Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Плотность состояний в грязных сверхпроводниках на энергии Ферми

студент 028 группы Степанов Николай Анатольевич

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Скворцов М.А.

Черноголовка 2014

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Плотность состояний в сверхпроводниках

Плотность состояний в чистых сверхпроводниках с s-спариванием описывается теорией БКШ пунктирная линия на, рис. 1.1 . Если $\Delta(T)$ — это потенциал спаривания, то плотность состояний:

$$\rho_{BCS}(E) = \rho_0 \operatorname{Re} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}, \tag{1.1}$$

тут ρ_0 это нормальная плотность состояний в металле на уровне Ферми (энергия отсчитывается от уровня Ферми). Из выражения (1.1) следует, что в спектре имеется щель $\rho_{BCS}(E) = 0$ при $|E| < \Delta(T)$. Наличие щели в спектре состояний сильно меняет низкотемпературные свойства. К примеру теплоемкость сверхпроводника имеет главную температурную зависимость $C \sim e^{-\Delta_0/T}$, в отличии от нормально метала у которого $C \sim T$. Однако этот результат применим и к грязным системам, в которых все примеси потенциальные. Объяснение этого факта состоит в том, что потенциальные примеси не разрушают куперовские пары (теорема Андерсона)[1, 2]. Совсем иначе дело обстоит в случае магнитных примесей.

При рассеянии на магнитных примесях спин электрона может измениться. После такого рассеяния у обоих электронов в паре становится одинаковый спин (спариваются электроны с разными спинами), а значит по принципу запрета Паули пара должна разрушиться. А. А. Абрикосов и Л. П. Горьков [3], работая в пределе борновских примесей, получили выражение для плотности состояний в приближении среднего поля $\rho_{AG}(E)$. На рис. 1.1 $\rho_{AG}(E)$ изображена точечным пунктиром. Пусть время рассеяния с переворотом спина τ_s и магнитные примеси борновские (такое предположение позволяет не рассматривать многократные рассеяния на одной примеси). В такой ситуации сверхпроводник

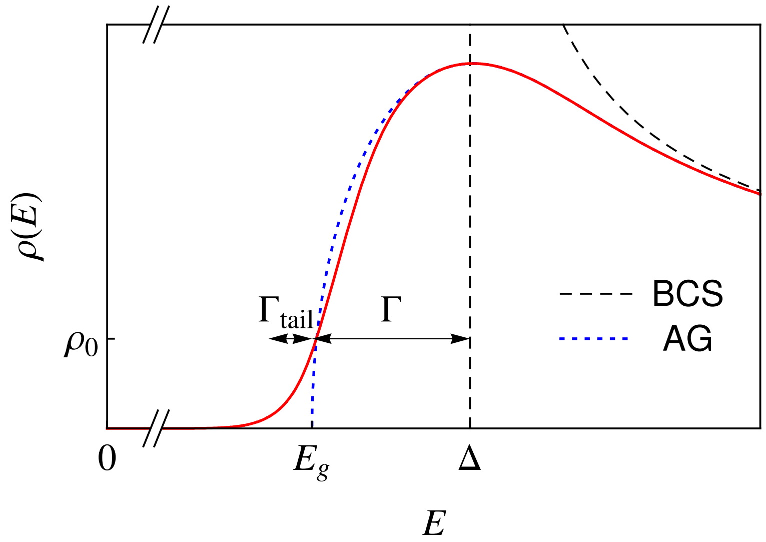

Рис. 1.1: Плотность состояний в сверхпроводнике с магнитными примесями — красная линия. Черный пунктир — плотность состояний в модели БКШ. Точечный пунктир — плотность состояний в приближении среднего поля.

характеризуется одним безразмерным параметром:

$$\eta = \frac{1}{\tau_s \Delta_0}. \tag{1.2}$$

У новой плотности состояний тоже имеется щель: в присутствии магнитных примесей получаем зависимость размера щели от параметра η:

$$E_g = \Delta_0 \left(1 - \eta^{2/3}\right)^{3/2}. \tag{1.3}$$

Значит случай $\eta \sim 1$ соответствует сильным примесям, и при $\eta = 1$ щель в спектре пропадает. Присутствие магнитных примесей приводит, во-первых, к уширению спектра и, во-вторых, к перенормировке щели. При этом стоит отметить, что плотность состояний имеет жесткую щель, а именно вблизи границы E_g имеет асимптотический вид: $\rho(E) \propto (E - E_g)^{1/2}$. Магнитные примеси в случае, когда $\eta > 1$, закрывают щель в спектре, однако, при этом сохраняется сверхпроводимость, этот эффект носит название “бесщелевая сверхпроводимость” [2, 4].

1.2 Влияние неоднородностей

Если рассмотреть сверхпроводник с неоднородным в пространстве эффективным взаимодействием между электронами $\lambda(r) = \lambda_0 + \lambda_1(r)$, то оказывается, эта задача аналогична задаче с магнитными примесями. Впервые этот вопрос исследовали А. И. Ларкин и Ю. Н. Овчинников [5], плотность состояний ведет себя таким же образом, как и в задаче с магнитными примесями. Неоднородности во взаимодействии приводят к неоднородному параметру порядка $\Delta(r) = \Delta_0 + \Delta_1(r)$, который, в свою очередь, генерирует эффективное распаривание η_{inh}:

$$\eta_{inh} = \frac{2}{\Delta_0} \int\limits_{q>q_0} \frac{f(\mathbf{q})}{D \cdot q^2} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}, \tag{1.4}$$

где $f(\mathbf{q})$ — фурье образ корреляционной функции Δ.

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \Delta_1(\mathbf{r}) \Delta_1(\mathbf{r}') \rangle = \int f(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{r}. \tag{1.5}$$

В сверхпроводнике есть характерный масштаб L_{eff} (в чистом случае этот масштаб ξ) такой, что флуктуации с меньшим размером не чувствуются системой. В этом случае L_{eff} отличен от ξ. Согласно (1.4) параметр η_{inh} определяется быстрыми флуктуациями Δ, поведением $f(\mathbf{q})$ на больших $q > q_0$ таких, что $q_0 \sim 1/L_{eff}$. [6].

Действительно ли плотность состояний под щелью нулевая? Ответ был получен [5], оказывается, что под щелью имеется “хвост” . Это можно пояснить так: что-бы плотность состояний не была нулевой на энергии $E < E_g$ локальная $\Delta(\mathbf{r})$ должна просесть. Действительно, так как E_g зависит от $\Delta(\mathbf{r})$, которая флуктуирует по пространству, тогда флуктуирует и локальная плотность ($\rho(E) \propto (E - E_g)^{1/2}$), следуя $\Delta(\mathbf{r})$. При усреднении плотности состояний по пространству получается как раз искомый хвост. Однако основной вклад при усреднении плотности состояний вносят так называемые оптимальные флуктуации, которые имеют характерный размер Ł_{eff}. Получающийся хвост обычно экспоненциально мал, но он имеет универсальный вид для этих задач. Ларкин и Овчинников, анализируя оптимальные флуктуации, получили выражение для хвоста плотности состояний в d-мерном случае [5, 6]:

$$\langle \rho(E) \rangle \propto \exp\left(-\alpha_d \frac{\Delta_0^2 \xi^d}{f(0)} \epsilon^{(8-d)/4} \right) = \exp\left(-\left(\frac{E_g - E}{\Gamma_{\text{tail}}} \right)^{(8-d)/4} \right). \tag{1.6}$$

Для удобства введено безразмерное отклонение от щели:

$$\epsilon = \frac{E_g - E}{E_g}, \tag{1.7}$$

тут $\xi = \sqrt{D/2\Delta_0}$ — сверхпроводящая корреляционная длина (D - коэффициент диффузии электронов), а α_d — числовой коэффициент, зависящий от η и размерности образца d. При этом условие применимости этого решения: $(E_g - E)/\Gamma_{\text{tail}} \gg 1$, когда в экспоненте стоит большое число. А так же происходит разложение вблизи E_g, и по-этому при $E_g = 0$ представленный результат не работает, так как разложение содержало дополнительные слагаемые [6].

