

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Отличие статистики излучения случайного
волоконного лазера от гауссова вида»
(Дипломная работа бакалавра)

студента 222 группы
Огородников Л.Л.
Научный руководитель:
чл.-корр. РАН, Лебедев В.В.
Рецензент:
д.ф.-м.н., доц., Колоколов И.В.

Черноголовка 2016

Содержание

1	Введение	2
2	Принцип работы лазера	4
2.1	Описание работы лазера	4
2.2	Эффект вынужденного комбинационного рассеяния света	6
2.3	Рэлеевское рассеяние назад	8
3	Волновая кинетическая теория	10
3.1	Распространение света	10
3.1.1	Экспериментальная схема лазера и уравнение на амплитуду волны . . .	10
3.1.2	Балансные уравнения	11
3.1.3	Влияние рэлеевского рассеяния и спонтанной эмиссии	13
3.2	Ширина спектра в линейном режиме	15
3.3	Нелинейный режим	16
4	Статистика излучения	21
4.1	Отличие функции распределения от гауссовой	21
4.2	Первый порядок по параметру нелинейности	22
4.3	Второй порядок по параметру нелинейности	23
4.4	Предел нулевого усиления	25
5	Заключение	26
6	Список литературы	27

1 Введение

В последнее время большой интерес вызывают исследования в активно развивающейся области физики, связанной со случайными волоконными лазерами. Их создание и развитие имеют большое значение для различных телекоммуникационных средств связи и распределенных сенсорных систем [1].

Принцип работы случайного волоконного лазера с распределенной обратной связью основан на эффектах вынужденного комбинационного рассеяния, обеспечивающего накачку, и рэлеевского рассеяния света на естественных неоднородностях показателя преломления, обеспечивающего обратную связь. В данном лазере в качестве активной среды используют волоконный активный элемент (например, фосфоросиликат), а механизм обратной связи (так называемая случайно распределенная обратная связь) определяется рэлеевским рассеянием [1],[2],[3]. Данные особенности конструкции приводят к заметным преимуществам, связанным со снятием принципиальных ограничений по дальности трансляции информации, возможностью простого перестроения по частоте, достаточно высоким качеством пучка по сравнению с обычными случайными лазерами [4], отсутствием технических трудностей при юстировке зеркал и т.п.

В [5] построена волновая кинетическая теория для активных циклических слабонелинейных волновых систем, которая может быть использована для описания работы случайного волоконного лазера. В частности, были установлены спектры излучения при разных мощностях порога генерации, зависимость интенсивности излучения от частоты и зависимость ширины спектра от выходной мощности, которые хорошо описывают имеющиеся экспериментальные результаты [5].

Одним из неисследованных вопросов, связанных со случайным волоконным лазером, является статистика излучения данного лазера. В [5] было использовано предположение о том, что функция распределения напряженности выходного излучения имеет гауссов вид. Однако, в силу нелинейности процессов, а именно, квадратичной зависимости показателя преломления от напряженности электрического поля (эффект Керра), имеющих место в механизме формирования излучения в данном лазере, функция распределения напряженности может иметь отличие от гауссова вида. Значимость этого отличия можно определить путем использования теоремы Вика, устанавливающей связь между корреляционным моментом второго порядка действительной случайной величины X и моментами более высоких порядков в случае, если распределение случайной величины гауссово : $\langle X^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle X^2 \rangle^n, n \in \mathbb{N}$.

Целью данной работы является определение отличия статистики излучения данного лазера от гауссовой. Поставленная задача решается путем вычисления корреляционного момента четвертого порядка $I^{(4)}$ поля ψ ($I^{(4)} = \langle |\psi|^4 \rangle$) и сравнения его с квадратом интенсив-

ности выходного излучения I ($I = \langle |\psi|^2 \rangle$). Решение поставленной задачи позволит оценить статистику излучения лазера, что может иметь большое значение для различных практических применений.

Принципы работы случайного волоконного лазера с распределенной обратной связью, механизмы накачки и обратной связи, а также описание экспериментальной схемы приведены в первом разделе. Во втором разделе описывается волновая кинетическая теория, изложенная в работе [5], а также приводятся некоторые предсказания данной теории, в частности, спектр излучения, а также зависимость ширины спектра от мощности выходного излучения. В третьем разделе производится вычисление корреляционного момента напряженности поля четвертого порядка, а также сравнение полученной величины с квадратом интенсивности и анализ полученных результатов. В заключении делается вывод о значимости отличия статистики излучения случайного волоконного лазера от гауссовой.

2 Принцип работы лазера

В данном разделе описываются физические явления, имеющие место в случайном волоконном лазере с распределенной обратной связью, а также объясняется принцип работы лазера.

2.1 Описание работы лазера

Лазер состоит из оптически активной среды, поддерживаемой механизмом накачки, и оптического резонатора. Активная среда может заполнять весь резонатор или какую-то его часть. Накачка необходима для того, чтобы энергия внешнего излучения перешла в энергию активной среды. При этом в среде большая часть атомов будет находиться в возбужденном состоянии, за счет чего энергия возбуждений активной среды передаётся электромагнитной волне на частоте генерации. Резонатор нужен для поддержания генерируемых лазером мод и обеспечения обратной связи.

Рассмотрим простейшую схему описания лазера, представляющего собой резонатор Фабри-Перо.

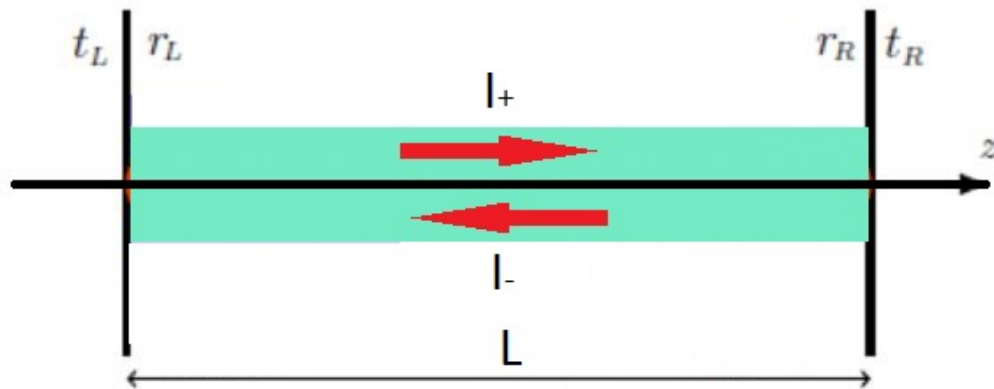


Рис. 1: Принципиальная схема лазера

Резонатор представляет собой длинный образец с хорошо отражающими боковыми стенками (обычно зеркала с коэффициентом отражения, близким к 1). Внутри резонатора находится оптически активная среда. Направим ось z вдоль распространения моды генерации в резонаторе. Пусть амплитуды поля волн, распространяющихся соответственно вправо и влево, равны $E_+(z, t)$ и $E_-(z, t)$. Отвечающие этим полям интенсивности равны I_+ и I_- . Коэффициенты отражения от правого и левого зеркал резонатора r_R и r_L , коэффициенты прохождения через них t_R и t_L соответственно. Граничные условия примут вид:

$$E_+(0) = r_L E_-(0), E_-(L) = r_R E_+(L) \quad (1)$$

$$I_+(0) = |r_L|^2 I_-(0), I_-(L) = |r_R|^2 I_+(L) \quad (2)$$

Помимо накачки, в активной среде происходит поглощение с некоторым коэффициентом α . Пусть g - коэффициент усиления, который описывает влияние накачки. В стационарном режиме уравнение на интенсивность:

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial z} = \pm(g - \alpha)I_{\pm} \quad (3)$$

где \pm означает направление распространения волны вдоль и против оси z соответственно.

В волоконном лазере свет распространяется по оптоволокну. Аксиально-симметричное оптическое волокно представляет собой протяженный коаксиальный волновод, состоящий из сердцевины и обкладки [2].

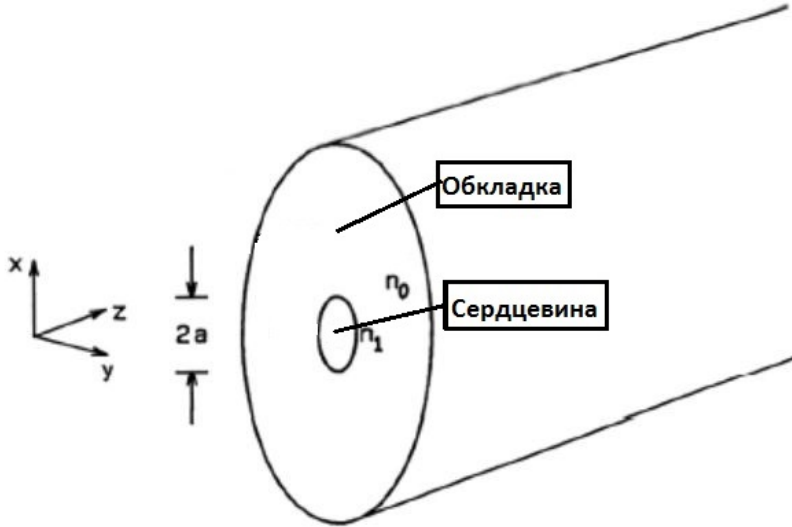


Рис. 2: Устройство оптического волокна

В случае одномодового оптоволокну, которое широко используется в промышленности, радиус сердцевины $a = 9\text{мкм}$, радиус обкладки 125мкм . Коэффициенты преломления сердцевины и обкладки равны $1,48$ и $1,475$ соответственно. Материал сердцевины оптически более плотный, дабы за счет явления внутреннего отражения уменьшить долю излучения, выходящего из волокна.

