

Федеральное агенство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

# **Кроссоверы между различными классами симметрии в SNS переходе.**

Студент 728 гр. Козий Владислав Александрович.

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Скворцов М.А.

Черноголовка 2011 г.

# Содержание

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Введение</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2. Постановка задачи</b>  | <b>4</b>  |
| <b>3. Сигма-модель</b>   | <b>5</b>  |
| <b>4. Нульмерная сигма-модель</b>  | <b>7</b>  |
| <b>5. Кроссовер А–С</b>  | <b>8</b>  |
| <b>6. Кроссовер СИ–С</b>   | <b>12</b> |
| 6.1. Генераторы . . . . .  | 13        |
| 6.2. Параметризация . . . . .  | 14        |
| 6.3. Вычисления . . . . .  | 16        |
| <b>7. Заключение</b>   | <b>19</b> |
| <b>А. Приложение. Предельный случай <math>\alpha = 0</math> для кроссовера СИ–С.</b> | <b>21</b> |
| <b>Список литературы</b>   | <b>23</b> |

# 1. Введение

Как известно, уровни энергии замкнутой системы, занимающей ограниченный объем, принимают дискретные значения. Сами уровни определяются граничными условиями и взаимодействием в системе. Однако, в случае систем со сложным гамильтонианом (скажем, при наличии сильного беспорядка), нахождение точных или приближенных собственных значений становится технически невыполнимой задачей. С другой стороны, в таких случаях интерес представляют лишь статистически усредненные величины, такие как средняя плотность состояний, парные корреляторы и т.д. Это ситуация аналогична подходу статистической физики, где интерес представляет не поведение отдельных частиц, а лишь усредненные по большому их количеству величины.

Идея статистического описания энергетического спектра была предложена Вигнером для описания высоковозбужденных состояний в сложных ядрах. Выбирая полный набор собственных состояний, гамильтониан системы можно представить как матрицу размером  $N \times N$ . Идея усреднения состояла в том, что элементы этих матриц считались случайными числами, по которым в дальнейшем и проходит усреднение. Здесь, однако, возникает определенная трудность, связанная с тем, что матричные элементы не могут принимать различные значения равновероятно. Это означало бы, что в системе имеют конечную вероятность произвольно сильные взаимодействия, что не соответствует действительности. Для преодоления этой трудности Вигнером был предложен инвариантный гауссов статистический вес для усреднения  $\exp\left(-\frac{\text{tr}H^2}{2a^2}\right)$ .

Сам Вигнер различал три класса универсальности гамильтонианов. Системы без магнитного поля и спин-орбитального взаимодействия обладают симметрией по отношению к обращению времени и вращению спина. Такие системы характеризуются симметричными гамильтонианами  $H_{mn} = H_{nm}$  с действительными компонентами и составляют Гауссов ортогональный ансамбль. В присутствии магнитного поля симметрия по отношению к обращению времени и спиновому вращению нарушена. Соответственно, единственное условие, которое можно наложить на гамильтониана системы — условие эрмитовости  $H_{mn} = H_{nm}^*$ . Такие системы составляют Гауссов унитарный ансамбль. И,

Таблица 1. Классы симметрии

| Вигнеровский класс | Сверхпров. класс | Обращение времени | Вращение спина |
|--------------------|------------------|-------------------|----------------|
| A[GUE(b)]          | D                | Нет               | Нет            |
| A[GUE(a)]          | C                | Нет               | Есть           |
| AII[GSE]           | DIII             | Есть              | Нет            |
| AI[GOE]            | CI               | Есть              | Есть           |

наконец, системы без магнитного поля, но без симметрии по отношению к вращению спина, составляют симплетический ансамбль [1]. Данная классификация позволяет описывать статистику уровней в грязных металлических гранулах при  $E \ll E_{Th} = \frac{\hbar D}{L^2}$  [2] ( $\hbar$  — постоянная Планка,  $D$  — коэффициент диффузии,  $L$  — линейный размер гранулы).

При наличии связи со сверхпроводником (NS система) можно ввести четыре дополнительных класса симметрии в зависимости от того, какие симметрии (обращение времени и вращение спина) имеют место в системе (табл.1) [3]. Данные классы появляются вследствие того, что в этом случае система описывается гамильтонианом Боголюбова — де Жена

$$\hat{H}_{\text{BdG}} = \begin{pmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^* & -H_0^* \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $H_0$  — одночастичный гамильтониан, а  $\Delta$  — потенциал спаривания. Данный гамильтониан, действующий в пространстве «частица-дырка» (пространство Намбу), обладает дополнительной симметрией  $\hat{H} = -\tau_2 \hat{H}^T \tau_2$ , связанной с симметричностью собственных значений относительно нулевого уровня. Этим фактом и вызвано появление дополнительных классов симметрий. Нас конкретно в этой работе будут интересовать классы CI (имеются обе симметрии) и класс C (имеется симметрия по отношению к вращению спина).

## 2. Постановка задачи

Нашей задачей является расчет в рамках сигма-модели плотности состояний в помещенной в магнитное поле грязной металлической грануле, связанной туннельными контактами с двумя сверхпроводниками. Известно, что вследствие эффекта близости в нормальном металле может возникать минищель в плотности состояний, которая зависит от разности фаз двух сверхпроводников. В нашей задаче мы рассматриваем случай, когда разность фаз равна  $\pi$ , туннельные кондактансы обоих берегов одинаковы и минищель обращается в нуль.

В общем случае плотность состояний регулируется двумя параметрами, характеризующими величину магнитного поля и Андреевского кондактанса. Двухпараметрический расчет при произвольных значениях этих параметров является чрезвычайно тяжелой в вычислительном плане задачей, которая, вероятно, не может быть решена аналитически. Нас, однако, будут интересовать однопараметрические кроссоверы между различными предельными классами:  $CI-C$  и  $A-C$ .

Для лучшего понимания задачи следует взглянуть на диаграмму на рис.1. Ортогональный ( $AI$ ) и унитарный ( $A$ ) классы реализуются в нулевом и в сильном магнитном поле соответственно. При этом связи со сверхпроводником нет. Сверхпроводящие классы  $CI$  и  $C$  реализуются в случае хорошей связи со сверхпроводником. Класс  $CI$  имеет место в нулевом поле,  $C$  — в сильном. Для данных предельных случаев результаты для средней плотности состояний известны [3]. Для нас же будет представлять интерес нахождения ответов в зависимости от величины магнитного поля в кроссовере  $CI-C$  и кондактанса  $NS$  границы в кроссовере  $A-C$ .

