

Московский физико-технический институт
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Андреевские состояния в ферромагнитных делителях куперовских пар

Диплом на соискание степени бакалавра

Выполнил:

студент 222 группы

Строганов П.Л.

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доц.

Фоминов Я.В.

Черноголовка, 2016

Содержание

| | | |
|------------|---|-----------|
| I | Введение | 4 |
| II | Андреевские уровни в формализме матриц рассеяния | 5 |
| 1 | Уравнение Боголюбова - деЖена | 5 |
| 1.1 | Гамильтониан БКШ | 5 |
| 1.2 | Приближение среднего поля | 6 |
| 1.3 | Каноническое преобразование | 6 |
| 1.4 | Уравнение Боголюбова - деЖена | 7 |
| 1.5 | Собственные функции гамильтониана БдЖ | 8 |
| 1.5.1 | Собственные функции для ферромагнетика | 8 |
| 1.5.2 | Собственные функции в сверхпроводнике | 10 |
| 2 | Матрица рассеяния | 11 |
| 2.1 | Определение | 11 |
| 2.2 | Свойства матрицы рассеяния | 12 |
| 2.3 | Схема вычисления спектра | 13 |
| 3 | Ток-фазовое соотношение джозефсоновского перехода | 13 |
| III | Эффект Джозефсона в SFS - переходе | 14 |
| 4 | Спектральное уравнение | 14 |
| 4.1 | Постановка задачи | 14 |
| 4.2 | SF - граница | 15 |
| 4.3 | Матрица рассеяния ферромагнетика | 17 |
| 4.4 | Уравнение на спектр | 17 |
| 5 | Спектр возбуждений. Ток-Фазовое соотношение | 18 |
| 5.1 | Предел слабого ферромагнетика $h \ll 1$ | 18 |
| 5.1.1 | Некритические точки | 18 |
| 5.1.2 | Критические точки | 19 |
| 5.2 | Численные результаты для неопределенного случая | 22 |
| IV | Андреевские состояния в ферромагнитном делителе | 22 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6 | Модель | 23 |
| 6.1 | Матрица тройника | 23 |
| 6.2 | Матрица рассеяния ферромагнитного рукава | 24 |
| 6.3 | Матрица рассеяния ферромагнитного делителя | 26 |
| 7 | Спектр | 27 |
| 7.1 | Предельный ферромагнетик $h \rightarrow \infty$ | 27 |
| 7.2 | Непредельный полуметаллический ферромагнетик $h \gg 1$ | 30 |
| 7.3 | Численные результаты | 30 |
| V | Заключение | 31 |
| | Приложение А Интерференционные эффекты в ферромагнитном делителе | 31 |
| | Список литературы | 36 |

Часть I

Введение

Физическая постановка задачи

Сверхпроводимость предоставляет естественный источник запутанности между электронами, связанными в куперовских парах. Особенно интересным этот факт делает возможность экспериментального разделения пары на отдельные электроны и их пространственного разнесения.

Свойства подобных систем активно изучаются как теоретически [1]- [4] так и экспериментально [5]- [8]. Однако основное внимание уделяется схемам разделения, основанным на квантовых точках.

Другой же способ разделения куперовских пар состоит в фильтрации спинов с помощью сильных ферромагнетиков. Например, могут быть использованы полуметаллические ферромагнетик, в которых невыгодная спиновая подзона находится выше поверхности Ферми. В статьях [2], [4] сообщается об экспериментальной реализации гибридных структур, содержащих сверхпроводники и такие ферромагнетики.

Отсутствие второй спиновой подзоны не позволят целой куперовской паре пройти через полуметаллический провод. Однако если в системе имеется два таких проводов-рукавов с непараллельными намагниченностями, то пара разделится, и запутанные электроны разойдутся в разные рукава. Это дает механизм разделения пар. Кроме того, изменение взаимной ориентации намагниченностей различных частей образца и приложение внешнего магнитного потока делает процесс разделения управляемым.

Мотивацией данной работы является эксперимент, который собирается провести экспериментальная группа ИФТТ РАН.