1.3 Измерение плотности состояний

В эксперименте плотность состояний измеряется с помощью туннельного тока [7, 8]. Исследуется туннелирование электронов из одного образца в другой, разделенных классически недоступной для них областью, возникает потенциальный барьер. Но квантовая механика разрешает туннелировать частицам через такие барьеры. Первый способ реализации с помощью туннельного микроскопа: игла туннельного микроскопа подводится к сверхпроводящему образцу, при этом область между иглой и образцом является классически недоступной. И при некотором расстоянии между иглой и образцом появляется туннельный ток. Есть альтернативный способ измерения: между 2мя образцами находится слой диэлектрика, для электронов диэлектрик так же представляет собой классически недоступную зону [9]. На нормальный терминал относительно сверхпроводника подается напряжение V, и измеряется туннельный ток $I(V)$ [10, p.322], который выражается через плотность состояний:

$$I(V) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \rho_s(\xi + eV)\, \rho_n(\xi) \left\{ n_F(\xi) - n_F(\xi + eV) \right\} d\xi. \tag{1.8}$$

Здесь ρ_s — плотность состояний в сверхпроводнике и ρ_n — в нормальном терминале (почти постоянная и равна плотности на уровне ферми).

$$I(V) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \rho_s(\xi + eV) \left\{ n_F(\xi) - n_F(\xi + eV) \right\} d\xi. \tag{1.9}$$

Измерения туннельного тока позволяют вычислить зависимость $\rho_s(E)$.

1.4 Обсуждение хвостов

Хвосты плотности состояний повторно исследовались, для задачи с неоднородным потенциалом спаривания Meyer и Simons [11], работавшими в рамках сигма модели. Их результат отличался от результата А. И. Ларкина и Ю. Н. Овчинникова А именно:

$$\langle \rho(E) \rangle \propto \exp\left(-\beta_d g_\xi \epsilon^{(6-d)/4} \right), \tag{1.10}$$

тут $g_\xi = 8\pi\rho_0\Delta_0\xi^{d-2}$— кондактанс образца с характерным размером ξ в единицах e^2/h. Ответ получился универсальным в том смысле, что определяется только кондактансом. Получается, чем больше кондактанс, тем меньше флуктуации плотности состояний. Meyer и Simons учли мезоскопические флуктуации потенциального беспорядка, но забыли про длинноволновые флуктуации $\Delta(\mathbf{r})$. Отметим, что степени с которыми ϵ входят в экспоненту, различны. Это отличие обсуждалось в работе [6]. Оба решения являлись частными случаями более общего закона, который переходит в такие частные случаи.

Глава 2

Постановка задачи

Модели с неоднородным потенциалом спаривания или мезоскопическими флуктуациями эквивалентны модели с магнитными примесями. Эти задачи включаются в общий класс эквивалентности. Влияние магнитных примесей на сверхпроводник описывается безразмерным параметром η, который характеризует скорость разрушения пары. Если в задаче есть несколько механизмов, эти скорости должны складываться (складываются параметры η от разных механизмов). В этой работе мы будем рассматривать задачу с неоднородным потенциалом спаривания для случая, когда η близко к единице:

$$\eta = 1 - x, \qquad x \ll 1 \tag{2.1}$$

значит, щель в спектре почти закрылась $E_g \propto x^{3/2} \to 0$. Такая ситуация кардинально отличается от ситуации, которые исследовали Ларкин-Овчинников и Simons с соавторами, так как лежит за областью применимости их моделей. Рассчитаем плотность состояний на уровне Ферми. К тому же будем предполагать, что наш сверхпроводник грязный (l длина пробега на потенциальных примесях, а ξ длина когерентности). В виду эквивалентности задач, получается, можно решать задачу с неоднородным в пространстве $\Delta(r)$ и решение будет применимо для задачи с магнитными примесями.

2.1 Усреднение по беспорядку

Состояния сверхпроводника описываются гамильтонианом Боголюбова-Де Жена:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_0 & \Delta(r) \\ \Delta^*(r) & -H_0^* \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Этот гамильтониан действует в пространстве Намбу (частица-дырка), тут $H_0 = \widehat{p}^2/2m - E_F + U(r)$ — одночастичный гамильтониан. Весь беспорядок спрятан в двух величинах:

$\Delta(r)$ и $U(r)$ — случайный потенциал примесей. Задачу с произвольной реализацией $U(r)$ решить аналитически невозможно. Но интерес представляют величины усредненные по беспорядку: $\langle\ldots\rangle_U$. Так как потенциальные примеси приводят к диффузии электронов, то важным действием потенциала является как раз диффузионное движение. И если размер системы значительно превышает длину свободного пробега, то диффузионное движение описывается всего одним параметром D — коэффициент диффузии, и не зависит от того, как устроены примеси. Значит при решении модельной задачи можно выбрать произвольный потенциал, приводящий к конкретному диффузионному движению. Обычно выбирают потенциал типа белый шум $\langle U(r)\,U(r')\rangle = \delta(r-r')\,/\,(2\pi\rho_0\tau)$ (тут τ-время рассеяния на потенциальных примесях определяется $D = \frac{1}{d}v_F^2\tau$), так как в таком случае усреднение гауссово. Однако нельзя просто так усреднить гамильтониан. Например для плотности состояний надо определить функцию Грина этого гамильтониана и только потом усреднять согласно формуле:

$$\langle\rho(E)\rangle_U = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left\langle \operatorname{Tr}\left(G^R(r,E)\right)\right\rangle. \tag{2.3}$$

Для решения поставленной задачи мы будем использовать диффузионную сигма модель [12]. Сигма модель состоит в получении усредненной по беспорядку функции Грина. Оказывается, что $G^R(r,E) = (E-\hat{H}+i\cdot 0)^{-1}$ можно выразить через функциональный интеграл по некоторому матричному полю Q. Есть несколько разных подходов в сигма модели: суперсимметричный, репличный и Келдышевский. Мы будем использовать репличный подход в нашей задаче [13, 14]. В таком случае матричное поле Q лежит в исходном пространстве Намбу, спиновом (в нашем случае это единичная матрица) и репличном. Когда будет встречаться операция взятия следа, не будем забывать “спиновую двойку”. Стоит отметить, что сигма модель строится в диффузионном случае, грязный предел. Опуская выкладки, приведем результат. Плотность состояний выражается:

$$\langle\rho(E)\rangle = \frac{\rho_0}{2}\lim_{n\to 0}\left\{\frac{1}{n}\int \operatorname{Tr}[\sigma_3 Q]\,e^{-S[Q]}\mathcal{D}Q\right\}. \tag{2.4}$$