Статистику уровней мы изучаем на энергиях, много меньших, чем энергия Таулесса  $E_{Th}$ . В этой ситуации реализуется так называемая нульмерная сигма-модель. Статистика уровней в нульмерной сигма-модели совпадает с результатом, полученным из теории случайных матриц.

Стоит также отметить, что диаграмма на рис.1 относится к случаю, когда спин-орбитальное взаимодействие отсутствует, то есть во всех представленных классах име-

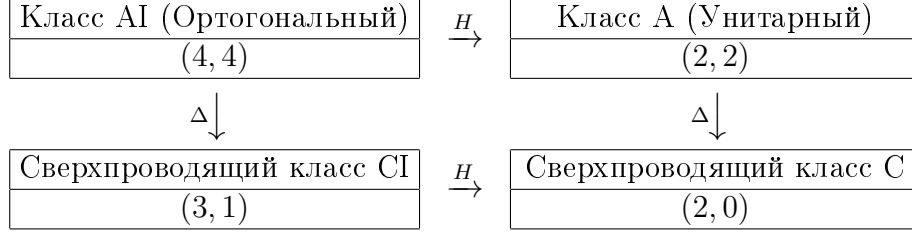


Рис. 1. Кроссоверы между классами симметрии, регулируемые магнитным полем ( $H$ ) и связью со сверхпроводниками ( $\Delta$ ). Размерности пространств FF и BB секторов в суперсимметричной сигма-модели для  $\langle \rho \rangle$  показаны в виде  $(n_F, n_B)$ .

ется симметрия по отношению к вращению спина. Нас будет интересовать именно этот случай.

### 3. Сигма-модель

Как мы уже говорили, описание сверхпроводящих классов начинается с гамильтониана БдЖ (1). Средняя плотность состояний

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{\text{Im} \langle \text{tr} \mathfrak{G}_E^R(\mathbf{r}) \rangle}{\pi} \quad (2)$$

выражается через функцию Грина гамильтониана БдЖ

$$\mathfrak{G}_E^R = (E - \hat{H}_{\text{BdG}} + i0)^{-1}. \quad (3)$$

Функция Грина, в свою очередь, выражается с помощью функционального интеграла по матричному суперполю  $Q$  размером  $8 \times 8$ , действующему в прямом произведении FB  $\otimes$  N  $\otimes$  PH пространств Ферми-Бозе (FB), Намбу (N) и частица-дырка (PH). В итоге, сигма-модель приводит к следующему выражению для плотности состояний [5]

$$\langle \rho(E, \mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{8} \text{Re} \int \text{str}(k\Lambda Q) e^{-S[Q]} DQ, \quad (4)$$

с действием  $S = S_0 + \sum_a S_a$ , где

$$S_0 = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \text{str} (D(\nabla Q + ie\mathbf{A}[\tau_3, Q])^2 + 4iE\Lambda Q) \quad (5)$$

объемный член действия и

$$S_a = -\frac{1}{2} \sum_i \text{str} \ln[1 + e^{-2\beta_i} Q_S^a Q^a] \quad (6)$$

граничный член, соответствующий связи с  $a$ -м сверхпроводником. Интегрирование производится по всему объему металлической гранулы. Здесь  $\nu$  — плотность состояний на одну проекцию спина на уровне Ферми,  $Q^a$  принимает значения матриц  $Q$  на  $a$ -й границе,  $T_i = \frac{1}{\cosh^2 \beta_i}$  - прозрачность  $i$ -ого канала,  $\mathbf{A}$  - векторный потенциал,

$$Q_S = \Lambda \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} + \hat{\Sigma} \frac{i\Delta}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}. \quad (7)$$

Матрицы  $Q$  удовлетворяют дополнительным ограничениям

$$Q^2 = 1, \quad Q = \bar{Q}, \quad (8)$$

где введена операция зарядового сопряжения  $\bar{Q} = CQ^T C^T$ .

В NS системах вследствие Андреевского отражения состояния с энергиями  $E$  и  $-E$  смешиваются, поэтому Гриновские функции Намбу-Горькова  $\mathfrak{G}_E^R$  содержат в себе Гриновские функции  $G_E^R$  и  $G_{-E}^A$  нормального металла. В отсутствие сверхпроводящего спаривающего потенциала  $\Delta$  корреляторы плотности состояний удобно считать с помощью Ефетовской суперсимметричной сигма-модели. В этой модели суперполе  $Q$  действует в прямом произведении пространств  $\text{FB} \otimes \text{RA} \otimes \text{TR}$ . Пренебрегая обратным эффектом близости, можно рассматривать Андреевское отражение как некое эффективное граничное условие, которое запутывает R и A компоненты поля  $Q$ .

Оказывается [5], действие для нашей системы можно переписать на языке Ефетовской суперсимметричной сигма-модели. В нашей работе мы придерживаемся именно Ефетовских обозначений. Точное соответствие между NS и Ефетовской сигма-моделями реализуется с помощью преобразования  $Q \rightarrow VQV^{-1}$  с матрицей

$$V = \begin{pmatrix} -1_{\text{FB}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{\text{FB}} \\ 0 & 1_{\text{FB}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_{\text{FB}} & 0 \end{pmatrix}_{\text{PH}}. \quad (9)$$

Таблица 2. Основные матрицы в двух версиях  $\sigma$ -модели

|                | NS $\sigma$ -модель [5]   | Ефетовская $\sigma$ -модель [2]  |
|----------------|---|--|
| пространство   | FB $\otimes$ N $\otimes$ PH   | FB $\otimes$ RA $\otimes$ TR   |
| $\Lambda$      | $\sigma_z^N \sigma_z^{\text{PH}}$   | $\sigma_z^{\text{RA}}$   |
| $\tau_3$       | $\sigma_z^N$  | $\sigma_z^{\text{TR}}$   |
| $C$            | $-\sigma_x^N \begin{pmatrix} i\sigma_y^{\text{PH}} & 0 \\ 0 & \sigma_x^{\text{PH}} \end{pmatrix}_{\text{FB}}$ | $\sigma_z^{\text{RA}} \begin{pmatrix} i\sigma_y^{\text{TR}} & 0 \\ 0 & \sigma_x^{\text{TR}} \end{pmatrix}_{\text{FB}}$                     |
| $\hat{\Sigma}$ | $\sigma_x^N$  | $\begin{pmatrix} \sigma_1^{\text{RA}} \sigma_1^{\text{TR}} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{\text{RA}} \sigma_2^{\text{TR}} \end{pmatrix}_{\text{FB}}$ |