Система представляет собой SQUID - кольцо, в котором в роли джозефсоновских контактов выступают проставки из полуметаллического ферромагнетика. Другая возможная реализация представляет собой мостик между сверхпроводящими резервуарами, состоящий из двух близко расположенных ферромагнитных проволочек.

Предполагается, что величина сверхпроводящего тока в такой системе должна сильно зависеть от взаимной ориентации намагниченностей. Действительно, если намагниченности сонаправлены, то пара не может пройти ни по одному из проводов. Даже разделившись электроны не смогут пройти через систему, так как один из них будет задержан спиновым фильтром. Но когда намагниченности направлены противоположно, пара может разделиться, и каждый из электронов пройдет по своему рукаву, после чего пара будет восстановлена на противоположном конце перехода.

План

Основной задачей работы является вычисление андреевских уровней в такой системе с ферромагнитным делителем. Планируется сделать это в формализме матриц рассеяния.

Поэтому в части II вводятся основные понятия и формулируется метод матриц рассеяния.

На данный момент завершен подготовительный этап: решена задача об андреевских уровнях и об эффекте Джозефсона в SFS - переходе III. Эта задача не имеет прямого отношения к рассматриваемой системе. Также во многом полученные результаты не являются новыми. Однако ее решение необходимо для выяснения специфики процессов в системах с сильными ферромагнетиками. Также ее решение позволяет отработать все необходимые технические вопросы.

В части IV обсуждается исследуемая система с ферромагнитным делителем. На данный момент исчерпывающего решения задачи не получено. Но найдены модели, с помощью которых система может быть описана. Также в этом разделе кратко приведены начальные результаты их применения.

На основании выводов этой части в Заключение V формулируется план дальнейших действий.

Часть II

Андреевские уровни в формализме матриц рассеяния

1 Уравнение Боголюбова - деЖена

1.1 Гамильтониан БКШ

Гамильтониан модели БКШ имеет вид

$$\hat{H} = \int d^3r \quad \Psi_{\alpha}^{\dagger}(r) \cdot H_{\alpha\beta}^{(1)} \cdot \Psi_{\beta}(r) - g \int d^3r \quad \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}(r) \Psi_{\uparrow}(r) \quad (1)$$

где g - константа спаривания в сверхпроводнике, а одночастичный гамильтониан имеет вид:

$$H_{\alpha\beta}^{(1)} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) - \vec{h} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} \quad (2)$$

Здесь μ - энергия Ферми, h - эффективное обменное поле ферромагнетика, имеющее размерность энергии.

1.2 Приближение среднего поля

Ключевым для приближения является тот факт, что конденсат содержит в среднем макроскопически большое число $N \gg 1$ куперовских пар. Из-за этого операторы $\Psi_a^\dagger(r), \Psi_a(r)$ ведут себя как классические величины. Иными словами относительная флуктуация числа пар исчезающе мала и произведения типа $\Psi_a(r)\Psi_a(r)$ можно с хорошей точностью заменить на их средние $\langle \Psi_a(r)\Psi_a(r) \rangle$.

Это позволяет написать следующее приближенное соотношение:

$$\Psi_\uparrow^\dagger \Psi_\downarrow^\dagger \Psi_\downarrow \Psi_\uparrow \approx \langle \Psi_\uparrow^\dagger \Psi_\downarrow^\dagger \rangle \cdot \Psi_\downarrow \Psi_\uparrow + \Psi_\uparrow^\dagger \Psi_\downarrow^\dagger \cdot \langle \Psi_\downarrow \Psi_\uparrow \rangle \quad (3)$$

Обозначим

$$\Delta(r) = -g \cdot \langle \Psi_\downarrow \Psi_\uparrow \rangle \quad (4)$$

Тогда

$$\Delta^*(r) = -g \cdot \langle \Psi_\uparrow^\dagger \Psi_\downarrow^\dagger \rangle \quad (5)$$

Приближенный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} = & \int d^3r \quad \Psi_\alpha^\dagger(r) \cdot H_{\alpha\beta}^{(1)} \cdot \Psi_\beta(r) + \\ & + \int d^3r \quad \Delta(r) \cdot \Psi_\uparrow^\dagger(r) \Psi_\downarrow^\dagger(r) + \int d^3r \quad \Delta^*(r) \cdot \Psi_\downarrow(r) \Psi_\uparrow(r) \end{aligned} \quad (6)$$

