

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)  
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Влияние шума на фазу Ааронова-Анандана»  
(Дипломная работа)

студента 028 группы  
А.Е. Светогорова  
научный руководитель  
д.ф-м.н. Ю.Г. Махлин

Черноголовка 2014

# Оглавление

Оглавление	1
1 Введение.	1
2 Фаза Ааронова-Анандана без шума.	4
3 Изменение скорости набора фазы при наличии шума.	7
4 Разделение вкладов.	10
5 Переход к адиабатическому случаю	13
6 Дефазировка и релаксация.	15
7 Квазистационарный классический шум.	18
8 Заключение.	20
Приложение А Фаза Берри для спина $1/2$ .	21
Приложение В Диаграммная техника	24
Приложение С Спиновое эхо	28
9 Список литературы	30

## **Аннотация**

В работе изучается влияние шума на когерентную динамику квантовой двухуровневой системы. Исследуется влияние слабого коротко-коррелированного шума на геометрические фазы (фазы Ааронова-Анандана) системы с неадиабатической циклической эволюцией, проверяется предельный переход к фазам Берри. Изучается дефазировка. Рассматривается случай квазистационарного классического шума.

# Глава 1

## Введение.

Фаза Ааронова-Анандана является обобщением фазы Берри, определенной в адиабатическом случае. В адиабатическом случае нет переходов между собственными состояниями, происходит только набор фазы. Берри показал [1], что фаза, которую набирает невырожденное собственное состояние медленно меняющегося гамильтониана, делится на динамическую и геометрическую (фаза Берри) части. Динамическая часть фазы набирается за счет разности энергий квазистационарных собственных состояний. Геометрическая часть определяется траекторией в пространстве параметров гамильтониана и не зависит от скорости обхода. Был проведен ряд экспериментов по измерению этой фазы в разных системах [5,6,9,10,11,12]. В случае двухуровневой системы, которую можно моделировать спином  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле, фаза Берри пропорциональна телесному углу, который заметает траектория магнитного поля [приложение А].

Ааронов и Анандан доказали [2], что в случае произвольного изменения гамильтониана (без условия адиабатичности), можно так же разделить фазу, которую набирает собственное состояние, на динамическую и геометрическую (фаза Ааронова-Анандана). Однако теперь фаза определяется геометрией траектории собственного состояния, а не гамильтониана (например, гамильтониан не обязательно возвращается к исходному по завершении цикла эволюции собственного состояния). Фаза Ааронова-Анандана впервые была измерена экспериментально с помощью ядерного магнитного резонанса на трехуровневой системе, два верхних уровня которой использовались в качестве эффективно двухуровневой системы, тогда разность фаз находится по ее влиянию на частоту перехода со второго на первый уровень [4].

В любой реальной системе есть взаимодействие с резервуаром, обладающим непрерывным спектром. Взаимодействие с резервуаром меняет динамику системы. По изменениям системы можно судить о свойствах самого шума. Мы рассматриваем случай, когда взаимодействие с резервуаром слабо и можно представить его в виде малых поправок к невозмущенным значениям и оценить время дефазировки и релаксации. В бесшумовом случае рассматривались фазы собственных состояний, в случае же взаимодействия с резер-



вуаром можно рассматривать фазы компонент матрицы плотности системы (выражаются через углы поворота среднего спина, если моделировать систему спином  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле), тогда можно попытаться посчитать усредненную поправку к фазе от шума, а так же разделить ее на динамическую и геометрическую части. Изучение влияния диссипации на когерентную динамику системы является важной задачей, позволяющей лучше понять переход от квантовой системы к классической. Геометрические фазы представляют интерес, как свойства квантовой системы, имеющие простую геометрическую интерпретацию. Эта задача так же может быть интересна в связи с тем, что фаза квантовых битов, которые являются эффективно двухуровневыми системами, может быть использована для хранения и обработки информации в квантовых компьютерах [8] (имеется в виду полная фаза, так как надежды возлагаемые на выделение геометрической части не обоснованы).

Данная задача была решена для фазы Берри в работе [3]. Рассматривалась двухуровневая система в присутствии слабого анизотропного короткокоррелированного шума, эквивалентная спину  $\frac{1}{2}$  во флуктуирующем магнитном поле. Задача решалась вычислением оператора эволюции матрицы плотности, с помощью которого находилась фаза недиагонального элемента матрицы плотности, усредненной по реализациям шума. Эта фаза и есть измеримая фаза Берри. Так же проводились эксперименты по влиянию шума на фазу Берри [5,6]. Кроме того рассматривались другие случаи шума, например, медленный классический шум [15].

В настоящей работе изучается влияние слабого анизотропного короткокоррелированного шума на фазу двухуровневой системы (без предположения адиабатичности). Экспериментально можно измерить поворот спина (если говорить в терминах спина  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле). Однако для каждой конкретной реализации шума результат будет свой. Но в случае слабого короткокоррелированного шума имеет смысл усреднять по реализациям шума. Усреднение производится по набору измерений с одинаковым изменением бесшумового гамильтониана. Для выбранной эволюции поля находится направление спина (назовем его стационарным, так как позже будет удобнее работать в системе координат, где это направление покоится), который возвращается в исходное (с точностью до фазы) состояние (рассчитывается без шума). Затем готовится спин в перпендикулярной этому направлению плоскости. По завершении эволюции измеряется одна из его компонент (x или y в системе координат, связанной со стационарным направлением). После многократного повторения эксперимента вычисляются средние значения этих компонент. Изменение угла за время эволюции будет разностью фаз для спинов, направленных по и против выбранного направления. Если вычислить динамическую часть фазы (мы обсудим, что является динамической фазой при наличии шума) и вычесть ее из всей фазы, найдем фазу Ааронова-Анандана. Теоретически можно вычислить среднее значение фазы недиагональных элементов матрицы плотности (соответствует углу поворота среднего спина), рассмот-

рев оператор эволюции матрицы плотности, учитывая воздействие шума, как возмущение бесшумового гамильтониана. Так как время корреляции рассматриваемого шума гораздо меньше времени эволюции, а так же времен затухания, то эволюцию матрицы плотности можно считать марковской [В]. Тогда из уравнения Редфилда можно найти скорость изменения фазы. Можно определить динамическую часть вклада в фазу, рассчитав усредненную поправку к магнитному полю, зафиксировав вектор поля. Если теперь проинтегрировать разность энергий двух состояний спина (под разностью энергий понимается разность усредненных по базисным состояниям значений гамильтониана в каждый момент времени) и вычесть полученную динамическую фазу из всей фазы, то получим поправку к фазе Аарнонова-Анандана. Уравнение на скорость набора фазы дает решения. Значит, рассматривая мнимые части можно изучить дефазировку. Это и будет сделано в данной работе.

