

Московский Физико-Технический Институт
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Майорановские состояния в системе из двух вихрей

Диплом на соискание степени бакалавра

Выполнил:

студент 928 группы

Власюк А. А.

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., проф.

Фейгельман М. В.

Черноголовка, 2013

Содержание

1	Введение	3
2	Одиночный вихрь	4
2.1	Гамильтониан BdG	4
2.2	Одиночный вихрь	4
3	Двухвихревая система	8
3.1	Расщепленные состояния	8
3.2	Формула для расщепления	9
3.3	Конечный результат	11
4	Два вихря с малым током	13
4.1	Теория возмущений	13
4.2	Ток вдоль оси x	13
4.2.1	Первая поправка к E_+	14
4.2.2	Вторая поправка к E_+	16
4.3	Ток вдоль оси y	17
4.3.1	Первая поправка к E_+	17
4.3.2	Вторая поправка к E_+	17
5	Заключение	20
	Список литературы	21

1 Введение

В спектре состояний полуквантового вихря в $p_x + ip_y$ сверхпроводнике есть Майорановский уровень с точно нулевой энергией [1]. В результате в системе из многих вихрей основное состояние будет вырождено, кроме того, такие вихри подчиняются неабелевой статистике [2]. Это делает возможным использовать многовихревую систему для реализации топологических квантовых вычислений с неабелевыми анионами [3].

Вырожденность основного состояния - это критическое требование, для выполнения которого мы должны считать, что межвихревым туннелированием можно пренебречь. Если всё же учесть туннельные эффекты, то состояния с нулевой энергией расщепляются и вырождение основного состояния снимается [4, 5].

Непосредственная перестановка вихрей, как обычно подразумевают выполнение топологических квантовых вычислений, представляет собой трудность. С другой стороны, если существует способ, адиабатически меняя гамильтониан системы, изменять амплитуду туннелирования между вихрями, то его можно будет использовать для изменения волновой функцией системы необходимым для квантовых вычислений образом [6]. В данной работе рассматривается возможность управления туннельными амплитудами с помощью внешнего тока.

В первой части данной работы введен гамильтониан BdG для $p_x + ip_y$ сверхпроводника и находится состояние с нулевой энергией для одиночного вихря. Во второй части работы подробно рассматривается система из двух вихрей. Для этой системы находится расщепление энергии между невозмущенными состояниями с нулевой энергией. В последней части к системе из двух вихрей прикладывается малый однородный ток в двух различных направлениях и численно находится зависимость поправки к расщеплению в зависимости от расстояния между вихрями.

2 Одиночный вихрь

2.1 Гамильтониан BdG

Начнём наше рассмотрение с BCS гамильтониана бесспинового $p_x + ip_y$ сверхпроводника

$$H_{BCS} = \int d^2\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu \right) \Psi(\mathbf{r}) + \frac{i\hbar}{p_F} \int d^2\mathbf{r} (\Delta(\mathbf{r}) \partial_{\bar{z}} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) + h.c.) \quad (1)$$

где $z = x + iy$ комплексные координаты в двумерной плоскости. С помощью преобразования Боголюбова

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_n (\hat{\gamma}_n u_n(\mathbf{r}) + \hat{\gamma}_n^\dagger v_n^*(\mathbf{r})) \quad (2)$$

диагонализировав гамильтониан (1), получим уравнения BdG

$$H_{BdG} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$H_{BdG} = \begin{pmatrix} -\nabla^2/2m - \mu & \frac{i}{p_F} \{\Delta(\mathbf{r}), \partial_{\bar{z}}\} \\ \frac{i}{p_F} \{\Delta^*(\mathbf{r}), \partial_z\} & \nabla^2/2m + \mu \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что гамильтониан H_{BdG} имеет симметрию:

$$\sigma_1 H_{BdG} \sigma_1 = -H_{BdG}^*$$

из неё следует, что если $\Psi = (u_n, v_n)^T$ - решение уравнения (3) с энергией E_n , тогда $\sigma_1 \Psi^* = (v_n^*, u_n^*)^T$ - решение с энергией $(-E_n)$. Соответственно, для уровня с нулевой энергией $E_n = 0$ получаем, что $u = v^*$. Причем, в отличие от s -wave сверхпроводников, в $p_x + ip_y$ сверхпроводниках существует уровень с точно нулевой энергией, что было показано в работе [1].

2.2 Одиночный вихрь

Также как и в s -сверхпроводнике, одиночный полуквантовый вихрь можно смоделировать параметром порядка

$$\Delta(r, \varphi) = \Delta_0 f(r) e^{i\varphi}$$

где r и φ полярные координаты, а $f(r)$ имеет типичную зависимость $f(r) = \tanh(r/\xi)$. Здесь Δ_0 среднеполевое значение параметра порядка для однородного сверхпроводника, а ξ это корреляционная длина.

Рассмотрим уравнения BdG для одиночного вихря. Далее везде примем, что $p_F = 1$, в этих единицах гамильтониан BdG примет следующий вид (заметим, что в этих единицах нас интересует область $r \gg 1$)

$$H_{BdG} = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} -\nabla^2 - 1 & 2i/\xi \{\delta(\mathbf{r}), \partial_{\bar{z}}\} \\ 2i/\xi \{\delta^*(\mathbf{r}), \partial_z\} & \nabla^2 + 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

где введено обозначение $\delta(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r})/\Delta_0$. Напишем уравнения BdG в полярных координатах (r, φ)

$$\partial_z = \frac{1}{2} e^{-i\varphi} \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\varphi \right)$$

$$\begin{cases} (\partial_r^2 + \partial_r/r + \partial_\varphi^2/r^2 + 1)u - ie^{2i\varphi}/\xi \{2f(\partial_r + i\partial_\varphi/r)v + v(f' - f/r)\} = -2mEu \\ (\partial_r^2 + \partial_r/r + \partial_\varphi^2/r^2 + 1)v + ie^{-2i\varphi}/\xi \{2f(\partial_r - i\partial_\varphi/r)u + u(f' - f/r)\} = 2mEv \end{cases}$$

В этих уравнениях можно выделить угловую зависимость с помощью подстановки

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} u_n(r) e^{i(n+1)\varphi - i\pi/4} \\ v_n(r) e^{i(n-1)\varphi + i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad n \in Z$$