Рассмотрим распространение по оптическому волокну волнового пакета со слабой монохроматичностью. Пусть его несущая частота ω_0 , несущий волновой вектор \vec{k}_0 . Тогда

условие монохроматичности примет вид: $\Delta\omega \ll \omega_0, \Delta k \ll k_0$. Иными словами, напряженность поля в частотном представлении имеет узкие пики вблизи значений (ω_0, \vec{k}_0) и $(-\omega_0, -\vec{k}_0)$. Тогда фурье-образ огибающей сигнала $\Phi_{\omega, \vec{k}}$ имеет простую связь с напряженностью поля: $\vec{E}_{\omega, \vec{k}} = \Phi_{\omega-\omega_0, \vec{k}-\vec{k}_0} + \Phi_{\omega+\omega_0, \vec{k}+\vec{k}_0}^*$. Свет распространяется по материалу оптоволокна, диэлектрическая проницаемость которого имеет конечную дисперсию. Запишем волновое уравнение на фурье-образ напряженности поля $E(t, z)$:

$$(k^2 - \beta^2(\omega))E_{\omega, k} = f_{\omega, k} \quad (4)$$

где $\beta^2(\omega) = \epsilon(\omega)\omega^2$, $f_{\omega, \vec{k}}$ - фурье-образ силы, описывающей влияние внешнего источника излучения. Волновое уравнение на огибающую будет иметь следующий вид:

$$[(k_0 - i\partial_z)^2 - \beta^2(\omega_0 + i\partial_t)] \Phi(t, z) = f_+(t, z) \quad (5)$$

где $f = 2Re [f_+(t, z)e^{-i\omega_0 t + ik_0 z}]$. Как известно, общим решением обычного однородного волнового уравнения является произвольная функция $\Phi(t, z) = \Phi(z - v_g t)$. В связи с этим для описания эволюции волнового пакета удобно переписать уравнение (3) в запаздывающей лабораторной системе координат t_{ret}, z_{new} :

$$z_{new} = z, t_{ret} = t - z_{new}/v_g$$

Отметим, что время в такой системе отсчета отсчитывается от момента, когда приемник регистрирует сигнал, идущий с групповой скоростью v_g . Обозначим $\beta_2 = \frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2}$. Во втором порядке малости по ширине волнового пакета уравнение на огибающую примет вид:

$$\left(-2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_{new}} + k_0 \beta_2 \left(\frac{\partial}{\partial t_{ret}} \right)^2 \right) \Phi = f_+ \quad (6)$$

Записанные в таком виде уравнения, описывающие распространение волны уже в случайном волоконном лазере, будут рассматриваться далее. Они будут модифицированы с учетом различных физических процессов, имеющих место в данном лазере. Об одном из этих явлений пойдет речь в следующем подразделе.

2.2 Эффект вынужденного комбинационного рассеяния света

Эффект вынужденного комбинационного рассеяния заключается в неупругом рассеянии фотонов на молекулах. Данное явление связано с нелинейной зависимостью электрической индукции от напряженности поля [6]. Физическое проявление эффекта заключается в следующем. На образец падает волна накачки с частотой ω_p . Происходит испускание фотонов с энергией $\hbar\omega_s$, т.е. излучается волна на частоте генерации ω_s , среде передается энергия $\hbar(\omega_p - \omega_s)$, а поле излучаемых фотонов усиливается.

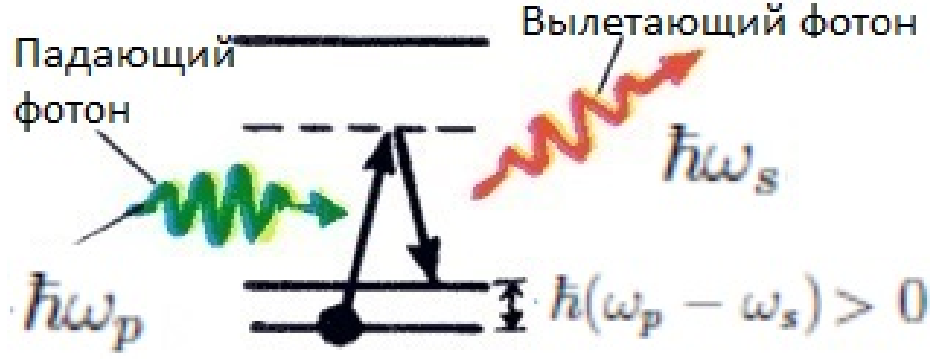


Рис. 3: Вынужденное комбинационное рассеяние

Пусть зависимость электростатической индукции от напряженности поля кубическая в изотропной среде:

$$D^{(3)i}(t) = \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 f_{i,klm} \cdot \\ \cdot [E^{*k}(t - \tau_1)E^l(t - \tau_2)E^m(t - \tau_3) + E^k(t - \tau_1)E^{*l}(t - \tau_2)E^m(t - \tau_3) + \\ + E^k(t - \tau_1)E^l(t - \tau_2)E^{*m}(t - \tau_3) + c.c.]$$

Обозначим $\epsilon_{i,klm}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 e^{i(\Omega_1\tau_1 + \Omega_2\tau_2 + \Omega_3\tau_3)} f_{i,klm}$ - нелинейная диэлектрическая проницаемость.

Вклады в суммарную напряженность поля дают волна накачки и волна генерации: $\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_s$, $\vec{E}_s = \vec{E}_{s,0} e^{-i\omega_s t + i\vec{k}_s \vec{r}}$, $\vec{E}_p = \vec{E}_{p,0} e^{-i\omega_p t + i\vec{k}_p \vec{r}}$.

Интерес представляет определить нелинейный вклад в волну генерации. Подставим выражения для суммарного поля в выражение для индукции и перемножим. Получим, что в изотропной нелинейной среде индукция \vec{D}_s на частоте ω_s дается выражением

$$\vec{D}_s = \epsilon_s \vec{E}_s + \alpha_s (\vec{E}_p, \vec{E}_p^*) \vec{E}_s + \beta_s (\vec{E}_s, \vec{E}_p^*) \vec{E}_p + \delta_s (\vec{E}_p, \vec{E}_s) \vec{E}_p^* + \gamma_s (\vec{E}_s, \vec{E}_s^*) \vec{E}_s \quad (7)$$

Слагаемые с коэффициентами α_s , β_s и δ_s отвечают эффекту вынужденного комбинационного рассеяния, слагаемое $\gamma_s |\vec{E}_s|^2 \vec{E}_s$ - эффекту Керра. Эффект вынужденного комбинационного рассеяния заключен в проницаемости $\epsilon_{i,klm}(\omega_s, -\omega_p, \omega_p)$, дающей вклад в индукцию на частоте генерации ω_s , что соответствует поглощению фотона с частотой ω_p и испусканию фотона с частотой ω_s . В эффекте Керра не происходит изменения частот, он описывается проницаемостью с частотами $\epsilon_{i,klm}(\omega_s, -\omega_s, \omega_s)$. В нашей задаче имеет место распространение сигнала только в направлении оси z . Поэтому вклад от слагаемых с коэффициентами α_s , β_s и δ_s в проекции на ось z можно записать в виде $g_R |\vec{E}_p|^2 E_s = g_R P(z) E_s$, где $P(z)$ - интенсивность волны накачки. Заметим, что индукция поля на частоте генерации содержится в уравнении

на огибающую типа (4). При этом, как описано выше, она линейно зависит от интенсивности волны накачки. Покажем, что в данном явлении имеет место усиление волны генерации.

Пусть среда может поглощать частоты в диапазоне, содержащем $\omega_p - \omega_s$, но не содержащем $\omega_p + \omega_s$. Диссипация в среде происходит только из-за превращения фотонов больших частот в фотоны меньших частот с отдачей избытка энергии активной среде: рождается элементарное возбуждение, например, фонон. Увеличение энергии среды определяется из закона сохранения энергии: $\mathcal{E}_p + \hbar\omega_p = \mathcal{E}_s + \hbar\omega_s$. В частности, при $\omega_p > \omega_s$ происходит усиление волны генерации с частотой ω_s волной накачки. Усредненную по периоду энергию, получаемую в единицу времени полем \vec{E}_s , обозначим $\frac{d\bar{U}_s}{dt}$, аналогично для волны накачки: $\frac{d\bar{U}_p}{dt}$. На каждый рождающийся фотон ω_s приходится один уничтожающийся ω_p , т.е.

$$\frac{1}{\omega_p} \frac{d\bar{U}_p}{dt} = -\frac{1}{\omega_s} \frac{d\bar{U}_s}{dt} \quad (8)$$

Диссипация энергии:

$$Q = -\frac{d\bar{U}_p}{dt} - \frac{d\bar{U}_s}{dt} = \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_s} \frac{d\bar{U}_s}{dt}$$

При данном соотношении частот при условии $Q > 0$ (диссипация энергии в среду) автоматически получается $\frac{d\bar{U}_s}{dt} > 0$, т.е. происходит усиление волны с частотой генерации ω_s . Таким образом, механизмом накачки является именно явление вынужденного комбинационного рассеяния.