Здесь  $k = \text{diag}(1, -1)_{\text{FB}}$ . Матрицы, входящие в выражения (4)–(7), показаны в табл. 2. Вышеуказанное соответствие позволяет выразить в Ефетовских обозначениях сверхпроводящую матрицу, входящую в граничный член действия (7):

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix}_{\text{TR}}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & k_{\text{FB}} \\ 1_{\text{FB}} & 0 \end{pmatrix}_{\text{RA}}. \quad (10)$$

Далее мы везде предполагаем, что  $E \ll \Delta$ , так что  $Q_S = \hat{\Sigma}$ . В случае, когда у нас есть контакт с двумя сверхпроводниками с разностью фаз  $\pi$ , имеется два граничных слагаемых, которые отличаются лишь знаком при  $Q_S$ .

Также мы везде далее полагаем, что прозрачность каждого барьера в отдельности малая, так что  $\beta_i \gg 1$ . В этом случае мы имеем возможность разложить логарифм в граничном слагаемом для действия до первого исчезающего члена.

## 4. Нульмерная сигма-модель

Как уже упоминалось, в данной работе мы рассматриваем случай низких энергий  $E \ll E_{Th}$ , когда можно ограничиться нульмерной сигма-моделью. Все входящие в действие величины от координат не зависят, т. е. градиентный член равен нулю. Интегрирование по  $\mathbf{r}$  дает лишь множитель  $\int \mathbf{A}^2 d\mathbf{r}$  для члена с магнитным полем и множитель, равный



объему гранулы  $V$ , для всех остальных слагаемых. Таким образом, действие принимает вид

$$S[Q] = \frac{ix}{4} \text{str} \Lambda Q - \frac{\alpha}{4} \text{str} (\tau_3 Q)^2 + \frac{\gamma}{8} \text{str} (\hat{\Sigma} Q)^2. \quad (11)$$

Здесь  $x = \frac{\pi E}{\delta}$ ,  $\delta = (2\nu V)^{-1}$  — среднее расстояние между уровнями,  $\alpha = \pi \nu D e^2 \int \mathbf{A}^2 d\mathbf{r}$ ,  $\gamma = \frac{G_A}{2}$ ,  $G_A = \frac{2 \sum_i T_i^2}{4}$  — Андреевский кондактанс в туннельном пределе (двойка появляется из-за наличия двух сверхпроводников).

Как уже говорилось, в нашей работе рассматриваются случаи однопараметрических кроссоверов А–С ( $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\gamma$  — произвольное) и СI–С ( $\alpha$  — произвольное,  $\gamma \rightarrow \infty$ ).

## 5. Кроссовер А–С

Здесь мы переходим к вычислению кроссовера из класса А в класс С. В сильном магнитном поле мы получаем дополнительное ограничение на матрицы  $Q$ :  $\text{str} [\tau_3, Q]^2 = 0$ . Данное условие удовлетворяется при  $[\tau_3, Q] = 0$ . Это приводит к тому, что матрица  $Q$  становится диагональной в пространстве TR. Из условия зарядового сопряжения (8) получаем

$$Q = \begin{pmatrix} Q_4 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_4 \end{pmatrix}_{\text{TR}}, \quad \bar{Q}_4 = k \Lambda Q_4^T \Lambda k. \quad (12)$$

Дальнейшие вычисления мы будем производить с помощью Ефетовской параметризации для матрицы  $Q_4$  [2]:

$$Q_4 = U_\eta^{-1} Q_0 U_\eta, \quad (13)$$

где

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta_F & 0 & e^{i\varphi_F} \sin \theta_F & 0 \\ 0 & \cosh \theta_B & 0 & e^{i\varphi_B} \sinh \theta_B \\ e^{-i\varphi_F} \sin \theta_F & 0 & -\cos \theta_F & 0 \\ 0 & -e^{-i\varphi_B} \sinh \theta_B & 0 & -\cosh \theta_B \end{pmatrix}_{\text{RA}} \quad (14)$$

— коммутирующая часть параметризации, и

$$U_\eta = \exp \left( \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 & 0 \\ \sigma^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & \rho^* & 0 \end{pmatrix} \right)_{\text{RA}} \quad (15)$$

— грассманова часть.

Далее удобно ввести переменные  $\lambda_F = \cos \theta_F$ ,  $\lambda_B = \cosh \theta_B$ . При этом данные переменные меняются в пределах  $-1 \leq \lambda_F \leq 1$ ,  $\lambda_B \geq 1$ . Березиниан такой параметризации равен [2]

$$J = \frac{1}{(\lambda_B - \lambda_F)^2}. \quad (16)$$

Как видим, в точке  $\lambda_B = \lambda_F = 1$  имеется особенность. Это связано с тем, что в этой точке многообразие перестает зависеть от других переменных и вырождается в  $Q = \Lambda$ .

