

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)  
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Неупорядоченные спиновые цепочки»  
(Дипломная работа бакалавра)

студента 028 группы  
Побойко И.В.  
научный руководитель  
д.ф.-м.н., проф. Фейгельман М.В.

Черноголовка 2014

# Оглавление

Оглавление	1
<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
1.1 Постановка задачи	3
1.2 Теория линейного отклика	4
1.3 Чистая система	5
1.4 Эксперименты	6
1.4.1 Теплопроводность $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$ и $\text{SrCuO}_2$	6
1.4.2 Численный расчёт теплового потока	8
1.4.3 Частотные зависимости кинетических коэффициентов	10
1.5 Локализация XY-цепочки	11
1.6 Бозонизация	11
1.6.1 Операторные тождества	12
1.6.2 Гамильтониан	13
1.6.3 Некоторые следствия бозонизованного гамильтониана	14
1.6.4 Беспорядок	15
<b>2 Фазовая диаграмма</b>	<b>17</b>
2.1 Ренормгруппа для беспорядка	17
2.2 Длина локализации вблизи перехода	19
2.3 Численная фазовая диаграмма при $T = 0$	20
2.4 Ненулевые температуры	21
<b>3 Жидкость Латтинджера с нелинейным спектром</b>	<b>23</b>
3.1 Введение	23
3.2 Гамильтониан $X\bar{X}Z$ -цепочки с учётом нелинейности спектра	23
3.2.1 Токи	24
3.3 Рассеяние плазмонов	25
3.4 Роль рассеяния вперёд	26
3.5 Рефермионизация	27
<b>4 Заключение</b>	<b>29</b>
4.1 Благодарности	30



# Глава 1

## Введение

### 1.1 Постановка задачи

Исследуемая система представляет собой одномерную спиновую цепочку спинов  $1/2$  с XXZ-взаимодействием между ближайшими соседями и беспорядком в виде случайного магнитного поля на каждом узле. Гамильтониан системы записывается так:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^N \left[ -J \left( \hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^x + \hat{S}_n^y \hat{S}_{n+1}^y + \Delta \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \right) + h_n \hat{S}_n^z \right] \quad (1.1)$$

Для определенности подразумеваются периодические граничные условия  $\hat{S}_{N+1}^\alpha \equiv \hat{S}_1^\alpha$ ; поля  $h_n$  — независимые случайные величины, имеющие одинаковое симметричное распределение (так что  $\langle h \rangle = 0$ ) и конечную дисперсию  $\langle h^2 \rangle$ ; Беспорядок будет считаться малым:  $\langle h^2 \rangle / J^2 \ll 1$ , и для простоты вычислений будем считать его распределённым по Гауссу.

При помощи преобразования Йордана-Вигнера, гамильтониан можно переписать в терминах фермионных операторов на узлах  $\hat{\psi}_n^\dagger, \hat{\psi}_n$ :

$$\begin{cases} \hat{S}_n^+ = \hat{\psi}_n^\dagger \exp \left( i\pi \sum_{i=1}^{n-1} \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i \right) \\ \hat{S}_n^- = \exp \left( i\pi \sum_{i=1}^{n-1} \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i \right) \hat{\psi}_n \\ \hat{S}_n^z = \hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_n - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.2)$$

и в таком случае задача тождественно эквивалентна задаче о взаимодействующих фермионах на решётке с беспорядком:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^N \left[ -\frac{J}{2} \left( \hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_{n+1} + h.c \right) - J\Delta \left( \hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_n - \frac{1}{2} \right) \left( \hat{\psi}_{n+1}^\dagger \hat{\psi}_{n+1} - \frac{1}{2} \right) \right] + \sum_{n=1}^N h_n \left( \hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_n - \frac{1}{2} \right) \quad (1.3)$$

Известно, что для невзаимодействующей фермионной системы ( $\Delta = 0$  —  $XU$ -модель) в одномерье наличие любого беспорядка приводит к полной локализации всех волновых функций [1]. Это явление — локализация Андерсона — связано с когерентным рассеянием электронов назад на примесях. Взаимодействие радикально меняет картину; при достаточно сильном притяжении ( $\Delta > 0$ ) между фермионами они могут делокализоваться, и в зависимости от параметров нашей исходной задачи может реализоваться тот или иной случай.

Отметим, что знак  $XU$ -обмена (или, эквивалентно, знак кинетической энергии для фермионов) для исходной спиновой цепочки можно поменять, не изменив при этом знак обмена  $Z$ -компонент (эквивалентно знаку взаимодействия между фермионами), совершив каноническое преобразование

$$\begin{cases} \hat{S}_k^x \mapsto (-1)^k \hat{S}_k^x \\ \hat{S}_k^y \mapsto (-1)^k \hat{S}_k^y \\ \hat{S}_k^z \mapsto \hat{S}_k^z \end{cases} \quad (1.4)$$

В связи с этим при дальнейших рассуждениях «ферромагнитность» или «антиферромагнитность» будет определяться лишь знаком обмена  $Z$ -компонент.

Мы будем исследовать локализацию в такой задаче. Один из критериев локализации — это экспоненциальное затухание коррелятора  $\langle \hat{S}_n^+ \hat{S}_m^- \rangle \sim \exp\left(-\frac{1}{R_{loc}}|m-n|\right)$  при  $|m-n| \gg 1$ , взятого по основному состоянию системы. Кроме того, мы будем исследовать транспортные свойства такой системы; в частности, коэффициент теплопроводности.

## 1.2 Теория линейного отклика

Теория линейного отклика Кубо (см., например, [2]) позволяет связать кинетические коэффициенты (проводимость или коэффициент теплопроводности) с корреляторами определенных физических величин. Для системы, находящейся при температуре  $T$ , значения кинетических коэффициентов даются выражениями:

$$\sigma(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{V} \int_0^\infty dt e^{i(\omega+i0)t} \int_0^\beta d\beta' \langle \hat{J}_{\mathbf{q}}(-t - i\beta') \hat{J}_{\mathbf{q}}(0) \rangle \quad (1.5)$$

$$\kappa(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\beta}{V} \int_0^\infty dt e^{i(\omega+i0)t} \int_0^\beta d\beta' \langle \hat{J}_{\mathbf{q}}^E(-t - i\beta') \hat{J}_{\mathbf{q}}^E(0) \rangle \quad (1.6)$$

где усреднение  $\langle \dots \rangle$  производится по состоянию, описываемому равновесной матрицей плотности  $\hat{\rho}_0 = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \hat{H}_0)$ , а токи частиц  $\hat{J}$  и энергии  $\hat{J}^E$

определяются из уравнений непрерывности:

$$\frac{\partial \hat{n}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \hat{h}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{j}^E(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.8)$$

$$(1.9)$$

и  $\hat{j}_{\mathbf{q}}^{(E)}$  представляет собой преобразование Фурье величины  $\hat{j}^{(E)}$ . Точно такие же выражения можно написать и для решёточных систем, заменяя оператор дивергенции его дискретным аналогом  $\operatorname{div} \hat{j}(\mathbf{r}, t) \mapsto \hat{j}_{n+1} - \hat{j}_n$ .

В случае, когда гамильтониан состоит лишь из слагаемых, содержащих операторы на двух соседних узлах  $\hat{h}_n \equiv \hat{h}_{n,n+1}$  (как, например, в (1.1)), можно выписать явное выражение для локального потока энергии:

$$\hat{j}^E = i \left[ \hat{h}_{n,n-1}, \hat{h}_{n,n+1} \right] \quad (1.10)$$

Кроме того видно, что если ток  $\hat{J}$  сохраняется (на самом деле достаточно, чтобы коррелятор  $\langle \hat{J}(t) \hat{J}(0) \rangle$  не занулялся на больших временах), то соответствующий интеграл по времени даст выражение вида  $\propto \frac{i}{\omega + i0} = \mathcal{P} \frac{i}{\omega} + \pi \delta(\omega)$ ; тем самым в соответствующей проводимости будет так называемый пик Друде на нулевой частоте:  $\sigma(\omega) = 2\pi D \delta(\omega) + \sigma_{reg}(\omega)$ . Величина  $D$  называется «весом Друде» или «зарядовой жёсткостью» (или, в рамках спиновой модели, «спиновой жёсткостью»); наличие пика Друде является признаком баллистического транспорта. Те же аргументы верны и для транспорта энергии.

### 1.3 Чистая система

Чистая система имеет точное решение при помощи анзаца Бете [3, Chapter 5]. Тем самым она является интегрируемой и имеет бесконечное число нетривиальных интегралов движения, среди которых, для чистой системы сохраняется поток энергии  $\hat{J}^E$ ; это означает, что коэффициент теплопроводности в чистой системе будет расходиться.

При  $\Delta = 0$ , система эквивалентна системе свободных фермионов с законом дисперсии  $\varepsilon(k) = -J \cos ka$ . Низкоэнергетические возбуждения возникают вблизи точек  $\pm k_F = \pm \frac{\pi}{2a}$  и обладают (в первом приближении) линейным спектром. Линейность спектра низкоэнергетических возбуждений сохраняется при  $|\Delta| < 1$ .

Точка  $\Delta = 1$  соответствует Гейзенберговскому ферромагнетику, у которого закон дисперсии становится квадратичным  $\varepsilon(k) \sim k^2$ ; точка же  $\Delta = -1$  соответствует, напротив, Гейзенберговскому антиферромагнетику.

При  $|\Delta| > 1$  свойства системы становятся подобными модели Изинга, появляется конечная намагниченность на узлах  $\langle \hat{S}_n^z \rangle$  и в спектре возбуждений открывается щель. Это значит, что при низких температурах числа возбуждений будут экспоненциально малы по параметру  $\exp\left(-\frac{E_g}{T}\right)$ ; коэффициент теплопроводности такой системы тоже будет экспоненциально мал. Именно поэтому мы ограничимся рассмотрением систем при  $|\Delta| < 1$ , как представляющих наибольший интерес.