Тут и далее σ_i матрица Паули в пространстве Намбу, а $S[Q]$ действие сигма модели [6]. В нашем случае представимо в виде $S = S_0 + S_{dis}$. А именно:

$$S_0[Q] = \frac{\pi\rho_0}{4}\int d\mathbf{r}\,\operatorname{Tr}\left[D(\nabla Q)^2 + 4\,(iE\sigma_3 - \Delta_0\sigma_1)\,Q - \Delta_0\eta\,(\sigma_3 Q)^2\right] \tag{2.5}$$

$$S_{dis}[Q] = -\frac{(\pi\rho_0)^2}{2}f(0)\int d\mathbf{r}\cdot[\operatorname{Tr}(\sigma_1 Q)]^2. \tag{2.6}$$

Интеграл (2.4) будем вычислять, используя метод перевала функционального интеграла. Для вычисления надо найти перевальную функцию (матричное поле) $Q_0(r)$, удовлетворяющую условию $\delta S[Q]/\delta Q = 0$. Далее раскладываются вблизи перевальной функции до второго порядка и вычисляют получившийся гауссов интеграл. Но в нашей задаче мы будем интересоваться ответом без предэкспоненты. Значит, с экспоненциальной точностью функциональный интеграл равен:

$$\langle \rho \rangle \propto e^{-S[Q_0]}. \tag{2.7}$$

Уравнение $\frac{\delta S[Q]}{\delta Q} = 0$, получающееся из вариации действия, называется седловым. В случае когда все реплики симметричны, седловое уравнение — это уравнение Узаделя [15].

Глава 3

Инстантон

3.1 Анзац для Q

Будем искать решение в реплично-диагональном виде. Анализируя вид действия (содержатся матрицы σ_1 и σ_3), а также учитывая, что $Q^2 = 1$, положим:

$$(Q_0)^{ab} = \delta_{ab}\left[\sigma_3 \cos\left(\theta^a\right) + \sigma_1 \sin\left(\theta^a\right)\right] \times 1_{spin}. \tag{3.1}$$

символ $\delta_{a,b}$ означает диагональный вид Q в репличному пространстве, а матрицы σ_i — пространству Намбу. Реплично симметричное решение ($\theta^a = \theta_0$) описывает плотность состояний, у которой под щелью нет состояний. Значит, чтобы получить нетривиальный ответ, будем рассматривать нарушенную репличную симметрию.

3.2 Действие

Так как мы считаем плотность состояний на уровне Ферми, в (2.5) положим $E = 0$. После взятия следов в пространстве Намбу и подстановке выражения $D = 2\Delta_0\xi^2$ (Приложение A) получаем общее действие:

$$S\left[\theta^a\right] = 2\pi\rho_0\Delta_0 \int d\mathbf{r} \cdot \mathrm{Tr}\left[\xi^2\left(\nabla\theta^a\right)^2 - 2\sin\left(\theta^a\right) - \frac{\eta}{4}\cos\left(2\theta^a\right)\right] - \frac{\pi\rho_0\Delta_0\kappa}{2}\int d\mathbf{r}\left(\mathrm{Tr}\left(\sin\left(\theta^a\right)\right)\right)^2. \tag{3.2}$$

В приближении среднего поля у сверхпроводника на уровне ферми $\theta_0 = \pi/2$. Поэтому удобно сделать замену:

$$\theta^a = \pi/2 + i\psi^a. \tag{3.3}$$

Тогда действие в переменных ψ^a:

$$S\left[\psi^a\right] = -2\pi\rho_0\Delta_0 \int d\mathbf{r}\Big(\cdot\, \mathrm{Tr}\left[\xi^2\left(\nabla\psi^a\right)^2 + 2\cosh\left(\psi^a\right) - \frac{\eta}{2}\cosh\left(2\psi^a\right)\right] + \kappa\left(\mathrm{Tr}\left(\cosh\left(\psi^a\right)\right)\right)^2\Big). \tag{3.4}$$

Тут был введен безразмерный параметр [5, 16]:

$$\kappa = \frac{4\pi\rho_0 f\left(0\right)}{\Delta_0}, \tag{3.5}$$

он характеризует флуктуации $\Delta_1\left(\mathbf{r}\right)$. А так же он будет основным нашим параметром, который определяет, за счет какого беспорядка происходят флуктуации: при $\kappa \ll 1$ за счет мезоскопических флуктуаций, а при $\kappa \gg 1$ за счет флуктуаций параметра порядка.

Из этого выражения можно получить седловые уравнения:

$$-\xi^2\Delta\psi^a + \sinh\psi^a - \eta\sinh\psi^a\cosh\psi^a = B\left(\psi^a\right), \tag{3.6}$$

$$B\left(\psi^a\right) = -\kappa\sinh\psi^a\sum_a\cosh\psi^a. \tag{3.7}$$

3.3 Седловые уравнения

3.3.1 Реплично-симметричные решения

С начала рассмотрим реплично-симметричные решения. При этом в правой части уравнения (3.6) стоит $B\left(\psi^a\right) = 0$:

$$-\xi^2\Delta\psi_0 + \sinh\psi_0 - \eta\sinh\psi_0\cosh\psi_0 = 0 \tag{3.8}$$

Эта система имеет три стационарных решения $\psi_1 = 0$ и $\cosh\psi_{2,3} = 1/\eta$, заметим, что все три решения ψ действительные . Из этих решений реализуются два положительных решения. Рассчитаем $\mathrm{Tr}\,\sigma_3 Q = -i\cdot n\sinh\psi$ (Приложение A), который стоит в интеграле (2.4) для плотности состояний. После взятия предела $n \to 0$ получаем: $\rho\left(E\right) = -\rho_0\,\mathrm{Im}\sinh\psi$. Но так как решения действительные, то они дают нулевой вклад в плотность состояний.

3.3.2 Реплично-несимметричные решения

Так как реплично-симметричные решения дали нулевой вклад в плотность состояний на уровне Ферми, будем исследовать решения с нарушением симметрии в одной реплике:

$$\psi^a = \begin{cases} \psi_1, & a = 1; \\ \psi_2, & a = 2, ..., n. \end{cases} \tag{3.9}$$

Можно убедиться, что нарушения симметрии в двух репликах приводит к большему действию. Для нарушения симметрии в одной реплике: $\sum_a \cosh\psi^a \to \cosh\psi_1 - \cosh\psi_2$. Таким же образом вычисляются все следы в репличном пространстве. В нашей задаче $\eta \sim 1$, а значит решения $\cosh\psi_{2,3} = 1/\eta$ близки к нулю, $\psi_2 \sim \sqrt{1-\eta}$. Тогда имеет место малость $\psi(\mathbf{r})$. Разложимся по этой малости и малости x. Используя разложение: $\sinh\psi \approx \psi + \frac{1}{6}\psi^3$:

$$\sinh\psi^a - \eta\sinh\psi^a\cosh\psi^a \;\approx\; \psi^a + \frac{1}{6}(\psi^a)^3 - \eta\left(\psi^a + \frac{4}{3}(\psi^a)^3\right) \;\approx\; x\psi^a - \frac{1}{2}(\psi^a)^3 \quad (3.10)$$

С точность до главных членов разложения в (3.6) получаем систему седловых уравнений:

$$-\xi^2\Delta\psi^a + x\psi^a - \frac{1}{2}(\psi^a)^3 + \frac{\kappa}{2}\psi^a\left(\psi_1^2 - \psi_2^2\right) = 0 \quad (3.11)$$

Из сравнения двух линейных членов получим характерное расстояние изменения $\phi_{1,2}$:

$$L_x = \frac{\xi}{\sqrt{x}}. \quad (3.12)$$

Заметим, что эта длина расходится при $x \to 0$. Эта длина играет роль L_{eff} в нашей задаче и характеризует оптимальные флуктуации Δ.

