррелятора. Из формулы (149) следует, что

$$\begin{aligned} Z_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u_0} &([\mathcal{P}_{k_1k_2k_3k_4}\mathcal{P}_{k_5} + \mathcal{P}_{k_2k_3k_4k_5}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_3k_4k_5k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_4k_5k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3} + \mathcal{P}_{k_5k_1k_2k_3}\mathcal{P}_{k_4}]+ \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1k_2k_3}\mathcal{P}_{k_4k_5} + \mathcal{P}_{k_2k_3k_4}\mathcal{P}_{k_5k_1} + \mathcal{P}_{k_3k_4k_5}\mathcal{P}_{k_1k_2} + \mathcal{P}_{k_4k_5k_1}\mathcal{P}_{k_2k_3} + \mathcal{P}_{k_5k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3k_4}]+ \\ &+[\mathcal{P}_{k_3k_4k_1}\mathcal{P}_{k_2k_5} + \mathcal{P}_{k_4k_1k_2}\mathcal{P}_{k_5k_3} + \mathcal{P}_{k_2k_3k_5}\mathcal{P}_{k_1k_4} + \mathcal{P}_{k_3k_1k_5}\mathcal{P}_{k_2k_4} + \mathcal{P}_{k_2k_4k_5}\mathcal{P}_{k_3k_1}] + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_3k_4k_5})\,du+ \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1k_2k_3}\mathcal{P}_{k_4} + \mathcal{P}_{k_2k_3k_4}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_3k_4k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_4k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3} + \mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3k_4} + \mathcal{P}_{k_1k_3}\mathcal{P}_{k_2k_4} + \mathcal{P}_{k_2k_3}\mathcal{P}_{k_1k_4} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_3k_4}]u_{k_5}+ \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1k_2k_5}\mathcal{P}_{k_3} + \mathcal{P}_{k_2k_3k_5}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_3k_1k_5}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_1k_2k_3}\mathcal{P}_{k_5} + \mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3k_5} + \mathcal{P}_{k_2k_3}\mathcal{P}_{k_1k_5} + \mathcal{P}_{k_2k_5}\mathcal{P}_{k_3k_1} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_3k_5}]u_{k_4}+ \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1k_4k_5}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_2k_4k_5}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_1k_2k_5}\mathcal{P}_{k_4} + \mathcal{P}_{k_1k_2k_4}\mathcal{P}_{k_5} + \mathcal{P}_{k_1k_4}\mathcal{P}_{k_2k_5} + \mathcal{P}_{k_2k_4}\mathcal{P}_{k_1k_5} + \mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_4k_5} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_4k_5}]u_{k_3}+ \\ &+ [\mathcal{P}'_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3} + \mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}'_{k_3} + \mathcal{P}'_{k_2k_3}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_2k_3}\mathcal{P}'_{k_1} + \mathcal{P}'_{k_3k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_3k_1}\mathcal{P}'_{k_2} + \mathcal{P}'_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_3} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}'_{k_1k_2k_3}]u_{k_4}u_{k_5}+ \\ &+ [\mathcal{P}'_{k_1k_4}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_1k_4}\mathcal{P}'_{k_2} + \mathcal{P}'_{k_2k_4}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_2k_4}\mathcal{P}'_{k_1} + \mathcal{P}'_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_4} + \mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}'_{k_4} + \mathcal{P}'\mathcal{P}_{k_1k_2k_4} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}'_{k_1k_2k_4}]u_{k_3}u_{k_5}+ \\ &+ [\mathcal{P}'_{k_1k_5}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_1k_5}\mathcal{P}'_{k_2} + \mathcal{P}'_{k_2k_5}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_2k_5}\mathcal{P}'_{k_1} + \mathcal{P}'_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_5} + \mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}'_{k_5} + \mathcal{P}'\mathcal{P}_{k_1k_2k_5} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}'_{k_1k_2k_5}]u_{k_3}u_{k_4}+ \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3} + \mathcal{P}_{k_2k_3}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_3k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_3}]u_{k_4k_5}+ \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1k_4}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_2k_4}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}_{k_1k_2}\mathcal{P}_{k_4} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_4}]u_{k_3k_5}+ \\ &+ [\mathcal{P}_{k_1k_5}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_{k_1}\mathcal{P}_{k_2k_5} + \mathcal{P}_{k_5}\mathcal{P}_{k_1k_2} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_5}]u_{k_3k_4}+ \\ &+ [\mathcal{P}''_{k_1}\mathcal{P}_{k_2} + 2\mathcal{P}'_{k_2}\mathcal{P}'_{k_1} + \mathcal{P}''_{k_2}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}''_0\mathcal{P}_{k_1k_2} + 2\mathcal{P}'_0\mathcal{P}'_{k_1k_2} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}''_{k_1k_2}]u_{k_3}u_{k_4}u_{k_5}+ \\ &+ [\mathcal{P}'_{k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}'_{k_2}\mathcal{P}_{k_1} + \mathcal{P}'_0\mathcal{P}_{k_1k_2} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}'_{k_1k_2}][u_{k_3k_5}u_{k_4} + u_{k_4k_5}u_{k_3} + u_{k_3k_4}u_{k_5}] + [\mathcal{P}_{k_1}\mathcal{P}_{k_2} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2}]u_{k_3k_4k_5}, \end{aligned} \tag{170}$$

где введено обозначение

$$u_{k_ik_jk_l} = \frac{\partial^3 u_*}{\partial\lambda_{k_i}\partial\lambda_{k_j}\partial\lambda_{k_l}}. \tag{171}$$