1.3 Каноническое преобразование

Так как эффективный гамильтониан квадратичен по Ψ - операторам, он может быть диагонализирован следующим линейным преобразованием

$$\Psi_\uparrow(r) = \sum_n \hat{\gamma}_n \cdot U_{\uparrow n} + \hat{\gamma}_n^\dagger \cdot V_{\uparrow n}^* \quad (7)$$

$$\Psi_\downarrow(r) = \sum_n \hat{\gamma}_n \cdot U_{\downarrow n} + \hat{\gamma}_n^\dagger \cdot V_{\downarrow n}^*$$

Коэффициенты $U_{\sigma n}(r), V_{\sigma n}(r)$ являются комплексными функциями, которые нужно найти. Новые операторы $\hat{\gamma}_n$ должны удовлетворять фермиевским коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \{\hat{\gamma}_n^\dagger, \hat{\gamma}_m\} &= \delta_{nm} \\ \{\hat{\gamma}_n, \hat{\gamma}_m\} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Это накладывает следующие ограничения на коэффициенты преобразования

$$\sum_n U_{\alpha n}^*(r) \cdot U_{\beta n}(r') + V_{\alpha n}^*(r) \cdot V_{\beta n}(r') = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(r - r') \quad (9)$$

$$\sum_n U_{\alpha n}(r) \cdot V_{\beta n}^*(r') + V_{\alpha n}^*(r) U_{\beta n}(r') = 0$$

1.4 Уравнение Боголюбова - деЖена

После диагонализации гамильтониан должен иметь вид

$$H_{eff} = \sum_n E_n \gamma_n^\dagger \gamma_n + Const \quad (10)$$

или, что эквивалентно

$$[\gamma_n, H_{eff}] = E_n \gamma_n \quad (11)$$

$$[\gamma_n^\dagger, H_{eff}] = -E_n \gamma_n^\dagger$$

Эти уравнения определяют коэффициенты U, V преобразования.

Однако, удобнее начать с аналогичных соотношений для Ψ операторов

$$[\Psi_\uparrow, H_{eff}] = H_{\uparrow\uparrow}^{(1)} \Psi_\uparrow + H_{\uparrow\downarrow}^{(1)} \Psi_\downarrow + \Delta \cdot \Psi_\downarrow^\dagger \quad (12)$$

$$[\Psi_\downarrow, H_{eff}] = H_{\downarrow\uparrow}^{(1)} \Psi_\uparrow + H_{\downarrow\downarrow}^{(1)} \Psi_\downarrow - \Delta \cdot \Psi_\uparrow^\dagger$$

Подстановкой выражения для Ψ в каждое из уравнений (12) получаются соотношения следующей операторной структуры

$$\begin{aligned} [\Psi_\uparrow, H_{eff}] &\rightarrow \sum_n \hat{\gamma}_n \cdot A_n(r) + \hat{\gamma}_n^\dagger \cdot B_n(r) = 0 \\ [\Psi_\downarrow, H_{eff}] &\rightarrow \sum_n \hat{\gamma}_n \cdot C_n(r) + \hat{\gamma}_n^\dagger \cdot D_n(r) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

В эквивалентной форме

$$A_n(r) = 0 \quad B_n(r) = 0 \quad C_n(r) = 0 \quad D_n(r) = 0 \quad (14)$$

Эти четыре уравнения в явном виде могут быть записаны как (индекс (1) у $H^{(1)}$ опущен)

$$E_n \begin{pmatrix} U_{\uparrow n} \\ U_{\downarrow n} \\ V_{\uparrow n} \\ V_{\downarrow n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{\uparrow\uparrow} & H_{\uparrow\downarrow} & 0 & \Delta \\ H_{\downarrow\uparrow} & H_{\downarrow\downarrow} & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & -H_{\uparrow\uparrow}^* & -H_{\uparrow\downarrow}^* \\ \Delta^* & 0 & -H_{\downarrow\uparrow}^* & -H_{\downarrow\downarrow}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{\uparrow n} \\ U_{\downarrow n} \\ V_{\uparrow n} \\ V_{\downarrow n} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Эта система уравнений называется уравнением Боголюбова - деЖена.

