Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт (Государственный Университет)

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Точность оценки числа особенностей сингулярных конечнозонных операторов через индекс пространств Понтрягина.

Студент 728 гр. Фетисов А. Ю.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Гриневич П.Г.

Москва, 2011г.

Содержание

1 Введение.

Задача решения уравнения типа Шрёдингера с сингулярным потенциалом берёт своё начало в XIX веке. Замечательным примером являются найденные Эрмитом формальные собственные функции оператора Лакса

$$L_n = -\partial_x^2 + n\,(n+1)\,\wp\,(x)$$

$$L_n\psi\,(x) = k^2\psi\,(x)\,, \quad \psi\,(x+T) = \pm\psi\,(x) \tag{1.1}$$

Однако, долгое время это решение не имело строгой интерпретации как задача о спектре оператора в некотором функциональном пространстве. Невозможность определить скалярное произведение обычным образом и не вполне понятная область определения оператора могут приводить к, на первый взгляд, весьма патологическим ситуациям. Например, хотя формально оператор Лакса является симметричным, у него могут существовать комплексные собственные значения.

Уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом также имеют значение в теории солитонов, так как динамику полюсов потенциала можно непосредственно отождествить с движением некоторых частиц ([6]). Оказалось, что метод конечнозонного интегрирования, являющегося алгебро-геометрическим вариантом метода обратной задачи рассеяния, позволяет описать пространства, в которых ставится задача (1.1), и спектр соответствующе оператора.

В работе [1] был построен аналог преобразования Фурье для сингулярных операторов Лакса, отображающий функции на прямой в функции на некотором выделенном контуре κ_0 на римановой поверхности Г. Обратное преобразование Фурье позволяет явно описать пространство H_L, являющееся областью определения L_n. При этом спектр этого оператора естественным образом отождествляется с κ_0. Возникающая при этом метрика на H_L является индефинитной, а само пространство разлагается в прямой интеграл определённых пространств Понтрягина. В работе [1] было показано, что число отрицательных квадратов каждого пространства оценивает снизу число особенностей. Как автору сообщил научный руководитель, Новиковым и Гриневичем была предложена схема доказательства того, что для простых особенностей эта оценка является также оценкой сверху. Строгая реализация этой схемы потребовала некоторых аналитических оценок, в получении которых было предложено принять участие автору. Однако в процессе работы над задачей стало ясно, что есть более простой, излагаемый в данной работе, способ доказательства независимости вычетов функции Бейкера-Ахиезера, откуда и следует точность оценки.

2 Метод обратной задачи рассеяния.

Давно известно, что ряд нелинейных уравнений имеет так называемые солитонные решения, динамика которых аналогична упругому рассеянию некоторых взаимодействующих частиц. Классический пример — уравнение Кортевега–де Фриза $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$. Обычно предполагается, что функция u регулярна по t и x. Решение строится методом обратной задачи рассеяния. Рассмотрим его на примере КдФ. Уравнение равносильно условию коммутативности операторов

$$[L; \partial_t + A] = 0$$

$$L = -\partial_x^2 + u(x,t)$$

$$A = 4\partial_x^3 - 3\,(u\partial_x + \partial_x u)$$

После этого для связанного с КдФ уравнения Шрёдингера

$$L\psi = k^2\psi$$

рассматриваются решения Йоста, имеющие заданную асимптотику:

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + o(1),\ x \to +\infty$$

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + o(1),\ x \to -\infty$$

Очевидно, что между φ и ψ существует связь. А именно,

$$\varphi(x,k) = a(k)\bar{\psi}(x,k) + b(k)\psi(x,k)$$

причём функция a аналитична в верхней полуплоскости и имеет там конечное число нулей k_j; для простоты предположим, что они простые. Пусть нам требуется решить краевую задачу для КдВ $u|_{t=0} = u_0(x)$. Данными рассеяния, связанными с этой задачей, называется множество

$$S = \left\{ r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \operatorname{Im} k = 0;\ k_j,\ \operatorname{Im} k_j > 0; \quad c_j,\ j = 1 \dots M \right\}$$