Используя то, что (см. Приложение А)

$$u_{k_ik_jk_l} = -\frac{\mathcal{P}_{k_ik_jk_l}}{\mathcal{P}'} + \frac{\mathcal{P}'_{(k_ik_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^2} + \frac{\mathcal{P}'_{(k_i}\mathcal{P}_{k_jk_l)}}{(\mathcal{P}')^2} - \frac{\mathcal{P}''_{(k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^3} - \frac{2\mathcal{P}'_{(k_i}\mathcal{P}'_{k_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^3} - \mathcal{P}''\frac{\mathcal{P}_{(k_ik_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^3} + \\ + 3\mathcal{P}''\frac{\mathcal{P}'_{(k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^4} + \mathcal{P}'''\frac{\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l}}{(\mathcal{P}')^4} - 3(\mathcal{P}'')^2\frac{\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l}}{(\mathcal{P}')^5}. \quad (172)$$

И подставляя в формулу (170) значения для u_{k_i}, $u_{k_ik_j}$ и $u_{k_ik_jk_l}$, после длительных вычислений получим

$$Z_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \frac{1}{2}\int_{-u_0}^{u_0}\left(\overbrace{\mathcal{P}_{(k_1}\mathcal{P}_{k_2k_3k_4k_5)}}^{10} + \overbrace{\mathcal{P}_{(k_1k_2}P_{k_3k_4k_5)}}^{10} + \mathcal{P}_0\mathcal{P}_{k_1k_2k_3k_4k_5}\right)du - \frac{\overbrace{\mathcal{P}_{(k_1k_2k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5)}}^{10}}{\mathcal{P}'_0} - \frac{\overbrace{\mathcal{P}_{(k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3k_4}\mathcal{P}_{k_5)}}^{15}}{\mathcal{P}'_0} + \\ + \frac{\overbrace{\mathcal{P}'_{(k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5)}}^{10}}{(\mathcal{P}'_0)^2} + \frac{\overbrace{\mathcal{P}'_{(k_1}\mathcal{P}_{k_2k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5)}}^{30}}{(\mathcal{P}'_0)^2} - \frac{\overbrace{\mathcal{P}''_{(k_1}\mathcal{P}_{k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5)}}^{5}}{(\mathcal{P}'_0)^2} - \frac{\overbrace{2\mathcal{P}'_{(k_1}\mathcal{P}'_{k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5)}}^{10}}{(\mathcal{P}'_0)^3} - \mathcal{P}''_0\frac{\overbrace{\mathcal{P}_{(k_1k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5)}}^{10}}{(\mathcal{P}'_0)^3} + \\ + 3\mathcal{P}''_0\frac{\overbrace{\mathcal{P}'_{(k_1}\mathcal{P}_{k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5)}}^{5}}{(\mathcal{P}'_0)^4} + \left(\mathcal{P}'''_0 - \frac{3(\mathcal{P}''_0)^2}{\mathcal{P}'_0}\right)\frac{\mathcal{P}_{k_1}\mathcal{P}_{k_2}\mathcal{P}_{k_3}\mathcal{P}_{k_4}\mathcal{P}_{k_5}}{(\mathcal{P}'_0)^4}, \quad (173)$$

где над фигурными скобками указанно количество слагаемых в выражении.

Учитывая, что $\mathcal{P}_0(u)$ ортогонален $\mathcal{P}_{k_1k_2k_3k_4k_5}(u)$ и переписывая корреляционную функцию (173) в терминах $Q(x)$, получим

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(Q_{(k_1}Q_{k_2k_3k_4k_5)} + Q_{(k_1k_2}Q_{k_3k_4k_5)}\right)dx - \sum_{i<j<l}Q_{k_ik_jk_l} - \sum_{i,j,k,l}Q_{k_ik_j}Q_{k_lk_m} + \sum_{i<j}Q'_{k_ik_j} + \\ + \sum_{i<j<l}Q'_{k_i}Q_{k_jk_l} - \sum_{i=1}^{5}Q''_{k_i} - \sum_{i<j}2Q'_{k_i}Q'_{k_j} - Q''\sum_{i<j}Q_{k_ik_j} + 3Q''\sum_{i=1}^{5}Q'_{k_i} + \left(Q''' - 3(Q'')^2\right). \quad (174)$$

Здесь мы уже учли формулы (132).

Используя Приложение Б, найдем, что

$$Q_{k_ik_jk_l}(1) = H(k_{ijl}), \quad (175)$$
$$Q'_{k_ik_j}(1) = H(k_{ij} - 1), \quad (176)$$
$$Q''_{k_i}(1) = H(k_i - 2), \quad (177)$$
$$Q'_{k_i}(1) = F(k_i - 1), \quad (178)$$
$$Q_{k_ik_j}(1) = F(k_{ij}), \quad (179)$$
$$Q''(1) = \frac{p(p+1)}{2}, \quad (180)$$
$$Q'''(1) = \frac{1}{8}(p-1)p(p+1)(p+2), \quad (181)$$

где введена новая функция

$$H(k) = \frac{1}{2}F(k)F(k+2) = \frac{(p-1-k)(p-2-k)(p-3-k)(p-4-k)}{8}\Theta_{p-1,k}. \quad (182)$$

Также по аналогии с $\tilde{F}(k)$, введем функцию

$$\tilde{H}(k) = \frac{1}{2}F(k)F(k+2) = \frac{(p-1-k)(p-2-k)(p-3-k)(p-4-k)}{8}, \quad (183)$$

которая уже не зависит от $\Theta_{p-1,k}$.