2.3 Рэлеевское рассеяние назад

В отличие от вынужденного комбинационного рассеяния, в котором происходит существенное изменение частоты, рэлеевское рассеяние не связано с каким-либо изменением внутреннего состояния молекулы, так что при таком рассеянии не происходит изменения частоты. Рэлеевское рассеяние в данном лазере связано с флуктуациями плотности материала волокна, так что оно имеет место по всей длине волокна. За счет этого рассеяния происходят потери энергии в лазере. При этом малая часть света отражается в противоположном направлении, за счет чего и обеспечивается обратная связь.

В каждой точке материала можно ввести коэффициент рассеяния назад $r(z)$. Т.к. материал волокна является неупорядоченной средой, то коэффициент рассеяния является случайной величиной, которая определяется замороженным беспорядком. Нас интересуют макроскопические величины, а корреляционная функция коэффициента рассеяния имеет микроскопический масштаб, поэтому можно считать, что $\langle r(z)r^*(z') \rangle = D\delta(z - z')$. Для данного лазера справедливо соотношение $\frac{D}{\alpha} \ll 1$. Малость этого отношения объясняется тем, что рассеяние происходит во всех направлениях, и лишь малая часть рассеивается в направлении азимутального угла, близкого к π . Числовое значение данного отношения определяется

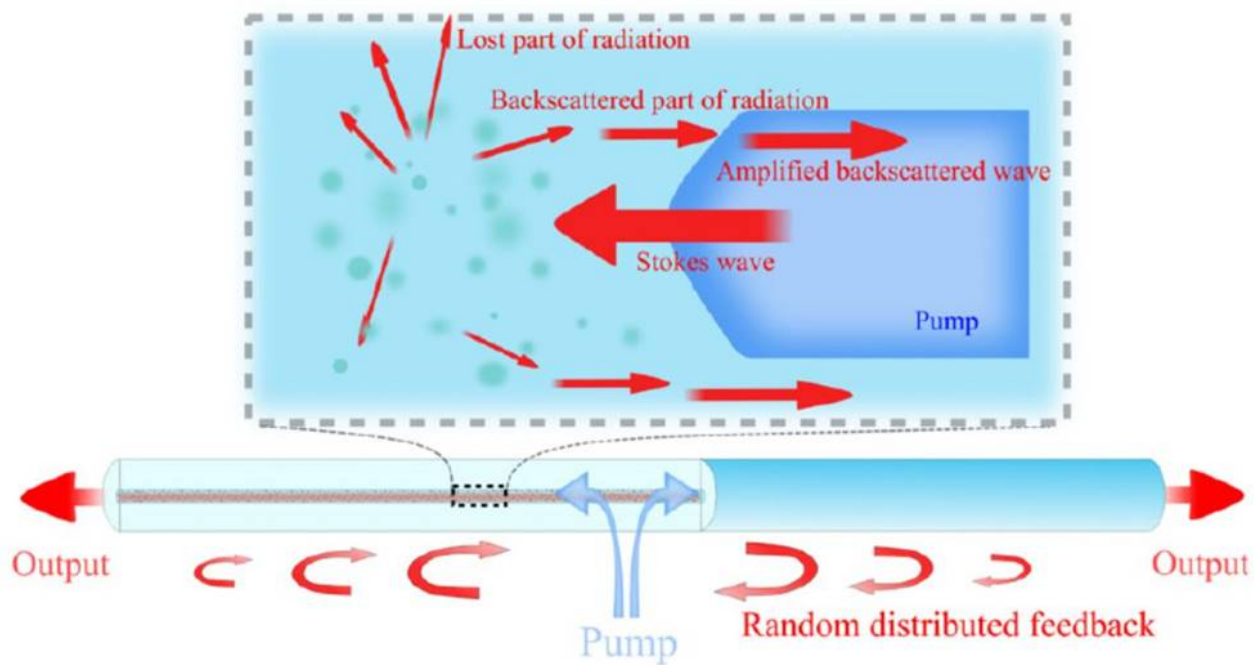


Рис. 4: Рэлеевское рассеяние [1]

конкретными параметрами экспериментальной установки. В третьем разделе будет подробно исследован вопрос, на каких масштабах существенно рэлеевское рассеяние назад в случайном волоконном лазере.

Итак, в данном разделе изложены основные принципы работы лазера, а также разобраны основные явления, связанные с работой случайного волоконного лазера. Более подробное рассмотрение этих явлений применительно к конкретной реализации лазера приведено в следующем разделе.

3 Волновая кинетическая теория

3.1 Распространение света

3.1.1 Экспериментальная схема лазера и уравнение на амплитуду волны

Рассмотрим пример экспериментальной реализации случайного волоконного лазера.

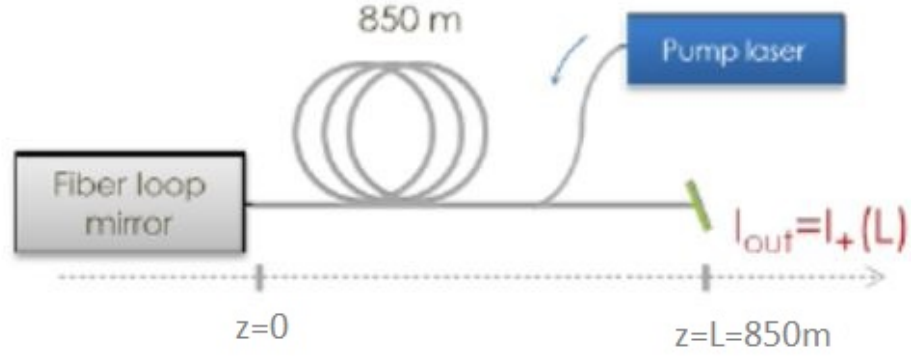


Рис. 5: Схема эксперимента [5]

Волна накачки, имеющая частоту накачки ω_p , подается на один из концов волокна ($z = L$). Свет распространяется по волокну длиной $L = 850\text{ м}$ до другого конца $z = 0$, где волна отражается от зеркала и распространяется в обратном направлении. По всей длине волокна волна усиливается за счет вынужденного комбинационного рассеяния, при котором происходит излучение фотонов, формирующих волну генерации с частотой ω_s . По всей длине лазера также имеет место рэлеевское рассеяние волны на естественных неоднородностях материала волокна. Данный эффект определяет потери энергии случайного волоконного лазера. При этом малая часть света рассеивается в обратном направлении, за счет чего и обеспечивается обратная связь. Когда свет доходит до конца $z = L$, большая часть сигнала регистрируется, а малая часть рассеивается назад и продолжает циклически распространяться по волокну от одного конца до другого и обратно.

Пусть A_+ амплитуда волны генерации, движущейся вправо, A_- амплитуда волны, движущейся влево. Уравнения на амплитуды:

$$\left[n\partial_t + \left(\partial_z - \frac{1}{2}(g_R P(z) + \frac{g_R}{\Delta_g^2} P(z)\partial_t^2 - \alpha) \right) \right] A_+ = \frac{i}{2}\beta_2\partial_t^2 A_+ + i\frac{\gamma}{2}A_+|A_+|^2 + r(z)A_- + \xi_+ \quad (9)$$

$$\left[n\partial_t - \left(\partial_z - \frac{1}{2}(g_R P(z) + \frac{g_R}{\Delta_g^2} P(z)\partial_t^2 - \alpha) \right) \right] A_- = \frac{i}{2}\beta_2\partial_t^2 A_- + i\frac{\gamma}{2}A_-|A_-|^2 + r^*(z)A_+ + \xi_- \quad (10)$$

Здесь $\hat{g} = g_R P(z) + \frac{g_R}{\Delta_g^2} P(z)\partial_t^2$ - усиление волны, $P(z)$ - мощность волны накачки, α - линейный коэффициент потерь за счет упругого рассеяния, $r(z)$ -коэффициент рэлеевского рассеяния

назад, ξ - случайный шум за счет спонтанной эмиссии, β_2 - коэффициент дисперсии, γ - коэффициент керровской нелинейности.

Отметим, что керровская нелинейность и комбинационное усиление связаны с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от напряженности поля. Коэффициент усиления линейно зависит от мощности накачки. Согласно предыдущему разделу, эта зависимость связана с эффектом вынужденного комбинационном рассеяния. Дисперсия коэффициента усиления мала, так что при рассмотрении ряда эффектов ею можно пренебречь: $\hat{g} \approx g_R P(z)$.

Нас интересует предел сильной дисперсии, т.е. $\frac{g_R P(z)}{\beta_2 \omega^2} \ll 1$. При этом интегральное усиление является достаточно сильным, т.е. $g_R \int_0^L dz P(z) \gg 1$. Нелинейный член полагаем малым по сравнению с усилением и с дисперсионным членом, т.е. $\frac{\gamma I}{\beta_2 \omega^2} \ll 1$, $\frac{\gamma I}{g_R P} \ll 1$.