Производя далее вычисления, получим

$$\text{str} \Lambda Q_4 = 2(\lambda_F - \lambda_B), \quad (17)$$

$$S_r = \gamma[-1 + \lambda_B^2 - \lambda_B(\lambda_B - \lambda_F)(\rho\rho^* + \sigma\sigma^* + \sigma^*\rho^* + \sigma\rho)]. \quad (18)$$

Предэкспонента равна

$$\text{str} \frac{k\Lambda Q_4}{4} = \frac{\lambda_B + \lambda_F}{2} - \frac{\lambda_B - \lambda_F}{2}(\sigma\sigma^* + \rho\rho^*). \quad (19)$$

Наконец, для средней плотности состояний мы получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle \rho(E) \rangle &= \text{Re} \int \frac{d\lambda_B d\lambda_F}{(\lambda_B - \lambda_F)^2} \frac{d\varphi_B d\varphi_F}{(2\pi)^2} d\rho^* d\rho d\sigma^* d\sigma \left[ \frac{\lambda_B + \lambda_F}{2} - \frac{\lambda_B - \lambda_F}{2}(\sigma\sigma^* + \rho\rho^*) \right] \times \\ &\times \exp \left[ -ix(\lambda_F - \lambda_B) - \gamma(-1 + \lambda_B^2 - \lambda_B(\lambda_B - \lambda_F)(\rho\rho^* + \sigma\sigma^* + \sigma^*\rho^* + \sigma\rho)) \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Раскладывая экспоненту, содержащую грассмановы переменные, получим:

$$\begin{aligned} \exp \left[ \gamma\lambda_B(\lambda_B - \lambda_F)(\lambda_B - \lambda_F)(\rho\rho^* + \sigma\sigma^* + \sigma^*\rho^* + \sigma\rho) \right] &= \\ &= 1 + \gamma\lambda_B(\lambda_B - \lambda_F)(\rho\rho^* + \sigma\sigma^* + \sigma^*\rho^* + \sigma\rho). \quad (21) \end{aligned}$$

В первом члене при интегрировании получается неопределенность. С одной стороны, при интегрировании по грассмановым переменным мы получаем ноль. С другой стороны, имеется неинтегрируемая в точке (1,1) особенность  $\frac{1}{(\lambda_B - \lambda_F)^2}$ , которая приводит к расходимости интеграла. Для разрешения данной неопределенности воспользуемся условием нормировки

$$\int DQ = \int J d\rho^* d\rho d\sigma^* d\sigma d\lambda_B d\lambda_F \frac{d\varphi_B d\varphi_F}{(2\pi)^2} = 1. \quad (22)$$

Для этого представим подынтегральное выражение в виде

$$F = F_0 + F_4 \rho \rho^* \sigma \sigma^* + \dots, \quad (23)$$

где

$$F_0 = \frac{\lambda_B + \lambda_F}{2} e^{-ix(\lambda_F - \lambda_B)}, \quad (24)$$

$$F_4 = -2\gamma \lambda_B (\lambda_B - \lambda_F)^2 e^{\gamma - \gamma \lambda_B^2 - ix(\lambda_F - \lambda_B)}, \quad (25)$$

а в многоточие входят члены, которые при интегрировании дают ноль. Тогда, согласно вышесказанному,

$$\int FDQ = F_0(\Lambda) + \int F_4 J d\lambda_B d\lambda_F, \quad (26)$$

то есть значение  $F_0$  мы взяли как раз в точке особенности. Первый член равен 1. Второе слагаемое не так тривиально. Оно имеет вид

$$\text{Re} \int F_4 J d\lambda_B d\lambda_f = -2\gamma e^{\gamma} \frac{\sin x}{x} f(x, \gamma), \quad f(x, \gamma) = \int_1^{\infty} d\lambda \lambda \cos \lambda x e^{-\gamma \lambda^2} \quad (27)$$

Таким образом, для плотности состояний окончательно получаем

$$\langle \rho \rangle = 1 - 2\gamma \frac{\sin x}{x} \int_1^{\infty} d\lambda \lambda \cos \lambda x e^{-\gamma(\lambda^2 - 1)}. \quad (28)$$

Вид данной зависимости при нескольких различных значениях  $\gamma$  показан на рис.(2).

Посчитаем далее  $f$  в некоторых предельных случаях.

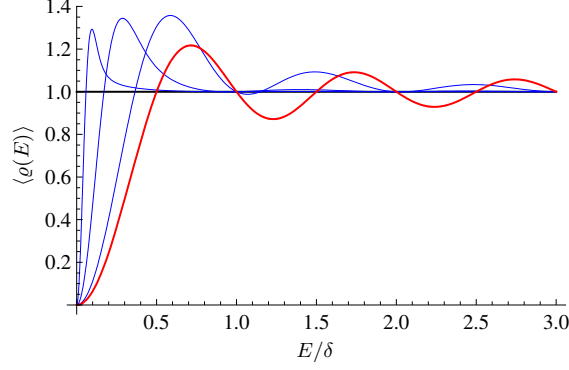


Рис. 2. Средняя плотность состояний  $\langle \rho(E) \rangle$  в кроссовере А-С. Кривые соответствуют различным значениям параметра  $\gamma = 0, 0.01, 0.1, 1, \infty$ .

### Предельный случай $\gamma \gg 1$ .

Для удобства вычисления запишем функцию  $f$  в несколько ином виде:

$$f(x, \gamma) = \text{Re} \int_0^\infty dt(1+t) \exp[-\gamma t^2 - 2\gamma t - \gamma + ix + ixt] = \quad (29)$$

$$= \text{Re} e^{-\gamma} e^{ix} \int_0^\infty dt(1+t) e^{-\gamma t^2 - 2\gamma t} e^{ixt}. \quad (30)$$

Интеграл "набирает" свое значение в области  $t \sim \frac{1}{\gamma}$ , поэтому можно написать

$$f(x, \gamma) \simeq \text{Re} e^{-\gamma} e^{ix} \int_0^\infty dt e^{-2\gamma t + ixt} = \frac{1}{2\gamma - ix} e^{-\gamma + ix}. \quad (31)$$

Для средней плотности состояний получим

$$\langle \rho \rangle = \text{Re} \left( 1 - 2\gamma e^\gamma \frac{\sin x}{x} \frac{1}{2\gamma - ix} e^{-\gamma} e^{ix} \right) = 1 - 2\gamma \frac{\sin x}{x} \frac{2\gamma \cos x - x \sin x}{(2\gamma)^2 + x^2}. \quad (32)$$

Если  $\gamma \gg x$  получим

$$\langle \rho \rangle = 1 - \frac{\sin 2x}{2x}, \quad (33)$$

что находится в полном соответствии с известным результатом для класса С.