Здесь M — число нулей функции a в верхней полуплоскости,

$$c_j = \frac{\varphi\left(x, k_j\right)}{\mathrm{i}a'\left(k_j\right)\psi\left(x, k_j\right)}$$

Функции a и b определяются по начальному значению потенциала u_0. По заданным данным рассеяния можно полностью восстановить исходное уравнение Шрёдингера, то есть найти функции a, ψ и u. Таким образом можно перейти от динамики функции u, задаваемой уравнением КдВ, к динамике данных рассеяния, имеющей в данном случае вид

$$r\left(k\right) \mapsto r\left(k\right)\mathrm{e}^{8\mathrm{i}k^3 t}, \quad k_j \mapsto k_j, \quad c_j \mapsto c_j \mathrm{e}^{8\mathrm{i}k_j^3 t}$$

В классическом случае рассматриваются регулярные решения КдФ. Возникающие при этом (регулярные) солитоны обладают тем свойством, что в их данных рассеяния

$$\operatorname{Re} k_j = 0, \quad c_j > 0 \tag{2.1}$$

Естественно рассматривать более общие случаи данных рассеяния. В работах [3, 4, 5] было построено обобщение метода обратной задачи рассеяния на случай сингулярных решений. В работе [6] этот метод был применён для поиска решений уравнения КдФ вида

$$u\left(x,t\right) = v\left(x,t\right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{2}{\left(x - x_i\left(t\right)\right)^2}$$

удовлетворяющих условиям

$$v \in C^4\left(\mathbb{R}\right), \qquad \exists D > 0 : \int\limits_{|x|>D} \left(1 + x^2\right) \left|u\left(x\right)\right| \mathrm{d}x < \infty$$

Оказывается, что в данном классе функций решение существует и единственно. Рассматривая динамику особенностей, задаваемую уравнением КдФ, получим

Утверждение 1. Функции $x_i\left(t\right)$ удовлетворяют системе

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x_i} + 6v\left(x_i,t\right) + 12\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{1}{\left(x_i - x_k\right)^2} = 0 \\ \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{4}{\left(x_i - x_k\right)^3} = v_x\left(x_i,t\right) \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Доказательство. Подставляя функцию u искомого вида в КдФ, получим

$$\begin{aligned} v_t &= 6\left(v+\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{\left(x-x_k\right)^2}\right)\left(v_x-4\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\left(x-x_i\right)^3}\right) \\ &\quad -4\sum_{i=1}^{N}\frac{\dot{x}_i}{\left(x-x_i\right)^3}-v_{xxx}+\sum_{i=1}^{N}\frac{48}{\left(x-x_i\right)^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(v_t-6vv_x+v_{xxx}\right)+4\sum_{k=1}^{N}\frac{\dot{x}_i}{\left(x-x_i\right)^3}-12v_x\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\left(x-x_i\right)^2} & \\ +24v\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\left(x-x_i\right)^3}+48\sum_{\substack{k,i=1\\k\neq i}}^{N}\frac{1}{\left(x-x_i\right)^2\left(x-x_k\right)^3} &= 0 \end{aligned}$$

В точке $x=x_i$ коэффициенты при отрицательных степенях $(x-x_i)$ должны быть равны, откуда следует искомое утверждение. $\square$

Таким образом, мы можем интерпретировать динамику полюсов функции u как движение некоторых частиц с парным взаимодействием во внешнем поле. Дальнейшее рассмотрение показывает ([6]), что сингулярные солитоны возникают для всех данных рассеяния, не удовлетворяющих условию (2.1). При этом, помимо (2.1), возможны ещё 2 простейших случая:

1. $\operatorname{Re}k_j=0$, $c_j<0$ — одиночный сингулярный солитон.
2. $\operatorname{Re}k_j\neq 0$, $\quad\exists k_m : k_m=-\bar{k_j},\ c_m=\bar{c_j}$ — бризер, который можно рассматривать как связанное состояние двух частиц..