Для удобства разобьем пятиточечный коррелятор на несколько частей

$$\mathcal{Z}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \mathcal{Z}^{(\mathrm{I}_1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} + \mathcal{Z}^{(\mathrm{I}_2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} + \mathcal{Z}^{(1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} + \mathcal{Z}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5}, \quad (184)$$

где

$$\mathcal{Z}^{(\mathrm{I}_1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{(k_1}Q_{k_2k_3k_4k_5)}dx, \tag{185}$$

$$\mathcal{Z}^{(\mathrm{I}_2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{(k_1k_2}Q_{k_3k_4k_5)}dx, \tag{186}$$

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = -\sum_{i=1}^{5} H(k_i-2) - 2\sum_{i<j} F(k_i-1)F(k_j-1) + \frac{3p(p+1)}{2}\sum_{i=1}^{5} F(k_i-1) - \frac{p(p+1)(5p^2+5p+2)}{8}, \tag{187}$$

$$\mathcal{Z}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = -\sum_{i<j<l} H(k_{ijl}) + \sum_{i<j} H(k_{ij}-1) - \sum_{i,j,l,m} F(k_{ij})F(k_{lm}) + \sum_{i,j,l} F(k_{ij})F(k_l-1) - \frac{p(p+1)}{2}\sum_{i<j} F(k_{ij}) \tag{188}$$

Часть статистической суммы $\mathcal{Z}^{(1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5}$ обладает тем отличием, что в ней не нужно учитывать влияние факторов $\Theta_{a,b}$, вследствие неравенств $k_i \leqslant p-1$. Поэтому ее можно переписать через функции $\tilde{F}(k)$ и $\tilde{H}(k)$, как

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = -\sum_{i=1}^{5} \tilde{H}(k_i-2) - \sum_{i<j} 2\tilde{F}(k_i-1)\tilde{F}(k_j-1) + \frac{3p(p+1)}{2}\sum_{i=1}^{5} \tilde{F}(k_i-1) - \frac{p(p+1)(5p^2+5p+2)}{8}. \tag{189}$$

Вообще функции-ступеньки $\Theta_{a,b}$ очень не удобны в обращении, по сути в выражении для $\mathcal{Z}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5}$ нужно следить за каждым слагаемым, чтобы учесть его обнуление из-за $\Theta_{a,b}$ при определенном значении параметров k_i. Для того чтобы уменьшить эту трудность, поступим следующим образом. Используя тождества

$$H(k_{ijl}) \equiv \tilde{H}(k_{ijl}) - \tilde{H}(k_{ijl})\Theta_{k_{ijl},p}, \tag{190}$$

$$H(k_{ij}-1) \equiv \tilde{H}(k_{ij}-1) - \tilde{H}(k_{ij}-1)\Theta_{k_{ij},p}, \tag{191}$$

$$F(k_{ij}) \equiv \tilde{F}(k_{ij}) - \tilde{F}(k_{ij})\Theta_{k_{ij},p}, \tag{192}$$

$$F(k_{ij})F(k_{lm}) \equiv \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm}) - \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm})(\Theta_{k_{ij},p} + \Theta_{k_{lm},p} - \Theta_{k_{ij},p}\Theta_{k_{lm},p}), \tag{193}$$

запишем $\mathcal{Z}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5}$, как

$$\mathcal{Z}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \tilde{\mathcal{Z}}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} + \mathcal{Z}^{(2\Theta)}_{k_1k_2k_3k_4k_5}, \tag{194}$$

где

$$\tilde{\mathcal{Z}}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = -\sum_{i<j<l} \tilde{H}(k_{ijl}) + \sum_{i<j} \tilde{H}(k_{ij}-1) - \sum_{i,j,l,m} \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm}) + \sum_{i,j,l} \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_l-1) - \frac{p(p+1)}{2}\sum_{i<j} \tilde{F}(k_{ij}), \tag{195}$$

которое уже не зависит, от функций-ступенек, и

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(2\Theta)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = &\sum_{i<j<l} \tilde{H}(k_{ijl})\Theta_{k_{ijl},p} - \sum_{i<j} \tilde{H}(k_{ij}-1)\Theta_{k_{ij},p} + \sum_{i,j,l,m} \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm})(\Theta_{k_{ij},p} + \Theta_{k_{lm},p}) - \\ &- \sum_{i,j,l} \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_l-1)\Theta_{k_{ij},p} + \frac{p(p+1)}{2}\sum_{i<j} \tilde{F}(k_{ij})\Theta_{k_{ij},p} - \sum_{i,j,l,m} \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm})\Theta_{k_{ij},p}\Theta_{k_{lm},p},\end{aligned} \tag{196}$$

в котором и находится вся зависимость от $\Theta_{a,b}$. Далее заметив тождество

$$\begin{aligned}\tilde{H}(k_{mn}-1) - \tilde{F}(k_{mn})[\tilde{F}(k_{ij}) + \tilde{F}(k_{il}) + \tilde{F}(k_{jl}) - \tilde{F}(k_i-1) - \tilde{F}(k_j-1) - \tilde{F}(k_l-1) + p(p+1)/2] \equiv \\ \equiv -\tilde{H}(k_{ijl}) + \frac{k^{mn}_{ijl}(k^{mn}_{ijl}+2)(2p-3-k)(2p-5-k)}{8},\end{aligned} \tag{197}$$

найдем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(2\Theta)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = &-\frac{1}{8}(2p-3-k)(2p-5-k)\sum_{m<n} k^{mn}_{ijl}(k^{mn}_{ijl}+2)\Theta_{k_{mn},p} + \\ &+ \sum_{i<j<l} \tilde{H}(k_{ijl})(\Theta_{k_{ijl},p} + \Theta_{k_{mn},p}) - \sum_{i,j,l,m} \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm})\Theta_{k_{ij},p}\Theta_{k_{lm},p}.\end{aligned} \tag{198}$$

Также можно вычислить, что

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} + \tilde{\mathcal{Z}}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \frac{1}{8}(4\sum_i k_i^2 - k^2 - 2k - 8)(2p-3-k)(2p-5-k) - \sum_{i<j<l} \tilde{H}(k_{ijl}). \quad (199)$$