3.1.2 Балансные уравнения

При условии малости дисперсии коэффициента усиления, т.е. при условии узости спектра по сравнению с Δ_g , а также без учета спонтанной эмиссии из уравнений (9) и (10) можно получить стационарные балансные уравнения на интенсивность волны генерации частоты ω_s :

$$\partial_z I_+ = g_R P(z) I_+ - \alpha I_+ + D I_- \quad (11)$$

$$-\partial_z I_- = g_R P(z) I_- - \alpha I_- + D I_+ \quad (12)$$

Коэффициент рэлеевского рассеяния короткокоррелирован: $\langle r(z) r^*(z') \rangle = D \delta(z - z')$. Отметим, что $D \ll \alpha$. В силу конструкции установки волна накачки распространяется только в отрицательном направлении.

Балансное уравнение на мощность волны накачки частоты ω_p :

$$-\partial_z P = -\frac{\omega_p}{\omega_s} g_R I P - \alpha_p P \quad (13)$$

α_p - коэффициент потерь волны накачки. Сравним уравнения (12) и (13). В членах, описывающих усиление, между ними есть отличие в $-\frac{\omega_p}{\omega_s}$ раз. Это отношение возникает из условия (8) равенства числа поглощенных и излученных фотонов. Введем обозначения для интенсивности волны накачки на входе и интенсивности волны генерации на выходе:

$$P(L) = P_{in} \quad (14)$$

$$I_+(L) = I_{out} \quad (15)$$

Для моды генерации выполняется условие отсутствия волны на частоте генерации в месте, где подается сигнал накачки, т.е.

$$I_-(L) = 0 \quad (16)$$

Т.к. на конце $z = 0$ стоит хорошо отражающее зеркало, то

$$I_+(0) = I_-(0) \quad (17)$$

С учетом вида балансных уравнений и граничных условий на интенсивность несущей волны можно считать $I_- \ll I_+$. Тогда $I \approx I_+$:

$$I_-(z) = D \int_z^L dz_1 I(z_1) \quad (18)$$

Определим сначала порог генерации. Мощность накачки определяется только потерями в этом случае:

$$P(z) = P_{in} e^{\alpha_p(z-L)} \quad (19)$$

Тогда можно найти интенсивность волны, распространяющейся вправо:

$$I(z) = I_-(0) \exp \left[\frac{\exp(-\alpha_p L) [\exp(-\alpha_p z) - 1]}{\alpha_p} g_R P_{in} - \alpha z \right] \quad (20)$$

Порог генерации определяется из условия

$$1 = D \int_0^L dz_1 \exp \left[2 \frac{\exp(-\alpha_p L) [\exp(-\alpha_p z) - 1]}{\alpha_p} g_R P_{in} - 2\alpha z \right] \quad (21)$$

В пределе $D \ll \alpha$ можно получить приближенные уравнения, описывающие генерацию:

$$P_{in} = \frac{1}{g_R L_{eff}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2g_R P_{in}}{D} \right) + \alpha_p L \right], L_{eff} = \frac{1 - \exp(-\alpha_p L)}{\alpha_p} \quad (22)$$

Случайный волоконный лазер работает в режиме сильного превышения порога генерации, $g_R P \gg \alpha$. Чтобы проинтегрировать систему уравнений (11),(13), заменим $\alpha \rightarrow -\alpha_p$. Тогда решение системы примет вид:

$$I = \frac{C \exp(\alpha_p(z-L))}{\frac{P_{in}}{P_{th}} \exp(C g_R P_{th} z_{eff}) - \frac{\omega_p I_{out}}{\omega_s P_{th}}} I_{out} \quad (23)$$

$$P = \frac{C \exp(\alpha(z-L))}{\frac{P_{in}}{P_{th}} - \exp(-C g_R P_{th} z_{eff}) \frac{\omega_p I_{out}}{\omega_s P_{th}}} P_{in} \quad (24)$$

где

$$C = \frac{P_{in}}{P_{th}} - \frac{\omega_p I_{out}}{\omega_s P_{th}}, z_{eff} = \frac{1 - \exp(-\alpha_p(z-L))}{\alpha_p} \quad (25)$$

Константу C можно найти, подставив решение в уравнение (23). В пределе $I(z) \ll P(z)$, учитывая условие $g_R P_{th} L_{eff} \ll 1$, находим:

$$P_{in} = P_{th} + \frac{\omega_p}{\omega_s} I_{out}, C = 1 \quad (26)$$

Итак, решение балансных уравнений:

$$I(z) = \frac{\exp(\alpha_p(z - L))I_{out}}{\frac{P_{in}}{P_{th}} \exp(g_R P_{th} z_{eff}) - \frac{\omega_p I_{out}}{\omega_s P_{th}}} \quad (27)$$

$$P(z) = \frac{\exp(\alpha(z - L))P_{in}}{\frac{P_{in}}{P_{th}} - \frac{\omega_p I_{out}}{\omega_s P_{th}} \exp(-g_R P_{th} z_{eff})} \quad (28)$$

Здесь $P_{th} = P_{in} - \frac{\omega_p}{\omega_s} I_{out}$, $z_{eff} = \frac{1 - \exp(-\alpha_p(L - z))}{\alpha_p}$. На рисунке ниже приведены качественные графики решений.

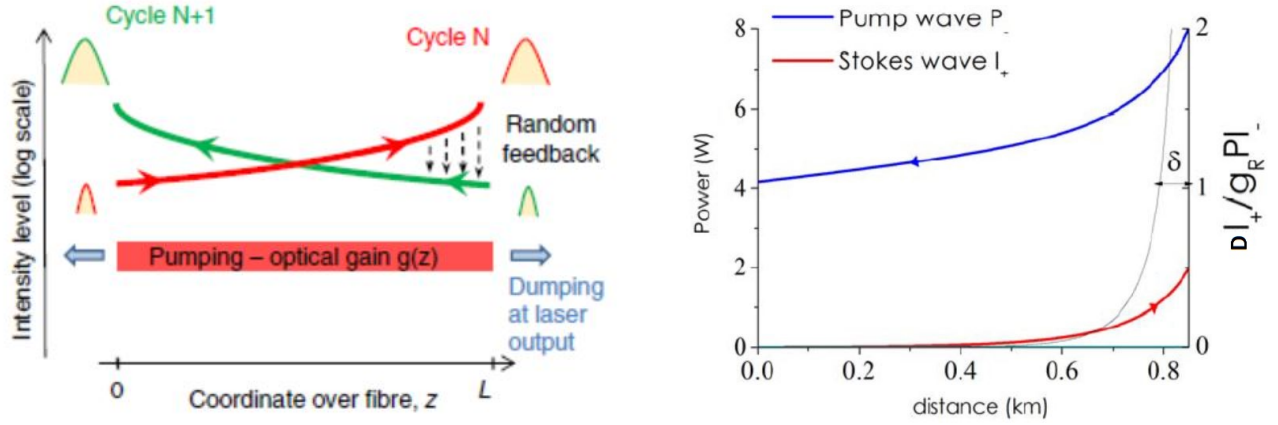


Рис. 6: Зависимость интенсивностей волн накачки и генерации от координаты [5]

Наиболее существенные значения I и P достигаются вблизи конца $z = L$ на масштабе $L_{eff} = \frac{1 - \exp(\alpha_p L)}{\alpha_p}$.

3.1.3 Влияние рэлеевского рассеяния и спонтанной эмиссии

Для начала важно определить, где будет наиболее существенно рэлеевское рассеяние. Здесь уже нужно учитывать дисперсию коэффициента усиления. В частотном представлении он имеет вид: $g(\omega, z) = g_R(1 - \frac{\omega^2}{\Delta_g^2})P(z)$. Здесь имеет место линейная динамика в силу малости амплитуды волны, так что нелинейным членом можно пренебречь. Амплитуда волны, распространяющейся вправо, определяется рэлеевским рассеянием волны, распространявшейся до этого влево, по всей длине волокна :

$$A_\omega(0) = \int_0^L dz r(z) A_\omega(z) \exp \left[-in\omega z + \frac{\int_0^z dz' g(\omega, z') - z(\alpha - i\beta_2 \omega^2)}{2} \right] \quad (29)$$

Этот интеграл набирается вблизи конца $z = L$ на масштабе $\delta_r \sim \frac{1}{g_R P_{in}}$, который много меньше нелинейной длины $\frac{1}{\gamma_I}$. С учетом этого,

$$A_\omega(z) \approx A_\omega(L) \exp \left[-in\omega z + \frac{\int_z^L dz' g(\omega, z') - (L - z)(\alpha - i\beta_2 \omega^2)}{2} \right] \quad (30)$$

Отсюда находим, что $A_\omega(0) = R(\omega)A_\omega(L)$, $R(\omega)$ - эффективный коэффициент отражения. Из уравнений (29), (30) можно найти этот коэффициент в явном виде:

$$R(\omega) = \exp \left[\frac{\int_0^L dz ((i\beta_2\omega^2 - \alpha) - g(\omega, z))}{2} \right] \int_0^L dz r(z) \exp \left[-2in\omega z + \int_0^z dz' g(\omega, z') - z(\alpha - i\beta_2\omega^2) \right] \quad (31)$$

Можно считать, что происходит не рассеяние на протяжении всего волокна, а отражение от конца $z = L$ с таким коэффициентом отражения. При этом корреляционная функция коэффициента отражения

$$\langle R(\omega)R^*(\omega') \rangle = \frac{D}{2(g_R P_{in} - in(\omega - \omega'))} \exp\left(\int_0^L dz' g(\omega, z') - \alpha L\right) \quad (32)$$

Видно, что коэффициент отражения скоррелирован на частотах, отличающихся не более чем на $\delta\omega \sim \frac{g_R P_{in}}{n}$. Одночастотный коррелятор этого коэффициента:

$$\langle R(\omega)R^*(\omega) \rangle = \frac{D}{2g_R P_{in}} \exp\left(\int_0^L dz' g(\omega, z') - \alpha L\right) \ll 1 \quad (33)$$

Теперь учтем процессы спонтанной эмиссии. Балансные уравнения примут вид:

$$\partial_z I_{+, \omega} = g(\omega, z)I_{+, \omega} - \alpha I_{+, \omega} + DI_{-, \omega} + 2g(\omega, z)\hbar\omega \quad (34)$$

$$-\partial_z I_{-, \omega} = g(\omega, z)I_{-, \omega} - \alpha I_{-, \omega} + DI_{+, \omega} + 2g(\omega, z)\hbar\omega \quad (35)$$

Спонтанная эмиссия будет существенно влиять только на волну, распространяющуюся влево, т.к. амплитуда сигнала, распространяющегося вправо, вблизи конца велика по сравнению с величиной интенсивности спонтанной эмиссии. В уравнении (34) можно пренебречь слагаемым с коэффициентом рассеяния и со спонтанной эмиссией.

