Московский Физико-Технический Институт
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Дипломная работа
На степень бакалавра
Студента 4 курса
Сподынейко Л. А.

Неявные симметрии композитных моделей конформной теории поля

Научный руководитель
Белавин А. А.

Москва, 2012

Содержание

1 Введение

Конформная симметрия фазовых переходов второго рода была развита в работах ([1], [2]). Предложенный в этих работах подход конформного бутстрапа позволил получить ряд точно решаемых моделей, называемых минимальными. Однако остается открытым вопрос о сопоставлении минимальный моделям реальных физических систем, а так же внутренние симметрии этих моделей.

Основная целью данной работы построение композитных моделей конформной теории поля, а также нахождение их алгебры токов, которые являются генераторами симметрий этих моделей. Это построение в свою очередь важно по трем причинам. Во-первых композитная модель является новой моделью и интересна сама по себе. Во-вторых соотношение между разными моделями является важным для их классификации. И в-третьих симметрии этой композитной модели влекут за собой соотношения между характеристиками её составных частей.

В первой части данной работы дано краткое введение в конформную теорию поля. Во второй части производиться построение токов и нахождение их структурных констант, сначала в частном случае, а потом производится обобщение. В последней части исследуются следствия этих симметрий для частного случая $\mathcal{M}_3 \otimes \mathcal{M}_4$, этот случай особенно интересен тем, что в произведении моделей содержится не одна, а несколько реализаций ее составных частей.

2 Конформная теория поля

2.1 Алгебра локальных полей

Основным объектом изучения конформной теории поля является алгебра $\mathcal{A}$ локальных полей и корреляционных функций состоящих из них. Алгебра означает, что поля образуют векторное пространство, а также, что на этом пространстве введено умножение $\mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Локальность же означает, что корреляторы вида

$$\langle A_1(x_1)A_2(x_2)\dots A_N(x_N)\rangle, \tag{2.1}$$

где $A_i \in \mathcal{A}$, являются аналитическими функциями x_i с особенностями в точках x_j для любых $i \neq j$. Введем в $\mathcal{A}$ базис A_i, причем будем считать, что $A_0 = I$ (единично поле $\langle IA\rangle = \langle A\rangle$) и $\langle A_i\rangle = \delta_{i,0}$. Наконец под умножением в $\mathcal{A}$ мы будем правило, по которому в корреляционных функциях можно делать замены

$$\langle\dots A_i(x_1)A_j(x_2)\dots\rangle = \sum_k C_{ij}^k(x_1,x_2)\langle\dots A_k(x_2)\dots\rangle, \tag{2.2}$$

при x_1 достаточно близком к x_2. Нетрудно видеть, что сливая поочередно все поля можно получить любой коррелятор. Такой способ вычисления коррелятора не должен зависеть от порядка слияния, поэтому основной динамический принцип в этом формализме это независимость коррелятора от порядка слияния полей, или, что то же самое, ассоциативность алгебры $\mathcal{A}$. Это накладывает очень жесткие условие на C_{ij}^k и позволяет вычислить их в некоторых случаях.

2.2 Конформная инвариантность

Для нахождения основных следствий конформной инвариантности сделаем бесконечно малое конформное преобразование координат

$$x_\mu \to x_\mu + \varepsilon_\mu(x), \tag{2.3}$$

конформность преобразования требует

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu(x) + \partial_\nu \varepsilon_\mu(x) = g_{\mu\nu}\partial^\lambda \varepsilon_\lambda. \tag{2.4}$$

В результате такого преобразования корреляционная функция не должна измениться, поэтому

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}\langle A_1(x_1)\dots A_{i-1}(x_{i-1})\delta_\varepsilon A_i(x_i)A_{i+1}(x_{i+1})\dots A_N(x_N)\rangle + \\ \int d^2x\,\partial_\mu\varepsilon_\nu(x)\langle T^{\mu\nu}(x)A_1(x_1)\dots A_N(x_N)\rangle = 0,\end{gathered} \tag{2.5}$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии импульса, а $\delta_\varepsilon A$ обозначает вариацию поля A при преобразовании (2.3). Отметим, что в аксиоматическом подходе это выражение постулируется и является определением δA. Заметим также, что мы предполагаем $T^\mu_\mu = 0$ и $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Используя все эти тождества и переходя в комплексные координаты, а также преобразуя контура интегрирования (используя свойство локальности), нетрудно получить

$$\delta_{\varepsilon,\bar\varepsilon}A(z,\bar z) = \oint_C \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\varepsilon(\zeta)T(\zeta)A(z,\bar z) + \oint_{\overline{C}} \frac{d\bar\zeta}{2\pi i}\,\bar\varepsilon(\bar\zeta)\overline{T}(\bar\zeta)A(z,\bar z), \tag{2.6}$$

где C — контур охватывающий только z, $\overline{C}$ только $\bar z$, $T(z) = T_{zz}$, $\overline{T}(\bar z) = T_{\bar z\bar z}$, $\varepsilon(z) = \varepsilon_z$, $\bar\varepsilon(\bar z) = \varepsilon_{\bar z}$, и отметим также, что мы считаем z и $\bar z$ независимыми. Определим теперь операторы $L_n = \delta_{\varepsilon_n,0}$ и $\overline{L}_n = \delta_{0,\bar\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_n(\zeta) = (\zeta - z)^{n+1}$. Потребуем еще несколько свойств от тензора энергии-импульса, а именно при проективных преобразованиях он преобразуется как

$$T(z) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 T(w), \tag{2.7}$$

а также, что он является перестановочным с самим собой и аналитичным во всей комплексной плоскости включая $z = \infty$. Из всего этого можно установить, что $\langle T(z)T(0)\rangle \sim z^{-4}$, а также

$$\begin{aligned} T(z)T(0) &= \frac{c}{2z^4} + \frac{2T(z)}{z^2} + \frac{\partial T(z)}{z} + \mathrm{reg}, \\ \overline{T}(z)\overline{T}(0) &= \frac{\bar c}{2z^4} + \frac{2\overline{T}(z)}{z^2} + \frac{\partial \overline{T}(z)}{z} + \mathrm{reg}, \\ T(z)\overline{T}(0) &= \mathrm{reg}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где c мы будем предполагать равным $\bar c$ и называть центральным зарядом. Используя эти тождества, можно получить коммутаторы генераторов конформных преобразований

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,\,0} \\ [\overline{L}_n, \overline{L}_m] &= (n-m)\overline{L}_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,\,0} \\ [L_n, \overline{L}_m] &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Завершим наши предложения условием, что скалярное произведение

$$(A_i, A_j) = \lim_{z,\bar{z}\to\infty} \langle e^{2zL_0} e^{2\bar{z}\overline{L}_0} A_j^+(z,\bar{z}) A_i(0,0)\rangle \tag{2.10}$$

было положительно определено.

2.3 Примарные поля и их потомки

Допустим поле ϕ удовлетворяет следующим свойствам

$$\begin{aligned} &L_0\phi = \Delta\phi, \quad \overline{L}_n\phi = \bar{\Delta}\phi, \\ &L_n\phi = \overline{L}_n\phi = 0 \quad \text{при} \quad n > 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

тогда оно называется примарным с размерностями $(\Delta, \bar{\Delta})$. Его потомки это поля вида:

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_N} \overline{L}_{-m_1} \overline{L}_{-m_2} \dots \overline{L}_{-m_M} \phi, \tag{2.12}$$

где $n_i > 0$, $m_i > 0$. $\sum_i n_i$ называется левым уровнем потомка, а $\sum_i m_i$ соответственно правым. В этой связи заметим, что для произвольного поля A, которое является собственным для L_0 верно

$$(L_{-1}A, L_{-1}A) = (A, L_1 L_{-1} A) = 2\Delta_A (A, A). \tag{2.13}$$

Откуда видно, что если мы требуем, чтобы скалярное произведение было положительно определено, то $\Delta_A \geqslant 0$ для всех полей, а это означает, что все поля можно выразить в терминах примарных полей и их потомков.

Примарное поле вместе с его потомками образует модуль алгебры Вирасоро (2.9), который мы будем обозначать $\mathcal{V}_\Delta$. Важной характеристикой представления алгебры Вирасоро является его характер определяемый как

$$\chi(q) = q^{-c/24} \operatorname*{Tr}_{\mathcal{V}_\Delta} \left(q^{L_0}\right) = q^{\Delta - c/24} \sum_L P(L) q^L, \tag{2.14}$$

где $P(L)$ - размерность подпространства на уровне L. В случае отсутствия вырождения характер легко вычисляется

$$\chi(q) = \frac{q^{\Delta - c/24}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - q^k)}. \tag{2.15}$$

Найдем, используя (2.11), операторное разложение

$$T(w)\phi(z,\bar{z}) = \frac{\Delta}{(w-z)^2}\phi(z,\bar{z}) + \frac{1}{w-z}\partial\phi(z,\bar{z}) + \text{reg}, \tag{2.16}$$

а также, при помощи (2.6), закон преобразования

$$\phi(z,\bar{z}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}} \phi(w,\bar{w}), \tag{2.17}$$

при конформных преобразованиях координат.