Для нулевого уровня должно соблюдаться условие $u = v^*$ и, соответственно, имеем $n = 0$. Этот случай и будет нас интересовать далее. (Решения для произвольного n приведено в [7]). Для нулевого уровня имеем

$$\begin{cases} (\partial_r^2 + \partial_r/r - 1/r^2 + 1)u + 2/\xi \left\{ f \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) v + v \frac{f'}{2} \right\} = 0 \\ (\partial_r^2 + \partial_r/r - 1/r^2 + 1)v + 2/\xi \left\{ f \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) u + u \frac{f'}{2} \right\} = 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение получается из первого заменой $u \leftrightarrow v$, поэтому имеет смысл искать решение $v = u$, где u - действительная функция (последнее вытекает из условия $v = u^*$). Таким образом мы приходим к уравнению

$$(\partial_r^2 + \partial_r/r - 1/r^2 + 1)u + 2/\xi \left\{ f \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) u + u \frac{f'}{2} \right\} = 0 \quad (5)$$

Сделаем подстановку $u(r) = \chi(r) \exp \left(-\frac{1}{\xi} \int_0^r f(r') dr' \right)$, после упрощений получаем

$$\chi'' + \frac{\chi'}{r} + \chi \left(1 - \frac{1}{r^2} - \frac{f^2(r)}{\xi^2} \right) = 0 \quad (6)$$

Рассмотрим область $r \gg \xi$. На таких расстояниях $\Delta(r, \varphi) \approx \Delta_0 e^{i\varphi}$, и соответственно $f(r) \approx 1$. Тогда действительным решением уравнения (6), удовлетворяющее условию регулярности при $r \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$ будет функция Бесселя первого рода

$$\chi(r) = A J_1(r\sqrt{1-1/\xi^2}) \quad (7)$$

В данной работе мы рассматриваем сверхпроводники со слабым межэлектронным взаимодействием, то есть $\xi \gg 1$. Поэтому собирая вместе все подстановки получаем волновую функцию соответствующую нулевому уровню

$$\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A J_1(r) \exp \left[i(\varphi - \pi/4)\sigma_3 - \frac{1}{\xi} \int_0^r dr' f(r') \right]$$

Осталось определить постоянную A из условия нормировки $\int d^2\mathbf{r} \Psi^\dagger \Psi = 1$. Снова положим $f(r) = 1$.

$$2 \int d\varphi \int dr r J_1^2(r) e^{-2r/\xi} = 4\pi \frac{(2 + \xi^2)E(-\xi^2) - (2 + 2\xi^2)K(-\xi^2)}{2\pi(1 + \xi^2)} \quad (8)$$

Где интеграл выразился через эллиптические функции $K(x)$ и $E(x)$. Найдём асимптотическое выражение для случая $\xi \gg 1$ (что в исходных единицах имеет вид $p_F \xi \gg 1$)

$$A^2 = \frac{1}{2} \frac{1 + \xi^2}{(2 + \xi^2)E(-\xi^2) - (2 + 2\xi^2)K(-\xi^2)} \approx \frac{1}{2\xi}$$

В итоге имеем

$$\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2\xi}} J_1(r) \exp \left[i(\varphi - \pi/4)\sigma_3 - \frac{1}{\xi} \int_0^r dr' f(r') \right] \quad (9)$$

Благодаря электронно-дырочной симметрии гамильтониана BdG , квазичастицы с нулевой энергией - майорановские. Используя решение (9) можно получить соответствующие майорановские операторы

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^\dagger = \int d^2\mathbf{r} \left(\hat{\psi}(\mathbf{r})u^*(\mathbf{r}) + \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})v^*(\mathbf{r}) \right) \quad (10)$$

Как уже отмечалось, полный спектр состояний для одиночного вихря был получен в работе [7].

$$E_n = -\omega_0 n \quad (11)$$

где

$$\omega_0 = \Delta_0 \frac{\int_0^{\infty} \frac{f(r)}{r} e^{-2\zeta(r)} dr}{\int_0^{\infty} e^{-2\zeta(r)} dr}$$

а $\zeta(r)$ определена следующим образом

$$\zeta(r) = \frac{1}{\xi} \int_0^r f(r) dr$$

Во всем дальнейшем изложении мы не рассматриваем влияние уровней с $n \neq 0$, что возможно если все энергии расщеплений и поправок получаемых ниже много меньше чем расстояние до следующих уровней то есть $\omega_0 \gg |\Delta E|$

3 Двухвихревая система

3.1 Расщепленные состояния

Рассмотрим систему из двух вихрей в сверхпроводнике, которые находятся на расстоянии $R = 2a \gg \xi$ в точках \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 .

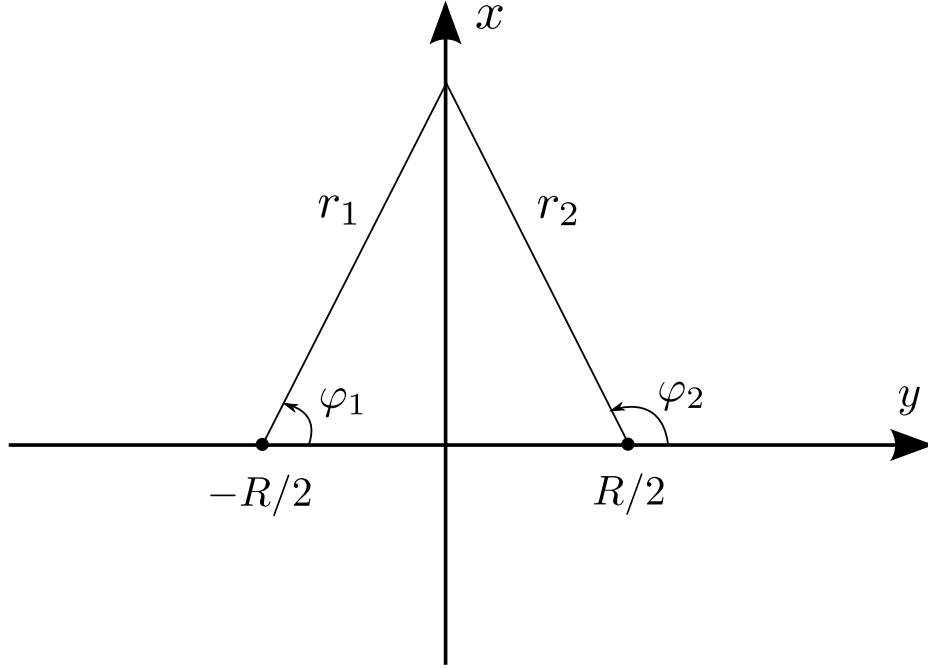


Рис. 1: Система из двух вихрей на расстоянии $R \gg \xi$

В этом случае параметр порядка можно представить в следующем виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i(\varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}))} f(r_1) f(r_2)$$