Замена знака всех c_j не меняет асимптотические скорости и фазы солитонов. Можно считать, что мы имеем систему взаимодействующих частиц с зарядами разных знаков, причём частицы одного знака отталкиваются, а разных знаков — притягиваются. Замена знака c_j при этом аналогична зарядовому сопряжению. Эта операция позволяет приписать конкретную траекторию движения регулярным солитонам, через рассмотрение движения получающихся из них сингулярных солитонов. Эти результаты объясняют важность рассмотрения сингулярных решений уравнений иерархии КП.

3 Конечнозонный случай.

В конечнозонной теории рассматриваются периодические потенциалы $u\left(x+T\right)=u\left(x\right)$, для которых спектральная кривая является алгебраическим многообразием. Подробное изложение можно найти, например, в [2]. Пусть D — дивизор на Γ.

Определение 1. Функцией Бейкера–Ахиезера называется функция ψ на римановой поверхности Γ, такая что $(\psi)+D\geqslant 0$ и в окрестности данной точки $P\in\Gamma$

$$\psi\left(x,k\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\in\mathcal{O}\left(k^{-1}\right)$$

Здесь k^{-1}— локальный параметр в окрестности P, $\mathcal{O}$ — класс голоморфных функций. Можно показать, что для заданной функции Бейкера–Ахиезера $\psi\left(x,k\right)$ существует единственная функция $u\left(x\right)$, такая что в окрестности P тождественно по x

$$\left(-\partial_x^2+u\left(x\right)\right)\psi\left(x,k\right)=k^2\psi\left(x,k\right)$$

В дальнейшем предполагаем, что связанный с ψ потенциал u является периодическим. Предположим, что на Γ задана антиголоморфная инволюция τ, такая что

$$\tau(P) = P, \quad \tau(k) = \bar{k}$$

Пусть K — дивизор дифференциальных форм. Мы предполагаем, что дивизор полюсов ψ удовлетворяет условию

$$D + \tau D = K + 2P$$

Равенство понимается в смысле линейной эквивалентности дивизоров. Рассмотрим мероморфную дифференциальную форму $\mathrm{d}\mu$, в окрестности P имеющую вид $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}k + regular$, с дивизором нулей $D + \tau D$. Из определения следует, что $\tau^*(\mathrm{d}\mu) = \bar{\mathrm{d}\mu}$. С её помощью сопоставим ψ_D 1-форму

$$\psi_D^\dagger(x,\, z) = \bar{\psi}_D(x,\, z)\, \mathrm{d}\mu$$

$$\bar{\psi}_D(x, z) = \psi_{\tau D}(-\bar{x},\, \tau z)$$

В дальнейшем мы будем в основном ограничиваться случаем $x \in \mathbb{R},\ \tau z = z$, поэтому $\psi_D^\dagger(x,\, z) = \psi_{\tau D}(-x,\, z)\, \mathrm{d}\mu$.

Введём мероморфную 1-форму $\mathrm{d}p = \mathrm{d}k + regular$ вблизи P, так что для всех петель $\gamma \subset \Gamma$, не охватывающих P, $\oint_\gamma \mathrm{d}p \in \mathbb{R}$. Значит, мнимая часть $\mathrm{d}p$ является однозначной функцией p_I. Можно положить $\mathrm{d}p = \frac{1}{\mathrm{i}T} \mathrm{d}\ln\varkappa$, здесь T — период ψ, $\psi(x + T,\, z) = \varkappa\psi(x,\, z)$.

Определение 2. Канонический контур κ_c определяется равенством $p_I = c$. Специальный канонический контур — это множество κ_0.

Ориентация на каноническом контуре однозначно задаётся функцией p_I. Заметим, что $\tau^*(p_I) = -p_I$, поэтому если $\tau z = z$, то $p_I(z) = 0$ и $z \in \kappa_0$.