С помощью этого закона установить вид некоторых корреляционных функций примарных полей.

Двухточечные:

$$\langle \phi_1(z,\bar{z})\phi_2(0,0)\rangle = \mathbb{C}_{12}\delta_{\Delta_1,\,\Delta_2}\delta_{\bar{\Delta}_1,\,\bar{\Delta}_2} z^{-2\Delta_1} z^{-2\bar{\Delta}_1}. \tag{2.18}$$

Трехточечные:

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\rangle = \mathbb{C}_{123}(z_{12})^{\gamma_3}(z_{13})^{\gamma_2}(z_{23})^{\gamma_1}(\bar{z}_{12})^{\bar{\gamma}_3}(\bar{z}_{13})^{\bar{\gamma}_2}(\bar{z}_{23})^{\bar{\gamma}_1}, \tag{2.19}$$

где $z_{ij} = z_i - z_j$, $\gamma_i = \Delta_i - \Delta$, $\bar{\gamma}_i = \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$, $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 + \bar{\Delta}_3$.

Четырехточечные:

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle = G^{12}_{34}(x,\bar{x})\prod_{i<j} z_{ij}^{\Delta/3-\Delta_i-\Delta_j}\bar{z}_{ij}^{\bar{\Delta}/3-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j}, \tag{2.20}$$

где $G^{12}_{34}(x,\bar{x})$ — некоторая функция, $\Delta = \sum \Delta_i$, $\bar{\Delta} = \sum \bar{\Delta}_i$, $x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}$, $z_{ij} = z_i - z_j$.

В заключение отметим, что все корреляционные функции потомков выражаются через соответствующие корреляторы примарных полей. Мы не будем объяснять как это можно сделать, а приведем лишь один пример, который понадобиться нам в дальнейшем.

$$\begin{aligned}
&\langle L_{-n}A_0(z,\bar{z})\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle = \\
&\quad = \oint\limits_{C_0}\frac{d\zeta}{2\pi i}(\zeta - z)^{1-n}\langle T(\zeta)A_0(z,\bar{z})\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle = \\
&\quad = -\sum_{i=1}^{N}\oint\limits_{C_i}\frac{d\zeta}{2\pi i}(\zeta - z)^{1-n}\langle T(\zeta)A_0(z,\bar{z})\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{(n-1)\Delta_i}{(z_i - z)^n} - \frac{1}{(z_i - z)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\langle A_0(z,\bar{z})\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\phi_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

где C_i - контур вокруг z_i, а во втором равенстве мы перекинули контур интегрирования и заметем разложили $(\zeta - z)^{1-n}$ по $\zeta - z_i$.

2.4 Конформный бутстрап

Основной динамический принцип конформной теории поля - это условие ассоциативности операторной алгебры, или, другими словами, независимость коррелятора от порядка слияния в нем полей. Выпишем операторное разложение с учетом ограничений наложенных конформной симметрией:

$$\phi_1(z,\bar{z})\phi_2(0,0) = \sum_l \mathbb{C}^l_{12} z^{\Delta_l - \Delta_1 - \Delta_2}\bar{z}^{\bar{\Delta}_l - \bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2}\Psi_l, \tag{2.22}$$

где

$$\Psi_l = \phi_l(0,0) + \beta_1 z L_{-1}\phi_l(0,0) + \bar{\beta}_1\bar{z}\bar{L}_{-1}\phi_l(0,0) + \dots. \tag{2.23}$$

Коэффициенты β_i полностью определяются конформной симметрией и являются функциями от Δ_l, Δ_1, Δ_2, c. Напишем теперь четырехточечную функцию

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle. \tag{2.24}$$

Условия ассоциативности записываются как следующее требование для $G_{34}^{12}(x,\bar{x})$ в (2.20)

$$G_{34}^{12}(x,\bar{x}) = G_{31}^{42}(1-x,1-\bar{x}). \tag{2.25}$$

Сливая теперь поля $\phi_1\phi_2$ и $\phi_3\phi_4$ получим

$$G_{34}^{12}(x,\bar{x}) = \sum_l \mathbb{C}_{12}^l \mathbb{C}_{34}^l \langle \Psi_l^{12} | \Psi_l^{34} \rangle x^{2\Delta_l - \sum \Delta_i} \bar{x}^{2\Delta_l - \sum \Delta_i} = \tag{2.26}$$

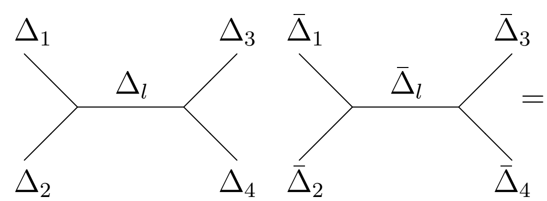
$$= \sum_l \mathbb{C}_{12}^l \mathbb{C}_{34}^l \mathcal{F}(c,\Delta_l,\Delta_i|x)\mathcal{F}(c,\bar{\Delta}_l,\bar{\Delta}_i|\bar{x}), \tag{2.27}$$

где функция

$$\mathcal{F}(c,\Delta,\Delta_i|x) = \sum_{(k),(k')} x^{\sum_i k_i + \sum_i k'_i} \beta_{12}^{l,(k)} \beta_{12}^{l,(k')} \langle l | L_{k'_N} \dots L_{k'_1} L_{-k_1} \dots L_{-k_N} | l \rangle. \tag{2.28}$$

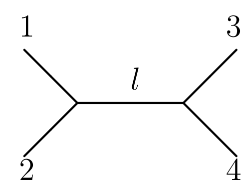
называется конформным блоком. Удобно эти функции изображать в виде диаграмм

$$\mathcal{F}(c,\Delta_l,\Delta_i|x)\mathcal{F}(c,\bar{\Delta}_l,\bar{\Delta}_i|\bar{x}) =$$



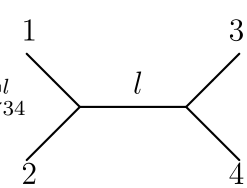
$$= \tag{2.29}$$

$$=$$

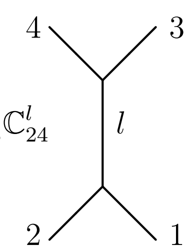


Тогда уравнения ассоциативности (2.25) можно символически изобразить как

$$\sum_l \mathbb{C}_{12}^l \mathbb{C}_{34}^l$$



$$= \sum_l \mathbb{C}_{13}^l \mathbb{C}_{24}^l \tag{2.30}$$



Диаграммы слева и справа называются соответственно s-канальной и t-канальной.

2.5 Минимальные модели

Рассмотрим представление алгебры Вирасоро $\mathcal{V}_\Delta$ со старшим весом Δ. Допустим, что на уровне N существует вектор $|\chi\rangle$ такой, что

$$L_n|\chi\rangle = 0 \quad \text{для } n > 0, \tag{2.31}$$

тогда представление $\mathcal{V}_\Delta$ приводимо и называется вырожденным, а вектор $|\chi\rangle$ - нуль-вектором. $\mathcal{V}_\Delta$ можно факторизовать пологая $|\chi\rangle = 0$, получая в итоге невырожденное представление. Отметим, что это делать необходимо для того, чтобы скалярное произведение было положительно определено, т.к. $(\chi,\chi)=0$. Перед тем как описать все размерности, при которых возникает вырождение, введем несколько удобных обозначений

$$\alpha_{\pm}=\frac{\sqrt{1-c}\pm\sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}, \tag{2.32}$$

$$\Delta_0=-\frac{1}{4}(\alpha_++\alpha_-)^2=\frac{c-1}{24}, \tag{2.33}$$

$$\Delta_{(\alpha)}=\Delta_0+\frac{1}{4}\alpha^2, \tag{2.34}$$

$$\Delta_{(m,n)}=\Delta_0+\frac{1}{4}(m\alpha_++n\alpha_-)^2. \tag{2.35}$$

Представление $\mathcal{V}_\Delta$ является вырожденным, если $\Delta=\Delta_{(m,n)}$ при некоторых положительных m,n, причем нуль-вектор находится на уровне $N=mn$. Все корреляционные функции вида

$$\langle\phi_{(m,n)}(z)\phi_1(z_1)\dots\phi_N(z_N)\rangle, \tag{2.36}$$

являются решениями дифференциальных уравнения порядка mn. Покажем как составляются эти уравнения на примере $\phi_{(1,2)}$. Этому соответствует нуль-вектор

$$\chi=\left(L_{-2}-\frac{3}{2(2\Delta_{(1,2)}+1)}L_{-1}^2\right)\Phi_{(1,2)}. \tag{2.37}$$