Работа построена следующим образом. Сначала определяется фаза Аарнонова-Анандана в системе без шума, доказывається ее геометричность. Затем вычисляется усредненная поправка к фазе от взаимодействия с шумом. После чего определяется динамическая часть фазы и рассматривается остаточная фаза. Далее рассматривается предельный переход к адиабатическому случаю. После этого изучается дефазировка. В конце рассматривается случай квазистационарного классического шума.

## Глава 2

# Фаза Ааронова-Анандана без шума.

Рассмотрим фазу Ааронова-Анандана. Для начала определим ее в идеальной двухуровневой системе без шума. Гамильтониан двухуровневой системы можно заменить гамильтонианом спина  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле

$$H_s = -\frac{1}{2}B(t)\sigma \quad (2.1)$$

Пусть поле меняется по некоторой траектории. Оператор эволюции унитарен, значит, для него существует два собственных вектора с собственными значениями, равными по модулю 1.

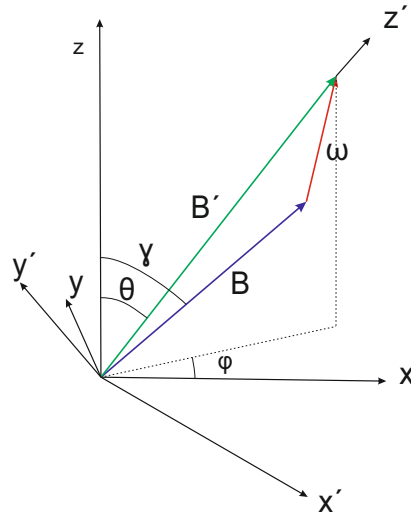
$$U\psi_{1,2} = \exp(i\phi_{1,2})\psi_{1,2}$$

Тогда существует два спинора, которые по завершении эволюции вернуться в исходное состояние с точностью до фазы. Можно перейти в базис, в котором оператор эволюции будет диагонален. В нем собственными векторами будут  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (их и используем в качестве базисных на протяжении эволюции). Значит, эти спиноры взаимно ортогональны. Из чего можно сделать заключение, что это два состояния, когда вектор спина направлен коллинеарно какой-то оси (стационарному направлению), возвращающейся в исходное положение по завершении эволюции. Значит, аналогично случаю Берри (адиабатическому случаю) есть два противоположно направленных спина, которые возвращаются в исходное состояние, набрав некоторую фазу.

Рассмотрим систему координат, связанную со стационарным направлением. Ось  $z'$  направим по направлению. Для определенности возьмем ось  $x'y'$  лежащей в исходной плоскости  $xy$ . Тогда по завершении эволюции СК вернется в исходное положение. Обозначим углами  $\theta$  и  $\varphi$  полярный и азимутальный углы в лабораторной СК  $(xyz)$ . Скорость вращения новой СК

$$\omega = \theta_t \vec{e}_{y'} + \varphi_t \vec{e}_z$$

Рис. 2.1: СК



Тогда в новой СК  $\omega = (-\varphi_t \sin \theta, \theta_t, \varphi_t \cos \theta)$ .  
А гамильтониан

$$H = U H_s U^{-1} + i U U^{-1} \quad (2.2)$$

где матрица перехода

$$U = \exp\left(i \frac{\theta \sigma_{y'}}{2}\right) \exp\left(i \frac{\varphi \sigma_{z'}}{2}\right)$$

Получим,

$$H = -\frac{1}{2} (B(t) + \omega) \sigma \quad (2.3)$$

Значит, можно ввести в новой СК эффективное поле  $B'(t) = B(t) + \omega$ .

Так как в этой СК выбранный спин покоится, то  $B'(t)$  имеет в ней только  $z'$  компоненту.

$$B' = B_{z'} + \omega_{z'}$$

Аналогично тому, как это сделано в [A], можно показать что разность фаз спина вдоль эффективного поля и против равна углу поворота для спина в перпендикулярной эффективному полю плоскости. Угловая скорость вращения спинового пространства в новой системе координат равна  $|B'|$ .

Значит, набегает разность фаз

$$\alpha = \oint B' dt = \oint B_{z'} dt + \oint \omega_{z'} dt \quad (2.4)$$

Первую часть фазы определим, как динамическую.

Рассмотрим оставшуюся фазу

$$\beta = \alpha - \oint B_{z'} dt = \oint \omega_{z'} dt = \oint d\varphi \cos \theta = 2\pi - W \quad (2.5)$$

где  $W$  - телесный угол, заметаемый эффективным полем (спином, возвращающимся в исходное состояние). Значит,  $\beta$  выражается через геометрические характеристики (телесный угол) траектории в пространстве состояний.

## Глава 3

# Изменение скорости набора фазы при наличии шума.

Теперь проследим за изменением разности фаз в системе спина  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле при наличии шума.

Рассмотрим коротко-коррелированный анизотропный шум вдоль оси  $z$  лабораторной СК.

Гамильтониан примет вид

$$H_s = -\frac{1}{2}B(t)\sigma - \frac{1}{2}X\sigma_z + H_{env}(X) \quad (3.1)$$

Перейдя во вращающуюся СК, определенную таким же образом, как и в бесшумовом случае.

$$H = -\frac{1}{2}(B(t) + \omega)\sigma_{z'} - \frac{1}{2}X(\cos\theta\sigma_{z'} - \sin\theta\sigma_{x'}) + H_{env} \quad (3.2)$$

Рассмотрим недиагональные элементы матрицы плотности (содержат фазы, так как  $\langle\sigma_{x'} + i\sigma_{y'}\rangle = \rho_{01}$ )

Воспользуемся техникой, развитой Schoeller и Schön [13] и использованной в [3] для усреднения матрицы плотности двухуровневой системы по шуму (подробнее техника изложена в [14]).

Получим уравнение Редфилда [В].

$$\frac{d}{dt}\rho_{01}(t) = iB'\rho_{01}(t) + \Gamma_{01\rightarrow 01}\rho_{01}(t) \quad (3.3)$$

где  $\Gamma_{01 \rightarrow 01}$  - компонента тензора Блоха-Редфилда (В.7).

$$\Gamma_{01 \rightarrow 01} = - \int_{-\infty}^t dt' S(t-t') [\cos \theta(t) \cos \theta(t') + \frac{1}{2} \sin \theta(t) \cos \theta(t') \exp \left( -i \int_{t'}^t B'(\tau) d\tau \right)] \quad (3.4)$$

а  $S(\tau)$ - симметризованный коррелятор шума.

$$S(t-t') = \frac{1}{2} (\langle X(t)X(t') \rangle + \langle X(t')X(t) \rangle) \quad (3.5)$$

Действительная часть отвечает за затухание поперечной эффективному полю компоненты  $\left(\frac{1}{T_2}\right)$ , а мнимая за изменение фазы.

(Времена  $T_2$  и  $T_1$  определяются как времена затухания поперечной и продольной полю компоненты в уравнениях Блоха).