В соответствии с этим масштабом изменим координату r: $r_{old} = r_{new}\cdot L_x$. А из сравнения линейной части и кубической получаем характерный масштаб функции $\psi_a \sim \sqrt{x}$. Далее изменим и масштаб функций согласно: $\psi_a = \sqrt{2x}\cdot\phi_a$. После таких замен получаем окончательный вид седловых уравнений:

$$\begin{cases} -\nabla^2\phi_1 + \phi_1 - \phi_1^3 = \kappa\phi_1\left(\phi_2^2 - \phi_1^2\right), \\ -\nabla^2\phi_2 + \phi_2 - \phi_2^3 = \kappa\phi_2\left(\phi_2^2 - \phi_1^2\right). \end{cases} \quad (3.13)$$

После всех преобразований остался один безразмерный параметр κ определенный в (3.5). Значение этого параметра определяет поведение функций ϕ^a. Далее нашей задачей будет анализ этих уравнений.

Сравним полученные уравнения, с уравнениями описывающими инстантон на энергиях вблизи E_g [5, 6, 11]. Седловые уравнения:

$$\begin{cases} -\nabla^2\phi_1 + \phi_1 - \phi_1^2 = K\cdot(\phi_2 - \phi_1), \\ -\nabla^2\phi_2 + \phi_2 - \phi_2^2 = K\cdot(\phi_2 - \phi_1). \end{cases} \quad (3.14)$$

$$K = \frac{\kappa}{\sqrt{6\epsilon\eta^{4/3}}} \quad (3.15)$$

И в этом случае характерная длина $L_E \sim \xi/\sqrt[4]{\epsilon}$ расходится при $\epsilon \to 0$. Уравнения (3.13) и (3.14) различаются правой и левой частью. Первое, нелинейный член в левой части стал кубическим. Второе, правая часть стала кубической по ϕ вместо линейной.

3.4 Действие инстантона

Теперь надо подставить в действие (3.4) выражение для реплик (3.9), и разложится по малости $\psi_{1,2}$:

$$S\left[\psi_1,\psi_2\right] = -2\pi\rho_0\Delta_0 \int d\mathbf{r}\Big(\xi^2\left(\left(\nabla\psi_1\right)^2 - \left(\nabla\psi_2\right)^2\right) + 2\cosh\left(\psi_1\right) - 2\cosh\left(\psi_2\right) \\ - \frac{\eta}{2}\left(\cosh\left(2\psi_1\right) - \cosh\left(2\psi_2\right)\right) + \kappa\left(\cosh\left(\psi_1\right) - \cosh\left(\psi_2\right)\right)^2\Big) \quad (3.16)$$

Члены с $\left(\nabla\psi^a\right)^2$ можно проинтегрировать по частям:

$$S\left[\psi_1,\psi_2\right] = -2\pi\rho_0\Delta_0 \int d\mathbf{r}\Big(\xi^2\left(\psi_2\nabla^2\psi_2 - \psi_1\nabla^2\psi_1\right) + x\left(\psi_1^2 - \psi_2^2\right) \\ - \frac{1}{4}\left(\psi_1^4 - \psi_2^4\right) + \kappa\left(\frac{\psi_1^2}{2} - \frac{\psi_2^2}{2}\right)^2\Big). \quad (3.17)$$

Нужно изменить масштаб координат и функций. Если функции ϕ_1 и ϕ_2 удовлетворяют седловым уравнениям (3.13), то упростить еще больше (подставим $\nabla^2\phi^a$ из уравнений):

$$S\left[\phi_1,\phi_2\right] = -2\pi\rho_0\Delta_0 \int \xi^d \cdot x^{-\frac{d}{2}} d\mathbf{r}\Big(2x^2\left(\phi_2\nabla^2\phi_2 - \phi_1\nabla^2\phi_1\right) \\ + \kappa x^2\left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right)^2 - x^2\left(\phi_1^4 - \phi_2^4\right) + 2x^2\left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right)\Big). \quad (3.18)$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$S\left[\phi_1,\phi_2\right] = 2\pi\rho_0\Delta_0\xi^d \cdot x^{(4-d)/2} \cdot S\left(\kappa\right), \quad (3.19)$$

$$S\left(\kappa\right) = -\int d\mathbf{r}\left(\left(\phi_1^4 - \phi_2^4\right) - \kappa\left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right)^2\right). \quad (3.20)$$

Глава 4

Анализ седловых уравнений

Решение седловых уравнений, на которых действие получается конечным, называется инстантон. Особенности инстантона можно получить из анализа действия, чтобы действие было конечно, требуем: $\phi^a \to 0,\ |r| \to \infty$. Далее будем выбирать центрально симметричные решения регулярные при $r = 0$.

4.1 Случай $\kappa = 0$

В этом пределе система седловых уравнений (3.13) переходит в одно уравнение (одинаковым уравнением описываются ϕ_1 и ϕ_2):

$$-\nabla^2\phi + \phi - \phi^3 = 0. \tag{4.1}$$

Данное нелинейное уравнение возникает, в частности, при рассмотрении хвоста Лифшица [17].

Как устроены решения для ϕ_1 и ϕ_2, понять из этого невозможно, нужно исследовать поведение на малых $\kappa \neq 0$. Действие инстантона определяется:

$$S_d = \int dr \cdot \phi_d^4. \tag{4.2}$$

4.1.1 1d Геометрия.

Рассмотрим инстантон в квазиодномерных системах. Уравнение $-\partial^2\phi + \phi - \phi^3 = 0$ может быть проинтегрировано аналитически. Если домножить уравнение на $\partial\phi$, то можно выделить полную производную:

$$\partial\left((\partial\phi)^2 - \phi^2 + \frac{\phi^4}{2}\right) = \partial I\left[\phi, \partial\phi\right] = 0. \tag{4.3}$$

Выражение в скобках — это первый интеграл уравнения (4.1). Наличие первых интегралов позволяет понижать порядок уравнения. Чтобы удовлетворить условию $\phi \to 0, \ |r| \to \infty$, этот первый интеграл должен быть равен нулю:

$$(\partial\phi)^2 - \phi^2 + \frac{\phi^4}{2} = 0. \tag{4.4}$$

Такое уравнение легко интегрируется:

$$\int \frac{d\phi}{\phi\sqrt{1-\frac{\phi^2}{2}}} = -\operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{2}}{\phi}\right) = \pm\left(r - r_0\right). \tag{4.5}$$

Тут r_0 — положение инстантона. Возвращаясь к переменной ϕ, получаем решение в 1D геометрии:

$$\phi_{1d} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\cosh\left(r - r_0\right)} \tag{4.6}$$

Действие считается с помощью замены $t = 1/\cosh^2 r$:

$$S_{1d} = 4 \cdot \int\limits_0^1 t^{2-1}\left(1-t\right)^{1/2-1} dt = 4\frac{\Gamma\left(2\right)\Gamma\left(1/2\right)}{\Gamma\left(2+1/2\right)} = \frac{16}{3}. \tag{4.7}$$

4.1.2 2d и 3d Геометрии

В размерности 2 и 3 решить уравнение (4.1) аналитически не возможно. В следствии чего воспользуемся численным решением. Работать будем в пакете Wolfram-Mathematica 9. Находить будем центрально симметричные решения $\phi\left(\mathbf{r}\right) = \phi\left(r\right)$ у которых $\partial_r\phi\left(r\right)|_{r=0} = 0$. Радиальная часть лапласиана имеет вид $\Delta_{\mathbf{r}} = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r$. Хотя $\partial_r\phi\left(r\right)/r \to 0, r \to 0$ и особенности в уравнении (4.1) нет, но при численном решении она возникнет, если $r = 0$ включено в интервал. Особенность появляется из-за того, что при численном решении программа не может посчитать предел $\partial_r\phi\left(r\right)/r$. В связи с этим надо исключить особенность $r = 0$ из численного счета. Для численного решения есть еще одна особенность при $r \to \infty$, невозможно численно решать дифференциальные уравнения на бесконечном интервале. Поэтому нужно ограничиться большим масштабом $r < r_{max}$. Способ решения приведен в (Приложении А).