И в итоге мы находим

$$\mathcal{Z}^{(1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} + \mathcal{Z}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \mathcal{Z}^{(1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} + \tilde{\mathcal{Z}}^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} + \mathcal{Z}^{(2\Theta)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} =$$
$$= \frac{1}{8}(4\sum_i k_i^2 - k^2 - 2k - 8 - \sum_{m<n} k^{mn}_{ijl}(k^{mn}_{ijl}+2)\Theta_{k_{mn},p})(2p-3-k)(2p-5-k)+$$
$$+\sum_{i<j<l} \tilde{H}(k_{ijl})(\Theta_{k_{ijl},p} + \Theta_{k_{mn},p} - 1) - \sum_{i,j,l,m} \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm})\Theta_{k_{ij},p}\Theta_{k_{lm},p}. \quad (200)$$

Теперь, после такого упрощения, можно переходить к рассмотрению корреляционной функции в отдельных секторах. Для начала рассмотрим нечетный сектор.

4.2 Нечетный сектор

В нечетном секторе

$$\mathcal{Z}^{(\mathrm{I}_1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \mathcal{Z}^{(\mathrm{I}_2)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = 0. \quad (201)$$

Поэтому, исходя из (200), находим, что

$$\mathcal{Z}^{(\mathrm{odd})}_{k_1k_2k_3k_4k_5} =$$
$$= \frac{1}{8}(4\sum_i k_i^2 - k^2 - 2k - 8 - \sum_{m<n} k^{mn}_{ijl}(k^{mn}_{ijl}+2)\Theta_{k_{mn},p})(2p-3-k)(2p-5-k)+$$
$$+\sum_{i<j<l} \tilde{H}(k_{ijl})(\Theta_{k_{ijl},p} + \Theta_{k_{mn},p} - 1) - \sum_{i,j,l,m} \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm})\Theta_{k_{ij},p}\Theta_{k_{lm},p}. \quad (202)$$

Из формулы (103) видно, что при

$$k \leqslant 2p-7, \quad (203)$$

члены статистической суммы регулярны. И остаются лишь две критические точки $k = 2p-5$ и $k = 2p-3$, в которых должны выполняться правила отбора. Обнуление корреляционной функции в этих точках, подлежит проверке. Приведем следующее рассуждение, показывающее что в критических точках корреляционная функция действительно равна нулю. Очевидно, что при $k = 2p-3$, и $k = 2p-5$, первое слагаемое в формуле (202) равно нулю. Третье слагаемое $-\sum\limits_{i,j,l,m} \tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm})\Theta_{k_{ij},p}\Theta_{k_{lm},p}$, также равно нулю, так как, в противном случае $k_{mn} \geqslant p$ и $k_{ijl} \geqslant p$, откуда $k \geqslant 2p > 2p-3 > 2p-5$. Выражение $\sum\limits_{i<j<l} \tilde{H}(k_{ijl})(\Theta_{k_{ijl},p} + \Theta_{k_{mn},p} - 1)$, равно нулю по следующей причине: суммы k_{mn} и k_{ijl} не могут быть одновременно больше или равны p каждая, так как $k = 2p-3$ или $k = 2p-5$. Если одна из них больше или равна p, а другая меньше p, то $(\Theta_{k_{ijl},p} + \Theta_{k_{mn},p} - 1) = 0$. Если имеют место неравенства $k_{mn} < p$ и $k_{ijl} < p$, то k_{ijl} может принимать только значения $p-4$, $p-3$, $p-2$, $p-1$, так как $k = 2p-3$ или $k = 2p-5$, но при этих значениях $\tilde{H}(k_{ijl}) = 0$. Таким образом $\sum\limits_{i<j<l} \tilde{H}(k_{ijl})(\Theta_{k_{ijl},p} + \Theta_{k_{mn},p} - 1)$ всегда равно нулю, при $k = 2p-3$ или $k = 2p-5$. И в итоге мы доказали выполнение правил отбора для $\mathcal{Z}^{(\mathrm{odd})}_{k_1k_2k_3k_4k_5}$, то есть

$$\mathcal{Z}^{(\mathrm{odd})}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = 0, \quad \text{при} \quad k = 2p-3 \;\text{ и }\; k = 2p-5. \quad (204)$$

Теперь обратимся к рассмотрению нечетного сектора.

4.3 Четный сектор

Находим, что (см. Приложение Б)

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{k_ik_jk_lk_m}Q_{k_n}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L'''_{p-k_{ijlm}-4}L_{p-k_n-1}dx =$$
$$= \frac{1}{8}(k_n^{ijlm}-2)(k_n^{ijlm}-4)(2p-3-k)(2p-5-k)\Theta_{k_n^{ijlm},6}. \quad (205)$$

Здесь мы уже предполагаем, что

$$Q_{k_ik_jk_lk_m}(x) = L'''_{p-k_{ijlm}-4}(x), \tag{206}$$

хотя для произвольного $Q_{k_1\dots k_n}$, тождество

$$Q_{k_1\dots k_n}(x) \equiv L^{(n-1)}_{p-k_{1\dots n}-n}(x) \tag{207}$$

остается пока еще гипотезой. Теперь найдем, что

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{k_mk_n}Q_{k_ik_jk_l}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L''_{p-k_{ijl}-3}L'_{p-k_{mn}-2}dx =$$
$$= \left\{\tilde{H}(k_{ijl}) - \frac{k_{ijl}^{mn}(k_{ijl}^{mn}+2)(2p-3-k)(2p-5-k)}{8}\Theta_{k_{mn}^{ijl},2}\right\}\Theta_{p-1,k_{ijl}}\Theta_{p-1,k_{mn}}. \tag{208}$$