### Предельный случай $\gamma \ll 1, x \ll 1$ .

$$\begin{aligned} f(x, \gamma) &= \int_1^\infty d\lambda \lambda e^{-\gamma \lambda^2} \cos x\lambda = \text{Re}(-i) \frac{\partial}{\partial x} \int_1^\infty d\lambda e^{-\gamma \lambda^2 + ix\lambda} = \\ &= \text{Im} \frac{\partial}{\partial x} \int_1^\infty d\lambda e^{-\gamma \lambda^2 + ix\lambda} = \text{Im} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{x^2}{4\gamma}} \int_1^\infty d\lambda e^{-\gamma(\lambda - \frac{ix}{2\gamma})^2} \end{aligned} \quad (34)$$

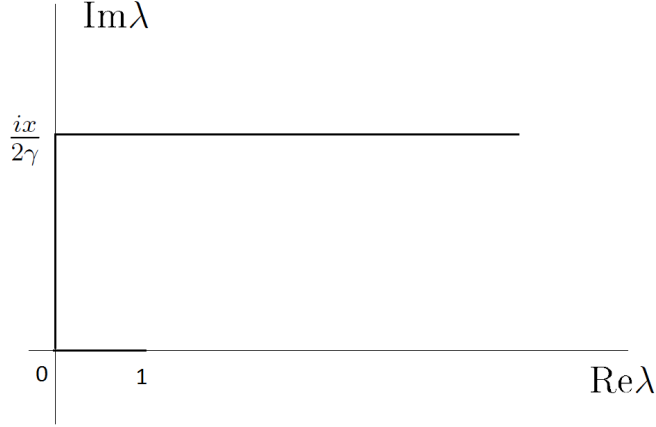


Рис. 3. Контур интегрирования для нахождения асимптотики  $f(x, \gamma)$  при  $x, \gamma \ll 1$ .

Деформируем контур так, как показано на рис.3.

На первом участке, раскладывая в ряд Тейлора, получим

$$\int_0^1 d\lambda e^{-\gamma\lambda^2 + ix\lambda} \approx - \int_0^1 d\lambda (1 - \gamma\lambda^2 + ix\lambda) = -1 + \frac{\gamma}{3} - \frac{ix}{2}, \quad (35)$$

$$\text{Im} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 d\lambda e^{-\gamma\lambda^2 + ix\lambda} \approx -\frac{1}{2}. \quad (36)$$

Легко видеть, что интеграл по верхнему участку контура действителен, а значит не вносит вклад в конечный результат. Остается лишь посчитать на вертикальном участке.

Делая замену  $\lambda = it$ , получим

$$\int_0^{\frac{ix}{2\gamma}} d\lambda e^{-\gamma(\lambda - \frac{ix}{2\gamma})^2} = i \int_0^{\frac{x}{2\gamma}} dt e^{\gamma t^2} = \frac{i}{\sqrt{\gamma}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\gamma}}} e^{t^2} dt. \quad (37)$$

Дифференцируя и учитывая, что  $\gamma, x \ll 1$ , имеем

$$\langle \rho \rangle \approx \frac{x}{\sqrt{\gamma}} e^{-\frac{x^2}{4\gamma}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\gamma}}} e^{t^2} dt. \quad (38)$$

## 6. Кроссовер CI–C

Вычисления в этом случае идейно весьма похожи на те, что мы проводили в предыдущем разделе, однако оказываются намного более громоздкими. Собственно, решение

мы начинаем с того же выражения для плотности состояний (4)–(6). Однако теперь, в случае сильной связи со сверхпроводником, мы имеем  $\gamma \rightarrow \infty$ . В соответствии с этим мы имеем дополнительное ограничительное условие на матрицы  $Q$ :  $\text{str}(\hat{\Sigma}Q)^2 = 0$ . Поскольку  $\Lambda \in Q$  и  $\{\Lambda, Q\} = 0$ , то нам следует выбрать  $\{Q, \hat{\Sigma}\} = 0$ .

## 6.1. Генераторы

Следующим шагом нам необходимо рассмотреть коммутирующие генераторы  $W$  многообразия  $CI$ . Запишем  $Q = \Lambda(1 + W + \dots)$ , где  $\{W, \Lambda\} = 0$ . Нам необходимо удовлетворить также условиям  $\{\Lambda W_{\text{com}}, \Sigma\} = 0$  и  $Q = CQ^T C^T$ , которое приводит к  $\Lambda W_{\text{com}} = C W_{\text{com}}^T \Lambda^T C^T$ .

После простых, но немного громоздких вычислений, мы получаем общий вид матрицы  $W$ :

$$W = \begin{pmatrix} W_{\text{FF}} & 0 \\ 0 & W_{\text{BB}} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Здесь

$$W_{\text{FF}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & z & -ic \\ 0 & 0 & ic & -z^* \\ -z^* & ic & 0 & 0 \\ -ic & z & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\text{RA}}, \quad W_{\text{BB}} = \frac{q}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где  $z = \theta e^{i\varphi}$ . Можно видеть, что  $q$  и  $c$  становятся «массивными» переменными при увеличении магнитного поля. Это значит, что они примут конкретные значения в пределе  $\alpha \rightarrow \infty$ . В то же время  $\theta$  и  $\varphi$  отвечают  $S$ -классовым коммутирующим переменным.

Похожие соображения справедливы и для антикоммутирующих генераторов  $Q$  матриц  $W_\eta$ . Здесь мы выбираем  $[W_\eta, \Lambda] = 0$ . Условие  $\{\Lambda, \Sigma\} = 0$  требует, чтобы выполнялось  $[W_\eta, \Sigma] = 0$ , и зарядовое сопряжение требует выполнения  $W_\eta + C W_\eta^T C^T = 0$ . После

несложных вычислений получаем

$$W_\eta = \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ -\rho & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \end{pmatrix}_{\text{TR}} \quad (41)$$

## 6.2. Параметризация

Теперь нам надо выбрать удобную параметризацию многообразия. Как мы уже упоминали, кроссовер контролируется параметром  $\alpha$ , который соответствует силе магнитного поля. Поэтому параметризацию следует строить таким образом, чтобы максимально упростить именно член, содержащий  $\alpha$ . Для этого мы последуем примеру работы Альгланда, Ииды и Ефетова [4]. Так, мы разобьем наши генераторы на части, одна из которых коммутирует с нарушающей симметрию матрицей  $\tau_3$ , а другая — нет. Соответствующими матрицами поворотов, коммутирующими с  $\tau_3$ , будут

$$U_\theta = \exp \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & m & 0 \end{pmatrix}_{\text{TR}}, \quad (42)$$

$$m = \begin{pmatrix} \theta e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\text{FB}}, \quad n = \begin{pmatrix} -\theta e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\text{FB}} \quad (43)$$

и

$$U_\sigma = \exp \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u \end{pmatrix}_{\text{TR}}, \quad (44)$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -\rho & 0 \end{pmatrix}_{\text{FB}}, v = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \xi & 0 \end{pmatrix}_{\text{FB}}. \quad (45)$$

Именно они составляют параметризацию класса C.