В работе [1] было введено скалярное произведение для функций на каноническом контуре и доказано, что для функций Бейкера–Ахиезера на каноническом контуре κ_c

$$\langle \psi(x, z),\, \psi(x, w)\rangle_x := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x + \mathrm{i}0,\, z)\, \psi^\dagger(x - \mathrm{i}0,\, w)\, \mathrm{d}x = 2\pi\delta(z, w)\, \mathrm{d}w \tag{3.1}$$

$$\langle \psi(x, z),\, \psi(y, z)\rangle_{\kappa_c} := \int_{\kappa_c} \psi(x, z)\, \psi^\dagger(y, z) = 2\pi\delta(x - y) \tag{3.2}$$

В случае регулярного потенциала правильное выражение для формы $\psi^\dagger$ и подобные соотношения впервые были получены в работе [7].

Соотношения (3.1),(3.2) позволяют рассматривать функции Бейкера–Ахиезера на Γ как базис в пространстве функций на κ_c H_{D,κ_c} и определить для них преобразование Фурье. А именно, на H_{D,κ_c} вводится скалярное произведение

$$\langle a,\, b\rangle_{\kappa_c} = \int_{\kappa_c} a(z)\, \bar{b}(z)\, \mathrm{d}\mu(z)$$

Определение 3. Преобразование Фурье функции $f \in H_{D,\kappa_c}$ — это функция

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f(z),\, \psi_D(x,\, z)\rangle_{\kappa_c}, \quad \tilde{f} \in H_L$$

H_L — гильбертово[1] пространство, которое будет описано далее, с индефинитной метрикой

[1]Строго говоря, оно не является (псевдо)гильбертовым, так как не допускает пополнения по указанной метрике (соответствующий билинейный оператор не является ограниченным). Однако для дальнейшего нам не потребуется полнота, поэтому для упрощения изложения будем говорить о нём, как о гильбертовом пространстве. Точное описание структуры этого пространства — предмет дальнейшей работы.

$$\langle p,\, q\rangle_x = \int\limits_{\mathbb{R}} p\,(x)\,\bar{q}\,(x)\,\mathrm{d}x$$

Обратное преобразование преобразование Фурье задаётся формулой

$$f\,(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{f}\,(x)\,\psi_D\,(x,\, z)\,\mathrm{d}x$$

Преобразование Фурье задаёт изометрический изоморфизм между H_L и H_{D,κ_c}: $\langle f,\, g\rangle_{\kappa_c} = \langle \tilde{f},\, \tilde{g}\rangle_x$. В дальнейшем мы полагаем $\kappa_c = \kappa_0$, так как случай специального канонического контура наиболее интересен.

4 Описание пространства H_L.

Рассмотрим уравнение Шрёдингера с периодическим потенциалом $L\psi\,(x) = k^2\psi\,(x)\,,\quad L = -\partial_x^2 + u\,(x)$. Предполагаем, что потенциал u — конечнозонный, причём все решения уравнения являются мероморфными функциями от x. Пусть в некоторой точке x_0 (без ограничения общности $x_0 = 0$) функция ψ имеет полюс порядка n. Так как $u - k^2 = \frac{\psi''}{\psi}$, то в окрестности $x_0 = 0$:

$$\psi(x) = \frac{P\,(x)}{x^n},\; P\,(0) \neq 0,\; P \in \mathcal{O}(0)$$

$$\psi'' = \frac{P''}{x^n} - 2n\frac{P'}{x^{n+1}} + n(n+1)\frac{P}{x^{n+2}}$$

$$u - k^2 = \frac{P''}{P} - \frac{2n}{x}\frac{P'}{P} + \frac{n\,(n+1)}{x^2}$$

Так как u— конечнозонный, то $u = \partial_x^2 \ln h\,(x)\,,\; h \in \mathcal{O}\,(0)$. u является производной от некоторой мероморфной функции, поэтому все его вычеты равны 0. Отсюда следует

Утверждение 2. В окрестности особой точки конечнозонный потенциал имеет вид $u\,(x) = \frac{n(n+1)}{x^2} + regular$.