Введем сокращенную запись системы (15)

$$E_n \Psi_n = \hat{H}_{BdG} \Psi_n \quad (16)$$

где \hat{H}_{BdG} назовем гамильтонианом Боголюбова - деЖена. Диагонализация гамильтониана БКШ и поиск спектра возбуждений системы сводятся к нахождению собственных функций введенного гамильтониана.

После того, как коэффициенты U, V найдены, можно вычислить Δ и, таким образом замкнуть самосогласованное решение. Для наших целей достаточно считать Δ заданным.

1.5 Собственные функции гамильтониана БДЖ

Задача о нахождении энергетического спектра сложной сверхпроводящей системы сведена к решению уравнения (16). Если система состоит из отдельных простых частей (что имеет место в рассматриваемом случае), то разумно сначала найти собственные функции отдельно для каждой части, а после процедурой сшивки получить полное решение. В следующих пунктах находятся собственные функции для ферромагнетика и сверхпроводника.

Для удобства в дальнейшем будем пользоваться новой системой единиц, в которой

$$\hbar = 1, \mu = 1, m = \frac{1}{2} \quad (17)$$

В этой системе $k_F = 1$.

1.5.1 Собственные функции для ферромагнетика

Эффекты обменного взаимодействия в ферромагнетике могут быть описаны с помощью введения в гамильтониан зеемановского слагаемого $-\mathbf{h}\hat{\sigma}$ с эффективным обменным полем \vec{h} .

Одночастичный гамильтониан (безразмерный, см.17)

$$H^{(1)} = \left(-i\nabla - \frac{e}{c}A \right)^2 - 1 - \vec{h}\vec{\sigma} \quad (18)$$

Направим ось x вдоль провода, оси y и z - перпендикулярно. Обменное поле лежит в плоскости $y - z$, составляя угол θ с осью z :

$$h_x = 0 \quad h_y = h \cdot \sin \theta \quad h_z = h \cdot \cos \theta \quad (19)$$

Так как одним из основных вопросов является изучение влияния внешнего магнитного потока на андреевские уровни и ток-фазовое соотношение перехода, в гамильтониан (18) введен вектор-потенциал.

Чтобы не загромождать дальнейшие выкладки сразу выберем следующую калибровку: \vec{A} отличен от нуля только в ферромагнетике и равномерно “размазан” по проводу. Так как в ферромагнетике вектор-потенциал постоянен, то по прежнему собственными функциями гамильтониана (18) могут быть выбраны плоские волны, его присутствие сводится лишь к дополнительному набегу фазы. Это позволяет опустить \vec{A} и восстановить соответствующие фазы когда это будет необходимо.

Тогда гамильтониан БДЖ принимает вид:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - 1 - h \cos \theta & ih \sin \theta & 0 & 0 \\ -ih \sin \theta & -\partial_x^2 - 1 + h \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[-\partial_x^2 - 1 - h \cos \theta] & ih \sin \theta \\ 0 & 0 & -ih \sin \theta & -[-\partial_x^2 - 1 + h \cos \theta] \end{pmatrix} \quad (20)$$

Собственные значения

$$E = k^2 - 1 \mp h \quad (21)$$

для электроно-подобных (далее - электронов) возбуждений и

$$E = - [k^2 - 1 \mp h] \quad (22)$$

для дырочноподобных (далее - дырок) возбуждений ($E > 0, |\vec{k}_h| < 1$).

Двухзонный ферромагнетик, $h < 1$

В случае когда обменное поле не превышает 1, в ферромагнетике, не затухая, могут распространяться возбуждения обоих направлений спина (см. Рис.18).