Используя теперь, что $L_{-1}=\partial_z$, а действие L_{-2} можно вычислить, используя (2.21), получаем

$$\begin{aligned}\left\langle\left(L_{-2}-\frac{3}{2(2\Delta_{(1,2)}+1)}L_{-1}^2\right)\phi_{(1,2)}(z,\bar z)\phi_1(z_1,\bar z_1)\dots\phi_N(z_N,\bar z_N)\right\rangle=\\ \left(\frac{3}{2(2\Delta_{(1,2)}+1)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\Delta_i}{(z_i-z)^n}+\frac{1}{(z-z_i)}\frac{\partial}{\partial z_i}\right]\right)\times\\ \times\langle\phi_{(1,2)}(z,\bar z)\phi_1(z_1,\bar z_1)\dots\phi_N(z_N,\bar z_N)\rangle=0.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Эти уравнения накладывают определенные ограничения на размерности полей, которые могут появиться в правой части разложения (2.2) для вырожденных полей, а именно

$$\phi_{(m,n)}\phi_{(\alpha)}=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}[\phi_{(\alpha+(2l-n+1)\alpha_--+(2k-m+1)\alpha_+)}], \tag{2.39}$$

в случае, если ϕ_α не вырождено и

$$\phi_{(m_1,n_1)}\phi_{(m_2,n_2)}=\sum_{l=0}^{l_0}\sum_{k=0}^{k_0}[\phi_{(m_0+2l,\,n_0+2k)}], \tag{2.40}$$

в случае вырождения. Здесь

$$\begin{aligned} m_0&=|m_1-m_2|+1, & n_0&=|n_1-n_2|+1,\\ l_0&=\min(m_1,m_2)-1, & k_0&=\min(n_1,n_2)-1,\end{aligned}$$

а $[\phi]$ означает вклад конформного класса. Отметим, что вырожденные поля образуют подалгебру относительно операторного разложение. Такие подалгебры мы будем назвать обобщенной минимальной моделью.

При определенных значениях центрального заряда существуют подалгебры содержащие <u>конечное</u> число примарных полей. А именно при

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \tag{2.41}$$

поля с размерностями

$$\Delta_{(m,n)} = \frac{(np - mq)^2 - (p-q)^2}{4pq} \tag{2.42}$$

образуют подалгебру относительно операторного разложения. Выражение (2.42) обладает симметрией $\substack{p \leftrightarrow q \\ m \leftrightarrow n}$, а также

$$\begin{aligned} \Delta_{(p+m,q+n)} &= \Delta_{(m,n)} \\ \Delta_{(p-n,q-n)} &= \Delta_{(m,n)}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

и, следовательно, их количество $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$. Набор этих полей называют минимальной моделью и обозначают

$$\mathcal{M}\left(p/q\right) = \frac{1}{2} \bigoplus_{m=1}^{p-1} \bigoplus_{n=1}^{q-1} [\phi_{(m,n)}] \tag{2.44}$$

В данной работе нас будет интересовать две модели из серии $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}(p/(p+1))$. Опишем кратко их свойства.

Модель $\mathcal{M}_3$ описывает критическую модели Изинга. Таблица размерностей $\Delta_{(m,n)}$ для нее

$$m \uparrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1/2 & 1/16 & 0 \\ \hline 0 & 1/16 & 1/2 \\ \hline \end{array} \atop \xrightarrow{\quad n \quad} \tag{2.45}$$

а значение $c = \frac{1}{2}$.

Введем обозначения для полей

(m,n)	Размерность	Обозначение
$(1,1)$ или $(2,3)$	0	I
$(1,2)$ или $(2,2)$	1/16	σ
$(1,3)$ или $(2,1)$	1/2	ε

Их операторные разложения

$$\begin{aligned} I \cdot \varepsilon &= [\varepsilon], \quad & \varepsilon \cdot \varepsilon &= [I], \\ I \cdot \sigma &= [\sigma], \quad & \varepsilon \cdot \sigma &= [\sigma], \\ I \cdot I &= [I], \quad & \sigma \cdot \sigma &= [I] + [\varepsilon]. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Теперь напишем кратко о модели $\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}(4/5)$. Ее спектр размерностей $\Delta_{(m,n)}$

$$m \uparrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3/2 & 3/5 & 1/10 & 0 \\ \hline 7/16 & 3/80 & 3/80 & 7/16 \\ \hline 0 & 1/10 & 3/5 & 3/2 \\ \hline \end{array} \atop \xrightarrow{\quad n \quad} \tag{2.47}$$

Введем обозначение для полей

(m,n)	Размерность	Обозначение	Сектор
$(1,1)$ или $(3,4)$	0	I	-
$(1,2)$ или $(3,3)$	1/10	N_-	NS
$(1,3)$ или $(3,2)$	3/5	N_+	NS
$(1,4)$ или $(3,1)$	3/2	G	-
$(2,1)$ или $(2,4)$	7/16	R_+	R
$(2,2)$ или $(2,3)$	3/80	R_-	R

Операторные разложения

$$\begin{aligned}
N_-\cdot N_- &= [I]+[N_+], & N_-\cdot R_- &= [R_-]+[R_+],\\
N_-\cdot N_+ &= [N_-]+[G], & N_-\cdot R_+ &= [N_-],\\
N_-\cdot G &= [N_+], & N_+\cdot R_- &= [R_-]+[R_+],\\
N_+\cdot N_+ &= [I]+[N_+], & N_+\cdot R_+ &= [R_-],\\
N_+\cdot G &= [N_-], & G\cdot R_- &= [R_-],\\
G\cdot G &= [I], & G\cdot R_+ &= [R_-],
\end{aligned} \tag{2.48}$$

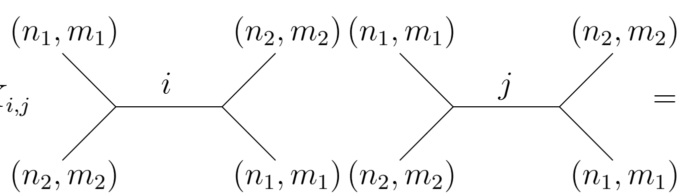
$$\begin{aligned}
R_-\cdot R_- &= [I]+[N_-]+[N_+]+[G],\\
R_-\cdot R_+ &= [N_-]+[N_+],\\
R_+\cdot R_+ &= [I]+[G].
\end{aligned}$$

2.6 Решение уравнений ассоциативности для минимальных моделей

В этом пункте мы опишем способ нахождения структурных констант в минимальных моделях с помощью требования монодромии на всей комплексной плоскости, с целью его использования в дальнейшем. Рассмотрим четырехточечный коррелятор следующего вида

$$\langle \phi_{(n_1,m_1)}(0,0)\phi_{(n_2,m_2)}(z,\bar z)\phi_{(n_1,m_1)}(1,1)\phi_{(n_2,m_2)}(\infty,\infty)\rangle =$$

$$= \sum_{i,j} X_{i,j}$$



$$= \sum_{i,j} X_{i,j} F_i(z)\overline{F_j(z)}, \tag{2.49}$$

здесь правые и левые размерности полей $\phi_{(n,m)}$ совпадают, i,j нумеруют все промежуточные поля, а $I_i(z)$ решения дифференциального уравнения, которые имеют простые свойства при обходе вокруг $z=0$ (это соответствует s-канальному разложению в (2.30)). Для того, чтобы коррелятор был однозначен вокруг $z=0$, выберем $X_{i,j}=X_i\delta_{i,j}$. Для исследования монодромии около $z=1$ удобно сделать преобразования $F_i(z)=\sum_j M_{ij}H_j(1-z)$, где матрицы перехода M_{ij} найдены в работе [4], а $H_j(1-z)$ имеют простую монодромию при обходе вокруг $z=1$ (это соответствует t-канальному разложению в (2.30)). Используя это и опять полагая недиагональные члены равными нулю, получим

$$\sum_i X_i M_{ij} M_{ik} = 0, \quad \text{при} \quad k \neq j. \tag{2.50}$$

Эти уравнения определяют X_i, и соответственно решают условия ассоциативности. Для вычисление структурных констант исследуем как ведет себя одно из слагаемых в корреляторе (2.49) при $z \to 0$. С одной стороны, если мы сначало сольем в нем первые два поля, а потом применим (2.19), то получим $\left(\mathbb{C}^{(n_3,m_3)}_{(n_1,m_1)(n_2,m_2)}\right)^2 |z|^{2\lambda}$. С другой стороны, если мы рассмотрим член $X_i F_i(z) F_i(z)$ в правой части (2.49), соответствующий полю $i = (n_3, m_3)$, то получим $X_i N_i^2$, где

$$F_i(z) \to N_i z^{\lambda}(1 + \dots) \quad \text{при} \quad z \to 0. \tag{2.51}$$