Так как шум коротко-коррелирован ( $\tau_c \ll T_1, T_2$ ), то интеграл набирается на таких  $t'$ , когда можно пользоваться разложением.

$$\theta(t') = \theta(t) - \omega_{y'}(t-t')$$

$$B'(\tau) = B'(t) - K(t-\tau)$$

где  $K = \frac{dB'(\tau)}{dt}$ .

Для краткости обозначений в дальнейшем значения взяты в момент времени  $t$ , если не указано другое, а  $\Gamma_{01 \rightarrow 01}$  обозначим как  $\Gamma$ .

Воспользуемся полученным разложением.

$$\Gamma = - \int_{t-\tau_c}^t dt' S(t-t') \left\{ \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta \omega_{y'}(t-t')) + \frac{1}{2} \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta \omega_{y'}(t-t')) * \right. \\ \left. * \exp \left( -i \int_{t'}^t (B'(t) - K(t-\tau)) d\tau \right) \right\}$$

Перейдем к интегрированию от 0 до  $\tau_c$ .

$$\Gamma = - \int_0^{\tau_c} dt S(t) \{ \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta \omega_{y'} t) + \\ + \frac{1}{2} \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta \omega_{y'} t) \exp(-iB't) + \frac{i}{2} \sin^2 \theta K \frac{t^2}{2} \exp(-iB't) \}$$

Выделим часть, не содержащую явно  $\omega$ , и выразим через Фурье-компоненту симметризованного коррелятора.

$$\Gamma_0 = - \int_0^{\tau_c} dt S(t) \left( \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \exp(-iB't) \right) = \\ = -i \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\Omega + i0} + \frac{\sin^2 \theta}{2(\Omega - B' + i0)} \right] \quad (3.6)$$

Тогда

$$\Gamma = \Gamma_0 + \omega_{y'} \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \sin \theta \cos \theta * \\ * \left( \frac{1}{(\Omega + i0)^2} - \frac{1}{2(\Omega - B' + i0)^2} \right) - \\ - \frac{1}{2} K \sin^2 \theta \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \frac{1}{(\Omega - B' + i0)^3} \quad (3.7)$$



## Глава 4

# Разделение вкладов.

Фазы, набираемые состояниями квантовой системы без шума можно разделить на две составляющие: динамическую и остальную, которая имеет геометрический вид. При наличии шума можно следить за фазами компонент матрицы плотности. В адиабатическом случае усредненные по реализациям шума поправки тоже делятся на динамическую и геометрическую. Попробуем выделить динамическую часть поправки к фазе в нашем случае и посмотреть на оставшуюся.

Определим динамическую часть вклада в фазу. Если бы поле покоилось, то влияние шума можно бы было свести к изменению разности энергий состояний спина по и против поля. Уравнение Редфилда будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\rho_{01}(t) = iB\rho_{01}(t) + \Gamma_{01 \rightarrow 01}\rho_{01}(t)$$

Тогда поправка к скорости набора фазы может быть определена, как поправка к магнитному полю, т.е.  $\delta B = Im\Gamma_{01 \rightarrow 01}$ .

Воспользуемся аналогичным подходом к определению поправки к динамической фазе в случае изменяющегося поля. Для этого можно локально “заморозить” поле и посмотреть за набираемой фазой. Так как бесшумовая часть поля неизменна, то проводя вычисления, аналогичные (7 - 13), с заменой  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow \gamma$ ,  $\varphi \rightarrow \zeta$ , где  $\gamma$  - угол между направлением шума и направлением бесшумового поля  $B$  (полярный угол поля), а  $\zeta$  - азимутальный. Получим

$$\Gamma_D = -i \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left[ \frac{\cos^2 \gamma}{\Omega + i0} + \frac{\sin^2 \gamma}{2(\Omega - B + i0)} \right] \quad (4.1)$$

Тогда

$$\delta B = Im(\Gamma_D) = -Re \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left[ \frac{\cos^2 \gamma}{\Omega + i0} + \frac{\sin^2 \gamma}{2(\Omega - B + i0)} \right] \quad (4.2)$$

Вычислим поправку к динамической фазе, как интеграл по времени от поправки к разности энергий

$$\int_0^t \delta B (\sin \theta \sin \gamma \cos (\zeta - \varphi) + \cos \theta \cos \gamma) dt \quad (4.3)$$

Тогда оставшаяся часть фазы определяется

$$\Gamma' = \Gamma - \Gamma_D (\sin \theta \sin \gamma \cos (\zeta - \varphi) + \cos \theta \cos \gamma)$$

Значит, полное выражение для  $\Gamma'$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma' = & -i \int \frac{d\Omega}{4\pi} S(\Omega) \left( \left[ \frac{2 \cos^2 \theta}{\Omega + i0} + \frac{\sin^2 \theta}{(\Omega - B' + i0)} \right] - \left[ \frac{2 \cos^2 \gamma}{\Omega + i0} + \frac{\sin^2 \gamma}{(\Omega - B + i0)} \right] \right) * \\ & * (\sin \theta \sin \gamma \cos (\zeta - \varphi) + \cos \theta \cos \gamma) + \\ & + \omega_{y'} \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \sin \theta \cos \theta \left( \frac{1}{(\Omega + i0)^2} - \frac{1}{2(\Omega - B' + i0)^2} \right) - \\ & - \frac{1}{2} K \sin^2 \theta \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \frac{1}{(\Omega - B' + i0)^3} \quad (4.4) \end{aligned}$$

Найдем фазу, определяемую этим выражением. Для этого рассмотрим мнимую часть  $\Gamma'$ .

$$\begin{aligned} Im\Gamma' = & -V.p. \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left( \left[ \frac{\cos^2 \theta}{\Omega} + \frac{\sin^2 \theta}{2(\Omega - B')} \right] - \left[ \frac{\cos^2 \gamma}{\Omega} + \frac{\sin^2 \gamma}{2(\Omega - B)} \right] \right) * \\ & * (\sin \theta \sin \gamma \cos (\zeta - \varphi) + \cos \theta \cos \gamma) - \frac{\omega_{y'}}{2} \sin \theta \cos \theta \left( S_{\Omega}(0) - \frac{1}{2} S_{\Omega}(B') \right) + \\ & + \frac{1}{8} K \sin^2 \theta S_{\Omega\Omega}(B') \quad (4.5) \end{aligned}$$

Интегралы в смысле главного значения от нечетных функций равны нулю.