где φ_k угол относительно k -го вихря, $\varphi_k(\mathbf{r}) = \arg(\mathbf{r} - \mathbf{R}_k)$; $r_k = |\mathbf{r} - \mathbf{R}_k|$ - расстояние до центра k -того вихря. Таким образом, около центра k -го вихря фаза параметра порядка будет равна $\varphi_k(\mathbf{r}) + \Omega_k$, где $\Omega_k = \varphi_i(\mathbf{R}_k)_{i \neq k}$ (в нашем случае $\Omega_1 = \pi$, $\Omega_2 = 0$). Легко модифицировать решение (9) в этом случае

$$\Psi_k(r, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\xi}} J_1(r_k) \exp \left[i(\varphi_k + \Omega_k/2 - \pi/4)\sigma_3 - \frac{1}{\xi} \int_0^{r_k} dr' f(r') \right] \quad (12)$$

Между вихрями возможно туннелирование, которое приводит к расщеплению исходных уровней с нулевыми энергиями, аналогично случаю двух потенциальных ям на большом расстоянии. Задача этой части будет получение этого

расщепления. Пусть Ψ_1 - состояние с нулевой энергией в левом вихре, Ψ_2 - в правом, тогда, аналогично, расщепленные волновые функции имеют вид

$$\Psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1 \pm e^{i\alpha} \Psi_2)$$

с соответствующими энергиями E_+ и $E_- = -E_+$. Определить α можно воспользовавшись электронно-дырочной симметрией снова. Имеем $\Psi_- = \sigma_1 \Psi_+^*$, отсюда получаем $e^{i\alpha} = -e^{-i\alpha}$ и $\alpha = \pi/2$.

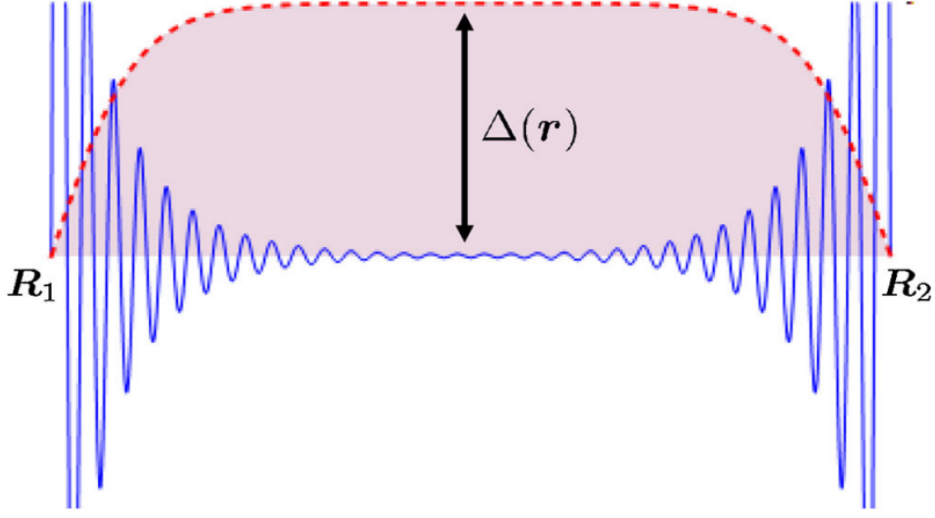


Рис. 2: Схематический рисунок двухвихревой системы (вдоль прямой соединяющей центры вихрей). Кривая ограничивающая затемненную область - параметр порядка для системы. Сплошная голубая линия - действительная часть волновой функции $u_+ = (u_1 + iu_2)/\sqrt{2}$

3.2 Формула для расщепления

Перейдем непосредственно к подсчету расщепления E_+ . Если H_{BdG} полный гамильтониан системы, тогда в правой полуплоскости верны следующие формулы

$$\begin{cases} H_{BdG} \Psi_2 = 0 \\ H_{BdG} \Psi_+ = E_+ \Psi_+ \end{cases} \quad (13)$$

Домножим первое уравнение на Ψ_2^\dagger , второе уравнение на Ψ_+^\dagger , вычтем из второго первое и проинтегрируем результат по правой полуплоскости Σ . Тогда получаем

$$E_+ = \frac{\int_{\Sigma} \left\{ \Psi_2^\dagger H_{BdG} \Psi_+ - \Psi_+^\dagger H_{BdG} \Psi_2 \right\} d^2 \mathbf{r}}{\int_{\Sigma} \Psi_2^\dagger \Psi_+ d^2 \mathbf{r}} \quad (14)$$

Займемся более подробно интегралом по полуплоскости. Введём обозначения

$$H_{BdG} = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & -\hat{A} \end{pmatrix}$$

где операторы определены соответствующим образом

$$\begin{aligned} \hat{A} &= -\frac{\nabla^2 + 1}{2m} \\ \hat{B} &= \frac{i}{m\xi} (\partial_{\bar{z}}\delta(\mathbf{r}) + 2\delta(\mathbf{r})\partial_{\bar{z}}) \\ \hat{C} &= \frac{i}{m\xi} (\partial_z\delta^*(\mathbf{r}) + 2\delta^*(\mathbf{r})\partial_z) \end{aligned}$$

тогда используя $v_\alpha = u_\alpha^*$, $\alpha \in \{1, 2\}$ получим

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \left(\Psi_2^\dagger H_{BdG} \Psi_+ - \Psi_+^\dagger H_{BdG} \Psi_2 \right) &= (u_2^* \hat{A} u_+ - u_+^* \hat{A} u_2) + (v_+^* \hat{A} v_2 - v_2^* \hat{A} v_+) + \\ &+ (u_2^* \hat{B} v_+ - u_+^* \hat{B} v_2) + (v_2^* \hat{C} u_+ - v_+^* \hat{C} u_2) = \\ &= i(v_2 \hat{A} u_1 - u_1 \hat{A} v_2) + i(v_1 \hat{A} u_2 - u_2 \hat{A} v_1) + i(v_1 \hat{B} v_2 + v_2 \hat{B} v_1) + i(u_1 \hat{C} u_2 + u_2 \hat{C} u_1) \end{aligned}$$