Число n будем называть *степенью особенности*. Элементарный анализ ряда Лорана для ψ и u даёт

Утверждение 3. В точках регулярности потенциала функция ψ регулярна. В окрестности особой точки степени n ψ либо имеет нуль порядка $n+1$, либо полюс порядка n. Во втором случае ряд Лорана ψ вблизи особенности x_0 имеет вид

$$\psi\,(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{x^{2i}} + regular, & n = 2k \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{x^{2i-1}} + regular, & n = 2k-1 \end{cases}$$

Таким образом задачу о собственных значениях оператора L можно рассматривать в пространстве функций H_{sing}, имеющих в каждой точке x_0 сингулярности потенциала особенность как у блоховской функции:

$$f\,(x_0 + \varepsilon) - (-1)^{n|2} f\,(x_0 - \varepsilon) = O\,(\varepsilon^n)$$

$n|2$ — остаток от целочисленного деления n на 2. На этом пространстве определено действие оператора L, причём он симметричен. В простейшем случае полюсов степени 1 в окрестности каждой особенности потенциала

$$f(x) - \frac{\alpha}{x - x_0} = O(x - x_0) \in C^\infty\,(x_0)$$

Искомое пространство $H_L \subseteq H_{sing}$. Для описания H_L разложим его в прямой интеграл по множителю Блоха–Флоке $H_L = \int^\oplus H_L\,(\varkappa)$. Положим $p = p_R$, на специальном каноническом контуре найдём все точки z_j, такие что

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Tp(z_j)} = \varkappa$$

Пространство $H_L(\varkappa)$ порождается блоховскими функциями $\psi(x, z_j)$, $\psi(x+T, z_j) = \varkappa\psi(x, z_j)$. Скалярное произведение на $H_L(\varkappa)$ задаётся формулой

$$\langle\psi(x, z_j), \psi(x, z_k)\rangle_\varkappa = \int_0^T \psi(x, z_j)\,\bar{\psi}(\bar{x}, z_k)\,\mathrm{d}x$$

Если потенциал имеет на периоде M особенностей $x_{1,\ldots,M} \in [0, T]$, n_i — степень особенности x_i, то алгебраически

$$H_L(\varkappa) = \mathbb{C}^q \oplus F_{x_1,\ldots,x_n}(\varkappa)$$

Для простоты прокомментируем это в случае полюсов степени 1. $F_{x_1,\ldots,x_n}(\varkappa)$ — пространство бесконечно дифференцируемых блоховских функций, имеющих нули 1 порядка в точках $x_i + T\mathbb{Z}$ и мультипликатор Блоха–Флоке $\varkappa$. Число отрицательных квадратов q скалярного произведения на $H_L(\varkappa)$ равно числу линейно независимых вычетов блоховских функций, рассматриваемых как функции параметра z_j, $j \in \mathbb{N}$. Основным утверждением данной работы является линейная независимость функций $a_i(z_j)$, $a_i(z_j)$ — коэффициенты ряда Лорана (для краткости — „вычеты") функции $\psi(x, z_j)$ в точках $x_1, \ldots, x_M$ в случае произвольного (периодического конечнозонного) потенциала. Отсюда следует сформулированная в [1] теорема о структуре $H_L(\varkappa)$.