Используя эти соображения, легко получить

$$\mathbb{C}^{(n_3,m_3)}_{(n_1,m_1)(n_2,m_2)} = \sqrt{X_i N_i^2}. \tag{2.52}$$

2.7 Конформный бутстрап для поля $\phi_{(1,2)}$

Рассмотрим корреляционные функции следующего вида

$$\langle \phi_{(1,2)}(z,\bar{z}) \phi_1(z_1,\bar{z}_1) \phi_2(z_2,\bar{z}_2) \phi_3(z_3,\bar{z}_3) \rangle. \tag{2.53}$$

Они подчиняются следующему дифференциальному уравнению

$$\left\{ \frac{3}{2(2\Delta_{(1,2)}+1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\Delta_i}{(z-z_i)} + \frac{1}{z-z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right] \right\} \langle \phi_{(1,2)}(z,\bar{z}) \phi_1(z_1,\bar{z}_1) \phi_2(z_2,\bar{z}_2) \phi_3(z_3,\bar{z}_3) \rangle = 0. \tag{2.54}$$

Для удобства сделаем проективное преобразование $z \to z, z_1 \to 0, z_2 \to 1, z_3 \to \infty$ и введем обозначение $x = \frac{z_{12} z_{34}}{z_{14} z_{32}}$, где $z_{ij} = z_i - z_j$. Тогда уравнение перейдет в

$$\left[\frac{3}{2(2\Delta+1)} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1-2x}{x(1-x)} \frac{d}{dx} - \frac{\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3}{x(1-x)} - \frac{\Delta_1}{x^2} - \frac{\Delta_2}{(1-x)^2} \right] G^{23}_{(1,2),1}(x,\bar{x}) = 0. \tag{2.55}$$

Два независимых решения этого уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(-)} &= \mathcal{F}\begin{pmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_{(1,2)} & \Delta_1 \end{pmatrix}(\Delta_{(-)}|x) = x^{\beta_1}(1-x)^{\beta_2} F(a,b,c,x), \\ \mathcal{F}_{(+)} &= \mathcal{F}\begin{pmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Delta_{(1,2)} & \Delta_1 \end{pmatrix}(\Delta_{(+)}|x) = x^{1-c+\beta_1}(1-x)^{\beta_2} F(a+1-c, b+1-c, 2-c, x). \end{aligned} \tag{2.56}$$

где $\Delta_{(-)} = \Delta(\alpha_1 - \alpha_-)$ и $\Delta_{(+)} = \Delta(\alpha_1 + \alpha_-)$. А также здесь мы ввели обозначения

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \Delta(\alpha_1 - \alpha_-) - \Delta(\alpha_1) - \Delta_{(1,2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_-(\alpha_1 + \alpha_-), \\ \beta_2 &= \Delta(\alpha_2 - \alpha_-) - \Delta(\alpha_2) - \Delta_{(1,2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_-(\alpha_2 + \alpha_-), \\ c &= 1 - \Delta(\alpha_1 + \alpha_-) + \Delta(\alpha_1 - \alpha_-) = 1 - \alpha_1 \alpha_-, \\ 2a &= 1 - \alpha_-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ 2b &= 1 - \alpha_-(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Для вычислений матриц перехода M_{ij}, можно воспользоваться известной формулой

$$\begin{aligned} F(A,B,C,z) = & \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} F(A,B,A+B+1-C,1-z) + \\ & + \frac{\Gamma(C)\Gamma(A+B-C)}{\Gamma(A)\Gamma(B)} (1-z)^{C-A-B} F(C-A,C-B,C+1-A-B,1-z) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Заметим также, что все формулы в этом разделе можно не изменять, если сделать замену $\phi_{(1,2)} \to \phi_{(2,1)}$, $\alpha_- \to -\frac{1}{\alpha_-}$.

2.8 Тензорное произведение конформных теорий

В этой работе основным предметом рассмотрения будет тензорное произведение теории $\mathcal{M}_3 \otimes \mathcal{M}_4$. Под этим понимается тензорное произведение теорий как модулей алгебры Вирасоро, т.е.

$$\begin{aligned} L_n\left(\phi_1^{(3)} \otimes \phi_2^{(4)}\right) &= \left(L_n\phi_1^{(3)}\right) \otimes \phi_2^{(4)} + \phi_1^{(3)} \otimes \left(L_n\phi_2^{(4)}\right), \\ \left(a\phi_1^{(3)}\right) \otimes \left(b\phi_2^{(4)}\right) &= ab\left(\phi_1^{(3)} \otimes \phi_2^{(4)}\right), \\ \left(\phi_1^{(3)} \otimes \phi_2^{(4)}\right)\left(\phi_3^{(3)} \otimes \phi_4^{(4)}\right) &= \left(\phi_1^{(3)}\phi_3^{(3)}\right) \otimes \left(\phi_2^{(4)}\phi_4^{(4)}\right). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Заметим, что структура операторных разложений не наследуется, поэтому структурные константы должны быть вычислены заново. Отметим также, что дифференциальные уравнения для конформных блоков сохраняются, поэтому четырехточечная корреляционная функция тензорного произведения равна сумме произведений конформных блоков минимальных моделей. Далее знак $\otimes$ мы будем опускать.

Основным предметом рассмотрения в этой работе будет теория

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{M}_3 \otimes \mathcal{M}_4\right), \tag{2.60}$$

где $\mathcal{P}$ проекция, которая подразумевает что из всех полей вида $\phi^{(3)}_{(m,n)}\phi^{(4)}_{(p,q)}$ мы будем оставлять только $\phi^{(3)}_{(n,p)}\phi^{(4)}_{(p,m)}$. Основной нашей целью будем построение токов этой модели. В данном случае можно построить ток свободных фермионов (аналогичный току в $\mathcal{M}_3$) и суперток (аналогичный току из $\mathcal{M}_4$). "Старые"токи мы будем обозначать маленькими буквами ψ и g, а "новые"большими Ψ и G. Начнем с тока свободных фермионов. Как видно из (2.59) размерность произведения полей равна их сумме, поэтому единственный не тождественный вариант для этого это

$$\Psi = \phi^{(3)}_{(1,2)}\phi^{(4)}_{(2,1)} \tag{2.61}$$

3 Построение токов

3.1 Решение уравнений ассоциативности для случая свободных фермионов

Пользуясь обозначениями и результатами раздела 2.7, напишем общий вид коррелятора вида

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi\Psi\Psi\Psi\rangle = C^{++}\mathcal{F}^{(3)}_{(+)}(x)\mathcal{F}^{(4)}_{(+)}(x) + C^{+-}\mathcal{F}^{(3)}_{(+)}(x)\mathcal{F}^{(4)}_{(-)}(x)+ \\
+ C^{-+}\mathcal{F}^{(3)}_{(-)}(x)\mathcal{F}^{(4)}_{(+)}(x) + C^{--}\mathcal{F}^{(3)}_{(-)}(x)\mathcal{F}^{(4)}_{(-)}(x)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(3)}_{(+)} &= x^{\frac{3}{8}}(1-x)^{-\frac{1}{8}}F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2},x\right), \\
\mathcal{F}^{(3)}_{(-)} &= x^{-\frac{1}{8}}(1-x)^{-\frac{1}{8}}F\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},x\right), \\
\mathcal{F}^{(4)}_{(+)} &= x^{\frac{5}{8}}(1-x)^{-\frac{7}{8}}F\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{5}{2},x\right), \\
\mathcal{F}^{(4)}_{(-)} &= x^{-\frac{7}{8}}(1-x)^{-\frac{7}{8}}F\left(-\frac{7}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},x\right).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Для того, чтобы коррелятор был однозначным при обходе вокруг $x=0$ необходимо положить $C^{+-}=C^{-+}=0$. Чтобы проверить однозначность вокруг $x=1$, аналитически продолжим коррелятор по формуле (2.58)

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi\Psi\Psi\Psi\rangle = C^{++}\Big[\quad & \frac{8}{7}F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2},1-x\right)F\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4},-\frac{1}{2},1-x\right)x(1-x)^{-1}- \\
& -F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2},1-x\right)F\left(\frac{11}{4},\frac{5}{4},\frac{5}{2},1-x\right)x(1-x)^{\frac{1}{2}}- \\
& -\frac{4}{7}F\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2},1-x\right)F\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4},-\frac{1}{2},1-x\right)x(1-x)^{-\frac{1}{2}}+ \\
& +\frac{1}{2}F\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2},1-x\right)F\left(\frac{11}{4},\frac{5}{4},\frac{5}{2},1-x\right)x(1-x) \quad \Big]+ \\
+C^{--}\Big[\quad & \frac{1}{2}F\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1-x\right)F\left(-\frac{7}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},1-x\right)x^{-1}(1-x)^{-1}+ \\
& +\frac{7}{16}F\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1-x\right)F\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4},\frac{5}{2},1-x\right)x^{-1}(1-x)^{\frac{1}{2}}+ \\
& +\frac{1}{4}F\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{2},1-x\right)F\left(-\frac{7}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},1-x\right)x^{-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}})- \\
& -\frac{7}{32}F\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{2},1-x\right)F\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4},\frac{5}{2},1-x\right)x^{-1}(1-x) \quad \Big]
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Пользуясь свойствами гипергеометрических функций

$$
\begin{aligned}
F(a,b,c,x) &= F(b,a,c,x), \\
F(a,b,c,x) &= (1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c,x),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