Если теперь посчитать действие S_d на этих решениях ϕ_d (свободных инстантонов).

$$S_d = \begin{cases} 16/3, & d = 1, \\ 23.40, & d = 2, \\ 75.43, & d = 3. \end{cases} \tag{4.8}$$

Этот результат полностью совпадает с ранее известным для хвоста Лифшица [17].

4.2 Решение для произвольных κ

4.2.1 Тривиальное решение

Вернемся опять к системе уравнений (3.13). Заметим, что у этой системы есть такое решение: одно из $\phi_{1,2}$ равно нулю, а для второго получаем уравнение:

$$-\nabla^2\phi_{1,2} + \phi_{1,2} - \phi_{1,2}^3\left(1 \mp \kappa\right) = 0. \tag{4.9}$$

Оно сводится к решению с $\kappa = 0$ простым масштабированием:

$$\phi_{1,2} = \frac{\phi_{1,2}^0}{\sqrt{(1 \mp \kappa)}}, \tag{4.10}$$

$$S_d^{(0)}\left(\kappa\right) = -\int dr\left(\left(\phi_1^4 - \phi_2^4\right) - \kappa\left(\phi_1^2 - \phi_2^2\right)^2\right) = \frac{S_d(0)}{\kappa \mp 1}. \tag{4.11}$$

Заметим, что у системы (3.14) такого решения не было. Таким свойством обладает система благодаря тому, что правая часть системы пропорциональна $\phi_{1,2}$, и, выбирая одно из $\phi_{1,2} = 0$, мы получаем тривиальное уравнение (имеющее нулевое решение). По сути $S_d^{(0)}\left(\kappa\right)$ — это верхняя оценка на минимальное действие. Численные значения для $S_d\left(0\right)$ представлены в (4.8). Будем называть такое решение системы тривиальным.

Для поиска нетривиального решения надо пользоваться численными методами. Будем использовать такой же подход, как и в случае $\kappa = 0$. Решения вблизи нуля и на бесконечности представлены в Приложении B.

Найдем асимптотику действия на $\kappa \to \infty$. В этом пределе решения стремятся друг к другу. В этом пределе решения почти совпадают, степень близости определяет параметр κ^{-1}, можно записать:

$$\phi_1\left(r\right) = \phi\left(r\right) + \kappa^{-1}\chi\left(r\right), \tag{4.12}$$

$$\phi_2\left(r\right) = \phi\left(r\right). \tag{4.13}$$

При этом уравнения примут вид независящий от κ:

$$-\nabla^2\phi + \phi - \phi^3 = 2\phi^2\chi, \tag{4.14}$$

$$-\nabla^2\chi + \chi - 3\chi\phi^2 = 2\phi\chi^2. \tag{4.15}$$

А для действия получаем выражение, которое прогнозирует асимптотическую зависимость $\sim \frac{1}{\kappa}$ (этот результат не зависит от размерности):

$$S_d\left(\kappa\right) \to -\frac{4}{\kappa}\int \phi^2\left(r\right)\chi\left(\phi\left(r\right) - \chi\left(r\right)\right)d\mathbf{r} \approx \frac{s_d}{\kappa}. \tag{4.16}$$

4.2.2 Численный анализ 1d

При нахождении решений системы седловых уравнений нас интересуют решения с минимальным действием. Можно отследить, какое решение дает минимальное действие, и исследовать его при различных κ. Приведем графики решений ϕ_1 и ϕ_2 для размерности 1 рис. 4.1.

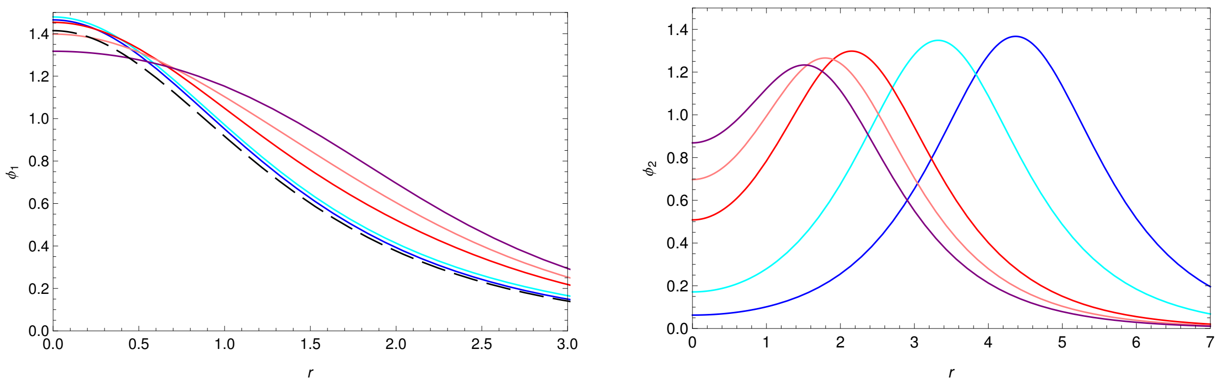

Рис. 4.1: Решение при различных κ для $d = 1$. Фиолетовый — $\kappa = 0.5$, розовый — $\kappa = 0.3$, красный — $\kappa = 0.2$, голубой — $\kappa = 0.1$, синий — $\kappa = 0.07$. Слева изображено решение $\phi_1(r)$, решение при $\kappa = 0$ изображено пунктирной линией. Справа — решение $\phi_2(r)$.

На левом рисунке изображено решение ϕ_1, видно, что при $\kappa \to 0$ решение стремится к свободному инстантону ϕ_{1d}, изображенному пунктирной линией. Справа изображено решение ϕ_2. При $\kappa \sim 1$ решение еще не похоже на свободный инстантон, однако уже при $\kappa \sim 0.1$ отчетливо видно отделение ϕ_{1d}. Так же видно, что решения ϕ_1 и ϕ_2 расталкиваются при $\kappa \to 0$. Так как ϕ_1 и ϕ_2 симметричны, то в ϕ_2 имеется еще один пик.

Отметим, что решения $\phi_{1,2}$ пересекаются и ϕ_2 не стремятся к нулю, как это было в решении системы (3.14). И такая картина дает нам понять, что при $\kappa = 0$ решение устроено так: $\phi_1 = \phi_{1d}(r)$, а $\phi_2 = \phi_{1d}(r + r_0) + \phi_{1d}(r - r_0), r_0 \to \infty$.

Полученные численным анализом асимптотики для размерностей 1:

$$S_d(\kappa) \to \frac{0.632}{\kappa}, \ d = 1, \ \kappa \to \infty. \tag{4.17}$$

Рассчитаем действие $S_{1d}(\kappa)$ на инстантоне при произвольных κ рис.(4.2)

Получается, что тривиальное решение не выгодно ни при каких κ в одномерной задаче.