Значит,

$$\begin{aligned} Im\Gamma' = & -V.p. \int \frac{d\Omega}{4\pi} S(\Omega) \left[ \frac{\sin^2 \theta}{(\Omega - B')} - \frac{\sin^2 \gamma}{(\Omega - B)} (\sin \theta \sin \gamma \cos (\zeta - \varphi) + \cos \theta \cos \gamma) \right] + \\ & + \frac{1}{4} \omega_{y'} \sin \theta \cos \theta S_{\Omega}(B') + \frac{1}{8} K \sin^2 \theta S_{\Omega\Omega}(B') \end{aligned}$$

Тогда оставшаяся часть фазы получается интегрированием этого выражения по времени.

$$\beta = \oint d\varphi \cos \theta - \int_0^T dt V.p. \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) * \\ * \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2(\Omega - B')} - \frac{\sin^2 \gamma}{2(\Omega - B)} (\sin \theta \sin \gamma \cos(\zeta - \varphi) + \cos \theta \cos \gamma) \right] + \\ + \frac{1}{4} \oint \sin \theta \cos \theta S_{\Omega}(B') d\theta + \frac{1}{8} \oint dB' \sin^2 \theta S_{\Omega\Omega}(B')$$

Легко показать, что два последних интеграла по замкнутому контуру дают 0.

Получим,

$$\beta = 2\pi - W - \int_0^T dt V.p. \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) * \\ * \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2(\Omega - B')} - \frac{\sin^2 \gamma}{2(\Omega - B)} (\sin \theta \sin \gamma \cos(\zeta - \varphi) + \cos \theta \cos \gamma) \right]$$

Следует отметить, что в общем случае нельзя пользоваться красивым экспериментальным определением геометрической фазы через спиновое эхо [приложение С].

## Глава 5

# Переход к адиабатическому случаю

В предыдущем разделе из полной разности фаз была выделена динамическая часть, скорость набора которой определяется в каждый момент времени без учета изменения поля (для каждого момента времени локально “замораживаем” поле). Оставшаяся часть поправки не имеет явного геометрического вида в общем случае. В адиабатическом случае, действуя аналогичным образом была получена поправка к геометрической фазе [3], которая сама зависела только от траектории бесшумового поля (т.е. тоже была геометрической). Попробуем сделать предельный переход к этой поправке, перейдя к пределу малых  $\omega$ .

Обозначим

$$F = \frac{\sin^2 \theta}{(\Omega - B')} - \frac{\sin^2 \gamma}{(\Omega - B)} (\sin \theta \sin \gamma \cos (\zeta - \varphi) + \cos \theta \cos \gamma)$$

Преобразуем  $F$ , воспользовавшись малостью  $\omega$ .

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{\sin^2 \theta}{\Omega - B} \left(1 + \frac{\omega_z}{\Omega - B}\right) - \frac{\sin^2 \gamma}{\Omega - B} \left(1 + \frac{(\gamma - \theta)^2}{2}\right) = \\ &= \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \gamma}{\Omega - B} + \frac{\sin^2 \theta}{(\Omega - B)^2} \omega_z - \frac{\sin^2 \gamma (\gamma - \theta)^2}{\Omega - B} \approx \\ &\approx \frac{\sin(\theta - \gamma) \sin(\theta + \gamma)}{\Omega - B} + \frac{\sin^2 \theta}{(\Omega - B)^2} \omega_z \approx \\ &\approx -\frac{2\varphi_t}{B(\Omega - B)} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{(\Omega - B)^2} \omega_z \end{aligned}$$

Тогда добавка к фазе

$$\begin{aligned}
\beta_A &= 2\pi - W - \int_0^T dt V.p. \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left( -\frac{\varphi_t}{B(\Omega - B)} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2(\Omega - B)^2} \omega_z \right) = \\
&= 2\pi - W + \oint d\varphi \sin^2 \theta \cos \theta V.p. \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left( \frac{1}{B(\Omega - B)} - \frac{1}{2(\Omega - B)^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

В работе [3] было получено, что в поправку к геометрической фазе дает вклад только

$$\Gamma'_A = i\varphi_t \sin^2 \gamma \cos \gamma \left( -\frac{1}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega) (3B - 2\Omega)}{B(\Omega - B + i0)^2} \right) \tag{5.2}$$

Значит, поправка к фазе Берри имеет вид

$$\begin{aligned}
Im \int_0^T \Gamma'_A dt &= Re \int_0^T \varphi_t \sin^2 \gamma \cos \gamma \left( -\frac{1}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega) (3B - 2\Omega)}{B(\Omega - B + i0)^2} \right) = \\
&= \oint d\varphi \sin^2 \gamma \cos \gamma \left( -V.p. \int \frac{d\Omega}{4\pi} S(\Omega) \left( \frac{1}{(\Omega - B)^2} - \frac{2}{B(\Omega - B)} \right) \right) \approx \\
&\approx \oint d\varphi \sin^2 \theta \cos \theta \left( -\frac{1}{2} V.p. \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left( \frac{1}{(\Omega - B)^2} - \frac{2}{B(\Omega - B)} \right) \right)
\end{aligned}$$

Получим, что полная фаза Берри равна

$$\beta_B = 2\pi - W + \frac{1}{2} \oint d\varphi \sin^2 \theta \cos \theta V.p. \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left( \frac{2}{B(\Omega - B)} - \frac{1}{(\Omega - B)^2} \right) \tag{5.3}$$

что совпадает с выражением, полученным предельным переходом из общего случая.

## Глава 6

# Дефазировка и релаксация.

Рассмотрим процессы дефазировки и релаксации в системе с шумом. Воспользуемся методом, изложенным в статье [14], где рассматривалась такая же система, но с условием адиабатичности.

Диссипацию и дефазировку в системе, взаимодействующей с резервуаром, можно приближенно промоделировать уравнением Блоха в анизотропном  $\tau$ -приближении. Для системы спина  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле, запишем уравнение на магнитный момент системы

$$\frac{d}{dt}\vec{M} = \vec{M} \times \vec{B}' - \frac{1}{T_1}(M_{z'} - M_0)\vec{e}_{z'} - \frac{1}{T_2}(M_{x'}\vec{e}_{x'} + M_{y'}\vec{e}_{y'}) \quad (6.1)$$

где  $\frac{1}{T_1}$  - скорость релаксации продольной компоненты, а  $\frac{1}{T_2}$  - поперечной.

Но это аналогично уравнению на средний вектор спина, так как  $M \sim \langle \sigma \rangle$ . Значит, опять же можно записать это уравнение через компоненты матрицы плотности, пользуясь тем, что  $\langle \sigma_z \rangle = \rho_{00} - \rho_{11}$ ,  $\langle \sigma_x + i\sigma_y \rangle = \rho_{01}$ . Используем так же то, что  $\rho_{00} + \rho_{11} = 1$ .