Теорема 1. *Пусть u — конечнозонный периодический сингулярный потенциал, имеющий в точках x_i, $i = 1, \ldots, M$ полюса степени n_i. Пусть $F_{x_1,\ldots,x_n}(\varkappa)$ — пространство C^∞-функций $f(x)$, таких что*

$$f(x+T) = \varkappa f(x)$$

$$f(x_i+\varepsilon) - f(x_i-\varepsilon) = O(\varepsilon^n), \quad n_i = 2k$$

$$f(x_i+\varepsilon) + f(x_i-\varepsilon) = O(\varepsilon^n), \quad n_i = 2k-1$$

Тогда пространство $H_L(\varkappa) = F_{x_1,\ldots,x_n}(\varkappa) \oplus \mathbb{C}^k(\varkappa)$. Скалярное произведение на $F_{x_1,\ldots,x_n}(\varkappa)$ положительно и задаётся стандартным образом. Пространство $\mathbb{C}^k(\varkappa)$ порождается сингулярными собственными блоховскими функциями с отрицательными скалярными квадратами. При этом

$$k = \sum_{i=1}^{M}\left[\frac{n_i+1}{2}\right]$$

$[x]$ — целая часть числа x. Строго говоря, пополнение H_L не рассматривается, поэтому данный результат пока не является полным с точки зрения функционального анализа.

5 Доказательство.

Лемма 1. *Пусть $x_1 \ldots, x_n$ — различные комплексные числа, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — функции, голоморфные в окрестности 0 и не равные тождественно 0, $S = \{k_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность, такая что $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(k_{n+1} - k_n) = \Delta \neq 0$. Тогда функции $\psi_i : S \to \mathbb{C}$, $\psi_i(k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_i}\varphi_i(k^{-1})$, линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что ψ_i линейно зависимы:

$$\forall p : \sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i(k_p) = 0 \tag{5.1}$$

Функция $\frac{\varphi\left((k+s)^{-1}\right)}{\varphi(k^{-1})}$ голоморфна в окрестности $k = \infty$, причём

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi\left((k+s)^{-1}\right)}{\varphi\left(k^{-1}\right)}=1$$

Отсюда

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\psi_i\left(k_{p+1}\right)}{\psi_i\left(k_p\right)}=\lim_{p\to\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{p+1}-k_p)x_i}\frac{\varphi_i\left(\left(k_p+\left[k_{p+1}-k_p\right]\right)^{-1}\right)}{\varphi_i\left(k_p^{-1}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta x_i}$$

Запишем (5.1) в n последовательных точках $k_p,\ldots,k_{p+n-1}$. Положим $t_i=a_i\psi_i\left(k_p\right)$, тогда

$$\mathrm{A}_p\begin{pmatrix}t_1\\ \ldots\\ t_n\end{pmatrix}=0 \tag{5.2}$$

$$A_p=\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \frac{\psi_1(k_{p+1})}{\psi_1(k_p)} & \frac{\psi_2(k_{p+1})}{\psi_2(k_p)} & \ldots & \frac{\psi_n(k_{p+1})}{\psi_n(k_p)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\psi_1(k_{p+n-1})}{\psi_1(k_p)} & \frac{\psi_2(k_{p+n-1})}{\psi_2(k_p)} & \ldots & \frac{\psi_n(k_{p+n-1})}{\psi_n(k_p)}\end{pmatrix}$$

$$\lim_{p\to\infty}\mathrm{A}_p=\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1\Delta} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2\Delta} & \ldots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n\Delta}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1\Delta(n-1)} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2\Delta(n-1)} & \ldots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n\Delta(n-1)}\end{pmatrix}$$

Уравнение (5.2) имеет нетривиальное решение при $\det A_p=0$. Но

$$\lim_{p\to\infty}\det A_p=\det\lim_{p\to\infty}A_p\neq 0$$

как определитель Вандермонда, поэтому при достаточно больших p система (5.2) имеет только тривиальные решения. По условию $\exists I:\ a_I\neq 0$, поэтому функция $\varphi_I\left(k^{-1}\right)$ имеет сходящуюся к ∞последовательность нулей. В силу теоремы единственности $\varphi_I\equiv 0$, что противоречит условию. □

5.1 Случай простых особенностей.