Её вклад в интенсивность этой волны:

$$I_\omega(0) = \langle R(\omega)R^*(\omega) \rangle I_\omega(L) + \delta I_{\omega, se},$$

где

$$\delta I_{\omega, se} = 2\hbar\omega \int_0^L dz g(\omega, z) \exp\left[\int_0^z dz' (g(\omega, z') - \alpha)\right] \quad (36)$$

В пределе $g(\omega, z) \gg \alpha$

$$\delta I_{\omega, se} \approx 2\hbar\omega \left(1 + \frac{\alpha}{P_{in}}\right) \exp\left[\int_0^L dz g(\omega, z) - \alpha L\right] \quad (37)$$

3.2 Ширина спектра в линейном режиме

Важным вопросом, который представляет интерес как с практической, так и с теоретической точки зрения, и который достаточно легко можно проверить экспериментально, является определение спектра выходного излучения случайного волоконного лазера. В ширину спектра дают вклад только два процесса: спонтанная эмиссия и нелинейность Керра. Найдем вклад в ширину спектра от процесса спонтанной эмиссии. Для этой цели пренебрежем нелинейным членом. Будем решать систему уравнений на интенсивность волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях, в линейном режиме с учетом граничных условий. Ширина спектра находится из решения данной системы только численно.

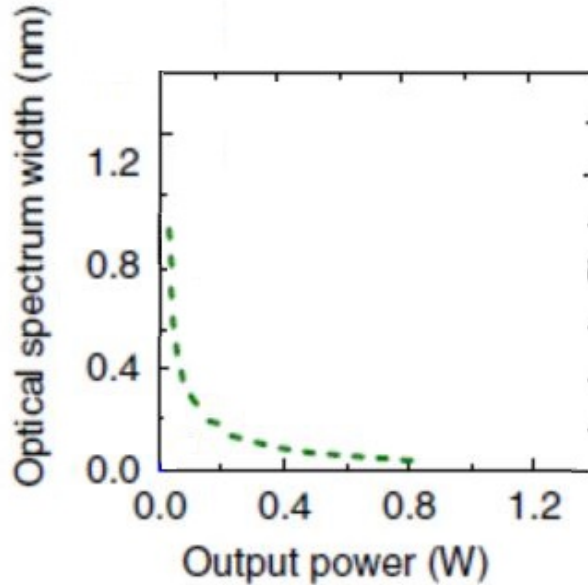


Рис. 7: График зависимости ширины спектра от интенсивности в линейном режиме [5]

При малых уровнях интенсивности ширина спектра обратно пропорциональна мощности выходного излучения

$$\Delta_{se} \propto \frac{1}{I_{out}}, \quad (38)$$

что находится в согласии с известной зависимостью ширины спектра лазерной генерации от выходной интенсивности [7]:

$$\Delta_{ST} = \frac{\hbar\omega_0\Delta_g^2}{|\ln(R)|} \frac{1}{I_{out}}, \quad (39)$$

В работе [7], однако, коэффициент усиления полагался независимым от координаты, а коэффициенты отражения от обеих стенок резонатора близкими к 1. Вклад в ширину спектра за

счет нелинейности будет посчитан в следующем подразделе. Оказывается, при достаточно больших уровнях интенсивности он является определяющим.

3.3 Нелинейный режим

С учетом малости коэффициента рэлеевского рассеяния, а также малости вклада процессов спонтанной эмиссии в ширину спектра, запишем упрощенное уравнение на амплитуду поля:

$$i(\partial_z - \widehat{g})\psi = \beta_2 \partial_t^2 \psi + \frac{\gamma}{2} \psi |\psi|^2 + \xi \quad (40)$$

Здесь $\widehat{g} = g_R P(z)(1 - \frac{\omega^2}{\Delta_g^2}) - \alpha$, ξ - короткокоррелированный гауссов шум. Граничные условия

$$\psi_+(0, t) = \widehat{R}_l \psi_-(0, t) \quad (41)$$

$$\psi_-(L, t) = \widehat{R}_r(\omega) \psi_+(L, t), \quad (42)$$

Большой интерес представляет определить ширину спектра излучения. Спектр излучения $F(L, L, \omega)$ можно получить, зная коррелятор поля:

$$\langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} F(z, z', \omega) e^{-i\omega(t-t')} \quad (43)$$

$$I = \langle \psi(L, t) \psi^*(L, t) \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} F(L, L, \omega) \quad (44)$$

Посчитать такое среднее можно без использования точного решения уравнения на поле, представив его в виде континуального интеграла, учитывая уравнение на поле как δ -функцию [8]. Перепишем уравнение на поле:

$$\partial_z \psi = \widehat{g} \psi - i\beta_2 \partial_t^2 \psi - i\frac{\gamma}{2} \psi |\psi|^2 - i\xi = f \quad (45)$$

Выражение для среднего с учетом вышесказанного примет вид:

$$\langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') \rangle = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') \delta(\partial_z \psi - f) \rangle_\xi \quad (46)$$

Производную под δ -функцией удобно переписать в дискретном виде, введя дискретизацию по времени и координатам.

$$\partial_z \psi = f \rightarrow \frac{\psi_{n+1}(t_j) - \psi_n(t_j)}{\epsilon} = f_n(t_j) \quad (47)$$

Здесь ϵ — шаг по координате z . Введем шаг по времени Δ . Условие нормировки:

$$N = \prod_{j,n} \int d\psi_n(t_j) \delta \left[\frac{\psi_{n+1}(t_j) - \psi_n(t_j)}{\epsilon} - f_n(t_j) \right]$$

δ - функцию разложим в ряд Фурье:

$$\delta(x) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} \quad (48)$$

Запишем это представление для каждого момента времени и каждой координаты, затем перемножим равенства. Отметим, что поле ψ является комплексным, поэтому необходимо ввести два поля: p и p^* . С учетом определения интеграла по траекториям, а также после усреднения по шуму среднее запишется в виде

$$\langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') \rangle = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}p \mathcal{D}p^* \langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') e^{-S} \rangle_\xi, \quad (49)$$

$$S = \int_0^L dz \int dt \left[p^* \left((\partial_z - \hat{g}) \psi + i\beta \partial_t^2 \psi + i\frac{\gamma}{2} \psi |\psi|^2 \right) + c.c. \right] \quad (50)$$

Здесь уже p - сопряженное поле для поля ψ , p^* - для поля ψ^* . Таким образом, можно ввести корреляционную функцию $F(\omega, z, z') = \int dt e^{i\omega(t-t')} \langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') \rangle$ и функцию Грина $G(z, z', t, t') = \langle \psi(z, t) p^*(z', t') \rangle$. Отметим, что при таком определении функция Грина имеет смысл линейного отклика на внешнее поле. Добавим в действие линейное слагаемое с внешним полем:

$$\tilde{S} = S - i \left(\int dt dz p^* h - c.c. \right)$$

При вариации поля δh изменится также среднее $\langle \psi \rangle$, причем эти вариации связаны через функцию Грина:

$$\delta \langle \psi(t, z) \rangle = -i \int dt' dz' G(t, t', z, z') \delta h(t', z') + c.c. \quad (51)$$

Данная функция Грина также находится в согласии с принципом причинности: $G(t, t', z, z') = 0$ при $z < z'$.

Аналогичным образом вводится сопряженная функция Грина: $\bar{G}(t, t', z, z') = \langle \psi^*(z, t) p(z', t') \rangle$.

Для вычисления корреляционной функции

$$\langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') \rangle = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}p \mathcal{D}p^* \langle \psi(z, t) \psi^*(z', t') e^{-S} \rangle_\xi$$

выделим слагаемое с нелинейностью в выражении для действия в виде действия: $S = S_0 + S_{int}$, $S_{int} = \frac{i\gamma}{2} \int_0^L dz \int dt [p^* \psi^2 \psi^* - p \psi \psi^{*2}]$. Учитывая малость нелинейного члена по сравнению с дисперсионным, произведем разложение $e^{-S_{int}}$ в ряд Тейлора. Таким образом, можно строить разложение по параметру $\frac{\gamma I}{\beta \omega^2}$.