Собственные функции электронов имеют вид

$$\Psi_{\uparrow}^e = \frac{e^{ixk_{\uparrow}^e}}{\sqrt{k_{\uparrow}^e}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Psi_{\downarrow}^e = \frac{e^{ixk_{\downarrow}^e}}{\sqrt{k_{\downarrow}^e}} \begin{pmatrix} i \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$k_{\uparrow\downarrow}^e = \sqrt{1 + E \pm h}$$

для соответственно электронов со спином вверх и вниз. Еще две функции соответствуют распространяющимся в противоположном направлении возбуждениям, формально замене $k \rightarrow -k$.

Для дырок собственные функции имеют вид (спин вверх и спин вниз соответственно)

$$\Psi_{\uparrow}^h = \frac{e^{ixk_{\uparrow}^h}}{\sqrt{k_{\uparrow}^h}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \Psi_{\downarrow}^h = \frac{e^{ixk_{\downarrow}^h}}{\sqrt{k_{\downarrow}^h}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$k_{\uparrow\downarrow}^h = \sqrt{1 - E \pm h}$$

аналогично еще две функции соответствуют замене $k \rightarrow -k$ и описывают распространяющиеся в противоположном направлении возбуждения.

Полуметаллический ферромагнетик, $h > 1$

В случае, когда обменное взаимодействие настолько сильно, что невыгодная (спин вниз) спиновая подзона оказывается целиком над поверхностью ферми (см. Рис.19), и возбуждения с соответствующим спином затухают при распространении вглубь. Части формул (23) и (24), соответствующие спину вверх остаются справедливыми.

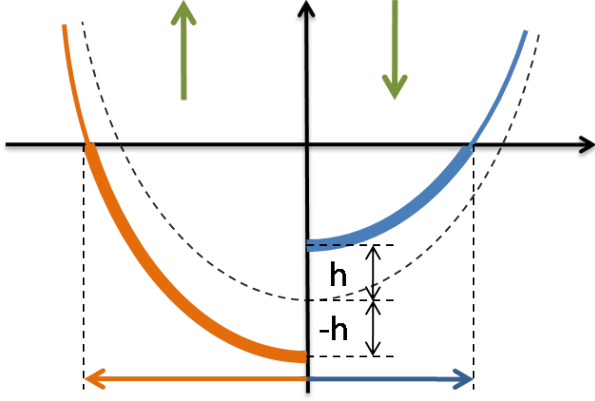


Рис. 1: Заполнение спиновых подзон в двухзонном ферромагнетике

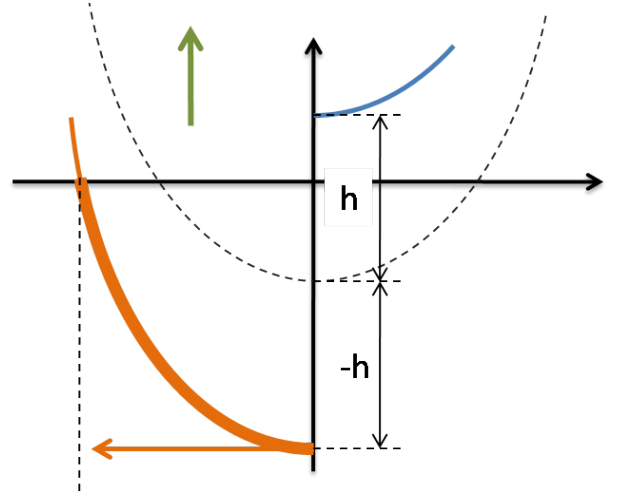


Рис. 2: Заполнение спиновых подзон в полуметаллическом ферромагнетике

Для спин- \downarrow возбуждений

$$\Psi_{\downarrow}^e = e^{\pm x k_{\downarrow}^e} \begin{pmatrix} i \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Psi_{\downarrow}^h = e^{\pm x k_{\downarrow}^h} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$k_{\downarrow}^e = \sqrt{h - 1 - E} \quad k_{\downarrow}^h = \sqrt{h - 1 + E}$$

Функции не содержат нормировочных множителей, так как не переносят потока.

1.5.2 Собственные функции в сверхпроводнике

В сверхпроводнике $h = 0$ и $\vec{A} = 0$. Также, пренебрегая эффектами близости, считаем Δ не зависящей от координат.

Гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} k^2 - 1 & 0 & 0 & \Delta e^{i\varphi} \\ 0 & k^2 - 1 & -\Delta e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & -\Delta e^{-i\varphi} & -(k^2 - 1) & 0 \\ \Delta e^{-i\varphi} & 0 & 0 & -(k^2 - 1) \end{pmatrix} \quad (26)$$

Спектр возбуждений

$$E^2 = \Delta^2 + (k^2 - 1)^2 \quad (27)$$

Как уже было упомянуто, в случае короткого контакта нас интересует только дискретный спектр состояний с энергией $E < \Delta$.

Поэтому первые четыре различных собственных функции имеют вид

$$\Psi_{e\uparrow h\downarrow} = e^{ix\sqrt{1\pm i\sqrt{\Delta^2-E^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-i\varphi\mp i\chi} \end{pmatrix} \quad \Psi_{e\downarrow h\uparrow} = e^{ix\sqrt{1\pm i\sqrt{\Delta^2-E^2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ e^{-i\varphi\mp i\chi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

(еще четыре функций получаются заменой $x \rightarrow -x$ в экспонентах)

Нормировочные множители не нужны, так как функции затухают экспоненциально и не переносят потока.

Здесь угол χ определен следующим образом

$$\begin{aligned} \chi &= \arccos \left[\frac{E}{\Delta} \right] \in (0, \pi) \\ \sin(\chi) &= \sqrt{1 - \left(\frac{E}{\Delta} \right)^2} \in (0, 1) \\ \cos(\chi) &= \frac{E}{\Delta} \in (-1, 1) \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь мы придерживаемся полупроводниковой картины спектра, разрешая энергии принимать отрицательные значения. При этом мы считаем, что в основном состоянии все отрицательные уровни заняты.

2 Матрица рассеяния

2.1 Определение

Для того, чтобы найти решение уравнения (16) во всей системе, необходимо произвести сшивки на границах. Эта процедура производится в формализме матриц рассеяния.



Рис. 3: Система с двумя терминалами



Рис. 4: отражение от барьера

Рассмотрим произвольный провод (см. Рис.3). Задача о сшивке волновой функции в левом и правом подводящих частях есть задача рассеяния на центральной области. (Отсюда и название техники).

Рассмотрим левую подводящую часть. Выберем некоторый базис собственных функций $A_1^{(i)}(x), B_1^{(i)}(x)$ гамильтониана (16). При этом групповая скорость для состояний $A_i^{(1)}$ направлена вправо - налетающая волна, а для состояний $B_1^{(i)}$ - влево, отраженная волна. Аналогично поступаем для правого конца.

Тогда можно от Ψ перейти к ее координатам в выбранных базисах

$$\Psi_L = \mathbf{a}_1 A_1 + \mathbf{b}_1 B_1 \quad (30)$$

$$\Psi_R = \mathbf{a}_2 A_2 + \mathbf{b}_2 B_2$$

Размерность векторов $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ определяется числом независимых собственных функций $A_1^{(j)}, B_1^{(j)}$ и различна в различных системах. Так как мы будем рассматривать одноканальные провода, векторы будут содержать четыре компоненты - две для электронов (для двух спинов), и две для дырок.

Рассеяние формально описывается следующим соотношением

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Оператор S называется матрицей рассеяния.

Блочная структура векторов, связанных матрицей S , позволяет выделить структуру самой матрицы

$$S = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} \\ t_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Блоки r_{11}, r_{22} описывают отражение от рассеивателя. Блоки t_{12}, t_{21} описывают прохождение волны справа-налево и слева-направо соответственно.

Аналогично можно описать отражение от непроницаемой стенки (см. Рис.4)

$$\mathbf{b} = \Sigma \mathbf{a} \quad (33)$$

Здесь размерность матрицы в два раза меньше чем в (31).

2.2 Свойства матрицы рассеяния

- Число частиц в процессе рассеяния не меняется. При соответствующей нормировке базисных волновых функций (см., например, нормировочные множители в (23) и (24)) сохраняется норма векторов \vec{a}, \vec{b} . Таким образом, матрица рассеяния должна быть унитарной

$$S^\dagger S = \hat{1} \quad (34)$$

- Другое важное свойство - симметрия по отношению к обращению времени.