заметим, что второй и третий члены в обоих скобках сокращаются, если $C^{++} = \frac{7}{16}C^{--}$. Выбирая подходящую нормировку получим структурную константу

$$\Psi\Psi = [I] + \sqrt{\frac{7}{16}}\left[\phi^{(3)}_{(1,3)}\phi^{(4)}_{(3,1)}\right] \tag{3.5}$$

3.2 Вычисление токов и тензоров энергии-импульса

В этой части мы хотим найти токи Ψ, G и соответствующие им тензоры энергии-импульса T^{Ψ}, T^{G}, исходя из того, что поля должны удовлетворять следующим операторным разложениям

$$\begin{aligned}
\Psi(z)\Psi(0) &= \frac{1}{z} + 2zT^{\Psi}(0) + \ldots, \\
G(z)G(0) &= \frac{7}{15z^3} + \frac{2}{z}T^{G}(0) + \ldots, \\
T^{\Psi}(z)T^{\Psi}(0) &= \frac{1}{4z^4} + \frac{2T^{\Psi}(0)}{z^2} + \frac{\partial T^{\Psi}(0)}{z} + \ldots, \\
T^{G}(z)T^{G}(0) &= \frac{7}{20z^4} + \frac{2T^{G}(0)}{z^2} + \frac{\partial T^{G}(0)}{z} + \ldots, \\
T^{\Psi}(z)\Psi(0) &= \frac{\Psi(0)}{2z^2} + \frac{\partial\Psi(0)}{z} + \ldots, \\
T^{G}(z)G(0) &= \frac{3G(0)}{2z^2} + \frac{\partial G(0)}{z} + \ldots, \\
G(z)\Psi(0) &= \mathrm{reg}, \\
T^{G}(z)\Psi(0) &= \mathrm{reg}, \\
T^{\Psi}(z)T^{G}(0) &= \mathrm{reg}, \\
T^{\Psi}(z)G(0) &= \mathrm{reg}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Начнем с вычислений для поля Ψ. Полагая его $\phi^{(3)}_{(1,2)}\phi^{(4)}_{(2,1)}$, найдем его разложение с самим собой

$$\begin{aligned}
\Psi(z)\Psi(0) &= \frac{1}{z}\left[\phi^{(3)}_{(1,1)}(0)\phi^{(4)}_{(1,1)}(0)\right] + \sqrt{\frac{7}{16}}z\left[\phi^{(3)}_{(1,3)}(0)\phi^{(4)}_{(3,1)}(0)\right] = \\
&= \frac{1}{z} + 2z\left\{\frac{1}{8}T^{(3)}(0) + \frac{5}{8}T^{(4)}(0) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{16}}\phi^{(3)}_{(1,3)}(0)\phi^{(4)}_{(3,1)}(0)\right\} + \ldots.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

В первой строке мы использовали результаты раздела (3.1). Используя уравнение (3.6), получаем:

$$T^{\Psi} = \frac{1}{8}T^{(3)}(0) + \frac{5}{8}T^{(4)}(0) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{16}}\phi^{(3)}_{(1,3)}(0)\phi^{(4)}_{(3,1)}(0). \tag{3.8}$$

Далее будем искать G в виде

$$G = \alpha\phi^{(3)}_{(1,2)}\partial\phi^{(4)}_{(2,1)} + \beta\partial\phi^{(3)}_{(1,2)}\phi^{(4)}_{(2,1)}. \tag{3.9}$$

Заметим, что решать уравнения ассоциативности для G не нужно, т.к. коррелятор $\langle GGGG\rangle$ получается из $\langle\Psi\Psi\Psi\Psi\rangle$ взятием производных ∂_i и умножениями на z_i, которые сохраняют однозначность коррелятора. Поэтому из однозначности $\langle\Psi\Psi\Psi\Psi\rangle$ следует однозначность $\langle GGGG\rangle$. Для определения α, β потребуем, чтобы $L_1G=0$ (условие примарности). Выбирая нормировку получим:

$$G=\frac{i}{\sqrt{15}}\left(\phi^{(3)}_{(1,2)}\partial\phi^{(4)}_{(2,1)}-7\,\partial\phi^{(3)}_{(1,2)}\phi^{(4)}_{(2,1)}\right). \tag{3.10}$$

Рассмотрим теперь разложение $G(z)G(0)$.

$$G(z)G(0)=\frac{7}{15z^3}+2\frac{1}{z}\left(\frac{7}{8}T^{(3)}(0)+\frac{3}{8}T^{(4)}(0)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{16}}\phi^{(3)}_{(1,3)}\phi^{(4)}_{(3,1)}\right)+\ldots. \tag{3.11}$$

Отсюда получаем:

$$T^G=\frac{7}{8}T^{(3)}(0)+\frac{3}{8}T^{(4)}(0)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{16}}\phi^{(3)}_{(1,3)}\phi^{(4)}_{(3,1)}. \tag{3.12}$$

Теперь,когда мы нашли тензора энергии импульса, несложными вычислениями можно доказать все разложения в (3.6).

3.3 Вычисление структурных констант

В этом разделе мы опишем построение однозначных корреляционной функции для алгебры токов, а также вычисление их структурных констант с помощью обобщения метода из раздела 3.1. Этот метод применим, как мы увидим в конце этого раздела, к достаточно широкому классу моделей.

Для начала введем несколько удобных обозначений

$$\begin{aligned}
\alpha_{kl}&=\frac{1}{2}\left[(1-k)\alpha_++(1-l)\alpha_-\right],\quad \alpha_+\alpha_-=-1,\\
\mathfrak{a}_{kl}&=2\alpha_-\alpha_{kl}=k-1+(1-l)\alpha_-^2,\\
\widetilde{\mathfrak{a}}_{kl}&=2\alpha_+\alpha_{kl}=l-1+(1-k)\alpha_+^2,\\
\widetilde{\rho}&=\alpha_+^2,\quad \rho=\alpha_-^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

В этом разделе мы будем вычислять структурные константы произведения N обобщенных минимальных моделей, центральные заряды которых связанны соотношением

$$\left(\alpha_-^{(k)}\right)^2+\left(\alpha_+^{(k+1)}\right)^2=2. \tag{3.14}$$

Для простоты мы начнем со случая двух теорий. Рассмотрим коррелятор

$$\langle\phi_p\phi_q\phi_p\phi_q\rangle, \tag{3.15}$$

где $\phi_p=\phi^{(1)}_{1p}\phi^{(2)}_{p1}$, $\phi_q=\phi^{(1)}_{1q}\phi^{(2)}_{q1}$. Сливая первые два поля мы получим поля вида

$$\phi^{(1)}_{1,p+q-2i+1}\phi^{(2)}_{p+q-2j+1,1}. \tag{3.16}$$

Соответственно общий вид четырехточки

$$\sum_{i,j} X_{ij} F_{1i}^{(1)} F_{j1}^{(2)} \tag{3.17}$$

Следуя нашему определению (2.60) мы должны оставить только члены с $i = j$, при этом условия однозначности в $z = 0$ будут выполнены автоматически. Теперь, чтобы учесть условие однозначности в $z = 1$, изучим более подробно M-матрицы из раздела 2.6. Напишем их более в развернутом виде. Для этого рассмотрим коррелятор (только из голоморфных полей)

$$\langle \phi_{(m,n)}^{(k)} \phi_{(s,r)}^{(k)} \phi_{(m,n)}^{(k)} \phi_{(s,r)}^{(k)} \rangle. \tag{3.18}$$

Нам будет важна зависимость конформных блоков этого коррелятора от параметров $\mathfrak{a}_{mn}$ и $\mathfrak{a}_{sr}$, которые мы для краткости обозначим просто как $\mathfrak{a}$, а также от $\widetilde{\mathfrak{a}}_{mn}$ и $\widetilde{\mathfrak{a}}_{sr}$, которые обозначим просто как $\mathfrak{a}$. s-канальные конформные блоки выражаются через t-канальные через M-матрицы

$$F_{ij}^{(k)}(\mathfrak{a}, \widetilde{\mathfrak{a}}; z) = \sum_{u,v} M_{ij,uv}^{(k)}(\mathfrak{a}, \widetilde{\mathfrak{a}}) H_{uv}^{(k)}(\mathfrak{a}, \widetilde{\mathfrak{a}}; 1 - z). \tag{3.19}$$