Таким образом используя (200), получаем

$$\mathcal{Z}^{(\text{even})}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \mathcal{Z}^{(\text{I}_1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} +$$
$$+\frac{1}{8}(4\sum_i k_i^2 - k^2 - 2k - 8 - \sum_{m<n} k_{ijl}^{mn}(k_{ijl}^{mn}+2)(\Theta_{k_{mn},p} + \Theta_{k_{mn}^{ijl},2}\Theta_{p-1,k_{ijl}}\Theta_{p-1,k_{mn}}))(2p-3-k)(2p-5-k)+$$
$$+\left(\sum_{i<j<l}\tilde{H}(k_{ijl}) - \sum_{i,j,l,m}\tilde{F}(k_{ij})\tilde{F}(k_{lm})\right)\Theta_{k_{ij},p}\Theta_{k_{lm},p}. \tag{209}$$

Теперь, как обычно будем предполагать следующее упорядочение

$$0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3 \leqslant k_4 \leqslant k_5 \leqslant p-1. \tag{210}$$

Мы хотим показать что $\mathcal{Z}^{(\text{even})}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = 0$, при $k_5 > k_{1234}$. Из этого неравенства следует, что

$$\begin{aligned}
&k_{345} > k_{12}, \quad k_{125} > k_{34}\\
&k_{245} > k_{13}, \quad k_{234} < k_{15}\\
&k_{235} > k_{14}, \quad k_{134} < k_{25}\\
&k_{145} > k_{23}, \quad k_{124} < k_{35}\\
&k_{135} > k_{24}, \quad k_{123} < k_{45}
\end{aligned} \tag{211}$$

исходя из чего, можно вычислить, что

$$\mathcal{Z}^{(\text{even})}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \frac{1}{8}(k_5^{1234}-2)(k_5^{1234}-4)(2p-3-k)(2p-5-k)(1-\Theta_{k_5^{1234},6}). \tag{212}$$

Здесь мы учли, что из неравенства $k_5 > k_{1234}$, следует

$$\mathcal{Z}^{(\text{I}_1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = \frac{1}{8}(k_5^{1234}-2)(k_5^{1234}-4)(2p-3-k)(2p-5-k)\Theta_{k_5^{1234},6}. \tag{213}$$

Таким образом из формулы (212) мы видим, что при $k_5 > k_{1234}$, корреляционная функция $\mathcal{Z}^{(\text{even})}_{k_1k_2k_3k_4k_5} = 0$, то есть правила отбора выполняются. Заметим, что при $k_5 = k_{1234}+2$ и $k_5 = k_{1234}+4$ зануление функции происходило автоматически, без помощи слагаемого $\mathcal{Z}^{(\text{I}_1)}_{k_1k_2k_3k_4k_5}$.

5 Заключение

Итак в данной работе была вычисленна пятиточечная корреляционная функция. Знать ответ для этой функции необходимо по многим причинам. Во-первых это еще одна проверка выполнения правил отбора. Во-вторых, учитывая предположение о том, что корреляционные функции двух подходов совпадают, мы знаем какой ответ следует ожидать при вычислении этой функции в непрерывном подходе. Кроме того, теперь можно попытаться найти рекурентное соотношение между корреляционными функциями первых пяти порядков, что в итоге может привести нас к ответу для рекурентного соотношения между $N-1$ и N-точечной корреляционными функциями.

6 Приложение А

Из "струнного уравнения"

$$\mathcal{P}(u,\lambda) = 0, \tag{214}$$

где

$$\mathcal{P}(u,\lambda) = \mathcal{P}_0(u) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \mathcal{P}_k(u) + ... + \sum_{k_i=1}^{p-1} \frac{\lambda_{k_1}...\lambda_{k_n}}{n!} \mathcal{P}_{k_1...k_n}(u) + ..., \tag{215}$$

после дифференцирования, имеем

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u} du + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda_k} d\lambda_k + ... + \sum_{k_i=1}^{p-1} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda_{k_i}} d\lambda_{k_i} = 0, \tag{216}$$

откуда видно, что

$$\mathcal{P}' \frac{\partial u}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda_{k_i}} = 0, \quad \text{следовательно} \quad u_{k_i} = -\frac{\mathcal{P}_{k_i}}{\mathcal{P}'}. \tag{217}$$

В дальнейшем нам потребуется формула

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{k_i}}{\partial \lambda_{k_j}} = \mathcal{P}'_{k_i} u_{k_j} + \mathcal{P}_{k_i k_j}. \tag{218}$$

Теперь вычислим $u_{k_i k_j}$

$$u_{k_i k_j} = -\frac{\partial}{\partial \lambda_{k_j}} \left(\frac{\mathcal{P}_{k_i}}{\mathcal{P}'} \right) = -\frac{\mathcal{P}'_i u_{k_j} + \mathcal{P}_{k_i k_j}}{\mathcal{P}'} + \frac{\mathcal{P}_{k_i}(\mathcal{P}'' u_{k_j} + \mathcal{P}'_{k_j})}{(\mathcal{P}')^2} =$$
$$= -\frac{\mathcal{P}_{k_i k_j}}{\mathcal{P}'} + \frac{\mathcal{P}'_{k_i}\mathcal{P}_{k_j} + \mathcal{P}'_{k_j}\mathcal{P}_{k_i}}{(\mathcal{P}')^2} - \frac{\mathcal{P}''\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}}{(\mathcal{P}')^3}. \tag{219}$$