Затравочная функция Грина запишется в виде

$$G_0(\omega, z, z') = \theta(z - z') e^{(g + i\beta \omega^2)(z - z')} \quad (52)$$

Будем обозначать её прямой одиночной линией, точную функцию Грина - двойной прямой линией, а корреляционную функцию - волнистой. Уравнения на точную функцию Грина и корреляционную функцию записываются на диаграммном языке приведены ниже.

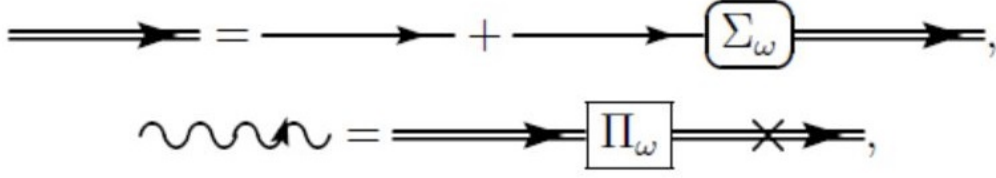


Рис. 8: Точная функция Грина и корреляционная функция [5]

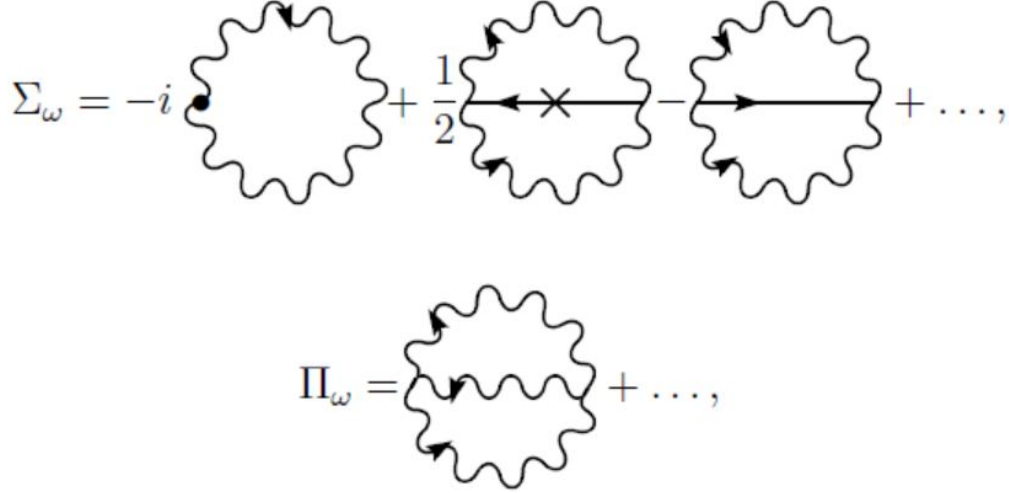


Рис. 9: Собственно-энергетическая часть и поляризационный оператор [5]

Применяя к уравнению на корреляционную функцию оператор $G_0^{-1} = \partial_z - g - i\beta\omega^2$, получим уравнение на корреляционную функцию :

$$(\partial_z - g - i\beta\omega^2)F(z, z', \omega) = \int_0^z dy [\Sigma(z, y, \omega)F(y, z', \omega) + \bar{G}(y', z, \omega)\Pi(z, y, \omega)] \quad (53)$$

В пределе слабой нелинейности:

$$F(y, z, \omega) \approx F(z, z, \omega) \exp[(g + i\beta\omega^2)(y - z)], F(z, y, \omega) = \bar{F}(y, z, \omega) \quad (54)$$

Одноточечная корреляционная функция:

$$(\partial_z - 2g)F(z, z, \omega) = \int_0^z dy [\Sigma(z, y, \omega)F(y, z, \omega) + G(z, y, \omega)\Pi(y, z, \omega) + c.c.] \quad (55)$$

Линейный закон изменения корреляционной функции с ростом координаты

$$F(z, z, \omega) = F(L, L, \omega) \exp[2(g_R P(z) - \alpha)(z - L)].$$

Правая часть уравнения (55) примет вид

$$\frac{\gamma^2}{3\beta^2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^2} \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \frac{FF_2F_3 + F_1F_2F_3 + FF_1F_2 - FF_1F_3}{(\omega^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2)^2} \quad (56)$$

где $F = F(\omega, L, L)$, $F_i = F(\omega_i, L, L)$. Из граничных условий на амплитуды получается условие на корреляционную функцию:

$$F(0, \omega) = |R(\omega)|^2 F(L, \omega) \quad (57)$$

Для удобства обозначим $|R_\omega|^2 = \kappa \ll 1$. Чтобы удовлетворить это условие, должно выполняться соотношение

$$\kappa \exp \left[2 \int_0^L dz (g_R P(z) - \alpha) \right] = 1 + \eta \quad (58)$$

$\eta \ll 1$, что соответствует относительно небольшому усилению сигнала за период.

С учетом рассуждений предыдущего параграфа можно получить уравнение на спектр выходного излучения:

$$(\eta - 2\mathcal{A}\omega^2)F + \frac{\gamma^2}{3\beta^2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^2} \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \frac{FF_2F_3 + F_1F_2F_3 + FF_1F_2 - FF_1F_3}{(\omega^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2)^2} = 0 \quad (59)$$

Обозначим ширину спектра Δ . Она определяется из условия $\eta = 2\mathcal{A}\Delta^2$, т.е. $\Delta = \sqrt{\frac{\eta}{2\mathcal{A}}}$, где $\mathcal{A} = \frac{g_R}{\Delta_g^2} \int_0^L dz P(z)$.

Обозначим $F(L, L, \omega) = C\phi(x)$, $C = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\beta\eta}{\gamma\sqrt{\mathcal{A}}}}$, $x = \frac{\omega}{\Delta}$. Обезразмерив переменные таким образом, получаем зависимость вклада нелинейности в ширину спектра от интенсивности

$$\Delta \propto I^{1/3} \quad (60)$$

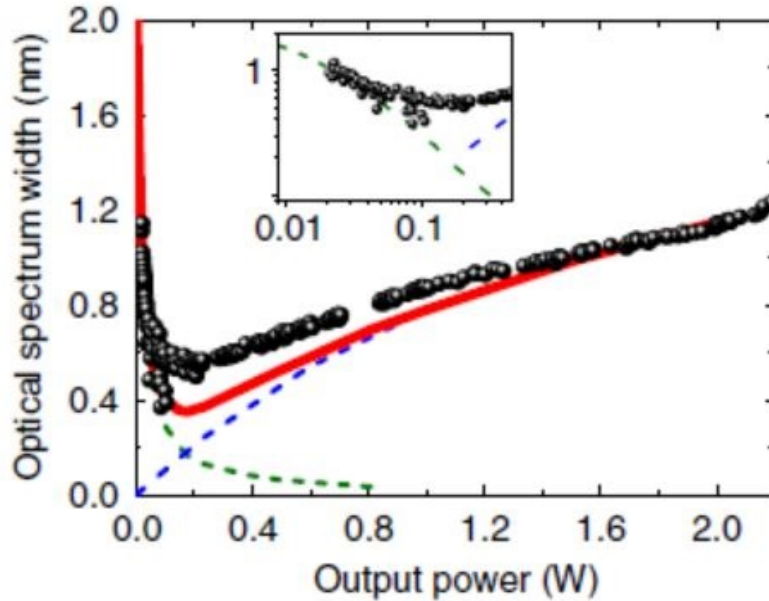


Рис. 10: График зависимости ширины спектра от интенсивности с учетом нелинейности [5]

На графике зависимости ширины спектра от выходной интенсивности изображены вклады в ширину спектра от вышеописанных процессов. Т.к. эти процессы имеют разную природу, то ширина спектра есть сумма этих вкладов. На рисунке 10 также проведено сравнение теоретических предсказаний с экспериментальными данными. Из уравнения (59) можно получить уравнение на спектр выходного излучения в безразмерных переменных:

$$(x^2 - 1)\phi = \int \frac{dx_2 dx_3}{(4\pi)^2} \frac{\phi\phi_2\phi_3 + \phi_1\phi_2\phi_3 - \phi\phi_1\phi_2 - \phi\phi_1\phi_3}{(x - x_2)^2(x - x_3)^2}, \quad (61)$$

$$\phi = \phi(x), \phi_i = \phi(x_i), x_1 = x_2 + x_3 - x.$$

При $x \gg 1$ функция $\phi(x)$ имеет асимптотику $\phi(x) \sim x^2 e^{-\sigma x}$, $\sigma \sim 1$. При этих значениях x основной вклад в интеграл, стоящий в правой части, дает член $\phi_1\phi_2\phi_3$, область интегрирования $x_2 + x_3 < x$.

Итак, в данном разделе изложена волновая кинетическая теория для данного лазера, а также приводятся её основные предсказания. Найденные с помощью данной теории спектр излучения и ширина спектра хорошо согласуются с экспериментальными результатами.

4 Статистика излучения

Интерес представляет определение статистики излучения данного лазера. На статистику излучения влияют спонтанная эмиссия, рэлеевское рассеяние, а также керровская нелинейность.

Спонтанная эмиссия имеет место в каждой точке волокна, причем эти процессы независимы в любых двух различных точках пространства. Таким образом, данное явление есть результат излучения в случайный момент времени большого числа независимых между собой источников. Значит, в силу центральной предельной теоремы, спонтанная эмиссия даёт гауссов вклад в статистику излучения. Аналогичные рассуждения справедливы и для рэлеевского рассеяния.