Получим

$$(\rho_{00})_t = -\Gamma_{11\leftarrow 00}\rho_{00} + \Gamma_{00\leftarrow 11}\rho_{11} \quad (6.2)$$

$$(\rho_{11})_t = \Gamma_{11\leftarrow 00}\rho_{00} - \Gamma_{00\leftarrow 11}\rho_{11} \quad (6.3)$$

$$(\rho_{01})_t = iB'\rho_{01} - \frac{1}{T_2}\rho_{01} \quad (6.4)$$

Если сравнить с уравнением Рэдфилда (8), то получим, что  $\frac{1}{T_2} = -\text{Re}\Gamma_{01\leftarrow 01}$  (рассматриваем только действительную часть, чтобы оценить скорость релаксации). Воспользуемся формулой (13)

$$\begin{aligned}
Re\Gamma_{01\leftarrow 01} &= Re\Gamma_0 + Re\omega_{y'} \int \frac{d\Omega}{4\pi} S(\Omega) \sin\theta \cos\theta \left( \frac{2}{(\Omega + i0)^2} - \frac{1}{(\Omega - B' + i0)^2} \right) \\
&- Re\frac{1}{2}K \sin^2\theta \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \frac{1}{(\Omega - B' + i0)^3}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Вычислим действительные части слагаемых

$$\begin{aligned}
Re\Gamma_0 &= Re \left( -i \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \left[ \frac{\cos^2\theta}{\Omega + i0} + \frac{\sin^2\theta}{2(\Omega - B' + i0)} \right] \right) = \\
&= -\frac{1}{2}S(0) \cos^2\theta - \frac{1}{4}S(B') \sin^2\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re\frac{1}{2}\omega_{y'} \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \sin\theta \cos\theta \left( \frac{2}{(\Omega + i0)^2} - \frac{1}{(\Omega - B' + i0)^2} \right) &= \\
= V.p.\frac{1}{2}\omega_{y'} \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \sin\theta \cos\theta \left( \frac{2}{\Omega^2} - \frac{1}{(\Omega - B')^2} \right)
\end{aligned}$$

$$Re\frac{1}{2}K \sin^2\theta \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \frac{1}{(\Omega - B' + i0)^3} = V.p.\frac{1}{2}K \sin^2\theta \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \frac{1}{(\Omega - B')^3}$$

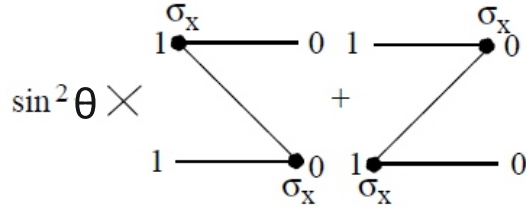
Значит, общая скорость релаксации поперечных компонент

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_2} &= \frac{1}{2}S(0) \cos^2\theta + \frac{1}{4}S(B') \sin^2\theta - \\
&- V.p.\frac{1}{2}\omega_{y'} \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \sin\theta \cos\theta \left( \frac{2}{\Omega^2} - \frac{1}{(\Omega - B')^2} \right) + \\
&+ V.p.\frac{1}{2}K \sin^2\theta \int \frac{d\Omega}{2\pi} S(\Omega) \frac{1}{(\Omega - B')^3} \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Для нахождения  $T_1$  можно опять же воспользоваться диаграммной техникой, как в приложении [B]. Результат получится такой же, как и в статье [14], только нужно помнить, что  $\theta$  - угол между лабораторной осью  $z$  и стационарным направлением (в статье рассматривается адиабатический случай, в котором считается, что спин, направленный по полю всегда следует за ним, поэтому берется угол между лабораторной осью  $z$  и магнитным полем).

Собственно энергетическая часть имеет вид

Рис. 6.1:  $\sum_{00\leftarrow 11}$



$$\sum_{00\leftarrow 11} = \frac{\sin^2 \theta}{4} [\langle X(t), X(t') \rangle \exp(iB'(t-t')) + c.c.] \quad (6.7)$$

Компонента оператора Лиувилля равна нулю  $[L_s]_{00\leftarrow 11} = 0$ .  
Тогда

$$\Gamma_{00\leftarrow 11} = Re \left[ \frac{i \sin^2 \theta}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{\langle X^2(\Omega) \rangle}{\Omega + B' + i0} \right] = \frac{\sin^2 \theta}{4} \langle X^2(-B') \rangle \quad (6.8)$$

Аналогично

$$\Gamma_{11\leftarrow 00} = \frac{\sin^2 \theta}{4} \langle X^2(B') \rangle$$

Тогда получим

$$\frac{1}{T_1} = \Gamma_{11\leftarrow 00} + \Gamma_{00\leftarrow 11} = \frac{\sin^2 \theta}{2} S(B') \quad (6.9)$$

Так как диаграммы имеют такой же вид, что и в адиабатическом случае, то предельным переходом можно получить те же выражения, что для адиабатического случая.



## Глава 7

# Квазистационарный классический шум.

Перед заключением рассмотрим простой случай квазистационарного классического анизотропного шума. Будем изучать его влияние на систему спина  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле, совершающую циклическую эволюцию вокруг оси  $z$  лабораторной системы. Этот случай не может быть получен предельным переходом из рассмотренного выше, так как здесь уже нельзя говорить о малости времени корреляции. В самом простом случае шум представляет собой небольшую добавку к полю  $X$ , направленную по оси  $z$  и имеющую гауссовское распределение. Под квазистационарностью будем понимать, что шум меняется на временах гораздо больших времени эволюции (одного цикла). Тогда можно считать в течении каждого цикла  $X$  постоянным. В таком элементарном случае можно просто воспользоваться выражением для геометрической фазы, полученным в (2.5).

$$\beta = \oint d\varphi \cos \theta = 2\pi \cos \theta$$

Только теперь угол  $\theta$  является полярным углом для полного эффективного поля  $B + \omega + X$ . Т.е. мы имеем некий сдвиг контура, через телесный угол которого выражается геометрический вклад в фазу.

Выразим этот угол  $\theta$  через  $X$ .

$$\cos \theta = \frac{B_z + \omega + X}{\sqrt{(B_z + \omega + X)^2 + B_{\perp}^2}} \quad (7.1)$$

Воспользуемся малостью  $X$

$$\begin{aligned} \cos \theta &\approx \frac{B_z + \omega + X}{B'} \left( 1 - \frac{X(B_z + \omega)}{B'^2} - \frac{X^2}{2B'^2} \right) \approx \\ &\approx \frac{B_z + \omega}{B'} \left( 1 - \frac{2X(B_z + \omega)}{B'^2} - \frac{3X^2}{2B'^2} \right) + \frac{X}{B'} \quad (7.2) \end{aligned}$$

Усредним по  $X$  (берем гауссовское распределение с дисперсией  $D \ll B'$ ).

$$\langle \beta \rangle = 2\pi \frac{B_z + \omega}{B'} \left( 1 - \frac{3D^2}{2B'^2} \right) \quad (7.3)$$

Вообще усредняться должна не фаза, а  $\exp(i\beta)$ . Однако мы считаем  $\beta$  малой, поэтому пользуемся разложением  $\exp(i\beta) \approx 1 + i\beta - \frac{\beta^2}{2}$ . А так как третий член хоть и имеет слагаемые пропорциональные  $X^2$ , но он действительный, поэтому второй член разложения можно усреднять отдельно, а это и есть проделанное усреднение  $\beta$ .