4.2.3 Численный анализ 2d

Решения для размерности $d = 2$ похожи на решения в $d = 1$. На рис. 4.3 изображено типичное решение этой системы для $d = 2$.

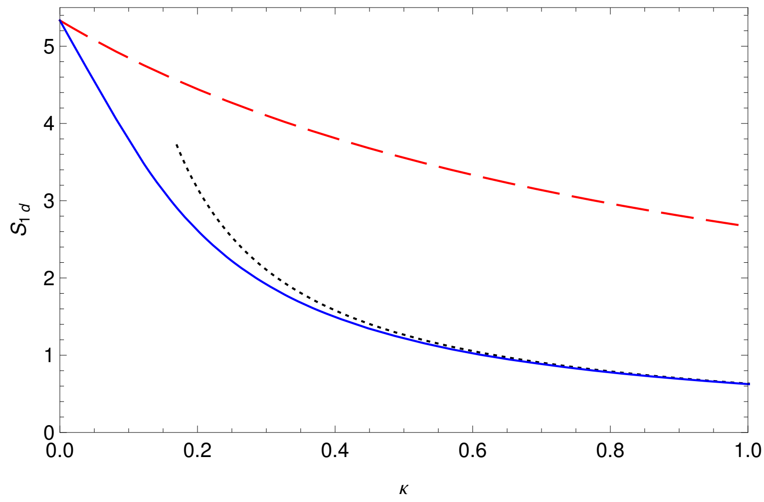

Рис. 4.2: Действие инстантона $S_{1d}(\kappa)$ (размерность $d = 1$). Красный пунктир — тривиальное решение $S_d^{(0)}(\kappa) = S_d(0)/(1+\kappa)$. Синяя сплошная — нетривиально решение с минимальным действием. Точечная линия это асимптотика (4.17) на больших κ.

Если провести исследования при $\kappa \to \infty$, получается такая асимптотика:

$$S_d(\kappa) \to \frac{6.68}{\kappa},\ d = 2,\ \kappa \to \infty. \tag{4.18}$$

На рис. 4.4 изображены решения $\phi_{1,2}$ для большого значения $\kappa = 5$ слева. Справа решения ϕ, χ системы (4.14)-(4.15). Эти решения соответствуют $\kappa \to \infty$.

В отличии от размерности $d = 1$, в этом случае существует "побочное" решение, существующее при $\kappa < 1$. Это решение стремится к побочному тривиальному решению $S_d^{(0)}(\kappa) = S_d(0)/(\kappa - 1) < 0$ при $\kappa < 1$. Приведем результат численного счета для действия рис. 4.5:

Надо отбросить не реализующиеся решения с $S < 0$ и непрерывно переходящие в решения с $S < 0$ при изменении κ. Результат выбора минимального действия таков: при $\kappa \in (0, \kappa_0)$ надо выбирать тривиальный инстантон, а при $\kappa \in (\kappa_0, \infty)$ — нетривиальное. Граница раздела $\kappa_0 \approx 0.54$, нетривиального решения не существует при меньших κ.

4.2.4 Численный анализ 3d

При поиске с различными начальными условиями в размерности $d = 3$ нетривиальных решения не обнаружено с меньшим действием, чем у тривиального. Типичное решение представлено на рис.(4.6).

Поэтому минимальным действием будет

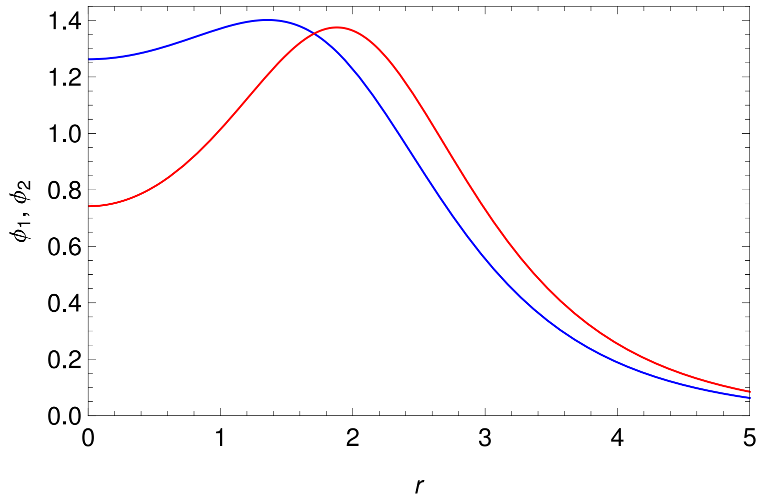

Рис. 4.3: Решения системы (3.13) при $\kappa = 1$ для $d = 2$. Красная линия — ϕ_1, синяя линия — ϕ_2.

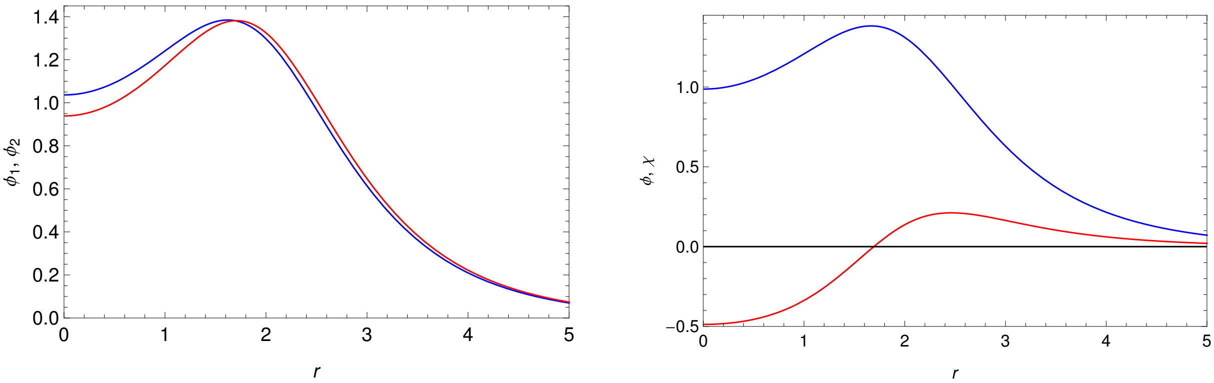

Рис. 4.4: Инстантоны при больших значениях κ для $d = 2$. Слева $\phi_{1,2}$ при $\kappa = 5$. Справа изображены решения системы 4.15: ϕ — синяя линия, χ — красная линия.

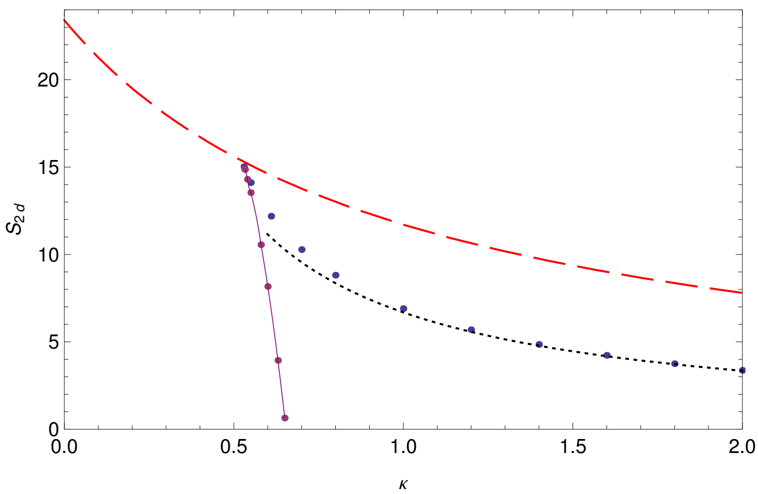

Рис. 4.5: Действие для различных решений для $d = 2$. Синие точки — нетривиальное решение (3.13). Черный точечный пунктир — асимптотика нетривиального решения на $\kappa \to \infty$. Красный пунктир — тривиальное решение. Фиолетовые точки — побочное решение. Фиолетовая линия — интерполяция побочного решения.