где $u_+ = u_1 + iu_2$, $v_+ = v_1 + iv_2$. Займемся упрощением членов по-отдельности.

$$\begin{aligned} v_2 \hat{A} u_1 - u_1 \hat{A} v_2 &= -\frac{1}{2m} \operatorname{div} (v_2 \nabla u_1 - u_1 \nabla v_2) \\ v_1 \hat{A} u_2 - u_2 \hat{A} v_1 &= -\frac{1}{2m} \operatorname{div} (v_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla v_1) \\ v_2 \hat{B} v_1 + v_1 \hat{B} v_2 &= \frac{2i}{m\xi} \partial_{\bar{z}} (\delta(\mathbf{r}) v_1 v_2) \\ u_2 \hat{C} u_1 + u_1 \hat{C} u_2 &= \frac{2i}{m\xi} \partial_z (\delta^*(\mathbf{r}) u_1 u_2) \end{aligned}$$

Собирая выражения, получим для интеграла $I = \sqrt{2} \int_{\Sigma} \left\{ \Psi_2^\dagger H_{BdG} \Psi_+ - \Psi_+^\dagger H_{BdG} \Psi_2 \right\} d^2\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{i}{2m} \int_{\Sigma} \operatorname{div} ((v_2 \nabla u_1 - u_1 \nabla v_2) + (v_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla v_1)) d^2\mathbf{r} - \\ &\quad - \frac{2}{m\xi} \int \{ \partial_{\bar{z}} (\delta(\mathbf{r}) v_1 v_2) + c.c \} d^2\mathbf{r} \quad (15) \end{aligned}$$

С помощью теоремы Грина преобразуем интегралы по полуплоскости к интегралам вдоль прямой $x = 0$

$$I = \frac{i}{2m} \int dy \{ (v_2 \partial_x u_1 - u_1 \partial_x v_2) + (v_1 \partial_x u_2 - u_2 \partial_x v_1) \} + \frac{2}{m\xi} \int dy (v_1 v_2 \delta(\mathbf{r}) + u_1 u_2 \delta^*(\mathbf{r}))$$

Этот промежуточный результат которым мы воспользуемся ниже. Также легко заметить, что так как $R \gg \xi$ интеграл $\int_{\Sigma} \Psi_2^\dagger \Psi_+ d^2\mathbf{r} = 1/\sqrt{2}$

3.3 Конечный результат

Всё что осталось, для получения окончательного ответа для расщепления это непосредственно вычислить интеграл I . Явно выпишем волновые функции Ψ_1 и Ψ_2 (пользуясь (12)) на прямой $x = 0$ по которой нужно вычислить интеграл. Учтём, что на этой прямой $r_1 = r_2 \equiv r$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$

$$u_1 = v_1^* = \sqrt{\frac{1}{2\xi}} J_1(r) \exp\left(i(\varphi_1 + \pi/4) - \frac{r}{\xi}\right)$$

$$u_2 = v_2^* = \sqrt{\frac{1}{2\xi}} J_1(r) \exp\left(i(\pi - \varphi_1 - \pi/4) - \frac{r}{\xi}\right)$$

Соответственно, $\delta(\mathbf{r}) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\pi} = -1$. Учитывая, что на прямой $x = 0$ мы имеем $r \gg 1$, а также $\xi \gg 1$, то основной вклад, например, в $\partial_x u_1$, будет в слагаемом с производной от функции Бесселя, то есть

$$\partial_x u_1 \approx \cos \varphi_1 \sqrt{\frac{1}{2\xi}} J_1'(r) \exp\left(i(\varphi_1 + \pi/4) - \frac{r}{\xi}\right)$$

Аналогичное получаем для производных $\partial_x v_1, \partial_x u_1, \partial_x v_2$. Поэтому выражение для I можно упростить

$$I = -\frac{2}{m} \int dy \operatorname{Im} v_2 \partial_x u_1 + \frac{4}{m\xi} \int dy \operatorname{Re} v_1 v_2 \delta(\mathbf{r})$$

Так как множители $\sqrt{2}$ в числителе и знаменателе (14) сокращаются, то I и будет расщеплением $E_+ = I$. Подставляя выражения выше, имеем

$$E_+ = \frac{1}{m\xi} \int dy J_1'(r) J_1(r) e^{-2r/\xi} \cos \varphi_1 \cos 2\varphi_1 + \frac{2}{m\xi^2} \int dy J_1(r)^2 e^{-2r/\xi}$$

Используя асимптотическое разложение Функций Бесселя

$$J_1'(r) J_1(r) \approx \frac{2 \cos 2r}{\pi r}$$

$$J_1(r)^2 \approx \frac{2 \cos^2(r + \frac{\pi}{4})}{\pi r}$$

В итоге имеем

$$E_+ \approx \frac{2}{m\xi\pi a} \int dy \frac{\cos\left(2\sqrt{a^2 + y^2}\right)}{\sqrt{a^2 + y^2}} e^{-2\sqrt{a^2 + y^2}}$$

где $a = R/2$. Этот интеграл берётся методом перевала и мы получаем выражение для расщепления

$$E_+ \approx \frac{2\sqrt{2} \cos(R + \pi/4)}{m\xi \sqrt{\pi R}} e^{-R/\xi} = \Delta_0 2\sqrt{2} \frac{\cos(R + \pi/4)}{\sqrt{\pi R}} e^{-R/\xi} \quad (16)$$

Этот результат, но с другими численными коэффициентами был получен в [4, 5]. Как можно отсюда видеть расщепление энергии, помимо ожидаемого экспоненциального затухания, быстро осциллирует с периодом равным фермиевской длине волны.

Заметим, что рассмотрение выше справедливо если можно не учитывать другие уровни с $n \neq 0$, соответственно, имеем условие на малость полученного расщепления по сравнению с расстоянием до ближайшего уровня $|E_+| \ll \omega_0$.