## Глава 8

# Заключение.

В настоящей работе рассматривалось влияние слабого коротко-коррелированного шума на динамику двухуровневой системы, рассматривалась фаза недиагональных элементов матрицы плотности (которая в бесшумовом случае делится на динамическую и геометрическую - фазу Ааронова-Анандана), определялась динамическая фаза.

Шум учитывался усреднением матрицы плотности системы по реализациям. Для этого записывалось уравнение Рэдфилда, которое раскладывалось до первого порядка по  $\omega\tau_c$  ( $\omega$  - скорость вращения спина, возвращающегося в исходное состояние в бесшумовом случае, а  $\tau_c$  - корреляционное время шума), из которого находилась скорость изменения фазы. Проинтегрировав ее по времени, находилась поправка к полной фазе (разности фаз двух состояний). Далее аналогичными рассуждениями была найдена динамическая часть поправки (фиксировалось поле). Тогда вычитанием ее из всей поправки получалась поправка к фазе Ааронова-Анандана. Рассчитывались времена релаксации  $T_1$  и  $T_2$ .

Был также проделан предельный переход к адиабатическому случаю, показано, что поправка к фазе Ааронова-Анандана переходит в поправку к фазе Берри. Рассмотрен случай очень медленно меняющегося классического шума.

# Приложение А

## Фаза Берри для спина 1/2.

Пусть гамильтониан системы

$$H_s = -\frac{1}{2}B(t)\sigma \quad (\text{A.1})$$

где  $B(t)$  - медленно меняющееся во времени магнитное поле. Тогда можно считать, что спин, направленный по полю следует за ним (адиабатическое приближение).

Перейдем в систему координат, связанную с вектором  $B$ . Ось  $z'$  совпадает с направлением поля, ось  $xy'$  лежит в лабораторной плоскости  $xy$ , тогда в момент, когда поле вернется к исходному значению, СК тоже совпадет со своим начальным положением. Введем угловую скорость СК  $\omega = \theta_t \vec{e}_{y'} + \varphi_t \vec{e}_z$ . Тогда в новой СК  $\omega = (-\varphi_t \sin \theta, \theta_t, \varphi_t \cos \theta)$ .

В новой СК гамильтониан примет вид

$$H = UH_sU^{-1} + iUU^{-1} \quad (\text{A.2})$$

где

$$U = \exp\left(i\frac{\theta\sigma_y}{2}\right) \exp\left(i\frac{\varphi\sigma_z}{2}\right)$$

Получим,

$$H = -\frac{1}{2}(B(t) + \omega) \sigma \quad (\text{A.3})$$

Значит, можно ввести в новой СК эффективное поле  $B'(t) = B(t) + \omega$   
Так как

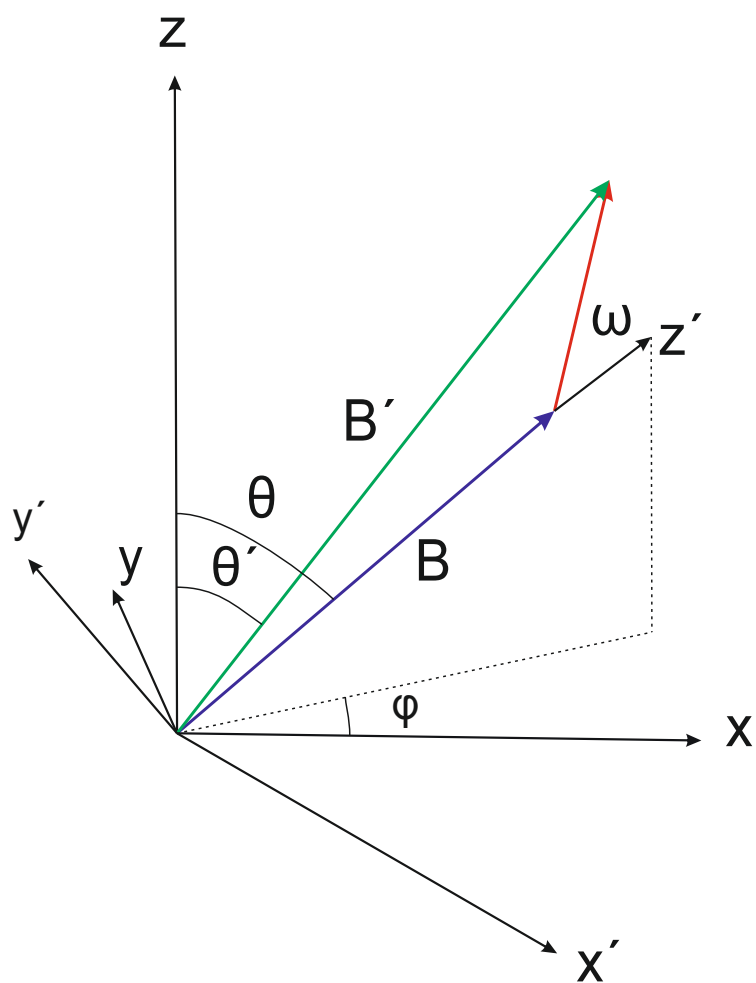
$$|\omega| \ll |B|$$

то

$$|B'| \approx |B| + \omega_z$$

Оператор эволюции имеет вид

Рис. А.1: Система координат для адиабатического случая



$$\begin{pmatrix} \exp(i\phi_1) & 0 \\ 0 & \exp(i\phi_2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Тогда за время эволюции спин вдоль эффективного поля набирает фазу  $\phi_1$ , а против  $\phi_2$ . Рассмотрим спин перпендикулярный полю. Начальное состояние будет иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\gamma_1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\gamma_2) \right) \quad (\text{A.5})$$

Тогда после эволюции

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i[\gamma_1 + \phi_1]) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i[\gamma_2 + \phi_2]) \right) \quad (\text{A.6})$$

Т.е. произойдет поворот спина вокруг эффективного поля на угол  $\phi_1 - \phi_2 = \alpha$ .

Значит, разность фаз спина вдоль поля и против равна углу поворота для спина в перпендикулярной эффективному полю плоскости.

Приобретаемая разность фаз

$$\alpha = \oint B' dt = \oint B dt + \oint \omega_z dt \quad (\text{A.7})$$

Первую часть фазы определим, как динамическую.

Рассмотрим оставшуюся фазу

$$\beta = \alpha - \oint B dt = \oint \omega_z dt = \oint d\varphi \cos \theta = 2\pi - W \quad (\text{A.8})$$

где  $W$  - телесный угол, закрываемый полем.