По определению функции Бейкера – Ахиезера, $\psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ голоморфна по k^{-1} в окрестности $k=\infty$. Предположим, что в точке s ψ имеет полюс 1 порядка. В окрестности точки $x=s$:

$$\begin{aligned}\psi_k(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} &= \left(\frac{a_s\left(k\right)}{x-s}+\mathcal{O}(x-s)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}\left(1-\mathrm{i}k\left(x-s\right)+\ldots\right)\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}\left(\frac{a_k}{x-s}+\mathcal{O}(x-s)\right)\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{O}\left(z\right)$ — класс голоморфных в окрестности нуля функций. Из голоморфности произведения по k^{-1} следует, что

$$a_s\left(k\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}\varphi_s\left(k^{-1}\right),\ \varphi_s\in\mathcal{O}\left(k^{-1}\right)$$

Мы рассматриваем функции Бейкера–Ахиезера с заданным мультипликатором $\varkappa$.

$$\psi\left(x+T,k_p\right)=\varkappa\psi\left(x,k_p\right)$$

Асимптотически при больших k

$$\frac{\psi\left(x+T,k_p\right)}{\psi\left(x,k_p\right)}=\varkappa=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Tk_p}\left(1+O\left(k_p^{-1}\right)\right)$$

Поэтому асимптотически $k_p = const + \frac{2\pi p}{T}$,

$$\lim_{p\to\infty}\left(k_{p+1}-k_p\right) = \frac{2\pi}{T} = \Delta \neq 0$$

Согласно лемме, все вычеты линейно независимы.

5.2 Полюс степени n.

Предположим, что для оператора $L = -\partial^2 + u$ найдена собственная функция $L\psi = E\psi$. Тогда верно, что

$$L - E = -\left(\partial + \frac{\psi'}{\psi}\right)\left(\partial - \frac{\psi'}{\psi}\right)$$

Преобразованием Крума оператора L называется оператор

$$\begin{aligned}\operatorname{Cr} L &= -\left(\partial - \frac{\psi'}{\psi}\right)\left(\partial + \frac{\psi'}{\psi}\right)\\ &= -\partial^2 - \frac{\psi''}{\psi} + 2\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2\\ &= -\partial^2 + v\end{aligned}$$

Прямые вычисления показывают, что если u имеет в точке x_0 полюс степени n, а функция ψ сингулярна в x_0, то v имеет в этой точке полюс степени $n-1$. Функция ψ общего положения всегда сингулярна в x_0, так как она может быть либо сингулярной, либо равной нулю, а множество нулей ψ имеет в Γ меру 0. Таким образом, всегда можно выбрать серию преобразований Крума, возможно, с разными энергиями, приводящую потенциал к регулярному виду. Для рассматриваемой задачи без ограничения общности положим $x_0 = 0$. Если σ — сингулярная в 0 собственная функция $\tilde{L}$, то $\left(\partial + \frac{\psi'}{\psi}\right)\sigma$ — сингулярная собственная функция оператора L. Коэффициенты главной части ряда Лорана по x для $\left(\partial + \frac{\psi'}{\psi}\right)\sigma$ являются линейными функциями от соответствующих коэффициентов функции σ и $\sigma(0)$. Напомним, что по построению ψ не зависит от точки на спектре. Проводя цепочку преобразований Крума, получаем, что коэффициенты ряда Лорана по x для функции Бейкера–Ахиезера оператора L являются линейными функциями с постоянными коэффициентами от производных по x порядка меньше n от функции Бейкера–Ахиезера регулярного оператора $Cr^n L$. Таким образом, линейное соотношение между „вычетами" функции Бейкера–Ахиезера сингулярного оператора является некоторым линейным соотношением между первыми N производными по x от функции Бейкера–Ахиезера регулярного оператора.