Нам будут важны два свойства этих матриц, которые были получены в статье [4]. Первое, что матрицы факторизуются

$$M_{ij,uv}^{(k)}(\mathfrak{a}, \widetilde{\mathfrak{a}}) = A_{iu}^{(k)}(\widetilde{\mathfrak{a}}) B_{jv}^{(k)}(\mathfrak{a}), \tag{3.20}$$

и второе, которое является следствием того, что элементы матрицы B_{ij} это произведение <u>четного</u> числа множителей вида $\sin \pi \left(P\mathfrak{a}_{mn} + R\mathfrak{a}_{sr} + S\rho\right)$, где P, R, S — целые числа, A_{ij} зависят абсолютно также, но только от $\widetilde{\mathfrak{a}}_{mn}$, $\widetilde{\mathfrak{a}}_{sr}$ и $\widetilde{\rho}$. Используя это свойство и тождества

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_{mx}^{(k)} + \widetilde{\mathfrak{a}}_{xn}^{(k+1)} = m - 1 + (1 - x)\left(\alpha_-^{(k)}\right)^2 + n - 1 + (1 - x)\left(\alpha_+^{(k+1)}\right)^2 = m + n - 2x \in 2\mathbb{Z} \\ &\rho^{(k)} + \widetilde{\rho}^{(k+1)} = \left(\alpha_-^{(k)}\right)^2 + \left(\alpha_+^{(k+1)}\right)^2 = 2 \in 2\mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

получаем

$$B_{ij}^{(k)}(\mathfrak{a}) = A_{ij}^{(k+1)}(\widetilde{\mathfrak{a}}). \tag{3.22}$$

Заметим, что при доказательстве тождеств (3.21) было очень существенно соотношение (3.14).

Описав все эти свойства, мы наконец можем записать условие монодромии вблизи $z = 1$.

$$\sum_i X_i B_{ik}^{(1)}(\mathfrak{a}_{1p}, \mathfrak{a}_{1q}) A_{il}^{(2)}(\widetilde{\mathfrak{a}}_{p1}, \widetilde{\mathfrak{a}}_{q1}) = 0, \quad \text{при} \quad k \neq l. \tag{3.23}$$

Используя теперь свойство (3.22), эту систему можно переписать в двух эквивалентных видах

$$\begin{aligned} &\sum_i X_i^{(1)} B_{ik}^{(1)}(\mathfrak{a}_{1p}, \mathfrak{a}_{1q}) B_{il}^{(1)}(\mathfrak{a}_{1p}, \mathfrak{a}_{1q}) = 0, \quad \text{при} \quad k \neq l, \\ &\sum_i \widetilde{X}_i^{(2)} A_{ik}^{(2)}(\widetilde{\mathfrak{a}}_{p1}, \widetilde{\mathfrak{a}}_{q1}) A_{il}^{(2)}(\widetilde{\mathfrak{a}}_{p1}, \widetilde{\mathfrak{a}}_{q1}) = 0, \quad \text{при} \quad k \neq l. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Мы специально переобозначили X_i, чтобы более ясна была аналогия с выражением (2.50). Как теперь нетрудно видеть, $X_i^{(k)}$ являются коэффициентами при конформных блоках для коррелятора

$$\langle \phi_{1p}^{(k)}(0,0)\phi_{1q}^{(k)}(z,\bar{z})\phi_{1p}^{(k)}(1,1)\phi_{1q}^{(k)}(\infty,\infty)\rangle. \tag{3.25}$$

Важно, что эти корреляторы имеют равную правую и левую размерности, в отличии от (3.15), у которого правая размерности равна 0. Из того что матрицы у этих трех системы равны, мы можем выбрать $X_i = X_i^{(1)} = \widetilde{X}_i^{(2)}$.

Чтобы найти теперь структурные константы напишем для моделей 1 и 2 выражение (2.52)

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{(1)}_{(1p)(1q)(1r)} &= N^{(1)}_{1r}\sqrt{X^{(1)}_r} \\ \mathbb{C}^{(2)}_{(p1)(q1)(r1)} &= N^{(2)}_{r1}\sqrt{\widetilde{X}^{(2)}_r} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Рассмотрим теперь поведение коррелятора (3.15) при $z \to 0$. С одной стороны, если слить первые два поля, а потом применить формулу (2.19), то получим $\mathbb{C}^r_{pq} z^\lambda$. С другой стороны, если мы рассмотрим его разложение на s-канальные конформные блоки, то член соответствующий r будет вести себя при $z \to 0$ как $N^{(1)}_{1r}N^{(2)}_{r1}z^\lambda$. Используя все эти замечания получаем

$$\left(\mathbb{C}^r_{pq}\right)^2 = X_i N^{(1)}_{1i}N^{(2)}_{i1} = X_i \frac{\mathbb{C}^{(1)}_{(1p)(1q)(1r)}\mathbb{C}^{(2)}_{(p1)(q1)(r1)}}{\sqrt{X^{(1)}_i\widetilde{X}^{(2)}_i}}. \tag{3.27}$$

Наконец, используя доказанное нами равенство $X_i = X_i^{(1)} = \widetilde{X}_i^{(2)}$, находим структурные константы

$$\mathbb{C}^r_{pq} = \sqrt{\mathbb{C}^{(1)}_{(1p)(1q)(1r)}\mathbb{C}^{(2)}_{(p1)(q1)(r1)}}. \tag{3.28}$$

Теперь произведем все выкладки этого раздела (с небольшими комментариями) для случая N теорий "идущих подряд". Как и ранее, мы введем проекцию $\mathcal{P}$, в том смысле, что будем допускать только голоморфные поля вида

$$J_{\{p\}} = \phi^{(1)}_{1p_1}\phi^{(2)}_{p_1p_2}\dots\phi^{(N)}_{p_{N-1}1}, \tag{3.29}$$

Рассмотрим корреляционную функцию вида

$$\langle J_{\{p\}}J_{\{q\}}J_{\{p\}}J_{\{q\}}\rangle. \tag{3.30}$$

Разложим его по s-канальным блокам, в которых проложим "соседние"индексы равными.

$$\langle J_{\{p\}}J_{\{q\}}J_{\{p\}}J_{\{q\}}\rangle = \sum_{\{i\}} X_{\{i\}}F^{(1)}_{1i_1}F^{(2)}_{i_2i_3}\dots F^{(N)}_{i_{N-1}1}. \tag{3.31}$$

Делая преобразование к t-канальным блокам и опять приравнивая "соседние"индексы, получим уравнение

$$\sum_{\{i\}} X_{\{i\}}B^{(1)}_{i_1j_1}A^{(2)}_{i_1l_1}B^{(2)}_{i_2j_2}\dots A^{(N)}_{i_{N-1}l_{N-1}} = 0, \quad \text{при хотя бы одном } j_i \neq l_i. \tag{3.32}$$

По сравнению с предыдущими случаями у нас здесь встречаются конформные блоки вида F_{ij}. Поэтому рассмотрим уравнение ассоциативности для коррелятора

$$\langle\phi^{(k)}_{(m,n)}(0,0)\phi^{(k)}_{(r,s)}(z,\bar{z})\phi^{(k)}_{(m,n)}(1,1)\phi^{(k)}_{(r,s)}(\infty,\infty)\rangle = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2} X^{(k)}_{i_1,i_2,j_1,j_2} F^{(k)}_{i_1,j_1}\overline{F^{(k)}_{i_1,j_1}}, \tag{3.33}$$

выберем $X^{(k)}_{i_1,i_2,j_1,j_2}$ так, чтобы остались только члены с $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$, и сделаем преобразование с помощью M-матриц. Получим условие

$$\sum_{i,j} X^{(k)}_{ij} A^{(k)}_{is_1} A^{(k)}_{ir_1} B^{(k)}_{js_2} B^{(k)}_{jr_2} = 0, \quad \text{при хотя бы одном } s_i \neq r_i. \tag{3.34}$$

Отсюда видно, что решение можно выбрать в виде $X^{(k)}_{ij} = \widetilde{X}^{(k)}_i X^{(k)}_j$.