## 1.4 Эксперименты

### 1.4.1 Теплопроводность $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$ и $\text{SrCuO}_2$

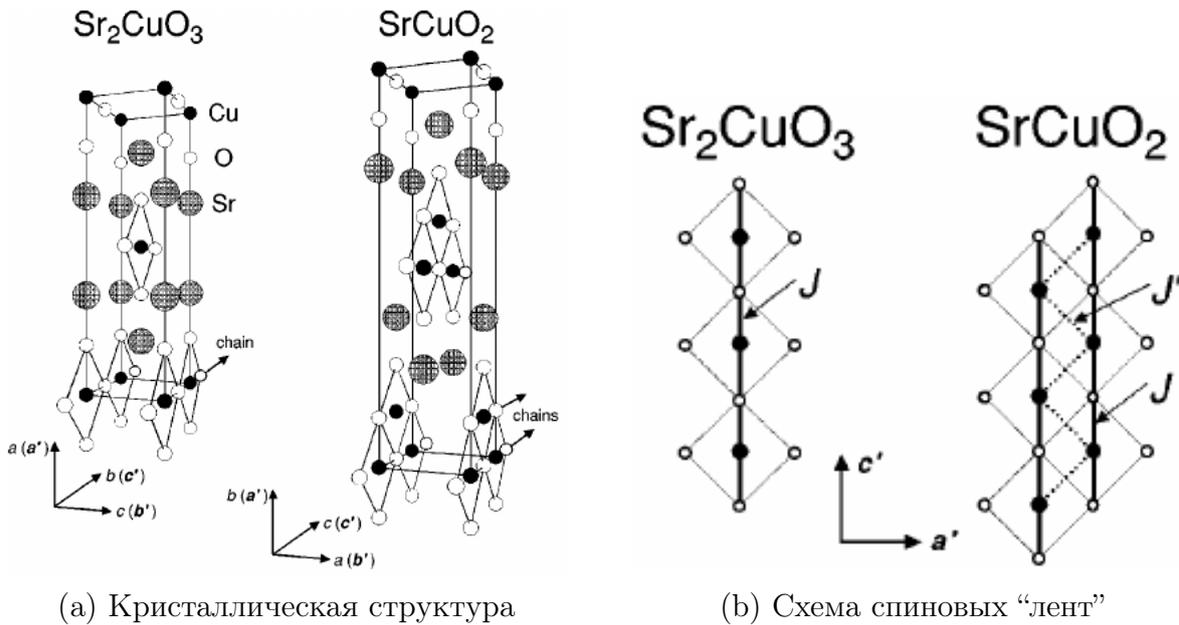
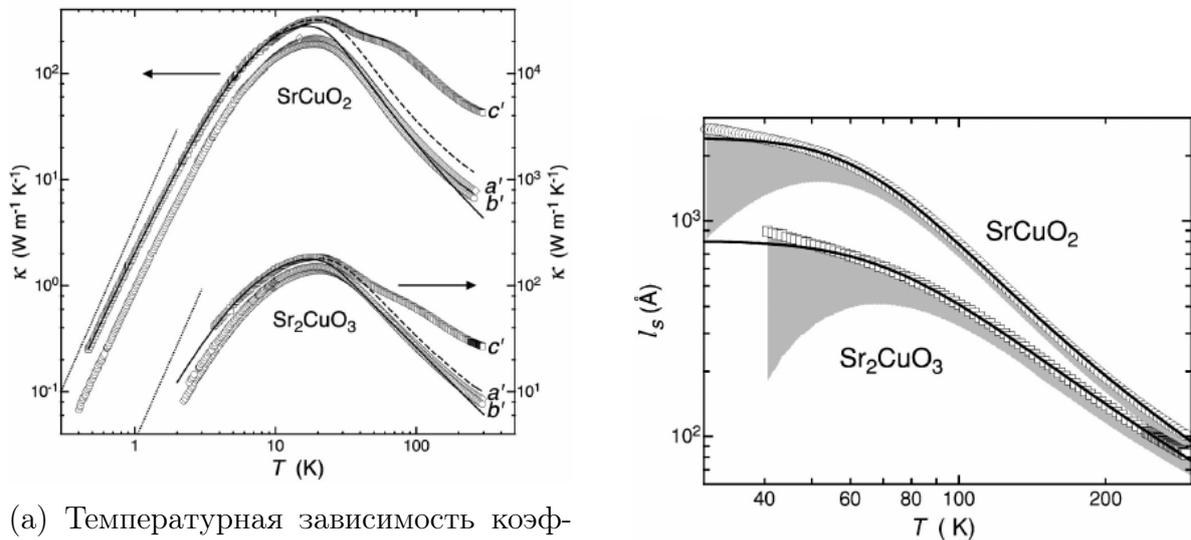


Рис. 1.1: Спиновые цепочки в  $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$  и  $\text{SrCuO}_2$

Квазиодномерные Гейзенберговские антиферромагнитные цепочки в некотором виде реализуются в веществах  $\text{SrCuO}_2$  и  $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$  (см. рис. 1.1). Если говорить о веществе  $\text{SrCuO}_2$ , то в нём цепочки представляют собой “ленты”, состоящие из двух параллельных спиновых цепочек. В цепочке константа взаимодействия  $J \sim 2500\text{K}$ ; между цепочками обменный интеграл имеет другой знак (фрустрация) и он заметно меньше:  $|J'| \sim 0.1J$ ; между лентами обмен мал  $\sim 10^{-5}J$ . Обмен между лентами приводит к дальнему упорядочению при очень низких температурах ( $T < 2\text{K}$ ), и при больших температурах цепочки можно считать независимыми. Вещество  $\text{Sr}_2\text{CuO}_3$  обладает сходными свойствами (обменный интеграл  $J \sim 2100 \div 3000\text{K}$ ); кроме того, в этом веществе не наблюдается фрустрированного обмена между цепочками в пределах одной ленты.

Исследование этих веществ при помощи неупругого рассеяния нейтронов [4] показало, что возбуждения хорошо описываются в рамках одномерного Гейзенберговского антиферромагнетика. Измерения магнитной восприимчивости в работе [5] также подтверждает, что системы хорошо описываются в рамках этой же модели.



(a) Температурная зависимость коэффициента теплопроводности; пунктирные линии — оценка, исходящая из конечности размеров образца

(b) Температурная зависимость длины свободного пробега

Рис. 1.2: Экспериментальные данные работы [6]

В работе [6] исследовалась теплопроводность в широком диапазоне температур ( $0.4 \div 300\text{K}$ ; см. рис. 1.2). Вдоль кристаллографической оси, вдоль которого реализовывались спиновые цепочки, наблюдалось anomalously большая теплопроводность, которая связывалась с вкладом от этих спиновых цепочек. Из эмпирической формулы, связывающей коэффициент теплопроводности и длину свободного пробега, делалась оценка последней. При низких температурах длины оказывались большими, и по порядку величины определялись средней концентрацией дефектов в образце (это показано лучше в следующей рассмотренной работе, где исследовалось поведение низкотемпературной теплопроводности в зависимости от чистоты образца). При высоких температурах длина свободного пробега имела активационный вид  $l \propto \exp(\theta/T)$  с характерной температурой  $\theta$  сравнимой с температурой Дебая ( $\theta \sim 200\text{K}$ ); тем самым, высокотемпературное падение коэффициента теплопроводности связывалось с рассеянием на фононах, приводящем к перебору (если бы это было связано с взаимодействием спиновых возбуждений, то характерная температура ожидалась бы заметно выше — поскольку константа обмена  $J \sim 2500\text{K} \gg \theta$ ). Таким образом, во всей области температур не было обнаружено признаков того, что в цепочке самой по себе имеются процессы, приводящие к конечности длины свободного пробега (что хорошо согласуется с утверждением об интегри-

руемости соответствующей цепочки).

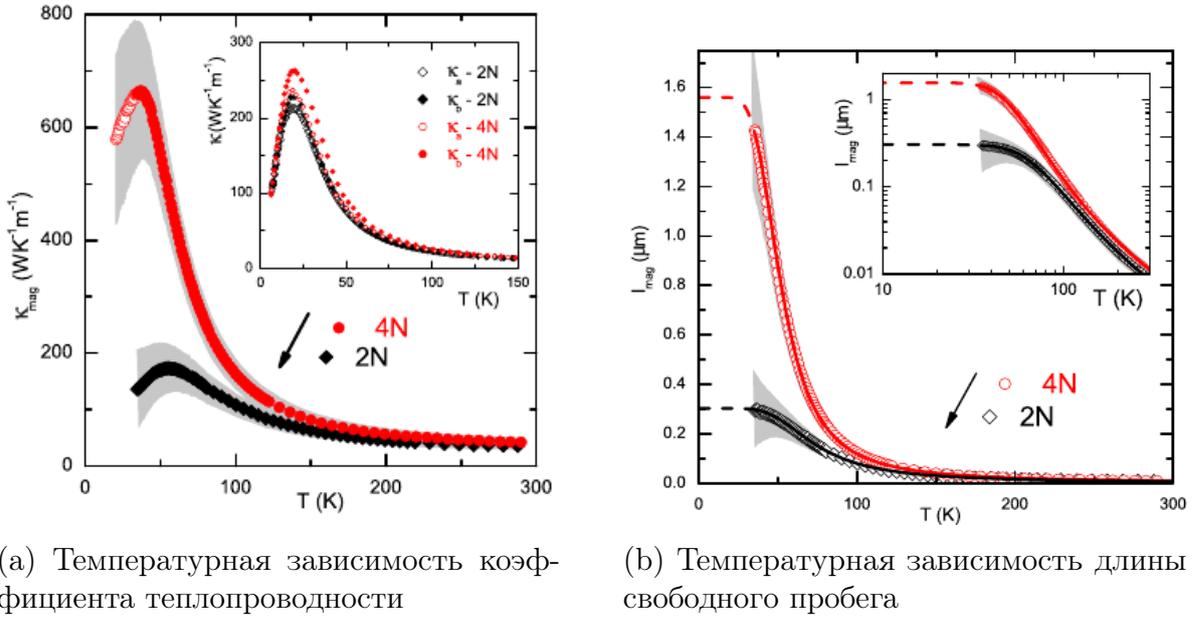


Рис. 1.3: Экспериментальные данные работы [7]

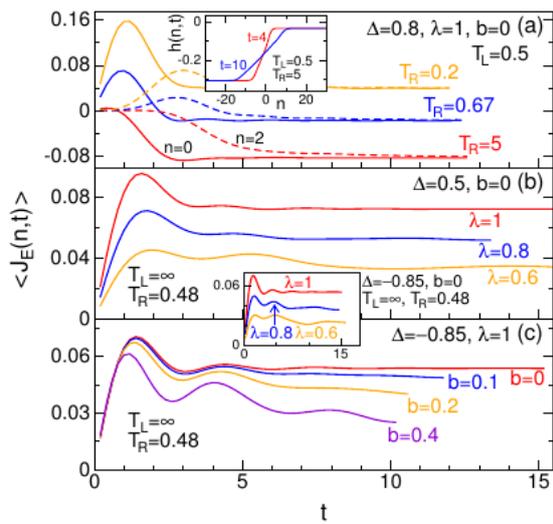
Кроме того, имеется работа [7], в которой изучалась температурная зависимость коэффициента теплопроводности вещества  $\text{SrCuO}_2$ ; результаты получались схожими с предыдущей работой. Отличие этой работы в том, что исследовалась зависимость кривых от чистоты образца. Изготавливались 2 типа образцов (“2N” с чистотой 99% и “4N” с чистотой 99.99%), и показывалось, что длины свободного пробега существенно зависят от чистоты образца (см. рис. 1.3). Из этого заключалось, что основным каналом рассеяния является рассеяние на примесях, и что взаимодействие квазичастиц не влияет на их транспорт (по крайней мере, теплопроводность).