# Приложение В

## Диаграммная техника

Для спина  $\frac{1}{2}$  в магнитном поле с флуктуирующей частью в виде слабого коротко-коррелированного шума гамильтониан имеет вид

$$H_s = -\frac{1}{2}B(t)\sigma - \frac{1}{2}X\sigma_z + H_{env}(X) \quad (\text{B.1})$$

После перехода в новую вращающуюся систему координат (подбирается так, чтобы в бесшумовом случае средний вектор спина, совершающего циклическую эволюцию, покоился) гамильтониан примет вид

$$H_s = -\frac{1}{2}B(t)\sigma - \frac{1}{2}X\sigma_z + H_{env}(X) \quad (\text{B.2})$$

Гамильтониан взаимодействия

$$H_{int} = -\frac{1}{2}X(\cos\theta\sigma_{z'} - \sin\theta\sigma_{x'}) \quad (\text{B.3})$$

Тогда эволюция матрицы плотности в представлении взаимодействия имеет вид

$$\rho(t) = T_K \left[ \exp\left(-i \int_{t_0}^t H_{int}(t') dt'\right) \rho(t_0) \exp\left(i \int_{t_0}^t H_{int}(t') dt'\right) \right] \quad (\text{B.4})$$

где  $T_K$  - Келдышевское упорядочение (прямое для первой экспоненты и обратное для второй).

Предполагаем, что в некий начальный момент времени (потом будет показано, что нас не интересует в какой именно) момент матрица плотности факторизована.

$$\rho(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_{env}$$

Тогда для спиновой матрицы плотности получим пропагатор по теории возмущений.

Рис. В.1: Уравнение Дайсона для пропагатора

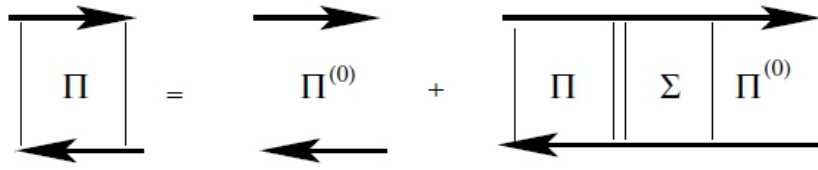
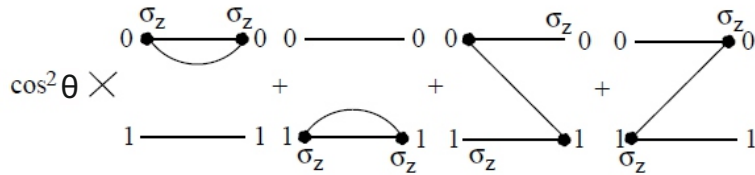


Рис. В.2: Продольный вклад

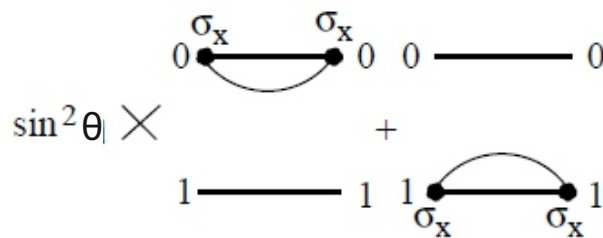


$$\rho_s(t) = \Pi(t, 0) \rho_s(0)$$

В общем случае эволюция матрицы плотности нелокальна (само уравнение зависит от значения в начальный момент). Но в случае слабого короткокоррелированного шума все определяется временами корреляции  $\tau_c$  и дефазировки  $T_1$  и  $T_2$ . В результате можно считать эволюцию Марковской.

Пропагатор можно представить в виде диаграммного ряда. Верхняя линия любой диаграммы содержит вершины от первой упорядоченной по времени экспоненты в уравнении (32), а нижняя - вершины от обратнo-упорядоченной экспоненты (вторая экспонента уравнения (В.4)). Воспользуемся теоремой Вика и представим все средние, как сумму произведений попарных средних. Тогда пропагатор удовлетворяет уравнению Дайсона, а кинетическое уравне-

Рис. В.3: Поперечный вклад





ние примет вид

$$\frac{d}{dt}\rho_s(t) = i[\rho_s(t), H_0] + \int_0^t dt' \sum(t-t')\rho_s(t') \quad (\text{B.5})$$

где  $\sum(t-t')$  - собственно энергетическая часть, определяемая, как сумма неприводимых диаграмм. В данном случае это оператор в пространстве матриц плотности (т.е. тензор четвертого ранга).

Введем оператор Лапласа

$$L_s\rho_s = i[\rho_s, H_0]$$

$$\frac{d}{dt}\rho_s(t) = L_s\rho_s(t) + \int_0^t dt' \sum(t-t')\rho_s(t') \quad (\text{B.6})$$

Если  $\tau_c$  мало по сравнению со временем дефазировки и затухания, то собственно энергетическая часть (первый порядок которой пропорционален коррелятору шума) быстро убывает с ростом  $t-t'$  (зануляется на временах больше  $\tau_c$ ). Тогда во второе слагаемое правой части уравнения (9) можно подставить  $\rho_s(t') \approx \exp(-L_s(t-t'))\rho_s(t)$  (приближение Блоха-Редфилда).

$$\frac{d}{dt}\rho_s(t) = L_s\rho_s(t) + \int_0^\infty d\tau \sum(\tau) \exp(-L_s\tau) \rho_s(t)$$

Введем тензор Блоха-Редфилда

$$\Gamma = \int_0^\infty d\tau \sum(\tau) \exp(-L_s\tau) \quad (\text{B.7})$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\rho_s(t) = L_s\rho_s(t) + \Gamma\rho_s(t) \quad (\text{B.8})$$

Для удобства записи положим  $\sum(t < 0) = 0$ , тогда

$$\Gamma = \int_{-\infty}^\infty d\tau \sum(\tau) \exp(-L_s\tau) \quad (\text{B.9})$$

Так как  $[L_s]_{nn' \leftarrow nn'} = i(E_{n'} - E_n) = i(n' - n)B'$  (обозначим 0 состояние спина по эффективному полю, 1 - против).

В случае слабой диссипации, если динамику матрицы плотности можно считать мало отличной от невозмущенной, спектральный вес  $\rho_{nn'}$  расположен

вблизи частот  $\omega = E_n - E_{n'} = \omega_{nn'}^0$ . Поэтому для недиагональных элементов матрицы плотности можно оставить только соответствующие им компоненты тензора, т.е. в  $\rho_{01}$  основной вклад дает  $\Gamma_{01 \leftarrow 01}$  (приближение вращающейся волны).

Диаграммы первого порядка дадут продольный (содержит  $\sigma_z$ ) и поперечный (содержит  $\sigma_x$ ) вклады

$$\sum_{01 \rightarrow 01} = -\frac{\sin^2 \theta}{2} S(t-t') - \cos^2 \theta S(t-t') \exp(iB'(t-t')) \quad (\text{B.10})$$

$$[L_s]_{01 \leftarrow 01} = iB'$$

Тогда

$$\Gamma_{01 \rightarrow 01} = -\int_{-\infty}^t dt_1 S(t-t_1) * \left[ \cos \theta(t) \cos \theta(t') + \frac{1}{2} \sin \theta(t) \cos \theta(t') \exp\left(-i \int_{t_1}^t B'(\tau) d\tau\right) \right] \quad (\text{B.11})$$

где

$$S(t-t') = \frac{1}{2} (\langle X(t)X(t') \rangle + \langle X(t')X(t) \rangle)$$

симметризованный коррелятор шума. Для каждой диаграммы с членом вида  $\langle X(t), X(t') \rangle$ , есть симметричная диаграмма, т.е. содержащая  $\langle X(t'), X(t) \rangle$ , поэтому в первом исчезающем порядке по шуму поправки содержат только слагаемые линейные по симметризованным корреляторам и не содержат не симметричных членов. Значит, нам не важно коммутируют ли  $\langle X(t), X(t') \rangle$  и  $\langle X(t'), X(t) \rangle$ .