Нелинейное взаимодействие также вносит случайность, но другой природы. Так, после рэлеевского рассеяния, которое существенно вблизи конца $z = L$, волну можно представить в виде суммы плоских волн со случайными фазами. Эти моды взаимодействуют за счет эффекта Керра. Именно это нелинейное взаимодействие приводит к перемешиванию фаз и формированию статистики излучения.

В данном разделе изучается, какой вклад вносит нелинейность в статистику излучения.

4.1 Отличие функции распределения от гауссовой

Целью моей работы является определение отличия статистики интенсивности излучения от статистики, соответствующей гауссовой статистике поля. Значимость этого отличия можно определить путем использования теоремы Вика, устанавливающей связь между корреляционным моментом второго порядка действительной случайной величины X и моментами более высоких порядков в случае, если распределение случайной величины гауссово: $\langle X^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle X^2 \rangle^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Поставленная цель достигается путём вычисления корреляционного момента четвертого порядка $I^{(4)}$ поля ψ ($I^{(4)} = \langle |\psi|^4 \rangle$) и сравнения его с квадратом интенсивности выходного излучения I ($I = \langle |\psi|^2 \rangle$). В случае гауссовой статистики для комплексного поля ψ было бы справедливо соотношение

$$\langle |\psi|^4 \rangle = 2(\langle |\psi|^2 \rangle)^2 \quad (62)$$

В данном лазере из-за нелинейности будет наблюдаться отличие $I^{(4)}$ от $2I^2$. Это отличие будем называть неприводимой частью коррелятора.

Для получения параметрической зависимости коррелятора от различных параметров задачи воспользуемся предположением, что интенсивность накачки остается постоянной на

интервале вблизи конца $z = L$, где наиболее существенны значения амплитуд несущей волны и волны накачки и где набираются рассматриваемые интегралы.

4.2 Первый порядок по параметру нелинейности

Сначала проведем вычисления для корреляционного момента четвертого порядка. В первом порядке нужно посчитать величину:

$$\begin{aligned} I_4^{(1)} &= \frac{i\gamma}{2} \langle \int_0^L dz \int dt (p^* \psi |\psi|^2 - p \psi^* |\psi|^2) |\psi_L|^4 \rangle = \\ &= \frac{i\gamma}{2} \int_0^L dz \int dt (\langle p^* \psi^2 \psi^* \psi_L^2 \psi_L^{*2} \rangle - \langle p \psi^{*2} \psi \psi_L^2 \psi_L^{*2} \rangle) = \frac{i\gamma}{2} \int_0^L dz \int dt \langle p^* \psi^2 \psi^* \psi_L^2 \psi_L^{*2} \rangle + c.c. \end{aligned}$$

Раскроем первое слагаемое с использованием теоремы Вика:

$$\langle p^* \psi^2 \psi^* \psi_L^2 \psi_L^{*2} \rangle = 2 \langle \psi_L p^* \rangle \langle \psi^2 \psi^* \psi_L^2 \psi_L^{*2} \rangle;$$

$$\langle \psi^2 \psi^* \psi_L^2 \psi_L^{*2} \rangle = 2 \langle \psi_L \psi_L^* \rangle \langle \psi^2 \psi^* \psi_L^* \rangle + \langle \psi_L \psi^* \rangle \langle \psi^2 \psi_L^{*2} \rangle = 4 \langle \psi_L \psi_L^* \rangle \langle \psi \psi^* \rangle \langle \psi \psi_L^* \rangle + 2 \langle \psi_L \psi^* \rangle \langle \psi \psi_L^* \rangle \langle \psi \psi_L^* \rangle$$

Итак,

$$\langle p^* \psi^2 \psi^* \psi_L^2 \psi_L^{*2} \rangle = 8 \langle \psi_L p^* \rangle \langle \psi_L \psi_L^* \rangle \langle \psi \psi^* \rangle \langle \psi \psi_L^* \rangle + 4 \langle \psi_L p^* \rangle \langle \psi_L \psi^* \rangle \langle \psi \psi_L^* \rangle \langle \psi \psi_L^* \rangle \quad (63)$$

Получаются следующие диаграммы:

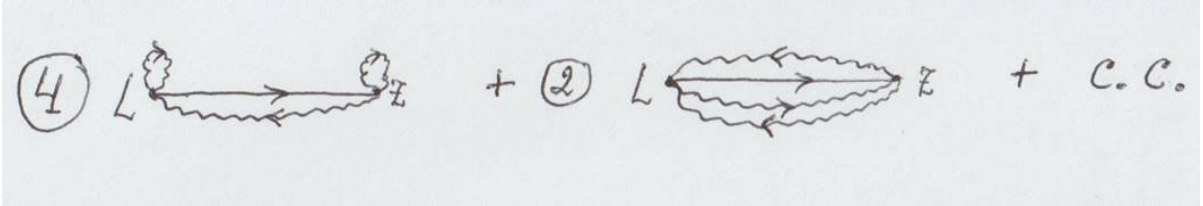


Рис. 11: Диаграммы в первом порядке

Первая диаграмма сводится к выражению для приводимой части коррелятора, вторая - нет. Вычислим вклад от второго слагаемого.

$$\begin{aligned} &\frac{i\gamma}{2} 4\Delta^3 \int_0^L dz \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} F(L, z, \Delta\omega_1) F(z, L, \Delta\omega_2) F(z, L, \Delta\omega_3) G_0(L, z, \Delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)) = \\ &= \frac{i\gamma}{2} 4\Delta^3 C^3 \int_0^L dz \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \phi(\omega_1) \phi(\omega_2) \phi(\omega_3) e^{4g(z-L)} e^{i\beta\Delta^2 [(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2] (z-L)} = \\ &= \frac{i\gamma}{2} 4\Delta^3 C^3 \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \phi(\omega_1) \phi(\omega_2) \phi(\omega_3) \int_0^L dz e^{(4g + i\beta\Delta^2 [(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2]) (z-L)} = \\ &= \frac{i\gamma}{2} 4\Delta^3 C^3 \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\omega_1) \phi(\omega_2) \phi(\omega_3)}{4g + i\beta\Delta^2 [(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2]} = \end{aligned}$$

$$= \frac{i\gamma}{2} 4\Delta^3 C^3 \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\omega_1)\phi(\omega_2)\phi(\omega_3) [4g - 2i\beta\Delta^2(\omega_2 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_3)]}{(4g)^2 + 4\beta^2\Delta^4 [(\omega_2 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_3)]^2}$$

Здесь ω_i - безразмерные переменные. Добавим комплексно сопряженное слагаемое, получим неприводимой частью коррелятора в первом порядке:

$$\begin{aligned} I_4^{(1)} &= 8\gamma\Delta^3 C^3 \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\omega_1)\phi(\omega_2)\phi(\omega_3)\beta\Delta^2(\omega_2 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_3)}{(4g)^2 + 4\beta^2\Delta^4 [(\omega_2 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_3)]^2} = \\ &= \frac{8\gamma\Delta^3 C^3}{4\beta\Delta^2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\omega_1)\phi(\omega_2)\phi(\omega_3)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_3)}{\left(\frac{2g}{\beta\Delta^2}\right)^2 + [(\omega_2 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_3)]^2} \end{aligned}$$

Обозначим $\epsilon = \frac{g}{\beta\Delta^2}$. В пределе $\epsilon = 0$:

$$I_4^{(1)} = \frac{8\gamma\Delta^3 C^3}{4\beta\Delta^2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\omega_1)\phi(\omega_2)\phi(\omega_3)}{(\omega_2 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_3)}$$

Сделаем замену $\omega_1 - \omega_3 = \Omega_1, \omega_2 - \omega_3 = \Omega_2, \omega_3 = \Omega_3$. Тогда

$$\begin{aligned} I_4^{(1)} &= \frac{2\gamma\Delta C^3}{\beta} \int \frac{d\Omega_3}{2\pi} \phi(\Omega_3) \int \frac{d\Omega_2}{2\pi} \frac{\phi(\Omega_3 + \Omega_2)}{\Omega_2} \int \frac{d\Omega_1}{2\pi} \frac{\phi(\Omega_3 + \Omega_1)}{\Omega_1} = \\ &= \frac{2}{J_2^3} \frac{\gamma I}{\beta\Delta^2} I^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \phi(\Omega) \tilde{\phi}^2(\Omega), \end{aligned}$$

где $\tilde{\phi}(x) = \int \frac{dy}{2\pi} \frac{\phi(x+y)}{y}$, $J_2 = \frac{I}{C\Delta} = \int \frac{dx}{2\pi} \phi(x)$. Итак, отношение неприводимой части корреляционного момента четвертого порядка к гауссовой части составляет:

$$\frac{I_4^{(1)}}{2I^2} = \frac{1}{J_2^3} \frac{\gamma I}{\beta\Delta^2} \int \frac{dx}{2\pi} \phi(x) \tilde{\phi}^2(x) \quad (64)$$

Поскольку параметр $\frac{\gamma I}{\beta\Delta^2} \ll 1$, а интегралы от функции $\phi(x)$ и $\tilde{\phi}(x)$ порядка единицы, то неприводимая часть коррелятора в первом порядке является малой величиной.

Отметим, что в пределе малого ϵ неприводимая часть коррелятора не обращается в ноль и не зависит от усиления.