## 1.4.2 Численный расчёт теплового потока

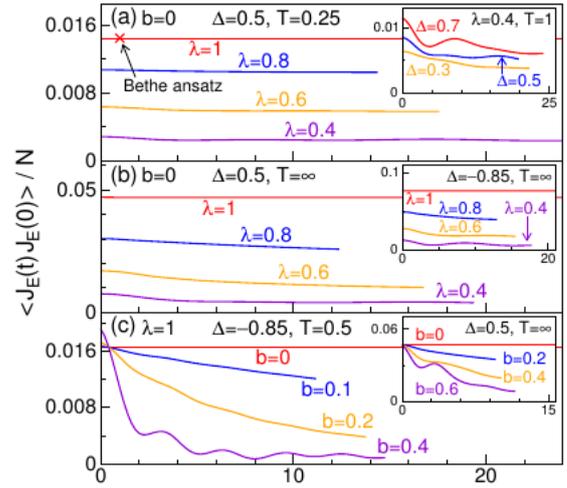
В работе [8] исследуется следующая модель. Рассматривается бесконечная спиновая цепочка, у которой локальные операторы энергии выглядят как

$$\hat{h}_n = J_n(\hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^x + \hat{S}_n^y \hat{S}_{n+1}^y + \Delta \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z) + b_n(\hat{S}_n^z - \hat{S}_{n+1}^z) \quad (1.11)$$

В начальный момент гамильтониан представляет собой  $\hat{H} = \sum_{n \neq 0} \hat{h}_n$  — член  $\hat{h}_0$  выброшен и цепочки распадаются на две полубесконечные цепочки; они приводятся в состояние термодинамического равновесия с температурами  $T_L$  и  $T_R$ . В начальный момент времени  $t = 0$  они “соединяются” (в гамильтониан добавляется член  $\hat{h}_0$ ) и исследуется временная динамика потока энергии  $\hat{J}_n^E(t)$  при помощи DMRG (Density Matrix Renormalization Group). Интегрируемость цепочки нарушается за счёт члена с полем  $b_n = \frac{(-1)^n}{2}b$  и за счёт чередования обменных констант  $J_{2k} = \lambda$  и  $J_{2k+1} = 1$ . Выход



(a) Поведение теплового потока  $\langle \hat{J}_n^E \rangle$  со временем



(b) Поведение корреляторов  $\langle \hat{J}^E(t) \hat{J}^E(0) \rangle$  со временем в неинтегрируемом случае

Рис. 1.4: Численные данные работы [8]

коррелятора  $\langle \hat{J}^E(t) \hat{J}^E(0) \rangle$  на константу при  $t \rightarrow \infty$  приводит к появлению пика Друде (см. раздел 1.2). Показывается, что в результате тепловой поток выходит на константу, связанную с исходными температурами простой функциональной зависимостью вида  $J^E = f(T_R) - f(T_L)$  с некой (универсальной) функцией  $f(T)$ .

Помимо этого, имеется работа [9], в которой также исследовалось то, как нарушающий интегрируемость цепочки член влияет на проводимость и коэффициент теплопроводности (проводимость не имеет особого смысла для спиновой модели (1.1); однако, о ней можно говорить для эквивалентной ей фермионной модели (1.3)). А именно, в  $XXZ$ -гамильтониан (1.1) (без поля) вводился нарушающий интегрируемость член  $\hat{h}_n = (-1)^n h \hat{S}_n^z$ . Во-первых, используя DMRG, в этой работе исследовалось поведение корреляторов  $\langle \hat{J}^E(t) \hat{J}^E(0) \rangle$ , которое обнаруживало поведение, сходное с рис. 1.4b (затухание в неинтегрируемом случае и выход на предельное значение в интегрируемом). При помощи метода бозонизации показывалось, что поведение проводимости этой задачи при малых полях  $h$  выглядит как  $\sigma_c \sim T^{3-2K} h^{-2}$  ( $K$  — параметр Латтинджера модели, который будет введён ниже в разделе 1.6). Стоит добавить, что добавляемый член в гамильтониане открывает щель в спектре при  $K < 2$ , тем самым рассматривалась лишь область  $K > 2$ .

Используя точную диагонализацию гамильтониана, в этой работе показывалось, что, по мере изменения параметра  $h$  (от 0 до  $\sim 0.1$ ) статистика уровней (распределение расстояний между соседними энергетическими уровнями) переходит от Пуассоновской (для интегрируемой системы с  $h = 0$ ) к статистике Вигнера-Дайсона ( $h \neq 0$ ).

Подобный переход исследовался в статье [10]. В ней рассматривался изотропный антиферромагнитный Гейзенберговский гамильтониан с случайным полем (в отличие от предыдущей статьи), и рассчитывалась величина  $r = \langle \min(\delta_n, \delta_{n+1}) / \max(\delta_n, \delta_{n+1}) \rangle$  (тут  $\delta_n$  — расстояние между соседними энергетическими уровнями многочастичной задачи; и усреднение происходит по беспорядку и по состояниям). По этой величине можно наблюдать переход в обратном направлении, от статистики Вигнера-Дайсона к статистике Пуассона по мере увеличения беспорядка (утверждалось, что первая статистика соответствует значению  $r \approx 0.53$ , в то время как вторая —  $r \approx 0.39$ ). Этот переход связывался с многочастичной локализацией (в отличие от предыдущей статьи, где подобный переход связан просто с нарушением интегрируемости цепочки).

### 1.4.3 Частотные зависимости кинетических коэффициентов

В работе [11] исследовался антиферромагнитный гамильтониан (1.1) (в наших обозначениях  $J \rightarrow -J$ ) с равномерно распределенным случайным полем  $h_n \in [-W/2; W/2]$ . Кинетические коэффициенты рассчитывались исходя из формулы Кубо численно, используя методы ED (exact diagonalization), FTLM (finite-temperature Lanczos method) и MCLM (microcanonical Lanczos method).

В работе исследовались случаи  $\Delta > 0$ , что соответствует отталкиванию между фермионами. Полученные в работе зависимости изображены на рисунках 1.5.

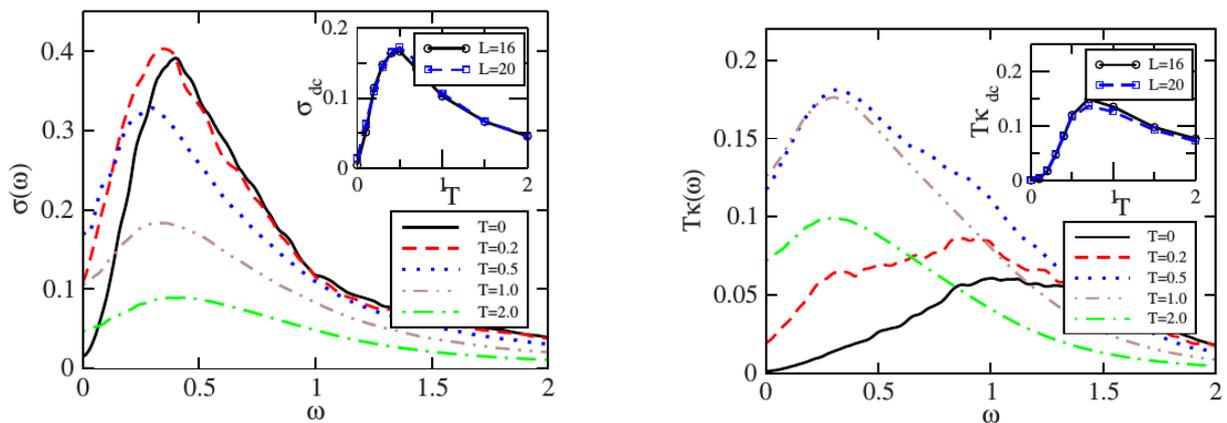


Рис. 1.5: Частотные зависимости коэффициентов  $\sigma(\omega)$  и  $\kappa(\omega)$  при  $\Delta = 1$  и  $W = 2$  из статьи [11]

При низких частотах кривые ведут себя неаналитично как  $\sigma(\omega) \sim \sigma_0 + \alpha|\omega|$  и  $\kappa(\omega) \sim \kappa_0 + \gamma|\omega|$ ; объяснения этого факта авторы статьи не приводят. Другой характерной особенностью поведения кривых является наличие максимума при конечных частотах  $\omega^*$ .

## 1.5 Локализация ХУ-цепочки

ХУ-цепочка ( $J_z = 0$ ) эквивалентна модели одномерных свободных фермионов, и тем самым ожидается, что любой беспорядок приведет в ней к локализации (см., например, [1]). В работе [12] исследовалась структура основного состояния такой системы и доказывалась оценка на корреляторы:  $\langle \hat{\sigma}_+(x)\hat{\sigma}_-(y) \rangle \leq C \exp(-m_J|x-y|)$  (тем самым, эти корреляторы экспоненциально затухают, что является одним из возможных критериев локализации).

Доказательство основывалось в первую очередь на утверждении о том, что фермионные корреляционные функции  $\langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle$  затухают экспоненциально ( $\langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \leq C \exp(-m|x-y|)$ ). Преобразование Йордана-Вигнера переписывает спиновые корреляторы через оператор “струны”, соединяющий два узла:

$$\hat{\sigma}_+(x)\hat{\sigma}_-(y) \sim \hat{a}_x^\dagger \exp\left(i\pi \sum_{i=x+1}^{y-1} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i\right) \hat{a}_y \quad (1.12)$$

Кроме того, используя сохранение полного числа частиц, этот же оператор можно переписать по-другому:

$$\hat{\sigma}_+(x)\hat{\sigma}_-(y) \sim \exp\left(i\pi \hat{N}\right) \exp\left(i\pi \sum_{i=-L}^{x-1} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i\right) \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \exp\left(i\pi \sum_{i=y+1}^L \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i\right) \quad (1.13)$$

Расписывая полученное выражение по теореме Вика и учитывая, что теперь наименьшее расстояние между операторами  $\geq |x-y|$ , показывалась оценка на то, что экспоненциальная асимптотика верна и для спиновых корреляторов.

## 1.6 Бозонизация

Дальнейшее исследование задачи можно производить при помощи мощнейшего метода теории одномерных систем — бозонизации. Идея метода заключается в том, что коллективные возбуждения одномерной взаимодействующей фермионной системы представляют собой возбуждения зарядовой плотности и имеют бозонный характер. Более того, в некотором приближении возбуждения представляют собой просто свободные бозоны с линейным законом дисперсии (с перенормированной скоростью за счёт взаимодействия); это позволяет узнать очень многое о свойствах нашей системы.