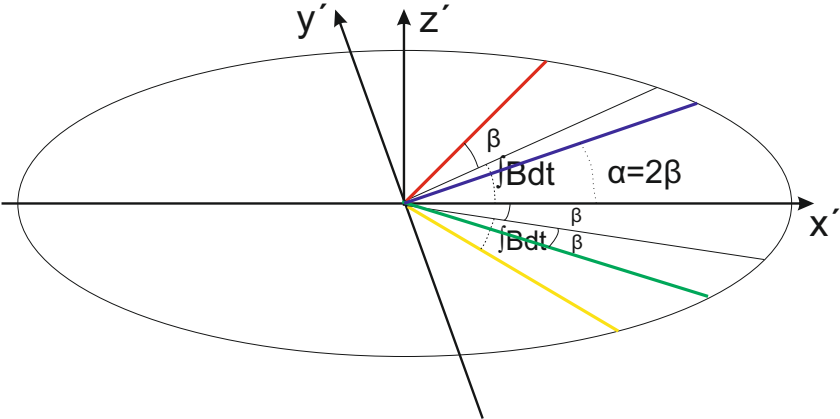
# Приложение С

## Спиновое эхо

В адиабатическом случае есть экспериментальное определение фазы Берри через спиновое эхо. Для этого готовится спин, перпендикулярный магнитному полю. Система координат берется связанной с полем (так же, как в приложении [А]). Считаем, что в начальный момент спин направлен по оси  $x'$ . Тогда по завершении эволюции спина производится его переворот вокруг этой оси при помощи  $\pi$ -импульса. После чего поле меняют по той же траектории в обратном направлении. Затем снова производится переворот. В результате спин поворачивается в плоскости  $x'y'$  на угол равный удвоенной разности геометрической фазы. Это объясняется тем, что за время прямой эволюции спин поворачивается на угол  $\alpha_1 = \beta + \int B dt$  (первое слагаемое - геометрическая фаза, а второе - динамическая). После переворота вокруг оси  $x'$ , угол станет  $\alpha'_1 = -\beta - \int B dt$ . При проведении обратной эволюции динамический вклад будет таким же, а геометрический вклад зависит от направления обхода траектории ( $\int \omega_z dt$ ), поэтому поменяет знак:  $\alpha_2 = -\beta + \int B dt$ . Тогда угол станет  $\alpha' = \alpha'_1 + \alpha_2 = -2\beta$ . Соответственно после переворота  $\alpha = 2\beta$ .

Однако в общем случае направление спина с циклической эволюцией не совпадает с направлением поля (направлен по вектору  $B' = B + \omega$ ). Но тогда если при обратной эволюции поле пройдет ту же траекторию, направление такого спина изменится по сравнению с прямой эволюцией. Это значит, что в таком случае при обратной эволюции происходит вращение вокруг другого направления. Попытки сохранить направление за счет изменения траекторий поля тоже не дадут ничего хорошего. Это изменит динамический вклад, а, значит, не будет достигнуто его обращение в ноль в итоге. Из этих простых рассуждений следует, что методом спинового эха нельзя выделить геометрическую часть фазы в общем случае.

Рис. С.1: Спиновое эхо. Красная линия соответствует повороту после прямой эволюции, желтая - углу после переворота, зеленая - углу после обратной эволюции, а синяя - конечному положению после второго поворота.



# Глава 9

## Список литературы

- [1] M. Berry, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. Lond., vol. 392, p. 45, 1984.
- [2] Y. Aharonov and J. Anandan, Phase change during a cyclic quantum evolution, Phys. Rev. Lett., vol. 58, p. 1593, 1987.
- [3] R. S. Whitney, Y. Makhlin, A. Shnirman, and Y. Gefen, Geometric nature of the environment-induced Berry phase and geometric dephasing, Phys. Rev. Lett., vol. 94, p. 070407, 2005.
- [4] D. Suter, K. Mueller, and A. Pines, Study of the Aharonov-Anandan quantum phase by NMR interferometry, Phys. Rev. Lett., vol. 60, p. 1218, 1988.
- [5] P. J. Leek, J. M. Fink, A. Blais, R. Bianchetti, M. Göppl, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, A. Wallraff, Observation of Berry's Phase in a Solid State Qubit, Science, vol. 318 no. 5858 pp. 1889-1892, 21 December 2007.
- [6] S. Berger, M. Pechal, A. A. Abdumalikov, Jr., C. Eichler, L. Steffen, A. Fedorov, A. Wallraff and S. Filipp, Exploring the Effect of Noise on the Berry Phase, Phys. Rev. A 87, 060303(R), 26 June 2013.
- [7] W. H. Kraan, S. V. Grigoriev and M. T. Rekveldt, Manifestation of the geometric phase in neutron spin-echo experiments, Phys. Rev. A 82, 013619, 14 July 2010.
- [8] Yuriy Makhlin, Gerd Schön, and Alexander Shnirman, Nano-Electronic Realizations of Quantum Bits, Journal of Low Temperature Physics, volume 118, Issue 5-6, pp 751-763, March 2000.
- [9] A. Tomita and R. Y. Chiao, Observation of Berry's topological phase by use of an optical ber, Phys. Rev. Lett., vol. 57, p. 937, 1986.

- [10] R. Tycko, Adiabatic rotational splitting and Berry's phase in nuclear quadrupole resonance, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 2281, 1987.
- [11] D. Suter, G. C. Chingas, R. A. Harris, and A. Pines, Berry's phase in magnetic resonance, *Mol. Phys.*, vol. 61, p. 1327, 1987.
- [12] J. A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, and G. Castagnoli, Geometric quantum computation with NMR, *Nature*, vol. 403, p. 869, 2000.
- [13] Schoeller, H. and G. Schön, Mesoscopic quantum transport: resonant tunneling in the presence of strong Coulomb interaction, *Phys. Rev. B* 50, 18436, 1994.
- [14] Yuriy Makhlin, Gerd Schön, Alexander Shnirman, Dissipation in Josephson qubits, *New Directions in Mesoscopic Physics (Towards Nanoscience) NATO Science Series*, volume 125, pp 197-224, 2003.
- [15] Gabriele De Chiara and G. Massimo Palma, Berry phase for a spin  $1/2$  in a classical fluctuating field, *Phys. Rev. Lett.* 91, 090404, 2003.