Далее вычислим также $u_{k_i k_j k_l}$

$$u_{k_i k_j k_l} = \frac{\partial}{\partial \lambda_{k_l}} \left(\frac{\mathcal{P}'_{k_i}\mathcal{P}_{k_j} + \mathcal{P}'_{k_j}\mathcal{P}_{k_i}}{(\mathcal{P}')^2} - \frac{\mathcal{P}_{k_i k_j}}{\mathcal{P}'} - \frac{\mathcal{P}''\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}}{(\mathcal{P}')^3} \right) =$$
$$= \frac{(\mathcal{P}''_{k_i} u_{k_l} + \mathcal{P}'_{k_i k_l})\mathcal{P}_{k_j} + \mathcal{P}'_{k_i}(\mathcal{P}'_{k_j} u_{k_l} + \mathcal{P}_{k_j k_l}) + (\mathcal{P}'_{k_i} u_{k_l} + \mathcal{P}_{k_i k_l})\mathcal{P}'_{k_j} + \mathcal{P}_{k_i}(\mathcal{P}''_{k_j} u_{k_l} + P'_{k_j k_l})}{(P')^2} -$$
$$- \frac{2(\mathcal{P}'_{k_i}\mathcal{P}_{k_j} + \mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}'_{k_j})(\mathcal{P}'' u_{k_l} + \mathcal{P}'_{k_l})}{(\mathcal{P}')^3} - \frac{\mathcal{P}'_{k_i k_j} u_{k_l} + \mathcal{P}_{k_i k_j k_l}}{\mathcal{P}'} + \frac{\mathcal{P}_{k_i k_j}}{(\mathcal{P}')^2}(\mathcal{P}'' u_{k_l} + \mathcal{P}'_{k_l}) -$$
$$- \frac{(\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}(\mathcal{P}''' u_{k_l} + \mathcal{P}''_{k_l}) + (\mathcal{P}'_{k_i} u_{k_l} + \mathcal{P}_{k_i k_l})\mathcal{P}''\mathcal{P}_{k_j} + \mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}''(\mathcal{P}'_{k_j} u_{k_l} + \mathcal{P}_{k_j k_l}))}{(\mathcal{P}')^3} +$$
$$+ \frac{3\mathcal{P}''\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}}{(\mathcal{P}')^4}(\mathcal{P}'' u_{k_l} + \mathcal{P}'_{k_l}). \tag{220}$$

Подставив значения u_{k_i}, u_{k_j} и u_{k_l} получим

$$u_{k_i k_j k_l} = -\frac{\mathcal{P}_{k_i k_j k_l}}{\mathcal{P}'} + \frac{\mathcal{P}'_{k_i k_j}\mathcal{P}_{k_l} + \mathcal{P}'_{k_j k_l}\mathcal{P}_{k_i} + \mathcal{P}'_{k_l k_i}\mathcal{P}_{k_j}}{(\mathcal{P}')^2} + \frac{\mathcal{P}'_{k_i}\mathcal{P}_{k_j k_l} + \mathcal{P}'_{k_j}\mathcal{P}_{k_l k_i} + \mathcal{P}'_{k_l}\mathcal{P}_{k_i k_j}}{(\mathcal{P}')^2} -$$
$$- \frac{\mathcal{P}''_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l} + \mathcal{P}''_{k_j}\mathcal{P}_{k_l}\mathcal{P}_{k_i} + \mathcal{P}''_{k_l}\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}}{(\mathcal{P}')^3} - \frac{2(\mathcal{P}'_{k_i}\mathcal{P}'_{k_j}\mathcal{P}_{k_l} + \mathcal{P}'_{k_j}\mathcal{P}'_{k_l}\mathcal{P}_{k_i} + \mathcal{P}'_{k_l}\mathcal{P}'_{k_i}\mathcal{P}_{k_j})}{(\mathcal{P}')^3} -$$
$$- \mathcal{P}'' \frac{\mathcal{P}_{k_i k_j}\mathcal{P}_{k_l} + \mathcal{P}_{k_j k}\mathcal{P}_{k_i} + \mathcal{P}_{k_l k_i}\mathcal{P}_{k_j}}{(\mathcal{P}')^3} + 3\mathcal{P}'' \frac{\mathcal{P}'_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l} + \mathcal{P}'_{k_j}\mathcal{P}_{k_l}\mathcal{P}_{k_i} + \mathcal{P}'_{k_l}\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}}{(\mathcal{P}')^4} +$$
$$+ \mathcal{P}''' \frac{\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l}}{(\mathcal{P}')^4} - 3(\mathcal{P}'')^2 \frac{\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l}}{(\mathcal{P}')^5}. \tag{221}$$

С помощью обозначения симметризации имеем

$$u_{k_ik_jk_l} = -\frac{\mathcal{P}_{k_ik_jk_l}}{\mathcal{P}'} + \frac{\mathcal{P}'_{(k_ik_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^2} + \frac{\mathcal{P}'_{(k_i}\mathcal{P}_{k_jk_l)}}{(\mathcal{P}')^2} - \frac{\mathcal{P}''_{(k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^3} - \frac{2\mathcal{P}'_{(k_i}\mathcal{P}'_{k_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^3} - \mathcal{P}''\frac{\mathcal{P}_{(k_ik_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^3} + \\ + 3\mathcal{P}''\frac{\mathcal{P}'_{(k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l)}}{(\mathcal{P}')^4} + \mathcal{P}'''\frac{\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l}}{(\mathcal{P}')^4} - 3(\mathcal{P}'')^2\frac{\mathcal{P}_{k_i}\mathcal{P}_{k_j}\mathcal{P}_{k_l}}{(\mathcal{P}')^5}. \quad (222)$$

7 Приложение Б

7.1 Полиномы Лежандра.