## 1.6.1 Операторные тождества

В непрерывном пределе операторы  $\hat{\psi}_n$  и  $\hat{\psi}_n^\dagger$  переходят в непрерывное фермионное поле  $\hat{\psi}(x)$ . Из-за того, что возбуждения возникают вблизи точек  $\pm k_F$ , это поле удобно разложить на компоненты, имеющие Фурье-гармоники вблизи этих точек:

$$\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}_L(x)e^{-ik_F x} + \hat{\psi}_R(x)e^{ik_F x} \quad (1.14)$$

и поля  $\hat{\psi}_\eta(x)$  ( $\eta = L; R$ ) можно считать уже медленно меняющимися в пространстве.

Бозонизация позволяет переписать эти поля в терминах бозонных полей  $\phi_\eta(x)$  по правилу

$$\hat{\psi}_\eta(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp(-i\phi_\eta(x)) \quad (1.15)$$

(параметр  $\alpha$  — формальный параметр, обрезающий некоторые ультрафиолетовые расходимости при вычислении различных матричных элементов; во всех бозонизационных тождествах подразумевается предел  $\alpha \rightarrow 0$ ). Линейные комбинации этих полей  $\phi(x)$  и  $\theta(x)$ , задаваемые соотношениями

$$\begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{2}(\phi_R(x) - \phi_L(x)) \\ \theta(x) = \frac{1}{2}(\phi_R(x) + \phi_L(x)) \end{cases} \quad (1.16)$$

представляют собой дуальные бозонные поля с коммутационными соотношениями  $[\phi(x), \theta(y)] = -i\pi \text{sign}(x - y)$ ; а значит,  $\Pi(x) = \frac{1}{\pi} \partial_x \theta(x)$  представляет собой канонически сопряжённый  $\phi(x)$  импульс  $[\phi(x), \Pi(y)] = i\delta(x - y)$ .

Кроме того, из бозонизации в таком виде следуют следующие тождества:

$$\psi^\dagger \psi = \mp \frac{1}{2\pi} \partial_x \phi \quad (1.17)$$

$$\psi^\dagger \nabla \psi = \pm \frac{1}{4\pi} (i(\partial_x \phi)^2 - \partial_x^2 \phi) \quad (1.18)$$

$$\psi^\dagger \nabla^2 \psi = \pm \frac{1}{6\pi} ((\partial_x \phi)^3 + 3i\partial_x \phi \partial_x^2 \phi - \partial_x^3 \phi) \quad (1.19)$$

$$\psi^\dagger \nabla^3 \psi = \mp \frac{1}{8\pi} (i(\partial_x \phi)^4 - 6(\partial_x \phi)^2 \partial_x^2 \phi - 3i(\partial_x^2 \phi)^2 - 4i\partial_x \phi \partial_x^3 \phi + \partial_x^4 \phi) \quad (1.20)$$

(верхний знак соответствует «правой» ( $R$ ) моде, а нижний —  $L$ ; кроме того, все операторы подразумеваются нормально упорядоченными по отношению к заполненному Дираковскому морю:  $\hat{A} := \hat{A} - \langle 0 | \hat{A} | 0 \rangle$ ). Для исходной фермионной плотности это означает, что она складывается из двух компонент:

$$\hat{\rho}(x) =: \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) := -\frac{1}{\pi} \partial_x \phi(x) + \frac{1}{\pi\alpha} \cos(2k_F x - \phi(x)) \quad (1.21)$$

первая компонента представляет собой “медленную” компоненту плотности с волновыми векторами  $q \sim 0$ , а вторая — “быструю”, с волновыми векторами  $q \sim 2k_F$ .

## 1.6.2 Гамильтониан

В рамках пертурбативной бозонизации (в качестве основного состояния взять основное состояние свободных фермионов; взаимодействие считается тем самым малым  $\Delta \ll 1$ ) можно показать, что исходный гамильтониан принимает простой вид (гамильтониан жидкости Латтинджера):

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_U \quad (1.22)$$

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\pi} \int dx \left( \frac{u}{K} (\partial_x \phi)^2 + uK (\pi\Pi)^2 \right) \quad (1.23)$$

$$\hat{H}_U = \frac{g_3}{(2\pi\alpha)^2} \int dx \cos 4\phi(x) \quad (1.24)$$

с параметрами

$$uK = Ja \quad u/K = J \left( 1 + \frac{4\Delta}{\pi} \right) a \quad g_3 = 2J\Delta a \quad (1.25)$$

Параметр  $u$  представляет собой просто скорость элементарных возбуждений гамильтониана  $\hat{H}_0$  — бозонов (плазмонов); их закон дисперсии записывается как  $\varepsilon(k) = u|k|$ . Параметр  $K$  — безразмерный параметр Латтинджера;  $K = 1$  соответствует невзаимодействующему случаю;  $K > 1$  соответствует притяжению, а  $K < 1$  — отталкиванию между исходными фермионами. Параметр  $g_3$  представляет собой амплитуду так называемых процессов переброса.

Исследуя получившуюся теорию (синус-Гордон) при помощи метода ренормгруппы [3, Appendix E], можно показать, что член  $H_U$  иррелевантен при  $K > \frac{1}{2}$ ; выбрасывая его, мы видим, что низкоэнергетические возбуждения описываются свободной бозонной теорией с гамильтонианом  $\hat{H}_0$ .

Оказывается, это свойство довольно общее, и верно вдали от пертурбативного режима  $|\Delta| \ll 1$ . Низкоэнергетическая физика при  $|\Delta| < 1$  всегда описывается свободной бозонной теорией, достаточно лишь знать точные значения параметров  $u$  и  $K$ . Значения этих параметров можно определить, сравнивая выражения для термодинамических свойств системы, получаемые из точного решения при помощи анзаца Бете, с таковыми, получаемые из модели жидкости Латтинджера [3, p. 167], и они даются выражением:

$$\Delta = \cos \pi\beta^2 \quad K = \frac{1}{2\beta^2} \quad u = \frac{Ja \sin(\pi(1 - \beta^2))}{2(1 - \beta^2)} \quad (1.26)$$

Отметим характерные точки:

- $\Delta = -1 \Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$  соответствует Гейзенберговскому антиферромагнетику (это согласуется с тем, что как раз в этой точке член  $\hat{H}_U$  становится маргинальным).
- $\Delta = 0 \Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow K = 1$  соответствует невзаимодействующему случаю (это согласуется с общим утверждением).
- $\Delta = 1 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow K \rightarrow \infty$  соответствует Гейзенберговскому ферромагнетику.
- $K = \frac{3}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow u = \frac{3\sqrt{3}}{8}Ja, \Delta = \frac{1}{2}$  — ниже в главе 2 будет показано, что это — точка фазового перехода между локализованной и делокализованной фазами.

Кроме того, результаты пертурбативной бозонизации (1.25) соответствуют разложению точного результата (1.26) по параметру  $\Delta$ .

### 1.6.3 Некоторые следствия бозонизованного гамильтониана

Для простого гамильтониана (1.23) можно рассчитать уже большое количество различных термодинамических величин (см., например, [3, Chapter 2]). Удельная теплоёмкость  $C_V$ , кондактанс  $G$ , “сжимаемость”  $\kappa = \frac{d\rho}{d\mu}$  (настоящая сжимаемость выражается через  $\kappa$  как  $-\frac{1}{L} \frac{dL}{dP} = \frac{1}{\rho_0^2} \kappa$ ; тут  $L$  — длина системы,  $P$  — внешнее давление), и спиновая жёсткость  $D$  (которая представляет собой амплитуда пика Друде — см. раздел 1.2; другая интерпретация  $D$ : если рассмотреть систему на торе с граничными условиями вида  $\hat{\psi}_N = \hat{\psi}_0 e^{i\Phi}$ , то в системе возникнет незатухающий ток  $J$ ; в таком случае спиновая жесткость определяется как  $D = \pi L \frac{dJ}{d\Phi}$ ) выражаются как:

$$C_V = \frac{T L \pi}{u \ 3} \quad G = \frac{e^2}{h} K \quad \kappa = \frac{K}{u \pi} \quad D = u K \quad (1.27)$$

Помимо этого можно рассчитать различные корреляционные функции. Например, коррелятор плотность-плотность выражается как ( $y = u\tau + \alpha \operatorname{sign} \tau$ ,  $r = \sqrt{x^2 + (u\tau)^2}$ ):

$$\langle \rho(x, \tau) \rho(0, 0) \rangle = \frac{K}{2\pi^2} \frac{y_\alpha^2 - x^2}{(x^2 + y_\alpha^2)^2} + \frac{2}{(2\pi\alpha)^2} \cos(2k_F x) \left( \frac{\alpha}{r} \right)^{2K} \quad (1.28)$$

(тем самым неосциллирующая часть спадает универсальным образом как  $\sim \frac{1}{x^2}$ ). Поскольку фермионная плотность напрямую связана с  $\hat{S}_n^z$  исходной спиновой цепочки ( $\hat{S}_n^z =: \hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_n := a\rho(na)$ ), то ровно такое же поведение

ождается для одновременного  $\langle \hat{S}_n^z \hat{S}_0^z \rangle$ -коррелятора спиновой задачи [3, Chapter 6]:

$$\langle \hat{S}_n^z \hat{S}_0^z \rangle = C_1 \left( \frac{1}{n} \right)^2 + C_2 (-1)^n \left( \frac{1}{n} \right)^{2K} \quad (1.29)$$

(с неуниверсальными константами  $C_1$  и  $C_2$ ). Коррелятор  $\langle \hat{S}_n^+ \hat{S}_0^- \rangle$  выражается чуть сложнее, из-за того, что спиновые операторы связаны с фермионными при помощи оператора “струны”; тем самым этот коррелятор будет содержать фактор вида  $\exp \left( i\pi \sum_{i=0}^n \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i \right)$ . Однако после бозонизации этот фактор опять удобно выразится через локальные операторы, ведь  $\sum_i \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i \sim \int dx \cdot \rho(x) \sim \int dx \cdot \partial_x \phi \sim \phi(x) - \phi(0)$ ; и коррелятор получается равным:

$$\langle \hat{S}_n^+ \hat{S}_0^- \rangle = C_3 (-1)^n \left( \frac{1}{n} \right)^{2K + \frac{1}{2K}} + C_4 \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2K}} \quad (1.30)$$

### 1.6.4 Беспорядок

Беспорядок в виде внешнего магнитного поля входит в гамильтониан как:

$$\hat{H}_{dis} = \sum_n h_n \hat{S}_n^z = \sum_n h_n : \hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_n : \simeq \int dx \hat{\rho}(x) V(x) \quad (1.31)$$

где  $h_n = V(x = na)$ . Поскольку  $\langle h_n h_m \rangle = \delta_{nm} \langle h^2 \rangle$  (поля на каждом узле независимы), то коррелятор “потенциала”  $V$  выражается как  $\langle V(x) V(y) \rangle = \delta(x - y) \cdot a \langle h^2 \rangle \equiv D \delta(x - y)$ .