4 Два вихря с малым током

4.1 Теория возмущений

Рассмотрим систему из двух вихрей из предыдущего пункта с параметром порядка $\Delta(\mathbf{r})$, кроме того включим постоянный ток вдоль некоторого направления

$$\Delta_k(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

В таком достаточно общем случае аналитическое решение задачи вызывает трудности, поэтому мы рассмотрим два более частных случая: ток текущий вдоль прямой соединяющей два вихря $\mathbf{k} = (k, 0)$ и текущий в перпендикулярном направлении $\mathbf{k} = (0, k)$, причём ток достаточно мал. Критерий достаточной малости мы сформулируем позже.

Целью этого раздела будет найти поправку к исходному расщеплению, рассматривая ток как возмущение (для определенности будем искать поправку к E_+). Конечно, в нашей системе присутствует целое множество энергетических уровней, но если полученная поправка δE_+ мала по сравнению с расщеплением $\omega_0 \gg |2E_+| \gg |\delta E_+|$ то можно рассматривать нашу систему как двухуровневую: состояние Ψ_+ с энергией E_+ и Ψ_- с энергией E_- . Соответственно, во втором порядке теории возмущений достаточно учесть матричные элементы только между этими уровнями т.е. $V_{-+} = V_{+-}^*$. Пользуясь этими рассуждениями о двухуровневой системе, в следующих двух разделах будет посчитана квадратичная по k поправка к E_+ . Рассмотрим два случая последовательно.

4.2 Ток вдоль оси x

$$\Delta_k(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r})e^{ikx} \tag{17}$$

будем рассматривать ток как возмущение, соответственно получаем первое условие на малость тока $kR \ll 1$

$$\Delta_k(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r}) \left(1 + ikx - \frac{k^2 x^2}{2} \right)$$

Теперь полный гамильтониан BdG можно представить как исходный гамильтониан плюс возмущение

$$\hat{H}_{BdG} = \hat{H}_{BdG}^{(0)} + \hat{V}$$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \delta\hat{B} \\ -\delta\hat{B}^+ & 0 \end{pmatrix}$$

где

$$\delta\hat{B} = \frac{i}{m\xi} \left(\left(ikx - \frac{k^2 x^2}{2} \right) (\partial_{\bar{z}}\Delta + 2\Delta\partial_{\bar{z}}) + \Delta(ik - k^2 x) \right) \quad (18)$$

4.2.1 Первая поправка к E_+

Найдем первую поправку по теории возмущений к энергии E_+ . Из симметрии ясно, что поправка не должна зависеть от знака k , поэтому при расчете можно оставить в (18) только квадратичные по k члены

$$\delta\hat{B}_2 = -\frac{ik^2}{m\xi} \left(\frac{x^2}{2} (\partial_{\bar{z}}\Delta + 2\Delta\partial_{\bar{z}}) + \Delta x \right)$$

для первой поправки имеем

$$\begin{aligned} \delta E_+^{(1)} &= \langle \Psi_+ | \hat{V} | \Psi_+ \rangle = \\ &= \langle \Psi_1 | \hat{V} | \Psi_1 \rangle + \langle \Psi_2 | \hat{V} | \Psi_2 \rangle + i \left(\langle \Psi_1 | \hat{V} | \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_2 | \hat{V} | \Psi_1 \rangle \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Если бы в системе был один вихрь, то нулевой уровень энергии никуда не мог бы сдвинуться из-за вышеуказанной симметрии гамильтониана BdG. Из этого рассуждения следует, что к физически существенному результату могут привести лишь перекрестные члены в (19)

$$\delta E_+^{(1)} = i \left(\langle \Psi_1 | \hat{V} | \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_2 | \hat{V} | \Psi_1 \rangle \right) \quad (20)$$

Рассмотрим подробнее первый член (второй рассматривается точно также)

$$\langle \Psi_1 | \hat{V} | \Psi_2 \rangle = \langle u_1 | \delta\hat{B} | v_2 \rangle - \langle v_1 | \delta\hat{B}^+ | u_2 \rangle$$

здесь легко заметить, что второе слагаемое получается комплексным сопряжением из первого, поэтому

$$\langle \Psi_1 | \hat{V} | \Psi_2 \rangle = 2i \operatorname{Im} \langle u_1 | \delta\hat{B} | v_2 \rangle$$

Пользуясь этим, (20) преобразуется в следующий вид

$$\delta E_+^{(1)} = -2 \operatorname{Im} \left(\langle u_1 | \delta \hat{B}_2 | v_2 \rangle - \langle u_2 | \delta \hat{B}_2 | v_1 \rangle \right) = \frac{2k^2}{m\xi} \operatorname{Im} \int i x^2 \Delta (v_1 \partial_{\bar{z}} v_2 - v_2 \partial_{\bar{z}} v_1) dx dy \quad (21)$$

при переходе к последнему равенству, операторы умножения на число тривиально сократились $\alpha v_1 v_2 - \alpha v_2 v_1 = 0$. Вычисление последнего интеграла в аналитическом виде представляет трудность. Был произведён численный расчет данного интеграла в зависимости от расстояния между вихрями R (см. Рис. 3)