Полиномы Лежандра $L_n(x)$ являются полиномами n-ого порядка, которые образуют ортогональную систему на отрезке $[-1,1]$ с весом 1,

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)dx = \frac{2\delta_{m,n}}{2n+1}. \quad (223)$$

Обычная нормировка

$$L_n(1) = 1. \quad (224)$$

Явная формула для $L_n(x)$

$$L_n(x) = \frac{2^{-n}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^2-1]^n = 2^{-n}\sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l\frac{(2n-2l)!}{l!(n-l)!(n-2l)!}x^{n-2l}. \quad (225)$$

Выражение полинома $L_n(x)$ через гипергеометрическую функцию выглядит, как

$$L_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1, 1; \frac{1-x}{2}\right), \quad (226)$$

из этого можно получить следующие формулы

$$L_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad L_n''(1) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}, \quad \text{и.т.д.} \quad (227)$$

Еще одна формула, выражающая полином Лежандра через контурный интеграл

$$L_n(x) = \oint_0 \frac{(1-2xz+z^2)^{-1/2}}{z^{n+1}}\frac{dz}{2\pi i}. \quad (228)$$

Также полезно соотношение

$$L_{n+1}'(x) - L_{n-1}'(x) = (2n+1)L_n(x), \quad (229)$$

оно верно для $n = 0, 1, 2, 3...$ если положить, что $L_{-1}(x) = 0$. Дальнейшие формулы требуются для расчетов

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_n'(x)L_m(x)dx = E_{n+m-1}\Theta_{n,m+1}, \quad (230)$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_n''(x)L_m(x)dx = E_{n+m}\Theta_{n,m+2}\frac{(n+m+1)(n-m)}{2}, \quad (231)$$

и в общем виде

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_n^{(l)}(x)L_m(x)dx = E_{n+m-l}\Theta_{n,m+l}\frac{2^{-l+1}}{(l-1)!}\prod_{s=0}^{l-2}(n+m+l-1-2s)(n-m+l-2-2s), \quad (232)$$

где $L_n^{(l)}(x)$ — l-ая производня полинома. Также здесь $\Theta_{n,m} = L_{n-m}(1)$ функция-ступенька, и

$$E_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n - \text{четно}, \\ 0, & \text{если} \quad n - \text{нечетно}. \end{cases} \quad (233)$$

Интегрируя по частям (231), получим

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L'_n(x)L'_m(x)dx = E_{n+m}\left[\Theta_{m,n}\frac{n(n+1)}{2} + \Theta_{n,m}\frac{m(m+1)}{2}\right]. \tag{234}$$

Также приведем общую формулу, выражающую производную степени m полинома Лежандра порядка n, через сумму полиномов Лежандра.

$$\frac{d^m}{dx^m}L_n(x) = \sum_{k:2}^{n-m}(2k+1)B_{n,k}^{(m)}L_k(x), \quad \text{где} \quad B_{n,k}^{(m)} = \frac{2^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\Gamma\left(\frac{n+k+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k-m+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k-m+2}{2}\right)}. \tag{235}$$

заметим, что именно из нее легко следует формула (232).

Приведем, доказательство выражения (235), по индукции.

Индукция по m.

1. База: $m=1$, $m=2$. Используя формулу

$$\frac{d}{dx}L_n(x) = (2n-1)L_{n-1}(x) + \frac{d}{dx}L_{n-2}(x), \tag{236}$$

получим

$$\frac{d}{dx}L_n(x) = \sum_{k:2}^{n-1}(2k+1)L_k(x). \tag{237}$$

Обозначение $k:2$ означает шаг через 2, то есть $k=0,2,4,..$ если $n-1$ четно и $k=1,3,5,...$ если $n-1$ нечетно. Также легко вычислить, что

$$\frac{d^2}{dx^2}L_n(x) = \sum_{k}^{n-2}(2k+1)\frac{(n-k)(n+k+1)}{2}L_k(x). \tag{238}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dx}L_n(x) = \sum_{k:2}^{n-1}(2k+1)L_k(x) = \sum_{k:2}^{n-1}(2k+1)B_{n,k}^{(1)}L_k(z), \tag{239}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}L_n(x) = \sum_{k:2}^{n-2}(2k+1)\frac{(n-k)(n+k+1)}{2}L_k(x) = \sum_{k:2}^{n-2}(2k+1)B_{n,k}^{(2)}L_k(x). \tag{240}$$

В итоге имеем

$$B_{n,k}^{(1)} = 1, \qquad B_{n,k}^{(2)} = \frac{(n-k)(n+k+1)}{2}. \tag{241}$$

То есть все верно.

Теперь предположим, что верно для $m=s$, докажем, что тогда будет верно для $m=s+1$

$$\frac{d^s}{dx^s}L_n(x) = \sum_{k:2}^{n-s}(2k+1)B_{n,k}^{(s)}L_k(x), \quad \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}}L_n(x) = \sum_{k:2}^{n-s-1}(2k+1)B_{n,k}^{(s+1)}L_k(x) \tag{242}$$

$$\frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}}L_n(x) = \sum_{k:2}^{n-s}(2k+1)B_{n,k}^{(s)}\frac{d}{dx}L_k(x) = \sum_{k:2}^{n-s}(2k+1)B_{n,k}^{(s)}\sum_{l:2}^{k-1}(2l+1)L_l(x) \tag{243}$$

Следовательно, мы должны доказать, что

$$B_{n,n-s-1-2t}^{(s+1)} = \sum_{j=0}^{t}[2(n-s-2j)+1]B_{n,n-s-2j}^{(s)} \tag{244}$$

Опять применяем индукцию по t. База: $t=0$, получим

$$B_{n,n-s-1}^{(s+1)} = \frac{2^s}{s!}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(s+1)}{\Gamma(n-s+\frac{3}{2})\Gamma(1)} = \frac{2^s}{s!}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})s\Gamma(s)}{\Gamma\left(n-s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}\left(n-s+\frac{1}{2}\right) = [2(n-s)+1]B_{n,n-s}^{(s)} \tag{245}$$