Далее, поскольку с грассмановыми переменными можно обращаться более свободно, чем с коммутирующими, применим следующий прием. В качестве второй матрицы поворота с антикоммутирующими переменными возьмем матрицу  $U_\psi$ , которая выглядит так же, как и  $U_\sigma$ , но с новыми переменными  $\mu$  и  $\eta$ . Действительно, данная матрица удовлетворяет всем ограничениям, указанными выше. В том же, что параметризация получается полной, можно будет убедиться после вычисления березиниана преобразования (на полноту указывает то, что березиниан не равен тождественно нулю). Остается лишь часть коммутирующих переменных, которые становятся массивными в магнитном поле:

$$U_m = \exp \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g^* \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ g^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\text{TR}}, \quad (46)$$

$$g = \begin{pmatrix} ic & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}_{\text{FB}}. \quad (47)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$Q = U_\sigma^{-1} U_\theta^{-1} U_\psi^{-1} U_m^{-1} \Lambda U_m U_\psi U_\theta U_\sigma. \quad (48)$$

Легко видеть, что матрицы, коммутирующие с  $\tau_3$ , стоит расположить именно по краям. Именно в этом случае они «свернутся» друг с другом, вследствие чего член, регулирующий кроссовер, будет содержать лишь пару коммутирующих переменных и не будет содержать грассмановых переменных вовсе.



### 6.3. Вычисления

После вычислений с помощью Mathematica, получаем Березиниан нашей параметризации

$$J = \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \frac{\cos^2 c}{(\sin c + i \sinh q)^2} \equiv J_C J_m \quad (49)$$

Также получаем

$$\begin{aligned} \text{str}(k\Lambda Q) &= 4(\cos c \cos \theta + \cosh q - 2(\cos c \cos \theta - \cosh q)\eta\mu - 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(\cos c - \cosh q)\eta\rho + \\ &+ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(\cos c - \cosh q)\mu\xi - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\cos c - \cosh q)\xi\rho - 4(\cos c - \cosh q)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\eta\mu\xi\rho), \\ \text{str}\Lambda Q &= 4\left(\cos c \cos \theta - \cosh q + 2(\cos c - \cosh q)\sin^2\frac{\theta}{2}\xi\rho\right), \quad \text{str}(\tau_3 Q)^2 = 4(\cos 2c - \cosh 2q). \end{aligned} \quad (50)$$

Часть в действии, содержащую грассманы, мы, как обычно, раскладываем в ряд.

Как видим, у нас есть две неинтегрируемые особенности:  $\theta = 0$  и  $q = c = 0$ . Вторая из них связана с тем, что в этой точке  $Q$  многообразие перестает зависеть от других переменных и вырождается в  $Q = \Lambda$ . В точке же  $\theta = 0$  у нас тоже происходит своего рода вырождение. Действительно, поскольку в этой точке  $U_\theta = 1$ , а матрицы  $U_\psi$  и  $U_\sigma$  имеют одинаковый вид, то разные пары грассмановых переменных «вращают» матрицы  $Q$  в одну сторону, поэтому полного покрытия многообразия не происходит, что и приводит к появлению сингулярности. Это также приводит к появлению неопределенностей, которые мы обсуждали при вычислении предыдущего кроссовера. Здесь, однако, таких неопределенностей будет две. Для преодоления кажущихся противоречий мы опять-таки будем использовать условие нормировки (22). Для этого запишем

$$F = \text{str}k\Lambda Q e^{-S[Q]} = F_{00} + F_{20}\xi\rho + F_{02}\eta\nu + F_{22}\xi\rho\eta\nu + \dots, \quad (51)$$

где опять опущены члены, не вносящие вклада в среднюю плотность состояний. Тогда

$$\int FDQ = F_{00}(\theta = q = c = 0) + \int F_{20}(\theta = 0)J_m dcdq + \int F_{02}(q = c = 0)J_C d\theta + \int F_{22}Jd\theta dqdc. \quad (52)$$

Далее, после интегрирования по  $\varphi$  и по  $\theta$  мы получим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} \int \text{str}(k\Lambda Q) e^{-S[Q]} DQ &= 1 - \frac{e^{ix} \sin x}{x} + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dc (\cos c - \cosh q) \frac{\cos^2 c}{(\sin c + i \sinh q)^2} (\cos(x \cos c) - i \sin(x \cos c)) \times \\
&\quad \times \exp(\alpha(\cos 2c - \cosh 2q) + ix \cosh q) - \\
&- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dc (\cos c - \cosh q) \frac{\cos^2 c}{(\sin c + i \sinh q)^2} (\cos(x \cos c) + i \frac{\cosh q}{\cos c} \sin(x \cos c)) \times \\
&\quad \times \exp(\alpha(\cos 2c - \cosh 2q) + ix \cosh q) = \\
&= 1 - \frac{e^{ix} \sin x}{x} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dc \frac{\cos c (\sin^2 c - \sinh^2 q)}{\cos^2 c - \cosh^2 q} \sin(x \cos c) e^{ix \cosh q + \alpha(\cos 2c - \cosh 2q)}.
\end{aligned} \tag{53}$$

Взяв действительную часть, мы получаем окончательное выражения для плотности состояний

$$\begin{aligned}
\langle \rho \rangle &= 1 - \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dc \cos c \frac{\sin^2 c - \sinh^2 q}{\cos^2 c - \cosh^2 q} \times \\
&\quad \times \sin(x \cos c) \sin(x \cosh q) e^{\alpha(\cos 2c - \cosh 2q)}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Вид данной зависимости при различных значениях  $\alpha$  показан на рис.4.