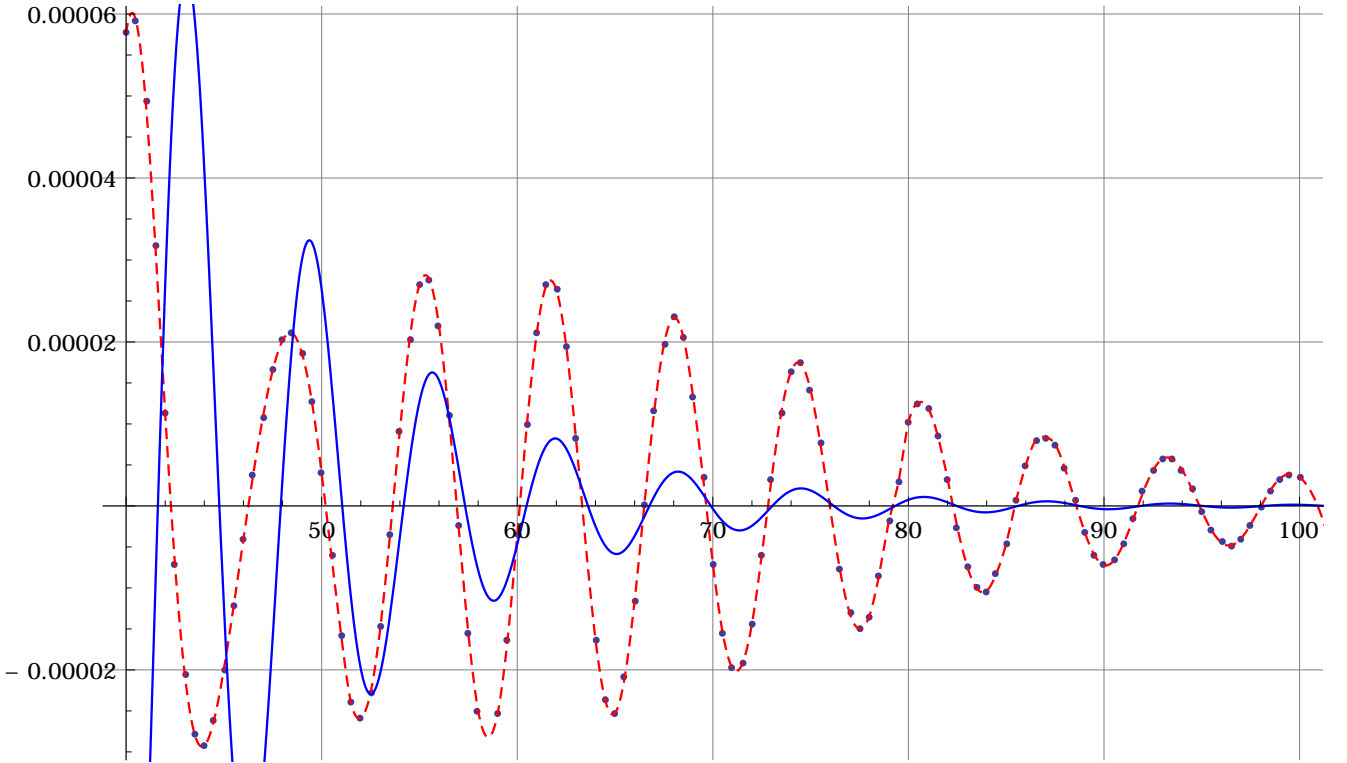


Рис. 3: Результат численного расчета первой поправки к расщеплению в системе из двух вихрей в зависимости от расстояния между вихрями. Ток направлен вдоль оси x . Красная пунктирная кривая: кубические сплайны проведенные через рассчитанные точки. Голубая кривая - невозмущенное расщепление энергий $\Delta E = E_+ - E_-$, построенное с коэффициентом 0.01 (в сто раз меньше). Параметры системы $\xi = 10$, $m = 1$, $k = 0.01$

При достаточно больших $R \gtrsim 8\xi$ полученная зависимость хорошо приближается формулой

$$\delta E_+^{(1)} = C_x k^2 R^3 \cos(R + \pi/4) e^{-R/\xi} \quad (22)$$

где C_x - значение численно получающееся из условия наилучшего приближения посчитанных точек данной зависимостью (для параметров при которых построен график на Рис. 3 $C_x = 4.07 \cdot 10^{-4}$). Заметим, что при таких больших

R поправка осциллирует с той же частотой и фазой, что и исходное расщепление (голубая кривая на Рис. 3). Причём, амплитуда осцилляций у первой поправки убывает медленней, чем соответствующая амплитуда осцилляций исходного расщепления ($A_{\delta E}/A_E \sim R^{7/2}$).

4.2.2 Вторая поправка к E_+

Квадратичные члены по k будут и во втором порядке теории возмущений, поэтому для получения корректного результата мы должны учесть и их. Теперь, для получения квадратичной по k поправки нужно учесть в δB только линейные по k члены.

$$\delta \hat{B}_1 = -\frac{k}{m\xi} (x (\partial_{\bar{z}} \Delta + 2\Delta \partial_{\bar{z}}) + \Delta)$$

Записываем второй порядок теории возмущений (напомним, что считаем нашу систему двухуровневой)

$$\delta E_+^{(2)} = \frac{|V_{-+}|^2}{2E_+} \quad (23)$$

$$V_{-+} = \langle \Psi_- | \hat{V} | \Psi_+ \rangle = i \left(\langle \Psi_1 | \hat{V} | \Psi_2 \rangle + \langle \Psi_2 | \hat{V} | \Psi_1 \rangle \right)$$

что в более явном виде

$$V_{-+} = -\frac{4k}{m\xi} \text{Im} \int \{x \partial_{\bar{z}} (\Delta v_1 v_2) + \Delta v_1 v_2\} d^2 \mathbf{r}$$

перебрасывая производную в первом члене на x получаем

$$V_{-+} = -\frac{4k}{m\xi} \text{Im} \int \{-\Delta v_1 v_2 + \Delta v_1 v_2\} d^2 \mathbf{r} = 0$$

В итоге второй порядок теории возмущений дает нулевую квадратичную по k поправку

$$\delta E_+^{(2)} = 0 \quad (24)$$

Это значит, что в квадратичном по k^2 приближении поправка к расщеплению определяется первым порядком теории возмущений.

4.3 Ток вдоль оси y

Теперь рассмотрим теперь малый ток вдоль оси y , $\Delta_k(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r})e^{iy}$. В целом, все шаги аналогичны случаю с током вдоль оси x .

$$\delta\hat{B} = \frac{i}{m\xi} \left(\left(ik y - \frac{k^2 y^2}{2} \right) (\partial_{\bar{z}}\Delta + 2\Delta\partial_{\bar{z}}) + \Delta(-k - ik^2 y) \right) \quad (25)$$

4.3.1 Первая поправка к E_+

Снова из симметрии понятно, что поправка не должна зависеть от знака k , поэтому при расчете можно оставить в (25) только квадратичные по k члены

$$\delta\hat{B}_2 = -\frac{ik^2}{m\xi} \left(\frac{y^2}{2} (\partial_{\bar{z}}\Delta + 2\Delta\partial_{\bar{z}}) + \Delta iy \right)$$

для первой поправки имеем

$$\delta E_+^{(1)} = i \left(\langle \Psi_1 | \hat{V} | \Psi_2 \rangle - \langle \Psi_2 | \hat{V} | \Psi_1 \rangle \right) \quad (26)$$

С помощью аналогичных преобразований приходим к следующему виду

$$\delta E_+^{(1)} = \frac{2k^2}{m\xi} \text{Im} \int iy^2 \Delta (v_1 \partial_{\bar{z}} v_2 - v_2 \partial_{\bar{z}} v_1) dx dy \quad (27)$$

Был произведён численный расчет данного интеграла в зависимости от расстояния между вихрями R (см. Рис. 4)

При достаточно больших $R \gtrsim 5\xi$ полученная зависимость хорошо приближается формулой

$$\delta E_+^{(1)} = C_y k^2 R \cos(R + 3\pi/4) e^{-R/\xi} \quad (28)$$

(для параметров при которых построен график на Рис. 4 $C_y = 1.64 \cdot 10^{-1}$)
Интересно заметить, что фаза осцилляций поправки в этом случае сдвинута относительно исходного расщепления на фазу $\pi/2$.