Поскольку фермионная плотность (1.21) имеет как плавную компоненту, так и осциллирующую с  $2k_F$ , то удобно разбить случайный потенциал на компоненты с фурье-гармониками вблизи 0 и  $2k_F$ :

$$\begin{cases} \eta(x) = \sum_{q \sim 0} V_q e^{iqx} \\ \xi(x) = \sum_{q \sim -2k_F} V_q e^{i(q+2k_F)x} \end{cases} \quad (1.32)$$

и в таком случае гамильтониан взаимодействия с беспорядком запишется как:

$$\hat{H}_{dis} = \int dx \left[ \left( -\frac{1}{\pi} \partial_x \phi(x) \cdot \eta(x) \right) + \left( \frac{\xi^*(x)}{2\pi\alpha} e^{2i\phi(x)} + h.c \right) \right] \quad (1.33)$$

Коррелятор компонент потенциала выражается точно так же, как коррелятор исходного потенциала  $V(x)$ :  $\langle \eta(x) \eta(y) \rangle = \langle \xi(x) \xi(y) \rangle = D \delta(x - y)$ . Первое слагаемое соответствует рассеянию вперёд, а второй — рассеянию

назад (с передачей импульса  $\sim 2k_F$ ). Отметим, что от члена с  $\eta(x)$  в гамильтониане  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{dis}$  можно избавиться полностью, проведя преобразование

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \frac{K}{u} \int^x dy \cdot \eta(y) \quad (1.34)$$

Это преобразование сохраняет коммутационные соотношения и квадратичный вид исходного гамильтониана. Кроме того, он соответствует появлению дополнительной фазы для  $\xi(x)$ , от которой можно тоже избавиться, проведя преобразование:

$$\tilde{\xi}(x) = \xi(x) \exp \left( i \frac{2K}{u} \int^x dy \cdot \eta(y) \right) \quad (1.35)$$

После этой пары преобразований,  $\eta(y)$  полностью пропал; тем самым показывается, что рассеяние вперёд (длинноволновая часть потенциала  $\eta(x)$ ) не приводит к локализации.

# Глава 2

## Фазовая диаграмма

### 2.1 Ренормгруппа для беспорядка

Гамильтониан (1.23) с беспорядком в виде (1.33) был исследован в статье [13]. В этой статье усреднение по беспорядку осуществлялось при помощи метода реплик; тем самым задача сводилась к системе из репличных бозонных полей со взаимодействием. В результате в первом приближении по беспорядку на параметры бозонизованного гамильтониана выводились следующие ренормгрупповые уравнения (тут  $\tilde{D} = \frac{2\alpha}{\pi u^2} D$ ;  $D$  — параметр, характеризующий коррелятор беспорядка — см. раздел 1.6.4;  $\xi = \ln \frac{\Lambda_0}{\Lambda}$  — параметр масштаба):

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{D}}{d\xi} = (3 - 2K)\tilde{D} \\ \frac{dK}{d\xi} = -\frac{K^2}{2}\tilde{D} \\ \frac{du}{d\xi} = -\frac{uK}{2}\tilde{D} \end{cases} \quad (2.1)$$

На рисунке 2.1 показана схема ренормгрупповых потоков, соответствующих этим уравнениям. Точка  $K_c = \frac{3}{2}$  — стационарная точка диаграммы; при слабом беспорядке  $\tilde{D} \ll 1$  и  $K > \frac{3}{2}$  (это соответствует  $1 > \Delta > \frac{1}{2}$  в терминах исходного спинового гамильтониана, согласно (1.26)) беспорядок по мере увеличения масштаба  $\xi \rightarrow \infty$  перенормируется к нулю, что является признаком делокализованной фазы, которая описывается моделью жидкости Латтинджера без беспорядка но с перенормированными параметрами  $u^*$  и  $K^*$ . Для области  $K < \frac{3}{2}$ , напротив, беспорядок перенормируется к бесконечности, что является признаком локализованной фазы. Фазовая диаграмма, получаемая из этих ренормгрупповых уравнений, представлена на рисунке 2.2.

Для получения фазовой диаграммы уравнение ренормгруппы на скорость  $u$  не нужны; однако они могут понадобиться для оценки проводимости.

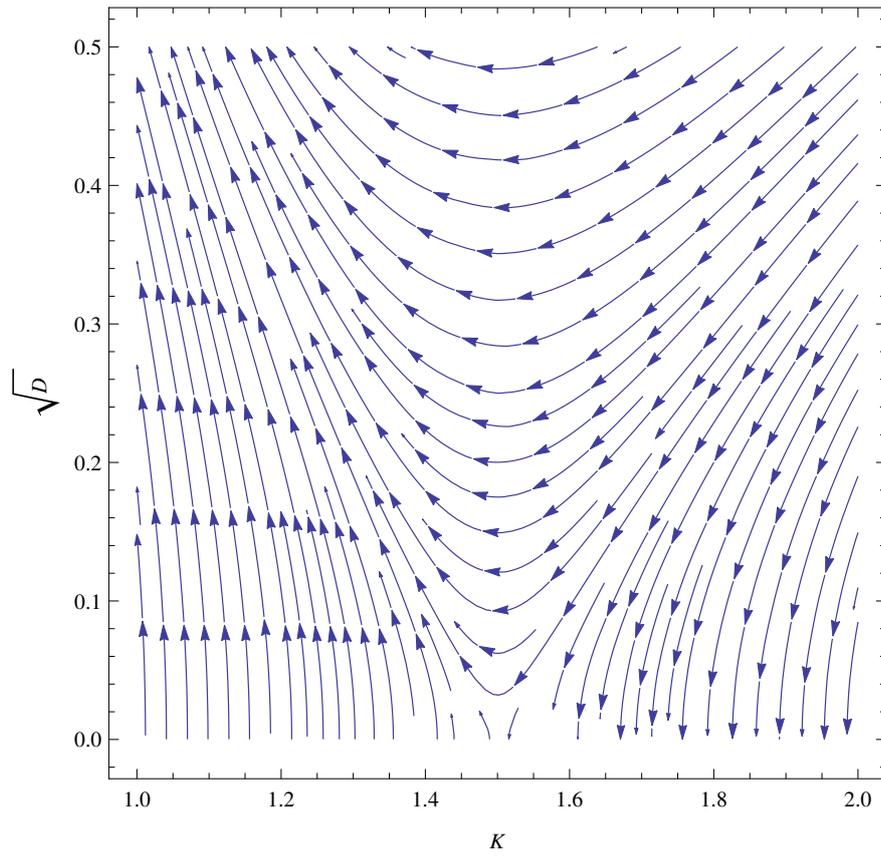


Рис. 2.1: Ренормгрупповые потоки системы (2.1) в координатах  $(K; \sqrt{\tilde{D}})$

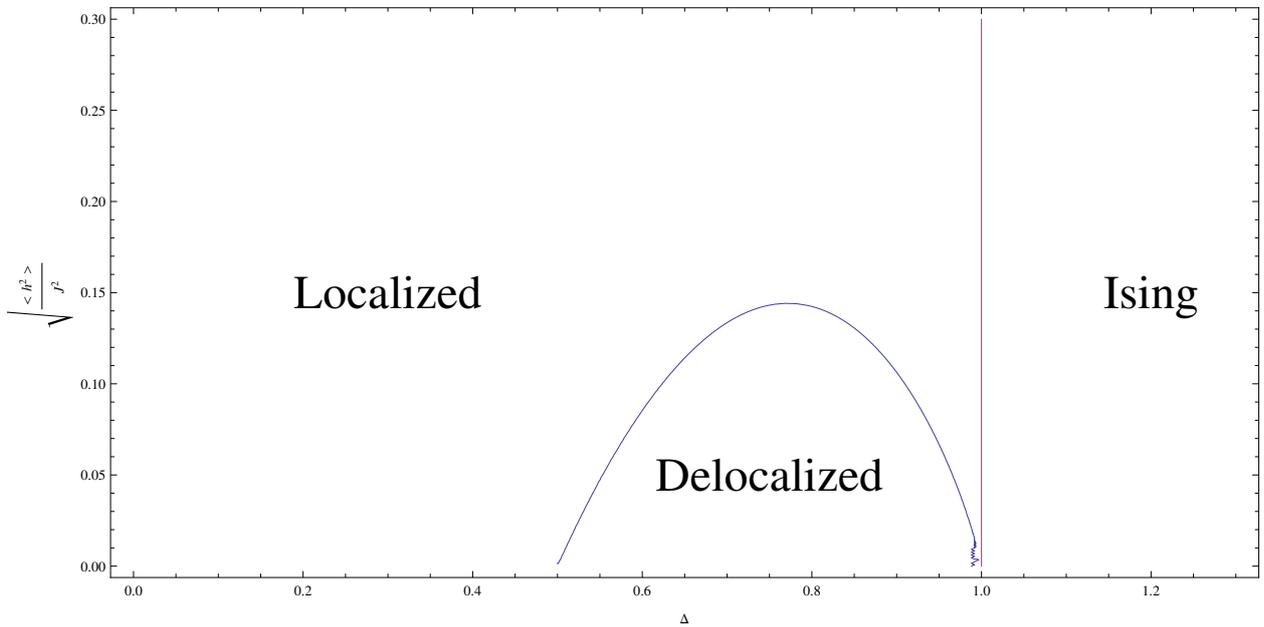


Рис. 2.2: Фазовая диаграмма в координатах  $(\Delta, \sqrt{\langle h^2 \rangle} / J^2)$

## 2.2 Длина локализации вблизи перехода

Проанализируем ренормгрупповые уравнения (2.1). Линеаризуем уравнения вблизи критической точки, введя  $\eta \equiv K - \frac{3}{2}$ :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{D}}{d\xi} = -2\eta\tilde{D} \\ \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{9}{8}\tilde{D} \\ \frac{du}{d\xi} = -\frac{3u}{4}\tilde{D} \end{cases} \quad (2.2)$$

У системы из первых двух уравнений имеется первый интеграл

$$I = \frac{9}{8}\tilde{D} - \eta^2 \quad (2.3)$$

В результате ренормгруппового преобразования, все точки на кривой  $I = 0$  приходят в стационарную точку; точки же с  $I > 0$  находятся выше этой кривой, и значит они соответствуют локализованной фазе (см. рис. 2.1). Используя первый интеграл, мы можем решить эту систему, получив ответ:

$$\begin{cases} \eta(\xi) = -\sqrt{I} \tan((\xi - \xi_0)\sqrt{I}) \\ \tilde{D}(\xi) = \frac{8I}{9 \cos^2((\xi - \xi_0)\sqrt{I})} \\ u(\xi) = u_0 \exp\left(-\frac{2}{3} \tan((\xi - \xi_0)\sqrt{I})\right) \end{cases} \quad (2.4)$$