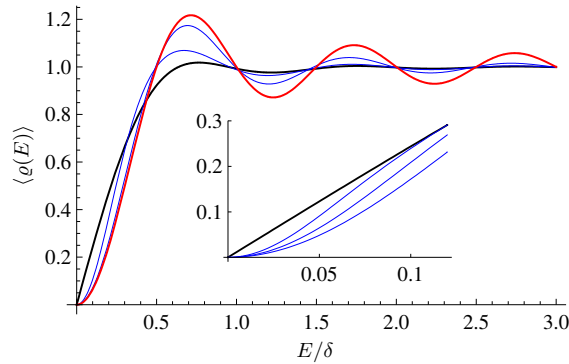


Рис. 4. Средняя плотность состояний  $\langle \rho(E) \rangle$  в кроссовере CI-C. Кривые соответствуют различным значениям параметра  $\alpha = 0, 0.2, 1, \infty$ . Вставка:  $\langle \rho(E) \rangle$  для малых отклонений от класса CI:  $\alpha = 0, 0.01, 0.025$  и  $0.05$ .

Очевидно, что при  $\alpha \rightarrow \infty$   $\langle \rho \rangle = 1 - \frac{\sin 2x}{2x}$ , что совпадает с правильным результатом для C класса.

Можно показать (см. Приложение), что при  $\alpha = 0$  мы получаем правильный ответ для класса CI:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\pi}{2} (x[J_0^2(x) + J_1^2(x)] - J_0(x)J_1(x)). \quad (55)$$

Теперь рассмотрим различные предельные случаи.

### Предельный случай $\alpha \gg 1$ .

Во-первых, сделав замену  $\sin c = t$ ,  $\sinh q = p$  получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dc \cos c \frac{\sin^2 c - \sinh^2 q}{\sin^2 c + \sinh^2 q} \sin(x \cos c) \sin(x \cosh q) e^{-2\alpha(\sin^2 c + \sinh^2 q)} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-1}^1 dt \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \frac{t^2 - p^2}{t^2 + p^2} \sin(x\sqrt{1-t^2}) \sin(x\sqrt{1+p^2}) e^{-2\alpha(t^2+p^2)} \end{aligned} \quad (56)$$

Вводя полярные координаты  $t = \rho \cos \varphi$ ,  $p = \rho \sin \varphi$ , имеем

$$\begin{aligned} & \int \int \rho d\rho d\varphi \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{1+\rho^2 \sin^2 \varphi}} \sin(x\sqrt{1-\rho^2 \cos^2 \varphi}) \sin(x\sqrt{1+\rho^2 \sin^2 \varphi}) e^{-2\alpha\rho^2} = \\ & = \frac{1}{2} \int \int \rho d\rho d\varphi \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{1+\rho^2 \sin^2 \varphi}} \left( \cos\left(\frac{x\rho^2}{2}\right) - \cos\left(2x - \frac{x\rho^2}{2} \cos 2\varphi\right) \right) e^{-2\alpha\rho^2} \approx \\ & \approx \frac{1}{2} \int \int \rho d\rho d\varphi \cos 2\varphi \left( \cos\left(\frac{x\rho^2}{2}\right) - \cos 2x \cos\left(\frac{x\rho^2}{2} \cos 2\varphi\right) - \sin 2x \sin\left(\frac{x\rho^2}{2} \cos 2\varphi\right) \right) e^{-2\alpha\rho^2} = \\ & = -\frac{\sin 2x}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos 2\varphi \int_0^{\infty} d\rho^2 \sin\left(\frac{x\rho^2}{2} \cos 2\varphi\right) e^{-2\alpha\rho^2} = \\ & = -\frac{\sin 2x}{2x} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi + \frac{16\alpha^2}{x^2}} = -2\pi \frac{\sin 2x}{2x} \left( 1 - \frac{4\alpha}{\sqrt{16\alpha^2 + x^2}} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Наконец, получаем

$$\langle \rho \rangle = 1 - \frac{\sin 2x}{2x} \frac{4\alpha}{\sqrt{16\alpha^2 + x^2}}. \quad (58)$$

**Пределный случай**  $x, \alpha \ll 1$ .

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dc \cos c \frac{\sin^2 c - \sinh^2 q}{\sin^2 c + \sinh^2 q} \sin(x \cos c) \sin(x \cosh q) \exp(-2\alpha(\sin^2 c + \sinh^2 q)) &\approx \\
&\approx x \int dq \int dc \cos^2 c \frac{\sin^2 c - \sinh^2 q}{\sin^2 c + \sinh^2 q} \sin(x \cosh q) e^{-2\alpha \sinh^2 q} = \\
&= x\pi \int_0^{\infty} dq (1 - 4 \sinh q \cosh q + 4 \sinh^2 q) \sin(x \cosh q) e^{-2\alpha \sinh^2 q}. \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \int_0^{\infty} dq (1 - 4 \sinh q \cosh q + 4 \sinh^2 q) \sin(x \cosh q) e^{-2\alpha \sinh^2 q} = \\
&= \int_0^{\infty} dt (1 - 4t\sqrt{1+t^2} + 4t^2) \frac{\sin(x\sqrt{1+t^2})}{\sqrt{1+t^2}} e^{-2\alpha t^2} \approx \\
&\approx x \int_0^1 dt (1 - 4t\sqrt{1+t^2} + 4t^2) + \int_1^{\infty} dt (1 - 4t\sqrt{1+t^2} + 4t^2) \frac{\sin(x\sqrt{1+t^2})}{\sqrt{1+t^2}} e^{-2\alpha t^2} = f_1 + f_2. \quad (60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\partial f_2}{\partial x} = \int_1^{\infty} dt (1 - 4t\sqrt{1+t^2} + 4t^2) \cos(x\sqrt{1+t^2}) e^{-2\alpha t^2} \approx \\
&\approx \int_1^{\infty} dt (1 - 4t^2(1 + \frac{1}{t^2})^{\frac{1}{2}} + 4t^2) \cos(xt) e^{-2\alpha t^2} \approx \\
&\approx - \int_1^{\infty} dt \cos(xt) e^{-2\alpha t^2} \approx 1 - \int_0^{\infty} dt \cos(xt) e^{-2\alpha t^2}, \quad (61)
\end{aligned}$$

$$f_2 = \int_0^x dx' I(x') = x - \int_0^{\infty} dt \frac{\sin(xt)}{t} e^{-2\alpha t^2} = x - \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{2\alpha}}\right). \quad (62)$$