Вычислим соответствующие производные. Имеем

$$\psi'' = (u - E)\,\psi$$

$$\psi''' = u'\psi + (u - E)\,\psi'$$

$$\psi^{IV} = \left[(u-E)^2 + u''\right]\psi + u'\psi'$$

И так далее. Видно, что любое линейное соотношение между производными в нуле имеет вид

$$P(k^2)\psi\,(0,k) + Q\left(k^2\right)\psi'\,(0,k) = 0, \quad P, Q \in \mathbb{C}[k]$$

На бесконечности

$$\psi\,(x,k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\varphi\left(x, k^{-1}\right),\ \varphi \in \mathcal{O}(k^{-1})$$

$$\psi'(x,k) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\left(\mathrm{i}k\varphi + \varphi'\right)$$

$$k^{-1}P\left(k^2\right)\varphi + Q\left(k^2\right)\left(\mathrm{i}\varphi + k^{-1}\varphi'\right) = 0$$

При $k \to \infty$: $k^{-1}\varphi' = o(\varphi)$, в пределе этот член выпадает. Сокращая на φ и на $k^{\max(\mathrm{ord}\,P, \mathrm{ord}\,\mathrm{Q})}$ и затем устремляя $k \to \infty$, получаем противоречие.

5.3 Общий случай.

Аналогично 5.2, произведём последовательность преобразований Крума, устраняющую все особенности. Это всегда можно сделать, так как блоховская функция общего положения не имеет нулей (см. 5.2) и имеет полюса во всех особенностях потенциала. Конкретные энергии блоховских функций, используемых в преобразованиях, значения не имеют; важно, что полученный регулярный потенциал будет иметь функцию Бейкера–Ахиезера, такую что в каждой точке x_i её производные по x порядка меньше r_i (r_i зависит от x_i) будут линейными функциями от „вычетов" исходной функции. Любая линейная комбинация производных в точке x_i будет при $k \to \infty$ иметь вид $\mathrm{e}^{ikx_i}k^{g_i}\varphi_i\left(k^{-1}\right)$, $g_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, φ_i — голоморфные в окрестности 0 функции, не равные 0 согласно 5.2. Линейная зависимость „вычетов" исходной функции Бейкера–Ахиезера при этом сводится к выражению вида

$$\sum_{i=1}^{M} a_i \mathrm{e}^{ikx_i}k^{g_i}\varphi_i\left(k^{-1}\right) = 0$$

Аналогично 5.1, $\lim_{p\to\infty}\left(k_{p+1} - k_p\right) = \Delta \neq 0$. Деля на $k^{\max g_i}$ и используя лемму, получим искомое утверждение.

6 Заключение.

В работе показано, что для сингулярного конечнозонного потенциала пространство H_L зависит только от положения и степеней его полюсов. Для полноты результата нужно построить пополнение этого гильбертова пространства. После его построения становится возможным строгое исследование спектра сингулярных операторов Шрёдингера. За рамками данной работы осталось приложение полученных результатов к исследованию дифференциал уравнений. Например, для уравнений типа (2.2) верно, что сингулярности вида $\frac{n(n+1)}{x^2}$ распадаются на простейшие вида $\frac{2}{x^2}$, причём найденные выше индексы пространств Понтрягина позволяют точно сказать, сколько полюсов будут двигаться по вещественной оси. Подобные вопросы остаются для дальнейшего исследования.

Список литературы

[1] П.Г. Гриневич, С.П. Новиков, “Сингулярные конечнозонные операторы и индефинитные метрики”, *УМН*, **64**:4(388) (2009), 45–72

[2] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136

[3] В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов, “Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений. I”, *ТМФ*, **53**:2 (1982), 163–180

[4] В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов, “Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений. II”, *ТМФ*, **54**:1 (1983), 23–37

[5] В. А. Аркадьев, "Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений. III", *ТМФ*, **58**:1 (1984), 38–49

[6] В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов, "Сингулярные решения уравнения КдВ и метод обратной задачи", *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*, Записки науч. сем. ЛОМИ, **133**, 1984, 17–37

[7] И. М. Кричевер, "Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шрёдингера. Нестационарная модель Пайерлса", *Функц. анализ и его прил.*, **20**:3 (1986), 42–54