Сделав это вычисление, заметим теперь что $X_{\{i\}}$ в (3.32) можно выбрать в виде $X_{\{i\}} = X^{(1)}_{i_1} X^{(2)}_{i_2} \dots X^{(N-1)}_{i_{N-1}} = \widetilde{X}^{(2)}_{i_1}\widetilde{X}^{(3)}_{i_2}\dots\widetilde{X}^{(N)}_{i_{N-1}}$. Вычисляя теперь структурные константы получим

$$\mathbb{C}^{\{r\}}_{\{p\}\{q\}} = \sqrt{\mathbb{C}^{(1)}_{(1p_1)(1q_1)(1r_1)}\mathbb{C}^{(2)}_{(p_1p_2)(q_1q_2)(r_1r_2)}\dots\mathbb{C}^{(N)}_{(p_{N-1}1)(q_{N-1}1)(r_{N-1}1)}} \tag{3.35}$$

4 Тождества для характеров и конформных блоков

4.1 Тождества для конформных блок

Как было показано в предыдущих разделах поля из теорий $\mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_4$ можно реализовать в композитной теории $\mathcal{P}(\mathcal{M}_3 \otimes \mathcal{M}_4)$. Как следствие корреляционные функции "новых"полей должны совпадать с соответствующими корреляционными функциями "старых"полей. Это позволяет находить нетривиальные соотношения между конформными блоками этих теорий. Для демонстрации этого факта, мы явно покажем равенство

$$\langle\psi\psi\psi\psi\rangle = \langle\Psi\Psi\Psi\Psi\rangle. \tag{4.1}$$

Правая часть уже была вычислена в разделе 3.1. Для того, чтобы вычислить левую воспользуемся формулами раздела 2.7 (с учетом замечания сделанного в его конце), а также заметим, что т.к.

$$\psi\psi = [I], \tag{4.2}$$

то решать уравнения ассоциативности не нужно, а можно просто взять решение гипергеометрического уравнения соответствующее I. В итоге получим

$$\langle\psi\psi\psi\psi\rangle = \langle\phi^{(3)}_{(2,1)}\phi^{(3)}_{(2,1)}\phi^{(3)}_{(2,1)}\phi^{(3)}_{(2,1)}\rangle = z^{-1}(1-z)^{-1} F\left(-2, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, z\right). \tag{4.3}$$

Равенство (4.1) переписывается теперь как

$$\begin{aligned} z^{-1}(1-z)^{-1} F\left(-2,-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},z\right) &\overset{?}{=} z^{-1}(1-z)^{-1} F\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},z\right) F\left(-\frac{7}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},z\right) + \\ &+ \frac{7}{16} z(1-z)^{-1} F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2},z\right) F\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{5}{2},z\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Мы будем доказывать это равенство, используя теорему из комплексного анализа о том, что функция регулярная во расширенной комплексной плоскости равна константе. Для этого сделаем два замечания. Первое, что гипергеометрический ряд в левой части обрывается и функция сводится соответственно к рациональному многочлену

$$z^{-1}\left(1-z\right)^{-1}F\left(-2,-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},z\right)=\frac{1-z+z^2}{z\left(1-z\right)}. \tag{4.5}$$

И второе: т.к. гипергеометрические функции имеют особенности только при $z=0$, $z=1$, $z=\infty$, нам нужно лишь доказать, что сингулярные члены (и постоянный член) совпадают в этих точках. Для удобства домножим обе части (4.4) на $z\left(1-z\right)$

$$\begin{aligned}1-z+z^2\overset{?}{=}F\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},z\right)F\left(-\frac{7}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},z\right)+\\+\frac{7}{16}z^2F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2},z\right)F\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{5}{2},z\right).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Тогда, как нетрудно видеть, при $z=0$ обе части равенства равны 1. При $z=1$, используя (3.3), обе части также равны 1. Наконец, чтобы изучить точку $z=\infty$, воспользуемся формулой

$$\begin{aligned}F\left(A,B,C,z\right)=\frac{\Gamma\left(C\right)\Gamma\left(B-A\right)}{\Gamma\left(B\right)\Gamma\left(C-A\right)}\left(-z\right)^{-A}F\left(A,A+1-C,A+1-B,\frac{1}{z}\right)+\\+\frac{\Gamma\left(C\right)\Gamma\left(A-B\right)}{\Gamma\left(A\right)\Gamma\left(C-A\right)}\left(-z\right)^{-B}F\left(B,B+1-C,B+1-A,\frac{1}{z}\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

После достаточно громоздких вычислений получим

$$\begin{aligned}F\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},z\right)&F\left(-\frac{7}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},z\right)+\frac{7}{16}z^2F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2},z\right)F\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{5}{2},z\right)=\\&=\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{i}{4}z^{3/2}-\frac{1}{2}z+\frac{5i}{8}z^{1/2}+\frac{1}{2}\right)+\\&+\frac{7}{16}z^2\left(\frac{8}{7}+\frac{4i}{7}z^{-1/2}-\frac{8}{7}z^{-1}-\frac{10i}{7}z^{-3/2}+\frac{8}{7}z^{-2}\right)+O\left(\frac{1}{z}\right)=\\&=z^2-z+1+O\left(z\right),\quad \text{при } z\to\infty,\end{aligned} \tag{4.8}$$

что в точности равно левой части (4.6).

4.2 Тождества для характеров

Тот факт что в теории $\mathcal{M}_3\otimes\mathcal{M}_4$ существует не одна, а несколько реализаций теорий $\mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_4$ означает, что в теории существует некоторая скрытая симметрия, которая в частности должна выражаться в соответствии между характерами $\chi^{(3)}$ и $\chi^{(4)}$. Попробуем угадать некоторые из них. Рассмотрим например случай размерности $\Delta=\frac{1}{10}$. Из размерностей произведений полей из двух моделей на целое число отличаются следующие комбинации

$$\begin{aligned}\Delta^{(3)}_{(1,1)}+\Delta^{(4)}_{(1,2)}&=\frac{1}{10}\\\Delta^{(3)}_{(1,2)}+\Delta^{(4)}_{(2,2)}&=\frac{1}{10}\\\Delta^{(3)}_{(1,3)}+\Delta^{(4)}_{(3,2)}&=\frac{11}{10}\end{aligned} \tag{4.9}$$

Подбирая первые коэффициенты по степеням q, предположим следующее соотношение

$$\chi^{(3)}_{(1,2)}\chi^{(4)}_{(2,2)} = \chi^{(3)}_{(1,1)}\chi^{(4)}_{(1,2)} + \chi^{(3)}_{(1,3)}\chi^{(4)}_{(3,2)}, \tag{4.10}$$

Теперь рассмотрим случай $\Delta = \frac{1}{2}$. Возможные комбинации это

$$\begin{aligned}
\Delta^{(3)}_{(2,1)} + \Delta^{(4)}_{(1,1)} &= \frac{1}{2} \\
\Delta^{(3)}_{(2,2)} + \Delta^{(4)}_{(2,1)} &= \frac{1}{2} \\
\Delta^{(3)}_{(2,3)} + \Delta^{(4)}_{(3,1)} &= \frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Отсюда можно предположить тождество для характеров

$$\chi^{(3)}_{(1,2)}\chi^{(4)}_{(2,4)} = \chi^{(3)}_{(1,3)}\chi^{(4)}_{(3,4)} + \chi^{(3)}_{(1,1)}\chi^{(4)}_{(1,4)} \tag{4.12}$$

Оба этих тождества мы проверили на компьютере до достаточного высокого порядка. Для того, чтобы интерпретировать эти тождества, сделаем некоторое отступление о представлениях алгебры свободных фермионов. Действие для свободных фермионов

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x\,\left(\psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi}\right). \tag{4.13}$$

Откуда можно найти тензор энергии-импульса и операторное разложение

$$T(z) = -\frac{1}{2} :\psi(z)\partial\psi(z):, \tag{4.14}$$

$$\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w} + \text{reg}. \tag{4.15}$$

Тут уместно заметить, что все физически измеримые величины (такие как тензор энергии-импульса и корреляционные функции) могут зависеть только от ψ в четных степенях, поэтому, вообще говоря, возможны два типа граничных условий

$$\psi(e^{2\pi i}z) = -\psi(z), \qquad \text{Рамоновский сектор (R)}, \tag{4.16}$$

$$\psi(e^{2\pi i}z) = \psi(z), \qquad \text{Навье-Шварцовский сектор (NS)}. \tag{4.17}$$

С учетом этого разложение ψ по модам может иметь два вида

$$\psi(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}} \qquad \text{(R сектор)}, \tag{4.18}$$

$$\psi(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}} \qquad \text{(NS сектор)}. \tag{4.19}$$

(4.20)

Используя (4.15), нетрудно получить антикоммутационные соотношения

$$\{\psi_n, \psi_m\} = \delta_{n+m,0}, \tag{4.21}$$

верные в обоих секторах.