Наконец, так как  $\operatorname{erf}(t) \sim t$  при  $t \rightarrow 0$ , можно пренебречь членами  $\sim x^2$  и получить

$$\langle \rho \rangle \approx \frac{x\pi}{4} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{2\alpha}}\right). \quad (63)$$

## 7. Заключение

Целью данной работы было вычисление плотности состояний в кроссоверах между классами симметрии А-С и CI-С в SNS переходе в зависимости от величины магнитного поля, в котором находится система, и величины Андреевского кондактанса между

сверхпроводниками и металлической гранулой. Разность фаз параметра порядка между сверхпроводниками считалась равной  $\pi$ . Рассматривалась система с симметрией по отношению к вращению спина. Мы показали, что данную задачу возможно решить с помощью Ефетовской суперсимметричной сигма-модели. Нами были получены точные выражение для плотности состояний в низкоэнергетичном пределе  $E \ll E_{Th}, \Delta$ . Для расчета кроссовера А–С использовалась стандартная Ефетовская параметризация. Для расчета кроссовера СI–С была предложена соответствующая параметризация, учитывающая дополнительную симметрию системы. Полученные результаты совпадают с известными выражениями для плотности состояний в классах А, СI и С.

## А. Приложение. Предельный случай $\alpha = 0$ для кроссовера CI–С.

Покажем, что при  $\alpha = 0$  мы получаем правильный ответ для класса CI. Для этого рассмотрим функцию

$$F = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^\infty dq \cos \theta \frac{\sinh^2 q - \sin^2 \theta}{\sinh^2 q + \sin^2 \theta} e^{-ix \cos \theta} \sin(x \cosh q). \quad (64)$$

Далее разложим  $e^{-ix \cos \theta}$  по гармоникам:

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(-x) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^\infty dq \cos \theta \frac{\sinh^2 q - \sin^2 \theta}{\sinh^2 q + \sin^2 \theta} e^{ik\theta} \sin(x \cosh q) \quad (65)$$

Далее интегрируем по  $\theta$ :

$$\Pi_k(q) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos \theta \frac{\sinh^2 q - \sin^2 \theta}{\sinh^2 q + \sin^2 \theta} e^{ik\theta} = \oint \frac{dz}{2\pi iz} \frac{z^2 + 1}{2z} z^k \frac{z^2(e^{2q} + e^{-2q}) + 1 - 4z^2 + z^4}{(e^q + z)(e^q - z)(z - e^{-q})(z + e^{-q})}. \quad (66)$$

Очевидно, что  $\Pi_k$  зависят только от  $|k|$ , поэтому мы рассмотрим лишь  $k > 0$ . Также,  $q > 0$ .

$$\Pi_k(q) = e^{-kq} \sinh q - (-1)^k e^{-kq} \sinh q - \frac{\delta_{k,1}}{2}. \quad (67)$$

Ненулевой вклад дают лишь нечетные  $k$ :

$$\Pi_{2m+1}(q) = 2e^{-(2m+1)q} \sinh q - \frac{\delta_{m,0}}{2}. \quad (68)$$

Далее получаем

$$F = -4i \sum_0^\infty (-1)^m J_{2m+1}(x) \int_0^\infty dq e^{-(2m+1)q} \sin(x \cosh q) + i J_1(x) \int_0^\infty dq \sin(x \cosh q). \quad (69)$$

Данные интегралы мы взяли, используя соотношение

$$\begin{aligned} e^{-(2m+1)q} \sinh q &= (\cosh(2m+1)q - \sinh(2m+1)q) \sinh q = \\ &= \frac{\cosh 2mq - \cosh 2(m+1)q}{2} + \cosh(2m+1)q \sinh q \end{aligned} \quad (70)$$

Далее, используя соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dq e^{-(2m+1)q} \sinh q \sin(x \cosh q) &= \\ &= (-1)^m \frac{\pi}{4} [J_{2m}(x) + J_{2m+2}(x)] + \int_1^\infty d\lambda \cosh[(2m+1)\operatorname{arccosh}\lambda] \sim (x\lambda) \end{aligned} \quad (71)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k(x) J_{k+1}(x) = \frac{x}{2} [J_0^2(x) + J_1^2(x)]. \quad (72)$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} F &= -i \frac{\pi}{2} (x[J_0^2(x) + J_1^2(x)] - J_0(x)J_1(x)) - \\ &\quad - 4i \sum_0^\infty (-1)^m J_{2m+1}(x) \int_1^\infty d\lambda \cosh[(2m+1)\operatorname{arccosh}\lambda] \sin(x\lambda). \end{aligned} \quad (73)$$

Так как для любого  $m$  у подынтегрального выражения существует первообразная, которая совпадает при  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$  (после соответствующей регуляризации), то верхний предел интегрирования можно заменить на 0. Далее используем соотношение

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cos(2m+1)\phi J_{2m+1}(x) = \frac{1}{2} \sin(x \cos \phi), \quad (74)$$

после чего мы получаем

$$-2i \int_1^0 d\lambda \sin^2(x\lambda) = -i \int_1^0 d\lambda + i \int_1^0 d\lambda \cos(2x\lambda) = -i \left( -1 + \frac{\sin(2x)}{2x} \right). \quad (75)$$

Окончательно имеем

$$iF = \frac{\pi}{2} (x[J_0^2(x) + J_1^2(x)] - J_0(x)J_1(x)) + \frac{\sin(2x)}{2x} - 1. \quad (76)$$

Взяв мнимую часть и подставляя в выражение для плотности состояний (54), получаем

$$\langle \rho \rangle = \frac{\pi}{2} (x[J_0^2(x) + J_1^2(x)] - J_0(x)J_1(x)) \quad (77)$$

## Список литературы

- [1] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, Boston, 1991).
- [2] K. B. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos* (Cambridge University Press, New York, 1997).
- [3] A. Altland and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997).
- [4] A. Altland, S. Iida and K. B. Efetov, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 3545 (1993).
- [5] P. M. Ostrovsky, M. A. Skvortsov, M. V. Feigel'man, Phys. Rev. Lett. **87**, 027002 (2001).