4.3.2 Вторая поправка к E_+

Для получения квадратичной по k поправки нужно учесть в δB только линейные по k члены.

$$\delta\hat{B}_1 = -\frac{k}{m\xi} (y (\partial_{\bar{z}}\Delta + 2\Delta\partial_{\bar{z}}) + i\Delta)$$

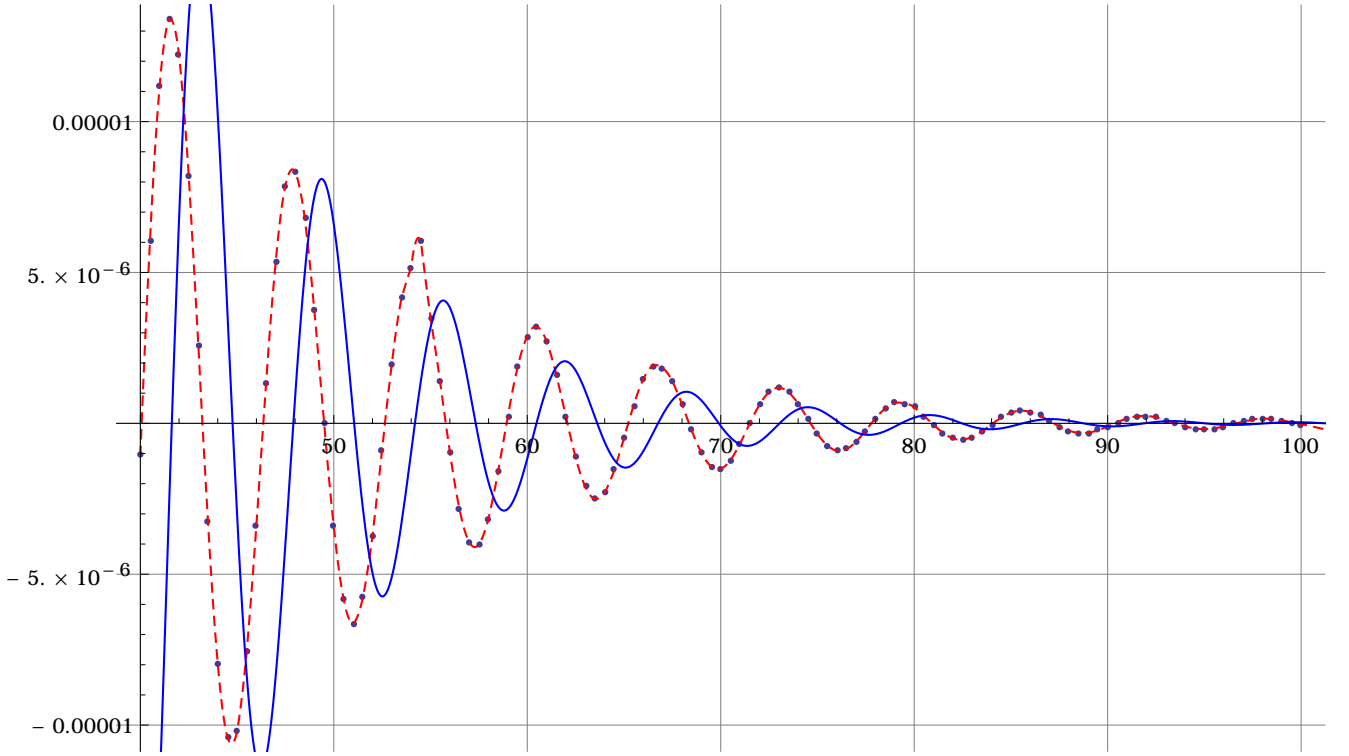


Рис. 4: Результат численного расчета первой поправки к расщеплению в системе из двух вихрей в зависимости от расстояния между вихрями. Ток направлен вдоль оси y . Красная пунктирная кривая: кубические сплайны проведенные через рассчитанные точки. Голубая кривая - невозмущенное расщепление энергий $\Delta E = E_+ - E_-$, построенное с коэффициентом 0.0025. Параметры системы $\xi = 10$, $m = 1$, $k = 0.01$

Для второго порядка теории возмущений имеем

$$\delta E_+^{(2)} = \frac{|V_{-+}|^2}{2E_+} \quad (29)$$

$$V_{-+} = \langle \Psi_- | \hat{V} | \Psi_+ \rangle = i \left(\langle \Psi_1 | \hat{V} | \Psi_2 \rangle + \langle \Psi_2 | \hat{V} | \Psi_1 \rangle \right)$$

что в более явном виде

$$V_{-+} = -\frac{4k}{m\xi} \text{Im} \int \{y \partial_{\bar{z}} (\Delta v_1 v_2) + i \Delta v_1 v_2\} d^2 \mathbf{r}$$

перебрасывая производную в первом члене на y получаем

$$V_{-+} = -\frac{4k}{m\xi} \text{Im} \int \{-i \Delta v_1 v_2 + i \Delta v_1 v_2\} d^2 \mathbf{r} = 0$$

В итоге второй порядок теории возмущений снова дает нулевую квадратичную по k поправку

$$\delta E_+^{(2)} = 0 \quad (30)$$

Это значит, что и в случае тока текущего вдоль оси y в квадратичном по k^2 приближении поправка к расщеплению определяется только первым порядком теории возмущений.