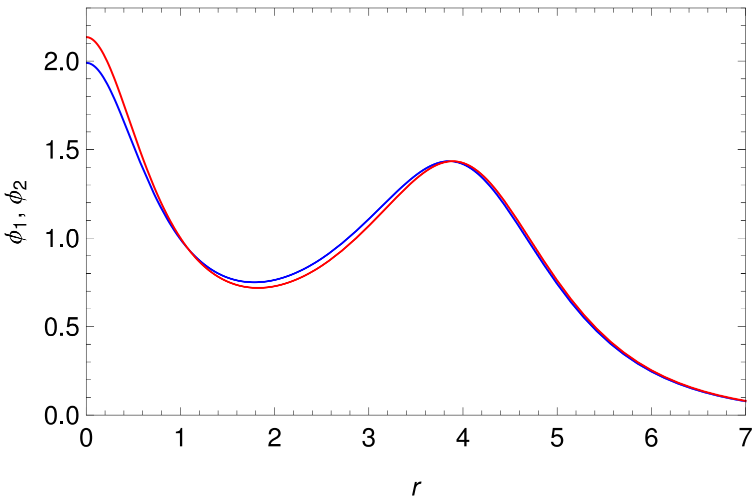

Рис. 4.6: Типичное решение в 3d ($\kappa = 8.1$)

Глава 5

Заключение

Мы вычислили флуктуационную плотность состояний на энергии ферми в сверхпроводнике в случае, когда щель E_g почти полностью закрыта за счет беспорядка. Мы работали в рамках модели Абрикосова-Горькова с $\eta \to 1$. Параметром, позволяющим получить аналитическое решение задачи, является $x = 1 - \eta \ll 1$. Флуктуационная плотность состояний возникает вследствие размытия щели как за счет мезоскопических флуктуаций потенциального беспорядка, так и за счет длинноволновых флуктуаций параметра порядка. Относительная величина обоих вкладов контролируется параметром κ: при малых каппа мезоскопическими флуктуациями потенциального беспорядка, при больших длинноволновыми флуктуациями параметра порядка.

Исследован инстантон, отвечающий оптимальной флуктуации, в размерностях 1,2,3. Он описывается системой двух связанных нелинейных уравнений (3.13). Получено действие инстантона при произвольных значения каппа.

В случае малых $\kappa \ll 1$ с экспоненциальной точностью:

$$\langle \rho \left(E = 0\right) \rangle \propto \exp \left\{ -2\pi \rho_0 \Delta_0 \xi^d \cdot x^{(4-d)/2} S_d \left(0\right) \right\} \tag{5.1}$$

где S(0) определено в (4.8). В этом пределе главную роль играют мезоскопические флуктуации потенциального беспорядка и не важны плавные флуктуации параметра порядка. Этот случай аналогичен результату Meyer и Simons. Кроме числового коэффициента изменился множитель по сравнению с ответом $\epsilon^{(6-d)/4} \to x^{(4-d)/2}$(1.10).

В обратном предельном случае $\kappa \gg 1$ действие $S_d\left(\kappa\right) \approx s_d/\kappa$ (4.16) и плотность состояний:

$$\langle \rho \left(E = 0\right) \rangle \propto \exp \left\{ -\alpha_d \frac{\Delta_0^2}{f\left(0\right)} \xi^d x^{(4-d)/2} \right\} \tag{5.2}$$

Для удобства тут введен коэффициент $\alpha_d = s_d/2$, который содержит все числовые множители. Эти α_d были получены с помощью численного решения уравнений (3.13):

$$\alpha_d \approx \begin{cases} 0.316, & d = 1. \\ 3.34, & d = 2, \\ 37.7, & d = 3. \end{cases} \tag{5.3}$$

В этом пределе главный эффект появления ненулевой плотности состояний — это флуктуации $\Delta(\mathbf{r})$. Заметим, что структура ответа такая же как и у А. И. Ларкина и Ю. Н. Овчинникова: $\epsilon^{(8-d)/4} \to x^{(4-d)/2}$.

Ответ для произвольного κ дается численными графиками в 1d и 2d, а в 3d тривиальным инстантоном: $S_3(\kappa) = S_3(0)/(1+\kappa)$ и $S_3(0) \approx 75.43$.

Приложение A

Действие в переменных θ

При подстановке анзаца (3.1) для Q в действии надо рассчитать следы в пространстве Намбу.

Начнем с вычисления следа: $\mathrm{Tr}\,(\sigma_3 Q)^2$. При вычислении будем использовать известные свойства матриц Паули: $\sigma_i \sigma_j = \sigma_0 \cdot \delta_{ij} + i \cdot \varepsilon_{ijk}\sigma_k$:

$$\sigma_3 Q = \left(\cos\left(\theta^a\right) + i\sigma_2 \sin\left(\theta^a\right)\right)\delta_{ab}. \tag{A.1}$$

Получившаяся матрица имеет структуру матрицы поворота, её в квадрат возводить легко (2 поворота на θ — это один поворот на 2θ):

$$\left(\sigma_3 Q\right)^2 = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta^a\right) & \sin\left(\theta^a\right) \\ -\sin\left(\theta^a\right) & \cos\left(\theta^a\right) \end{bmatrix}^2 \delta_{ab} = \begin{bmatrix} \cos\left(2\theta^a\right) & \sin\left(2\theta^a\right) \\ -\sin\left(2\theta^a\right) & \cos\left(2\theta^a\right) \end{bmatrix} \delta_{ab}, \tag{A.2}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\sigma_3 Q\right)^2 = 2\,\mathrm{Tr}\cos\left(2\theta^a\right)\delta_{ab}. \tag{A.3}$$

$$\nabla Q = \delta_{ab}\left[-\sigma_3 \sin\left(\theta^a\right)\cdot\nabla\theta^a + \sigma_1\cos\left(\theta^a\right)\cdot\nabla\theta^a\right], \tag{A.4}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\nabla Q\right)^2 = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \left(\nabla\theta^a\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\nabla\theta^a\right)^2 \end{bmatrix} = 2\cdot\mathrm{Tr}\left(\nabla\theta^a\right)^2, \tag{A.5}$$

$$\sigma_1 Q = \sigma_1\delta_{ab}\left[\sigma_3\cos\left(\theta^a\right) + \sigma_1\sin\left(\theta^a\right)\right] = \sigma_0\sin\left(\theta^a\right)\delta_{ab} - i\sigma_2\cos\left(\theta^a\right)\delta_{ab}. \tag{A.6}$$