(параметры  $u_0$  и  $\xi_0$  выбирается из «начальных условий» — на масштабе  $\xi = 0$  параметры  $\tilde{D}(0)$ ,  $\eta(0)$  и  $u(0)$  должны достигать своих затравочных значений; тем самым  $\tan \xi_0 \sqrt{I} = \eta/\sqrt{I}$ ). Значения параметров системы расходятся при  $(\xi_c - \xi_0)\sqrt{I} = \frac{\pi}{2}$ ; имеется гипотеза, что именно этот масштаб определяют нам длину локализации системы (однако значения параметров выходят за пределы применимости ренормгрупповых уравнений раньше; поэтому масштаб даётся точкой  $\frac{\pi}{2}$  по порядку величины). Тем самым,  $R_{loc} \sim \frac{a}{\Lambda_c} \sim a \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\eta}{\sqrt{I}}\right) \frac{1}{\sqrt{I}}\right)$ . Поскольку значения арктангенса  $\arctan \sim 1$ , то основное сингулярное поведение длины локализации возникают от корня в знаменателе. Тем самым можно записать, что длина локализации вблизи перехода расходится следующим образом:

$$R_{loc} \sim a \exp\left(\frac{C}{\sqrt{\frac{9}{8}\tilde{D} - \eta^2}}\right) \quad (2.5)$$

Свяжем параметры  $\tilde{D}$  и  $\eta$  с параметрами исходной задачи. Согласно разделу 1.6.2, фазовому переходу соответствует  $u = \frac{3\sqrt{3}}{8}Ja$ ; тем самым для безразмерного параметра  $\tilde{D}$  получаем (беря масштаб обрезания  $\alpha$  равным

шагу решётки  $a$ )

$$\tilde{D} \approx \frac{2a}{\pi u^2} \times a \langle h^2 \rangle = \frac{128}{27\pi} \frac{\langle h^2 \rangle}{J^2} \quad (2.6)$$

Согласно (1.26),  $\Delta = \cos \frac{\pi}{2K}$ , поэтому

$$\eta \approx \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left( \Delta - \frac{1}{2} \right) \quad (2.7)$$

## 2.3 Численная фазовая диаграмма при $T = 0$

В статье [14] исследовалась фермионная модель (1.3) с беспорядком, на торе и с граничными условиями вида  $\hat{\psi}_M = e^{i\phi} \hat{\psi}_0$  (всего имелось  $M$  узлов). Беспорядок брался в виде случайного потенциала, распределённого в интервале  $h_n \in [-\frac{W}{2}; \frac{W}{2}]$ . Рассматривалась статистика разниц энергий  $\Delta E$  основного состояния (тем самым рассматривался лишь случай нулевых температур) с периодическими  $\phi = 0$  и антипериодическими  $\phi = \pi$  граничными условиями и исследовалось, как эта величина зависит от размеров системы. В частности, ожидается, что локализованная фаза нечувствительна к граничным условиям, поэтому  $\langle \ln M \Delta E \rangle \propto -\frac{M}{\xi}$  (где  $\xi$  — локализационная длина).

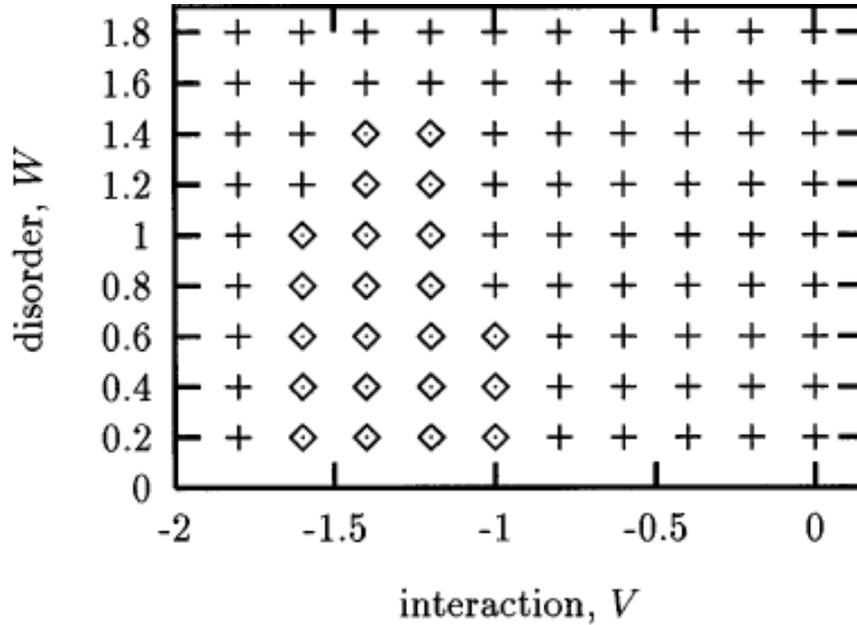


Рис. 2.3: Фазовая диаграмма, предложенная в работе [14]. Ромбы соответствуют делокализованной фазе. Величине  $V$  используемой фермионной модели (1.3) соответствует величина  $\Delta = -\frac{V}{2}$  исходной спиновой задачи (1.1)

Согласно ренормгрупповому решению, изложенному выше, в делокализованной фазе беспорядок перенормируется к нулю. В статье это взято за критерий делокализованной фазы — а именно, исследовалась величина

$\sigma_{\ln M\Delta E}$  (дисперсия соответствующей величины); точки фазовой диаграммы, где эта величина росла с размером системы, соответствуют локализованной фазе, в то время как те точки, где она уменьшалась, соответствовали де-локализованной фазе. Полученная фазовая диаграмма изображена на рисунке 2.3; в точке  $V = 1 \Leftrightarrow \Delta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow K = \frac{3}{2}$  видна граница между фазами.

## 2.4 Ненулевые температуры

В статье [15] исследовалось высокотемпературное поведение жидкости Латтинджера (1.23) с беспорядком (1.33). Используя memory-function method и Борновское приближение (которые можно применять лишь когда квантовые флуктуации подавлены температурными неупругими процессами, то есть при достаточно высоких температурах; критерий будет сформулирован ниже), были получены следующие значения кинетических коэффициентов:

$$\sigma(T) = \frac{2\Gamma(2K)}{\pi^2\Gamma^2(K)} \frac{e^2 a}{\tilde{D}} \left( \frac{2\pi a T}{u} \right)^{2-2K} \propto T^{2-2K} \quad (2.8)$$

$$\kappa(T) = \frac{2\Gamma(2K)}{9\Gamma^2(K)} \frac{1 + 2K}{K^2} \frac{aT}{\tilde{D}} \left( \frac{2\pi a T}{u} \right)^{2-2K} \propto T^{3-2K} \quad (2.9)$$

Тем самым закон Видемана-Франца  $\frac{\kappa}{\sigma T} = L$  выполняется, но с перенормированным значением и постоянной Лоренца, значение которой для фермижидкости равно  $\frac{\pi^2}{3e^2}$ :

$$L = \frac{\pi^2(1 + 2K)}{9e^2 K^2} \quad (2.10)$$

Эти уравнения имеют интерпретацию в смысле ренормгруппы (2.1). Действительно, если пренебречь перенормировкой параметра  $K$  и рассмотреть лишь уравнение на  $D$ , то его решение выписывается:  $D(\xi) = D \exp((3-2K)\xi)$ . Если ввести «температурную длину»  $l_{th} \sim \frac{u}{T}$  и соответствующий масштаб  $\xi_{th} \sim \ln \frac{J}{T}$ , то эти уравнения можно переписать в виде:

$$\sigma(T) \sim \frac{e^2 l_{th}}{\tilde{D}(\xi_{th})} \quad (2.11)$$

$$\kappa(T) \sim \frac{T \cdot l_{th}}{\tilde{D}(\xi_{th})} \quad (2.12)$$

Эта же интерпретация позволит нам сделать оценку и на низкотемпературное поведение кинетических коэффициентов (при котором применимость буквально самих формул (2.8) и (2.9) нарушена). Решая ренормгрупповые уравнения вблизи точки перехода (учитывая тем самым перенормировку

$K$ ), но в «делокализованной области», мы получим (введем переобозначение  $I_1 \equiv -I = \eta^2 - \frac{9}{8}D > 0$ ):

$$\begin{cases} \eta(\xi) = \sqrt{I_1} \coth((\xi - \xi_0)\sqrt{I_1}) \\ \tilde{D}(\xi) = \frac{8I_1}{9 \sinh^2((\xi - \xi_0)\sqrt{I_1})} \\ u(\xi) = u_0 \exp\left(-\frac{2}{3} \coth((\xi - \xi_0)\sqrt{I_1})\right) \end{cases} \quad (2.13)$$

(тут, как и раньше, значения  $u_0$  и  $\xi_0$  подбирается так, чтобы параметры  $\eta(0)$  и  $\tilde{D}(0)$  совпадали со своими затравочными значениями). Это решение даёт и критерий, по которому температура считается высокой или низкой (а именно, необходимо сравнивать  $\xi_{th}\sqrt{I_1}$  с единицей). Из этого решения видно, что перенормированные значения  $\eta$  и  $u$  практически не зависят от температуры; в то время как перенормированный беспорядок имеет вид  $\tilde{D}(\xi_{th}) \sim I_1 \left(\frac{T}{J}\right)^{2\sqrt{I_1}}$ . Таким образом, из этих рассуждений ожидается следующее низкотемпературное поведение кинетических коэффициентов:

$$\sigma(T) \sim \frac{e^2 a^{3-2K} T^{2-2K}}{u^{2-2K}(\xi_{th}) \tilde{D}(\xi_{th})} \propto T^{2-2K-2\sqrt{I_1}} \quad (2.14)$$

$$\kappa(T) \sim \frac{a^{3-2K} T^{3-2K}}{u^{2-2K}(\xi_{th}) \tilde{D}(\xi_{th})} \propto T^{3-2K-2\sqrt{I_1}} \quad (2.15)$$

Тем самым имеются небольшие поправки (поскольку  $I_1 \ll 1$  — все эти рассуждения верны вблизи точки переходы) к показателю степени температуры, приводящие к чуть более сингулярному поведению вблизи точки перехода; кроме того, по мере увеличения  $K$  (что соответствует уходу в «делокализованную» область) степень сингулярности тоже повышается.

## Глава 3

# Жидкость Латтинджера с нелинейным спектром

### 3.1 Введение

Метод бозонизации и модель жидкости Латтинджера существенно используют линейность закона дисперсии исходных фермионов. Для низкоэнергетических возбуждений это действительно так. Однако модель жидкости Латтинджера дает бесконечные коэффициент теплопроводности и проводимости, причем в случае  $K > \frac{3}{2}$  и нулевых температурах даже для системы с беспорядком (следуя статье [13]).

Нелинейность спектра у исходной фермионной модели в рамках бозонизации приводит к появлению старших (третьего и выше) порядков в гамильтониане по полям  $\phi(x)$  и  $\Pi(x)$ , что эффективно означает слабое взаимодействие между плазмонными модами. Это взаимодействие уже может привести к релаксации, а значит и к существенному влиянию на физику системы.