4.3 Второй порядок по параметру нелинейности

В данном подразделе приведены вычисления коррелятора во втором порядке теории возмущений по параметру нелинейности.

Выражение для коррелятора имеет вид:

$$I_4^{(2)} = -\frac{\gamma^2}{8} \left\langle \int_0^L dz_1 \int dt_1 (p_1^* \psi_1 |\psi_1|^2 - p_1 \psi_1^* |\psi_1|^2) \int_0^L dz_2 \int dt_2 (p_2^* \psi_2 |\psi_2|^2 - p_2 \psi_2^* |\psi_2|^2) |\psi_L|^4 \right\rangle \quad (65)$$

Используя теорему Вика, распишем среднее в виде суммы всех возможных произведений попарных средних, откуда получим диаграммы для неприводимой части коррелятора.

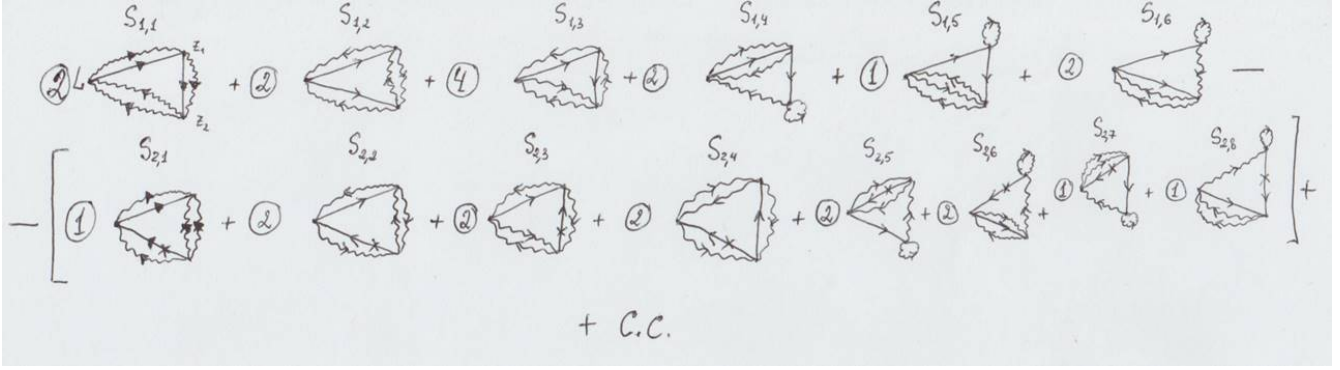


Рис. 12: Диаграммы неприводимого коррелятора во втором порядке

Диаграммы можно разделить на несколько типов. Типы диаграмм различаются по структуре выражений. Выделим наиболее существенные расходимости диаграмм каждого типа без подсчета коэффициентов. К первому типу отнесем диаграммы 1.1 и 2.1. Заметим, что они входят с разными знаками. Вклад от этих двух диаграмм

$$S_{1,1} - S_{2,1} = \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \frac{1}{J_2^4} \int \frac{d^4 \omega}{(2\pi)^4} \phi(\omega_1 - \omega_2) \phi(\omega_1 - \omega_3) \phi(\omega_1 + \omega) \phi(\omega_1 - \omega) \quad (66)$$

$$\left(\frac{\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)(\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} - 2 \frac{2\epsilon^2 - (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{(\epsilon^2 + (\omega_2^2 - \omega^2)^2)(4\epsilon^2 + (\omega_3^2 - \omega^2)^2)} \right)$$

При $\epsilon \rightarrow 0$ выражение имеет конечный предел.

Ко второму типу относятся диаграммы 1.2, 1.3, 2.2, 2.3, 2.4. Суммарный вклад от этих диаграмм

$$S_{1,2} + S_{1,3} - S_{2,2} - S_{2,3} - S_{2,4} = \frac{\gamma^2 I^4}{\beta_2^2 \Delta^4} \frac{1}{J_2^4} \int \frac{d^4 \omega}{(2\pi)^4} \quad (67)$$

$$\left[\phi(\omega_2 + \omega_1 - \omega) - \phi(\omega_2 + \omega_1 + \omega) + \frac{1}{2} \phi(\omega_1 - \omega_2/2 + \omega) - \frac{1}{2} \phi(\omega_1 - \omega_2/2 - \omega) \right]$$

$$\phi(\omega_1 + \omega_3/2 + \omega) \phi(\omega_1 + \omega) \phi(\omega_1 - \omega) \frac{\epsilon^2 - \omega^2 \omega_2 \omega_3}{(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_2^2)(\epsilon^2 + \omega^2 \omega_3^2)}$$

При $\epsilon \rightarrow 0$ выражение также имеет конечный предел.

К третьему типу относятся диаграммы 1.4 - 1.6 и 2.5 - 2.8.

Суммарный вклад от этих диаграмм оказывается тождественно равным нулю.

4.4 Предел нулевого усиления

Можно заметить, что в пределе $g \rightarrow 0$ уравнение

$$i(\partial_z - \widehat{g})\psi = \beta\partial_t^2\psi + \frac{\gamma}{2}\psi|\psi|^2 \quad (68)$$

переходит в нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\partial_z\psi = \beta\partial_t^2\psi + \frac{\gamma}{2}\psi|\psi|^2 \quad (69)$$

Для этого уравнения доказано [9],[10], что производная по координате от корреляционного момента поля любого порядка обращается в ноль. В частности,

$$\partial_z I^{(4)}(z) = \partial_z \langle \psi^2(z, t) \psi^{*2}(z, t) \rangle = 0.$$

Покажем, что полученные результаты не противоречат приведенному выше утверждению. Результаты, полученные в первом порядке, не противоречат вышеприведенному утверждению. Для этого нужно посчитать $I_4^{(1)}(z)$ при $L - z \ll L$. Коррелятор четвертого порядка тоже будет экспоненциально зависеть от координаты: $I_4^{(1)}(z) = e^{6 \cdot g(z-L)} I_4^{(1)}(L)$. Значит, при смещении входной вершины из точки L в точку z возникнет множитель $e^{6g(z-L)}$. Таким образом,

$$\partial_z I_4^{(1)}(z) = 6g e^{6 \cdot g(z-L)} I_4^{(1)}(L) \propto g,$$

т.е. в пределе малого ϵ производная будет мала. Аналогичные рассуждения справедливы и для второго порядка.

$$\partial_z I_4^{(2)}(z) = 8g e^{8 \cdot g(z-L)} I_4^{(2)}(L) \propto g.$$

Таким образом, производная неприводимой части коррелятора

$$\partial_z I^{(4)}(z) \sim g e^{g(z-L)} I^{(4)}(L) \propto g,$$

т.е. в пределе малого ϵ она будет мала. Значит, коррелятор является стационарным в первом порядке.

5 Заключение

В данной работе было проведено знакомство с особенностями работы случайного волоконного лазера. Также было определено отличие статистики излучения случайного волоконного лазера с распределенной обратной связью от гауссовой в первом порядке теории возмущений по параметру нелинейности. Для решения поставленной задачи применялась волновая кинетическая теория, которая была развита в работе [5]. Она предсказывает ширину и форму спектра излучения, зависимость этих величин от других параметров системы, а также находится в согласии с экспериментальными результатами. Это отличие было оценено с помощью вычисления корреляционного момента четвертого порядка $I^{(4)}$ поля ψ и сравнения его с квадратом интенсивности выходного излучения I . Отличие оказалось малым по параметру отношения нелинейного члена к дисперсионному $\frac{\gamma I}{\beta \Delta^2}$. Во втором порядке теории возмущений получены диаграммы корреляционного момента четвертого порядка. Работа по вычислению второго порядка ведется. В дальнейшем планируется сравнить имеющиеся результаты с экспериментальными данными, получить выражение корреляционного момента четвертого порядка во втором порядке по параметру нелинейности, а также вычислить корреляционные моменты более высоких порядков.

Автор выражает огромную благодарность Лебедеву В.В., Вергелесу С.С. и Колоколову И.В. за многочисленные обсуждения, советы и исправления. Без их участия работа не была бы написана.

6 Список литературы

1. Turitsyn S.K. et. all. “Random distributed feedback lasers”, Physics Reports, 2014.
2. Звелто О. “Принципы лазеров”, 4-е изд., СПб.: Издательство «Лань», 2008.
3. Turitsyn S.K. et. all. “Random distributed feedback fibre lasers”, Nature Photonics, 2010.
4. Wiersma D.S. “The physics and applications of random lasers”, Nature Physics 4, 359-367, 2008.
5. Churkin D.V., Kolokolov I.V. et. all. “Wave kinetics of random fibre lasers”, Nature Communications, 2, 2015.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. “Теоретическая физика: Электродинамика сплошных сред”, 4-е изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
7. Schawlow A. L. & Townes C. H. “Infrared and optical masers”, Phys. Rev. 112, 1940-1949 (1958).
8. Лебедев В.В. “Флуктуационные эффекты в макрофизике”, МЦНМО, 2004.
9. Dyachenko S., Newell A.C., Pushkarev A. & Zakharov, V.E. “Optical turbulence: weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear Schrodinger equation”, Physica D: Nonlinear Phenomena 57(1), 96-160 (1992).
10. Zakharov, V. E. “Turbulence in integrable systems”, Studies in Applied Mathematics, 122(3), 219-234, (2009).