Получаем:

$$S_0 = \frac{\pi\rho_0\Delta_0}{4}\int d\mathbf{r}\cdot\mathrm{Tr}\left[4\xi^2\delta_{ab}\left(\nabla\theta^a\right)^2 - 8\sin\left(\theta^a\right)\delta_{ab}\right] - \\ - \frac{\pi\rho_0\Delta_0\eta}{4}\int d\mathbf{r}\cdot\mathrm{Tr}\left(2\cos\left(2\theta^a\right)\delta_{ab}\right). \tag{A.7}$$

(тут мы воспользовались соотношением $D = 2\Delta_0 \xi^2$). Осталось вычислить след в спиновом и репличном пространстве. Перейдем к вычислению S_{dis}:

Как уже было получено $\mathrm{Tr}\left(\sigma_1 Q\right) = 2\sin\left(\theta^a\right)\delta_{ab}$. А значит:

$$S_{dis} = \frac{\pi \rho_0 \Delta_0 \kappa}{8} \int d\mathbf{r} \cdot \left(2 \cdot \mathrm{Tr}\left(\sin\left(\theta^a\right)\delta_{ab}\right)\right)^2. \tag{A.8}$$

Приложение B

Описание численной схемы

Случай $\kappa = 0$:

Чтобы исключить расходимость во втором члене лапласиана ($\Delta_{\mathbf{r}} = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r$) при $r = 0$, решим приближенно уравнение (4.1) в нуле. Разложив в ряд решение, уравнение можно линеаризовать и найти связь для коэффициентов:

$$\phi_d\left(r\right) = a - \frac{1}{2d}\left(a^3 - a\right)r^2 + \ldots,\ r \to 0, \tag{B.1}$$

тут d — это размерность задачи. Для численного решения есть еще одна особенность при $r \to \infty$. Отбрасывая все нелинейные члены получаем асимптотику решения:

$$\phi_d\left(r\right) = b\frac{e^{-r}}{r^{(d-1)/2}} + \ldots,\ r \to \infty. \tag{B.2}$$

Отделив две особенности, можно решать численно с двух концов, считая a, b параметрами. Так как в задаче больше нет параметров, можно выбрать $r \in [0.01, 10]$. Полученные два решения: $\phi_d\left(a, r\right)$ решение от левого края и $\phi_d\left(b, r\right)$ от правого сшиваем в $r_0 = 1$. Мы выбрали способ сшивки решений [18]: минимизация конченой разницы:

$$\delta\left(a, b\right) = \left(\phi_d\left(a, r_0\right) - \phi_d\left(b, r_0\right)\right)^2 + \left(\partial_r\phi_d\left(a, r_0\right) - \partial_r\phi_d\left(b, r_0\right)\right)^2. \tag{B.3}$$

С помощью пакета Wolfram-Mathematica 9 минимизируем $\delta\left(a, b\right)$ по параметрам решений. Так находятся параметры a и b. Получается такая картина для коэффициентов a это значение инстантона в нуле ($\phi_d\left(0\right) = a$):

$$a_d = \begin{cases} \sqrt{2}, & d = 1, \\ 2.21, & d = 2, \\ 4.36, & d = 3. \end{cases} \tag{B.4}$$

Случай произвольного κ.

Отличие от случая $\kappa = 0$ состоит в том, что теперь уравнения 2 и надо вводить 4 параметра: определяющие значение $\phi_{1,2}(0)$ и асимптотику на больших r. Решаем линеаризованную систему в нуле аналогичным способом:

$$\begin{cases} \phi_1^0(r) = a + \frac{a - a^3 - \kappa a\left(b^2 - a^2\right)}{2d} r^2,\ r \to 0, \\ \phi_2^0(r) = b + \frac{b - b^3 - \kappa b\left(b^2 - a^2\right)}{2d} r^2,\ r \to 0. \end{cases} \tag{B.5}$$

И так же для особой точки $r = \infty$:

$$\begin{cases} \phi_1^\infty(r) = c \frac{e^{-r}}{r^{(d-1)/2}},\ r \to \infty, \\ \phi_2^\infty(r) = d \frac{e^{-r}}{r^{(d-1)/2}},\ r \to \infty. \end{cases} \tag{B.6}$$

Теперь конечную разницу надо определить таким образом:

$$\begin{aligned} \delta(a,b,c,d) = {} & \left[\phi_1^0(a,b,r_0) - \phi_1^\infty(c,d,r_0)\right]^2 + \left[\phi_2^0(a,b,r_0) - \phi_2^\infty(c,d,r_0)\right]^2 \\ & + \left[\partial_r\phi_1^0(a,b,r_0) - \partial_r\phi_1^\infty(c,d,r_0)\right]^2 + \left[\partial_r\phi_2^0(a,b,r_0) - \partial_r\phi_2^\infty(c,d,r_0)\right]^2 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Тут происходит минимизация по всем параметрам $\delta(a,b,c,d)$.

Литература

[1] A. A. Abrikosov and L. P. Gor'kov, ЖЭТФ **35**, 1558 (1958); **36**, 319 (1959) [Sov. Phys. JETP 8, 1090 (1959); 9, 220 (1959).

[2] P. W. Anderson, Theory of dirty superconductors, J.Phys. Chem. Solids **11**, 26 (1959).

[3] A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, ЖЭТФ **39**, 1781 (1960) [Sov. Phys. JETP 12,1234 (1961)].

[4] А. А. Абрикосов, Основы теории металлов, — М. Наука (1987).

[5] A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov, ЖЭТФ **61**, 2147(1971) [Sov. Phys. JETP 34, 1144 (1972)].

[6] M. A. Skvortsov, M. V. Feigel'man, Subgap states in disordered superconductors. ЖЭТФ **117**, 487 (2013).

[7] B. Sacépé, C. Chapelier, T. I. Baturina, V. M. Vinokur, M. R. Baklanov, and M. Sanquer, Disorder-Induced Inhomogeneities of the Superconducting State Close to the Superconductor-Insulator Transition, Phys. Rev. Lett. **101**, 157006 (2008).

[8] P. C. J. J. Coumou, E. F. C. Driessen, J. Bueno, C. Chapelier, and T. M. Klapwijk, Electrodynamic response and local tunneling spectroscopy of strongly disordered superconducting TiN films, Phys. Rev. B **88**, 180505(R) (2013).

[9] H. Porthier, S. Gueron, O. Birge, D. Esteve, M. H. Devoret, Energy Distribution Function of Quasiparticles in Mesoscopic Wires, Phys. Rev. lett. **79**, 3490 (1997).

[10] Л. С. Левитов, А. В. Шитов, Функции Грина. Задачи и решения. — М. ФИЗМАТЛИТ(2003).

[11] J. S. Meyer, B. D. Simons, Gap fluctuations in inhomogeneous superconductors, Phys. Rev. B **64**, 134516 (2001).

[12] K. B. Efetov, Supersymmetry in Disorder and Chaos (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996).

[13] A. M. Finkel'stein, *Electron Liquid in Disordered Conductors*, Soviet scientific reviews vol. 14, edited by I. M. Khalatnikov (Harwood Academic, London, 1990).

[14] D. Belitz, and T. R. Kirkpatrick, The Anderson-Mott transition, Rev. Mod. Phys. **66**, 261 (1994).

[15] K. Usadel, Generalized Diffusion Equation for Superconducting Alloys, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970).

[16] A. Lamacraft, B. D. Simons, Tail States in a Superconductor with Magnetic Impurities, Phys. Rev. Lett. 85, 4783 (2000).

[17] И.М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, Введение в теорию неупорядоченных систем, — М.Наука (1982).

[18] П. М. Островский, частное сообщение.