Рассмотрим теперь представления со старшим весом, т.е. пусть у нас имеется вектор v, такой что

$$\psi_r v = 0 \quad \text{при } r > 0. \tag{4.22}$$

Тогда пространство порожденное векторами вида

$$\psi_{-n_1}\psi_{-n_2}\ldots\psi_{-n_N}v, \tag{4.23}$$

при $n_i \geqslant 0$, $n_i \in \mathbb{Z}$ (рамоновское представление) или $n_i \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ (Навье-Шварцовское представление), называется представлением со старшим весом алгебры свободных фермионов. Характером этого представления называется многочлен

$$\chi_\psi(q) = q^{\epsilon/16}\sum_L P(L)q^L, \tag{4.24}$$

где множитель $q^{\epsilon/16}$ мы ввели для удобства, $\epsilon = 0$ для NS-представления и $\epsilon = 1$ для R-представления, $P(L)$ — размерность подпространства на уровне L, а L пробегает по целым числам для рамоновского представления, и по целым и полуцелым для Новье-Шварцовского. Нетрудно вычислить, что

$$\chi_\psi^R(q) = 2q^{1/16}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n), \tag{4.25}$$

где множитель 2 возник из-за того, что в рамоновском секторе есть оператор ψ_0, причем $\psi_0^2 = \frac{1}{2}$. Соответственно представление разбивается на два подпространства, порожденные соответственно векторами вида

$$\begin{aligned}&\psi_{-n_1}\psi_{-n_2}\ldots\psi_{-n_N}v,\\ &\psi_{-n_1}\psi_{-n_2}\ldots\psi_{-n_N}\psi_0 v,\end{aligned} \tag{4.26}$$

где $n_i > 0$ (строго в отличии от (4.23)), а оператор ψ_0 взаимнооднозначно переводит одно в другое.

Характер NS-представления

$$\chi_\psi^{NS} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1/2}). \tag{4.27}$$

Отметим наконец связь этих выражений с характерами $\mathcal{M}_3$.

$$\chi_\psi^R = \chi_{(1,2)}^{(3)}, \tag{4.28}$$

$$\chi_\psi^{NS} = \chi_{(1,1)}^{(3)} + \chi_{(1,3)}^{(3)}. \tag{4.29}$$

Отразим аналогичные результаты для представлений со старшим весом для суперконформной алгебры $N=1$. Необходимые выкладки можно найти в статье [6]. Коммутационные соотношения для мод

$$\begin{aligned}&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0},\\ &[L_m, g_r] = \left(\frac{m}{2}-r\right)g_{m+r},\\ &\{g_r, g_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0},\end{aligned} \tag{4.30}$$

где c — центральный заряд, $n, m \in \mathbb{Z}$, а $r, s \in \mathbb{Z}$ для R-сектора и $r, s \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ для NS-сектора. Характерным отличием от случае свободных фермионов для этой алгебры является существование для нее вырожденных представлений при некоторых значениях центрального заряда. Как раз один из случаев такого вырождения нас и будет интересовать, а именно $c = \frac{7}{10}$. В этом случае существуют два рамоновских представления. Мы выразим их сразу через характеры $\mathcal{M}_4$

$$\chi_g^{R_1} = 2\chi_{(2,1)}^{(4)}, \tag{4.31}$$

$$\chi_g^{R_2} = 2\chi_{(2,2)}^{(4)}. \tag{4.32}$$

В NS-секторе также имеется два представления. Их характеры

$$\chi_g^{NS_1} = \chi_{(1,1)}^{(4)} + \chi_{(1,4)}^{(4)}, \tag{4.33}$$

$$\chi_g^{NS_2} = \chi_{(1,2)}^{(4)} + \chi_{(1,3)}^{(4)}. \tag{4.34}$$

Закончив это отступление, интерпретируем теперь равенства (4.10) и (4.12). Тот факт, что в этих равенствах присутствуют только степени q отличающиеся на целые числа наводит на мысль о том, что они соответствуют произведению рамоновских представлений алгебр "новых"реализаций алгебр ψ и g. Рассмотрим например (4.12). Заметим, что его левая часть равна

$$\chi_{(1,2)}^{(3)}\chi_{(2,4)}^{(4)} = \frac{1}{4}\chi_\Psi^R\chi_G^{R_1}. \tag{4.35}$$

Конечно же $\chi_\Psi^R = \chi_\psi^R$, но мы ввели обозначения Ψ и G, чтобы подчеркнуть, что левая часть является представлением новой алгебры. Теперь понятно происхождение равенства (4.12). Оно просто отражает уже отмеченный факт, что в рамоновском преставлении есть два подпространства, характеры которых равны, порожденные векторами v и $\Psi_0 v$, причем Ψ_0 переводит одно в другое. Чтобы явно продемонстрировать действие Ψ, напишем операторные разложения

$$\begin{aligned}
&\left(\phi_{(1,2)}^{(3)}\phi_{(2,1)}^{(4)}\right)\cdot\left(\phi_{(1,2)}^{(3)}\phi_{(2,4)}^{(4)}\right) = \left(\phi_{(1,1)}^{(3)}+\phi_{(1,3)}^{(3)}\right)\left(\phi_{(1,4)}^{(4)}+\phi_{(3,4)}^{(4)}\right) = \left[\phi_{(1,1)}^{(3)}\phi_{(1,4)}^{(4)}\right]+\left[\phi_{(1,3)}^{(3)}\phi_{(3,4)}^{(4)}\right],\\
&\left(\phi_{(1,2)}^{(3)}\phi_{(2,1)}^{(4)}\right)\cdot\left(\phi_{(1,1)}^{(3)}\phi_{(1,4)}^{(4)}\right) = \left[\phi_{(1,2)}^{(3)}\phi_{(2,4)}^{(4)}\right],\\
&\left(\phi_{(1,2)}^{(3)}\phi_{(2,1)}^{(4)}\right)\cdot\left(\phi_{(1,3)}^{(3)}\phi_{(3,4)}^{(4)}\right) = \left[\phi_{(1,2)}^{(3)}\phi_{(2,4)}^{(4)}\right],
\end{aligned} \tag{4.36}$$

где мы учли проекцию в первом равенстве. Из соотношений видно, что Ψ_0 будет взаимно-однозначно переводить вектора из правой части (4.12) в левую и обратно.

Определим теперь, какие суммы характеров соответствуют NS-представлениям Ψ и G. Для этого сделаем обобщение (4.36), а именно заметим, что под действием Ψ поля подчиняются следующему закону

$$\left(\phi_{(1,2)}^{(3)}\phi_{(2,1)}^{(4)}\right)\cdot\left(\phi_{(r,p)}^{(3)}\phi_{(p,s)}^{(4)}\right) = \left[\phi_{(r,p-1)}^{(3)}\phi_{(p-1,s)}^{(4)}\right]+\left[\phi_{(r,p+1)}^{(3)}\phi_{(p+1,s)}^{(4)}\right], \tag{4.37}$$

поэтому любое неприводимое относительно Ψ представление должно иметь характер вида

$$\sum_{p=1}^{3}\chi_{(r,p)}^{(3)}\chi_{(p,s)}^{(4)}. \tag{4.38}$$

С другой стороны так как Ψ и G это реализация тех же алгебр, что ψ и g, а также из того факта, что ψ и g коммутируют, следует, что характеры представлений вида (4.38) могут быть представлены как произведения характеров представлений ψ и g. Используя все те же равенства (4.10) и (4.12) получим

$$\begin{aligned}
\chi_{\Psi}^{NS}\chi_{G}^{NS_1} = &\; (\chi^{(3)}_{(1,1)}+\chi^{(3)}_{(1,3)})(\chi^{(4)}_{(1,1)}+\chi^{(4)}_{(1,4)}) &= \sum_{p=1}^{3}\chi^{(3)}_{(1,p)}\chi^{(4)}_{(p,1)},\\
\chi_{\Psi}^{NS}\chi_{G}^{NS_2} = &\; (\chi^{(3)}_{(1,1)}+\chi^{(3)}_{(1,3)})(\chi^{(4)}_{(1,2)}+\chi^{(4)}_{(1,3)}) &= \sum_{p=1}^{3}\chi^{(3)}_{(1,p)}\chi^{(4)}_{(p,3)},\\
\frac{1}{2}\chi_{\Psi}^{R}\chi_{G}^{R_1} = &\; 2\chi^{(3)}_{(1,2)}\chi^{(4)}_{(2,4)} &= \sum_{p=1}^{3}\chi^{(3)}_{(1,p)}\chi^{(4)}_{(p,4)},\\
\frac{1}{2}\chi_{\Psi}^{R}\chi_{G}^{R_2} = &\; 2\chi^{(3)}_{(1,2)}\chi^{(4)}_{(2,2)} &= \sum_{p=1}^{3}\chi^{(3)}_{(1,p)}\chi^{(4)}_{(p,2)}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Список литературы

[1] Поляков А. М. , Негамильтонов подход в конформной квантовой теории поля, ЖЭТФ, 66 (1974) 23.

[2] A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensianal quantum field theory, Nucl. Phys. B241, 333, (1984).

[3] Č. Crnkovic, R. Paunov,G. M. Sotkov, M. Stanoshkov, Fusion of Conformal Models, Nucl. Phys. B336, 637, (1990).

[4] Vl. S. Dotsenko, V. A. Fateev, Nucl. Phys. B240, 312, (1985).

[5] А. Б. Замолодчиков, Ал. Б. Замолодчиков, Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах, М. :Издательство МЦНМО 2009.

[6] E. Kiritsis, Int. J. Mod. Phys. A **3**, 1871 (1988).