Важно отметить, что наша модель (XXZ-цепочка) без беспорядка является интегрируемой, и поток энергии в ней является сохраняющейся величиной; поэтому учёт нелинейности спектра без беспорядка сам по себе не должен приводить к конечному ответу. Однако учёт этих двух явлений одновременно — может.

### 3.2 Гамильтониан XXZ-цепочки с учётом нелинейности спектра

В статье [16] приводятся следующие поправки к гамильтониану, связанные с кривизной спектра (обозначения согласованы с обозначениями раздела

1.6):

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_u + \hat{H}_{b.c.} \quad (3.1)$$

$$\hat{H}_u = \lambda \int dx \cos(4\phi) \quad (3.2)$$

$$\hat{H}_{bc} = -\frac{\pi u}{8} \int dx \left[ \left( (\partial_x \phi)^4 \frac{4}{\pi^2 K^2} + \Pi^4 \frac{\pi^2 K^2}{4} \right) (\lambda_+ + 2\lambda_-) + 2(\partial_x \phi)^2 \Pi^2 (6\lambda_- - \lambda_+) \right] \quad (3.3)$$

Коэффициенты этого гамильтониана выражаются как:

$$\lambda = \frac{2K\Gamma(2K) \sin(\pi/2K)}{\pi\Gamma(2-2K)} \left[ \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{4K-2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1 + \frac{2K}{4K-2})} \right]^{4K-2} \quad (3.4)$$

$$\lambda_+ = \frac{1}{2\pi} \tan \frac{\pi K}{2K-1} \quad \lambda_- = \frac{1}{24\pi K} \frac{\Gamma(\frac{3K}{2K-1}) \Gamma^3(\frac{1}{4K-2})}{\Gamma(\frac{3}{4K-2}) \Gamma^3(\frac{K}{2K-1})} \quad (3.5)$$

### 3.2.1 Токи

Используя уравнения непрерывности (1.7) и (1.8) для гамильтониана (3.1) можно выписать операторные выражения для токов частиц и энергии. Для гамильтониана вида  $\hat{H} = \int dx \hat{h}(\partial_x \phi(x), \Pi(x))$  верны соотношения (тут  $\partial_x \theta(x) = \pi \Pi(x)$  — поле  $\theta(x)$  дуально полю  $\phi(x)$ ):

$$\partial_t \phi(x, t) = \frac{\partial \hat{h}}{\partial \Pi} \quad \partial_t \Pi(x, t) = \partial_x \frac{\partial \hat{h}}{\partial (\partial_x \phi)} \Rightarrow \partial_t \theta(x, t) = \pi \frac{\partial \hat{h}}{\partial (\partial_x \phi)} \quad (3.6)$$

Это позволяет нам выписать общие выражения для оператора тока частиц и энергии, верное для произвольного гамильтониана нужного вида:

$$j(x, t) = \frac{1}{\pi} \partial_t \phi(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial h}{\partial \Pi} \quad (3.7)$$

$$j^E(x, t) = -\frac{1}{\pi} \partial_t \theta(x, t) \partial_t \phi(x, t) = -\frac{\partial h}{\partial (\partial_x \phi)} \frac{\partial h}{\partial \Pi} \quad (3.8)$$

Для гамильтониана (3.1) (без учета иррелевантного оператора  $\hat{H}_u$ ) эти выражения дают:

$$j = uK \cdot \Pi \left\{ 1 - \Pi^2 \frac{\pi^2 K}{8} (\lambda_+ + 2\lambda_-) - \frac{1}{2K} (\partial_x \phi)^2 (6\lambda_- - \lambda_+) \right\} \quad (3.9)$$

$$j^E(x, t) = -u^2 \Pi \partial_x \phi \left\{ 1 - (\partial_x \phi)^2 \frac{2}{K} (\lambda_+ + 2\lambda_-) - \frac{\pi^2 K}{2} \Pi^2 (6\lambda_- - \lambda_+) \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{1}{2K} (\partial_x \phi)^2 (6\lambda_- - \lambda_+) - \frac{\pi^2 K}{8} \Pi^2 (\lambda_+ + 2\lambda_-) \right\} \quad (3.10)$$

Интерес представляет вопрос сохранения этих токов в «чистой системе». Известно, что в исходной модели — XXZ-цепочка (1.1) — ток энергии сохраняется  $[\hat{J}^E, \hat{H}] = 0$ , а ток частиц — сохраняется только в невзаимодействующем случае  $\Delta = 0$ . Оказывается, что точно эти токи не сохраняются; однако, рассматривая коммутатор полных токов с гамильтонианом, выясняется, что для тока энергии отличные от нуля члены имеют 6 порядок по степеням полей  $\phi$  и  $\Pi$ , а для тока частиц — 3.

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Если рассматривать гамильтониан (3.1) как разложение некоего полного гамильтониана по полям  $\phi$  и  $\Pi$  до 4 степени, то члены старших порядков (6 и выше; в силу симметрии частица-дырка, в разложении могут присутствовать лишь чётные степени полей) будут для потока энергии генерировать члены 6 порядка в выражении для потока и 6 порядок в его коммутаторе с гамильтонианом; это значит, что поток энергии сохраняется с нужной точностью. Проводя аналогичный анализ для тока частиц, мы получим, что могут возникнуть члены 5 порядка в выражении для тока и 5 же порядка в коммутаторе тока с гамильтонианом; а это, в свою очередь означает, что поток частиц точно не сохраняется (ведь в коммутаторе не зануляется уже 3 порядок). Однако 3 порядок зануляется для невзаимодействующего случая (поскольку  $\Delta = 0 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow \lambda_+ = 0$ ; а соответствующий коммутатор пропорционален  $\lambda_+$ ). Тем самым полученный результат находится в полном согласии с тем, что известно про XXZ-модель.

### 3.3 Рассеяние плазмонов

В работе [17] исследовался гамильтониан жидкости Латтинджера, но с меняющейся в пространстве фермионной плотностью (или, что эквивалентно в нашей формулировке, параметра  $K$ ):

$$\hat{H} = \int dx \left( \frac{\hat{p}^2(x)}{2mn(x)} + \frac{1}{2} \left[ V_0 + \frac{\pi^2}{m} n(x) \right] (\partial_x n(x) \hat{u}(x))^2 \right) \quad (3.11)$$

где  $u(x)$  и  $p(x)$  — канонически сопряжены с коммутационным соотношением  $[\hat{u}(x), \hat{p}(x')] = i\delta(x - x')$ ;  $V_0$  — сила взаимодействия электронов. Концентрация электронов  $n(x) = n_0 + \delta n(x)$  и  $\delta n(x)$  — случайная гауссова величина с коррелятором  $\langle \delta n(x) \delta n(y) \rangle = n_0^2 \delta \left( \frac{x-y}{l_D} \right)$ ;  $n_0 \equiv \frac{mv_F}{\pi}$ ; характерный масштаб изменения концентрации  $l_D \gg \lambda_F$ .

При выполнении последнего условия, рассеяние электронов назад отсутствует; тем самым проводимость такой системы идеальна. Однако плазмоны, переносящие энергию, движутся в эффективном случайном потенциале, могут рассеиваться назад и локализоваться. Для длины свободного пробега плазмонов из-за рассеяния на беспорядке получается выражение

$$\xi_\omega = \frac{2\pi^2 u^4}{K^2 V_0^2 l_D \omega^2} \quad (3.12)$$

где  $K = \sqrt{1 + \frac{V_0}{\pi v_F}}$  — постоянная Латтинджера и  $u = \frac{v_F}{K}$  — групповая скорость плазмонов.

Взаимодействие плазмонов, к которому приводит нелинейность спектра, существенно влияет на картину локализации плазмонов. В данной задаче гамильтониан взаимодействия плазмонов записывается в виде

$$\hat{H}_{bc} = - \int dx \left( \frac{\hat{p}^2(x)}{2mn(x)} \partial_x (n(x) \hat{u}(x)) + \frac{\pi^2}{6m} (\partial_x n_0 \hat{u}(x))^3 \right) \quad (3.13)$$

Этот гамильтониан приводит к неупругим процессам между плазмонами, которое при ненулевых температурах нарушает их локализацию.

Заметим, такая добавка к гамильтониану возникает от квадратичной поправки к спектру исходных фермионов ( $\delta\xi = \frac{k^2}{2m}$ ). В нашей же задаче, в отличие от рассмотренной в этой статье, в силу симметрии «частица-дырка» (или, что эквивалентно, симметрия относительно отражение оси  $z$  исходной спиновой задачи) поправки к спектру содержат лишь нечётные по степеням  $k$  члены и тем самым начинаются с кубических членов.

### 3.4 Роль рассеяния вперёд

В задаче, разбираемой в главе 2 было показано, что в результате ренорм-групповых преобразованиях на больших масштабах рассеяние назад перенормируется к нулю в определенной области. Рассеяние вперед не учитывалось вообще, поскольку ранее было показано, что оно может быть полностью исключено из гамильтониана преобразованием (1.34). Это было верно для квадратичного гамильтониана; однако учёт нелинейности может сильно изменить роль рассеяния вперёд. Действительно, с нелинейным гамильтонианом (3.1), это преобразование будет влиять даже на квадратичную часть гамильтониана, генерируя члены вида  $(\partial_x \phi)^2 \eta^2(x)$  (что уже похоже на задачу, разобранный в разделе 3.3). Тем самым ожидается, что учёт этих двух явлений одновременно может существенно повлиять на фазовую диаграмму и на поведение кинетических коэффициентов в области параметров, где рассеяние назад подавлено.

Продemonстрируем влияние нелинейности спектра и рассеяния вперед в нашей задаче явно. В случае, когда спектр был линейен, рассеяние вперед пропало из гамильтониана после преобразования (1.34). Теперь же в результате наличия нелинейных членов после такого преобразования к гамильтониану появляется добавка (содержащая, в том числе и квадратичный порядок по полям  $\partial_x\phi$  и  $\Pi$ ):

$$\begin{aligned} \hat{h}_{fs}(x) = & -\frac{3}{\pi u}(\lambda_+ + 2\lambda_-)\eta^2(x)(\partial_x\phi)^2 - \frac{\pi K^2}{4u}(6\lambda_- - \lambda_+)\eta^2(x)\Pi^2 - \\ & -\frac{1}{2\pi K} \left( 4(\partial_x\phi)^3\eta(x) + 4\partial_x\phi\frac{K^2}{u^2}\eta^3(x) \right) (\lambda_+ + 2\lambda_-) - \frac{\pi K}{2}(6\lambda_- - \lambda_+)\eta(x)\Pi^2\partial_x\phi \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.5 Рефермионизация

В статье [20] была предложена схема учёта нелинейности спектра со взаимодействием. Теория возмущений по взаимодействию у исходной фермионной системы (1.3) существенно сингулярна; для того, чтобы решать задачу со взаимодействием применяется метод бозонизации, приводящий к гамильтониану (1.23) (с беспорядком (1.33)).