Имеем

$$B_{n,n-s-1-2(t+1)}^{s+1} = \sum_{j=0}^{t+1}[2(n-s-2j)+1]B_{n,n-s-2j}^{(s)} =$$

$$= B_{n,n-s-1-2t}^{s+1} + [2(n-s-2(t+1))+1]B_{n,n-s-2(t+1)}^{s}. \tag{246}$$

Далее используя, что

$$B_{n,n-s-1-2(t+1)}^{s+1} = \frac{2^s}{s!}\frac{\Gamma(n-t-\frac{1}{2})\Gamma(s+t+2)}{\Gamma(n-s-t-1/2)\Gamma(2+t)} = \frac{2^s}{s!}(s+t+1)(n-s-t-1/2)\frac{\Gamma(n-t-1/2)\Gamma(s+t+1)}{\Gamma(n-s-t+1/2)\Gamma(2+t)}, \tag{247}$$

$$B_{n,n-s-1-2t}^{s+1} = \frac{2^s}{s!}\frac{\Gamma(n-t+1/2)\Gamma(s+t+1)}{\Gamma(n-s-t+1/2)\Gamma(1+t)} = \frac{2^s}{s!}(n-t-1/2)(1+t)\frac{\Gamma(n-t-1/2)\Gamma(s+t+1)}{\Gamma(n-s-t+1/2)\Gamma(2+t)}, \tag{248}$$

$$B_{n,n-s-2(t+1)}^{s} = \frac{2^{s-1}}{(s-1)!}\frac{\Gamma(n-t-1/2)\Gamma(s+t+1)}{\Gamma(n-s-t+1/2)\Gamma(2+t)}, \tag{249}$$

и подставляя это в формлу (246), получим

$$(s+t+1)(n-s-t-1/2) = (n-t-1/2)(1+t) + \frac{s}{2}[2(n-s-2(t+1))+1], \tag{250}$$

что является тождеством

$$0 \equiv 0$$

Следоваетльно — верно. Поэтому

$$B^{(s+1)}_{n,n-s-1-2t} = \sum_{j=0}^{t}[2(n-s-2j)+1]B^{(s)}_{n,n-s-2j}. \tag{251}$$

И следовательно верно

$$\frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}}L_n(x) = \sum_{k:2}^{n-s-1}(2k+1)B^{(s+1)}_{n,k}L_k(x). \tag{252}$$

Доказательство окончено.

Список литературы

[1] A.Belavin, A.Zamolodchikov, ”On Correlation Numbers in 2D Minimal Gravity and Matrix Models“, arXiv:0811.0450v1 [hep-th] (2008)

[2] A.Belavin, Al.Zamolodchikov, ”Moduli integrals, ground ring and four-point function in minimal Liouville gravity“, Theor.Math.Phys.147:729-754,(2006); hep-th/0510214, pages 16-46

[3] G.W.Moore, N.Seiberg, M.Staudacher, ”From loops to states in 2-D quantum gravity“, Nucl. Phys. B362,665-709, (1991)

[4] M.Staudacher, ”The Yang-Lee Edge Singularity On A Dynamical Planar Random Surface“, Nucl. Phys.B336:349,1990.

[5] A.Belavin, A.Polyakov, A.Zamolodchikov, ”Infinite conformal simmetry in two-dimensional quantum field theory“, Nucl.Phys. B241, 333-380, (1984)

[6] А.Б.Замолодчиков, Ал.Б.Замолодчиков. ”Конформная теория поля и 2 - мерные критические явления“, Москва, издательство МЦНМО, 2009.

[7] F.David, "Conformal Field Theories Coupled to 2D Gravity in the Conformal Gauge Mod.Phys.Lett.A3:1651,1988 ;
J.Distler, H.Kawai, "Conformal Field Theory and 2D Quantum Gravity Or Who’s Afraid of Joseph Liouville?"Nucl.Phys.B321:509,(1989)

[8] P.H.Ginsparg and G.W.Moore, "Lectures on 2-D gravity and 2-D string theory arXiv:hep-th/9304011 ;
P.Di Francesco, P.H.Ginsparg, J.Zinn-Justin, "2-D Gravity and random matrices Phys.Rep.254:1-133,(1995), hep-th/9306153

[9] G ’t Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461

[10] F.David, Nucl. Phys. B257[FS14] (1985) 45, 543;
J.Ambjorn, B.Durhuus and J. Frohlich, Nucl. Phys. B257[FS14] (1985) 433; J. Frohlich, in: Lecture Notes in Physics, Vol. 216, ed L. Garrido (Springer, Berlin, 1985);
V.A. Kazakov, I.K. Kostov and A.A. Migdal, Phys. Lett. 157B (1985) 295; D. Boulatov, V.A. Kazakov, I.V. Kostov and A.A. Migdal, Phys. Lett. B174 (1986) 87; Nucl. Phys. B275[FS17] (1986) 641.

[11] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J-B. Zuber, Comm. Math. Phys. 59 (1978) 35.

[12] E.Brezin, M.Douglas, V.Kazakov, and S.Shenker, Phys. Lett. B237 (1990) 43;
D. Gross and A.Migdal, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 717.

[13] A.Zamolodchikov and Al.Zamolodchikov, ”Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory“, Nucl.Phys., B477 (1966) 577-605, hep-th/9506136

[14] Al.Zamolodchikov, "Three-point function in the minimal Liouville gravity Theor.Math. Phys.142:183-196,(2005)

[15] A.Polyakov, "Quantum Geometry of Bosonic Strings Phys.Lett.B103:207-210,(1981).

[16] А.Поляков. ”Калибровочные поля и струны“, Издательский дом ”Удмуртский университет“, 1999.