Сравнение поправок для тока вдоль осей x и y при одинаковых k можно увидеть на Рис. 5

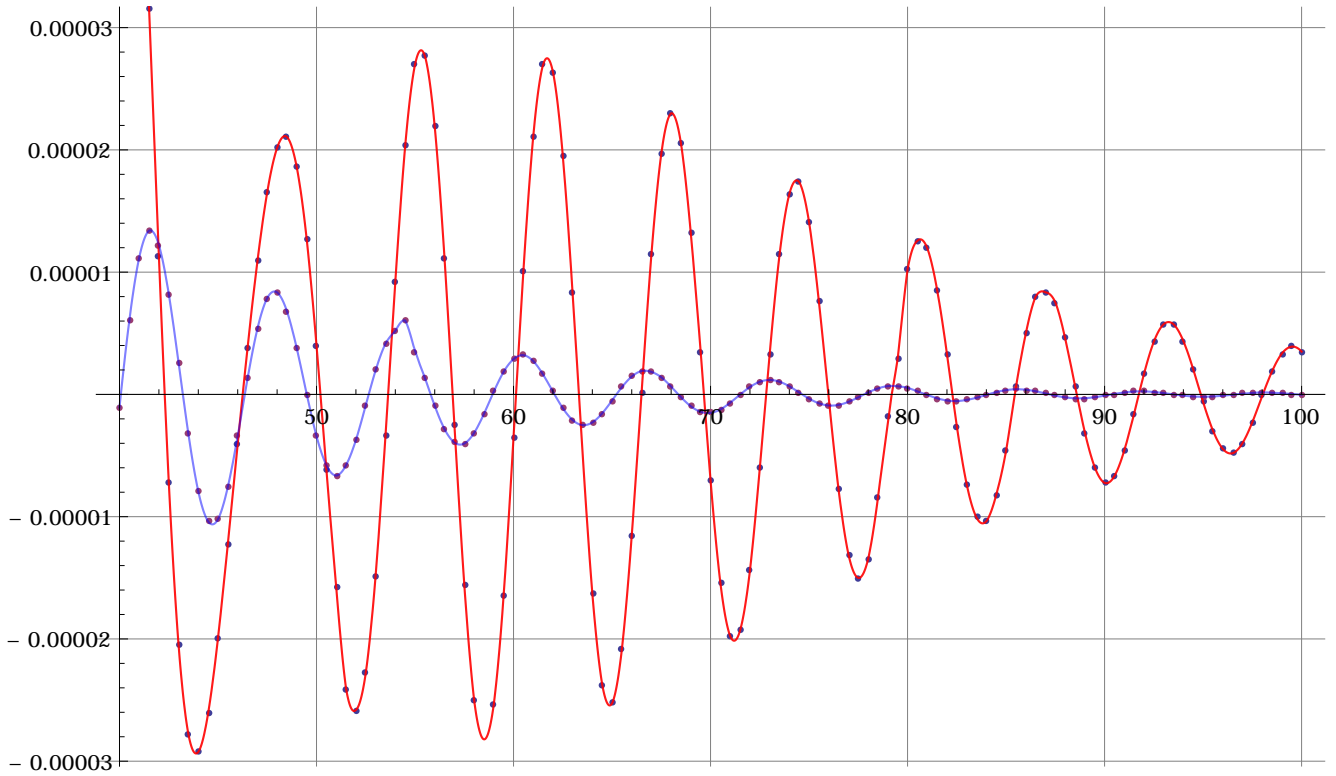


Рис. 5: Красная линия - поправка δE_+ для тока текущего вдоль оси x . Голубая линия - поправка δE_+ для тока текущего вдоль оси y . Параметры системы $\xi = 10$, $m = 1$, $k = 0.01$

5 Заключение

В данной работе было произведено последовательное рассмотрение вихревых состояний в $p_x + ip_y$ сверхпроводнике. Было найдено расщепление в двухвихревой системе, появляющееся из-за межвихревого туннелирования. Для этой системы численно была вычислена поправка в расщеплению появляющаяся в присутствии тока. Найдено, что поправки быстро осциллируют в зависимости от расстояния между вихрями, причём с той же частотой что и исходное расщепление.

Интересным результатом является сдвиг фаз на $\pi/2$ между осцилляциями поправки для тока текущего вдоль оси y и осцилляциями исходного расщепления. В частности это говорит о том, что существуют расстояния на которых поправка вообще зануляет расщепление (по крайней мере, с точностью до следующего порядка по k). Кроме того, собирая вместе (16) и (28) можно заметить, что для полного расщепления имеем

$$E_+^{(f)} = E_+ + \delta E_+ = A R^{-1/2} e^{-R/\xi} \left(\cos(R + \pi/4) + B k^2 R^{3/2} \cos(R + 3\pi/4) \right)$$

где A и B некоторые численные константы. Последнее выражение можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} E_+^{(f)} &= A R^{-1/2} e^{-R/\xi} \left(\cos(R + \pi/4) + B k^2 R^{3/2} \partial_r \cos(R + \pi/4) \right) \approx \\ &\approx A R^{-1/2} e^{-R/\xi} \cos\left(R + \pi/4 + B k^2 R^{3/2}\right) \end{aligned}$$

Последние два замечания приводят к идеи о том, что присутствие однородного тока, перпендикулярного прямой соединяющей вихри, сводиться к сдвигу фаз в соответствующем расщеплении. Проверка этой идеи представляется интересным вопросом для дальнейшего изучения.

Список литературы

- [1] V. Gurarie and L. Radzihovsky, “Zero modes of two-dimensional chiral p-wave superconductors” *Ann. Phys.(Leipzig)* 322, 2 (2007)
- [2] D.A. Ivanov, “Non-Abelian statistics of half-quantum vortices in p-wave superconductors”, *Phys. Rev. Lett.* 86, 268 (2001)
- [3] A. Kitaev, “Fault-tolerant quantum computation by anyons”, [quant-ph/9707021](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9707021).
- [4] M. Cheng, R. Lutchyn, V. Galitski, and S. Das Sarma, “Splitting of Majorana modes due to intervortex tunneling in a $p + ip$ superconductor”, *Phys. Rev. Lett.* 103, 107001 (2009)
- [5] M. Cheng, R. Lutchyn, V. Galitski, and S. Das Sarma, “Tunneling of anyonic Majorana excitations in topological superconductors”, *Phys. Rev. B* 82, 094504 (2010)
- [6] M. Burrello, B. van Heck, A. Akhmerov, “Braiding of non-Abelian anyons using pairwise interactions”, *Phys. Rev. A* 87, 022343 (2013)
- [7] N. Kopnin and M. Salomaa, “Mutual friction in superfluid He-3: Effects of bound states in the vortex core”, *Phys. Rev. B* 44, 9667-9677 (1991).
- [8] Де Жен П.-Ж. Сверхпроводимость металлов и сплавов. — М.: Мир, 1968. — 280 с.