Учёт нелинейности спектра в бозонизованном гамильтониане при помощи теории возмущений также затруднён, поскольку оказывается, что соответствующая теория возмущений тоже оказывается сингулярной. Однако, если в этом гамильтониане проделать преобразование Боголюбова, приводящее к гамильтониану с  $K = 1$  (а именно, провести замену  $\phi(x) \mapsto \sqrt{K}\phi(x)$  и  $\Pi(x) \mapsto \frac{\Pi(x)}{\sqrt{K}}$ ), а затем обратить преобразование бозонизации, то можно прийти к фермионному гамильтониану, у которого сингулярный член со взаимодействием пропал; тем самым, теория возмущений по взаимодействию в новом гамильтониане возможна. Новые квазичастицы — фермионы — после этого преобразования являются нетривиальными коллективными модами в терминах исходной системы.

Процедуру рефермионизации можно провести и для гамильтониана (3.1) с беспорядком (1.33) лишь с рассеянием вперед (членом с  $\eta(x)$ ); для этого

удобно переписать его в виде  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{bc}^{(1)} + \hat{H}_{bc}^{(2)} + \hat{H}_{dis}$ , где

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\pi} v \int dx ((\partial_x \phi_R)^2 + (\partial_x \phi_L)^2) \quad (3.15)$$

$$\hat{H}_{bc}^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} v \lambda_+ \int dx (\partial_x \phi_R)^2 (\partial_x \phi_L)^2 \quad (3.16)$$

$$\hat{H}_{bc}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi} v \lambda_- \int dx ((\partial_x \phi_R)^4 + (\partial_x \phi_L)^4) \quad (3.17)$$

$$\hat{H}_{dis} = -\frac{\sqrt{2K}}{2\pi} \int dx \eta(x) (\partial_x \phi_R + \partial_x \phi_L) \quad (3.18)$$

Используя бозонизационные тождества (1.17)-(1.20), можно рефермионизовать это:

$$\hat{H}_0 = -iv \int dx (\psi_R^\dagger \nabla \psi_R - \psi_L^\dagger \nabla \psi_L) \quad (3.19)$$

$$\hat{H}_{bc}^{(1)} = 2\pi v \lambda_+ \int dx (-i\psi_R^\dagger \nabla \psi_R + h.c.) (-i\psi_L^\dagger \nabla \psi_L + h.c.) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{bc}^{(2)} = & -2v \lambda_- \int dx ((i\psi_R^\dagger \nabla^3 \psi_R + h.c.) - (i\psi_L^\dagger \nabla^3 \psi_L + h.c.)) - \\ & - 2\pi v \lambda_- \int dx ((\psi_R^\dagger \nabla \psi_R + h.c.)^2 + (\psi_L^\dagger \nabla \psi_L + h.c.)^2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\hat{H}_{dis} = \sqrt{2K} \int dx \eta(x) (\psi_R^\dagger \psi_R - \psi_L^\dagger \psi_L) \quad (3.22)$$

Тем самым мы получили задачу фермионах с нелинейным спектром (имеется нелинейный член от  $\hat{H}_{bc}^{(2)}$ ) и парным взаимодействием (но, что существенно, взаимодействие теперь содержит градиенты полей и в связи с этим иррелевантно — масштабная размерность этих членов равна  $-1$ ). Кроме того, беспорядок в виде рассеяния вперёд превратился в перенормированный множителем  $\sqrt{2K}$  случайный же потенциал для фермионов.

## Глава 4

# Заключение

В данной работе была обсуждена задача о поведении одномерной XXZ спиновой цепочки с беспорядком (1.1), или, что эквивалентно, задаче о взаимодействующих одномерных фермионов в случайном потенциале (1.3). Задача сложна тем, что взаимодействие фермионов существенно непертурбативно.

С помощью теоретико-полевого подхода можно написать низкоэнергетическую теорию поля, описывающую эту задачу — модель жидкости Латтинджера. Решение этой задачи с помощью метода ренормгруппы, рассмотренное в этой работе, брало в качестве исходной модели «обычную» жидкость Латтинджера с «выброшенными» иррелевантными операторами, отвечающими за нелинейность спектра. В этом решении было показано, что процессы рассеяния вперед не влияют на физику задачи, а процессы рассеяния назад подавляются квантовыми флуктуациями в области параметров  $K > \frac{3}{2}$ , что приводит к полученной в этой работе в терминах спиновых операторов фазовой диаграмме 2.2.

Учёт иррелевантных операторов, тем не менее, может сильно изменить физику задачи. Рассматривая область, где квантовые флуктуации гасят рассеяние назад на больших масштабах, мы можем рассмотреть роль рассеяния вперед, которое в модели с нелинейным спектром уже не исключается из задачи тривиальным преобразованием (1.34). В связи с этим ожидается отклонение от низкотемпературного поведения, обсужденного в главе 2 (в частности, ожидается менее сингулярное поведение кинетических коэффициентов по сравнению с формулами (2.8) и (2.9)). В работе были получены выражения для токов с гамильтонианом, учитывающим иррелевантные операторы, отвечающие за кривизну спектра (3.10) и (3.9), а также общее выражения для тока энергии (3.8). Кроме того, было получен вклад в гамильтониан (3.14), связанный с рассеянием вперед и учётом нелинейности спектра одновременно.

В работе также была рассмотрена методика рефермионизации, которая позволяет связать модель взаимодействующих фермионов с нелинейным спектром с моделью неких других фермионных квазичастиц, взаимо-

действие между которыми уже пертурбативно (то есть можно учитывать по теории возмущений). Был получен рефермионизованный гамильтониан (3.19)-(3.22), описывающий исходную спиновую цепочку, учитывающий члены третьего порядка в законе дисперсии.

Используя эту методику в будущем планируется рассмотрение полной задачи и учёт эффектов от нелинейности спектра возбуждений; вывод и решение квантового кинетического уравнения, описывающего поток тепла в области, где доминируют процессы рассеяния вперёд (используя методику, разработанную в статье [21]) и описание низкотемпературного поведения коэффициента теплопроводности в данной задаче.

## 4.1 Благодарности

Автор этой работы высказывает большую благодарность Михаилу Викторовичу Фейгельману за бесценные обсуждения данной задачи и многочисленные советы, а также Косте Тихонову за идею применения методики рефермионизации к решению этой задачи.

# Глава 5

## Список литературы

- [1] В.Л. Березинский, “Кинетика квантовой частицы в одномерном случайном потенциале”, ЖЭТФ 65 (3), 1251-1266 (1973)
- [2] J. M. Luttinger, “*Theory of Thermal Transport Coefficients*”, Phys.Rev. 135, A1506 (1964)
- [3] T. Giamarchi, “*Quantum Physics In One Dimension*”, Oxford Press (2004)
- [4] I.A. Zaliznyak et al., “*Spinons in the Strongly Correlated Copper Oxide Chains in SrCuO<sub>2</sub>*”, Phys.Rev.Lett. 93, 087202 (2004)
- [5] N. Motoyama, H. Eisaki, S. Uchida, “*Magnetic Susceptibility of Ideal Spin 1/2 Heisenberg Antiferromagnetic Chain Systems, Sr<sub>2</sub>CuO<sub>3</sub> and SrCuO<sub>2</sub>*”, Phys.Rev.Lett. 76, 3212 (1996)
- [6] A.V. Sologubenko et al, “*Heat transport by lattice and spin excitations in the spin-chain compounds SrCuO<sub>2</sub> and Sr<sub>2</sub>CuO<sub>3</sub>*”, Phys.Rev. B 64, 054412 (2001)
- [7] N. Hlubek, P.Ribeiro et al, “*Ballistic heat transport of quantum spin excitations as seen in SrCuO<sub>2</sub>*”, Phys.Rev. B 81, 020405(R) (2010)
- [8] C. Karrasch, R. Ilan, and J. E. Moore, “*Nonequilibrium thermal transport and its relation to linear response*”, Phys.Rev. B 88, 195129 (2013)
- [9] Yichen Huang, C. Karrasch, and J. E. Moore, “*Scaling of electrical and thermal conductivities in an almost integrable chain*”, Phys.Rev. B 88, 115126 (2013)
- [10] Arijeet Pal, David A. Huse, “*Many-body localization phase transition*”, Phys.Rev. B 82, 174411 (2010)
- [11] A. Karahalios, A.Metavitsiadis, X.Zotos, A.Gorczyca, and P. Prelovsek, “*Finite-temperature transport in disordered Heisenberg chains*”, Phys.Rev. B 79, 024425 (2009)

- [12] Abel Klein, J. Fernando Perez, “*Localization in the Ground-State of the One-Dimensional XY Model with a Random Transverse Field*”, Comm.Math.Phys 128, 99-108 (1990)
- [13] T. Giamarchi and H.J. Schulz, “*Anderson localization and interactions in one-dimensional metals*”, Phys.Rev. B 37, 325 (1987)
- [14] P. Schmitteckert, T. Schulze, C. Schuster, P. Schwab, and U. Eckern, “*Anderson Localization versus Delocalization of Interacting Fermions in One Dimension*”, Phys.Rev.Lett 80, 560 (1998)
- [15] M.-R. Li, E. Orignac, “*Heat conduction and Wiedemann-Franz law in disordered Luttinger liquids*”, Europhys. Lett. 60 (3), 432–438 (2002)
- [16] S. Lukyanov, “*Low energy effective Hamiltonian for the XXZ spin chain*”, Nucl. Phys. B 522, 533 (1998)
- [17] Rosario Fazio, F.W.J. Hekking, and D.E. Khmelnitskii, “*Anomalous Thermal Transport in Quantum Wires*”, Phys.Rev.Lett. 80, 5611 (1998)
- [18] Alex Levchenko, Tobias Micklitz, Zoran Ristivojevic, and K. A. Matveev, “*Interaction effects on thermal transport in quantum wires*”, Phys.Rev. B 84, 115447 (2011)
- [19] Stanislav Apostolov, Dong E. Liu, Zakhar Maizelis, and Alex Levchenko, “*Thermal transport and quench relaxation in nonlinear Luttinger liquids*”, Phys.Rev. B 88, 045435 (2013)
- [20] A.V. Rozhkov, “*Density-density propagator for one-dimensional interacting spinless fermions with nonlinear dispersion and calculation of the Coulomb drag resistivity*”, Phys.Rev. B 77, 125109 (2008)
- [21] Karen Michaeli and Alexander M. Finkel’stein, “*Quantum kinetic approach for studying thermal transport in the presence of electron-electron interactions and disorder*”, Phys. Rev. B 80, 115111 (2009)