В отсутствие магнитного поля это выражается симметрией матрицы рассеяния

$$S^T = S \quad (35)$$

В присутствии магнитного и/или обменного полей

$$S^T(B, h) = S(-B, -h) \quad (36)$$

Необходимо заметить что эти записи весьма формальны. Матрица не обязана быть симметричной в смысле буквального транспонирования. Это связано с тем, что при замене $t \rightarrow -t$ должен перевернуться спин. Для сохранения обозначений необходимо перейти к новому базису перевернутых состояний. Только после этого преобразования матрицы будут отличаться транспонированием.

2.3 Схема вычисления спектра

Во всех рассматриваемых задачах спектр находится путем следующей процедуры.

Система имеет вид мостика между двумя массивными сверхпроводящими резервуарами.

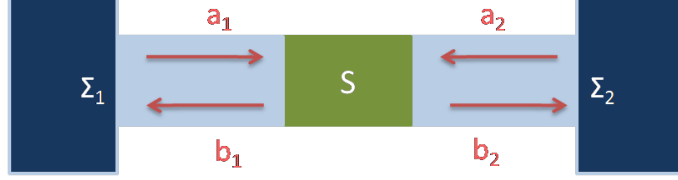


Рис. 5: Схема перехода

С одной стороны, векторы \mathbf{b} связаны с \mathbf{a} матрицей рассеяния S провода, соединяющего сверхпроводящие резервуары

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

С другой стороны, вектора \mathbf{a} выражаются через \mathbf{b} с помощью матриц отражения от границ провода

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Из этих уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \cdot S \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Условие существования нетривиального решения дает уравнение на спектр

$$\det \left[\hat{1} - \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \cdot S \right] = 0 \quad (40)$$

При этом в матрицы Σ входят фазы параметра порядка в сверхпроводящих резервуарах, а энергия возбуждения входит и матрицу S , и в матрицы Σ . Разрешая относительно энергии, получаем искомый спектр.

3 Ток-фазовое соотношение джозефсоновского перехода

Когда андреевские уровни найдены может быть вычислено ток-фазовое соотношение джозефсоновского контакта. В данной работе мы рассматриваем только дискретный спектр подщелевых возбуждений. Поэтому найти полный ток, учитывая непрерывный спектр, мы не можем. Однако, как показано в работе [9], в пределе короткого перехода (когда длина когерентности $\xi \sim \frac{\hbar V_F}{\Delta}$ много больше характерного размера перехода L) основной вклад в ток вносят состояния именно дискретного спектра, который мы вычислим.

Бездиссипативный ток через переход дается следующим соотношением:

$$I(\varphi) = -\frac{2e}{\hbar} \sum_n \frac{\partial E_n}{\partial \varphi} \tanh\left(\frac{E_n}{2T}\right) \quad (41)$$

где E_n - уровни дискретного спектра.

Вычисление тока будет произведено для модельной задачи SFS - перехода (5). Для основной задачи о системе с делителями такой расчет выходит за рамки данной работы.

Часть III

Эффект Джозефсона в SFS - переходе

4 Спектральное уравнение

4.1 Постановка задачи

Рассматриваемая в работе система (состоящая из делителей и двух ферромагнитных проводов) не сводится к SFS - переходу, состоящему из одного провода. Однако в этой части мы рассматриваем именно эту простую систему, так как она позволяет лучше понять специфику процессов, происходящих в сильных ферромагнетиках, и является хорошей базой для рассмотрения более сложной системы с делителями.

Итак, рассмотрим джозефсоновский контакт, состоящий из одного ферромагнитного провода.

Предположения. Считаем, что в ферромагнитном проводе имеется только один канал проводимости, и он является баллистическим. Ферромагнетик считается двухзонным ($\hbar \lesssim 1$). Для вычисления андреевских уровней никаких ограничений на длину контакта не налагается. Однако ток - фазовое соотношение будет вычислено в пределе короткого контакта: $L \ll \xi_0$ (см. 3). Для простоты направим обменное поле \vec{h} по оси z .

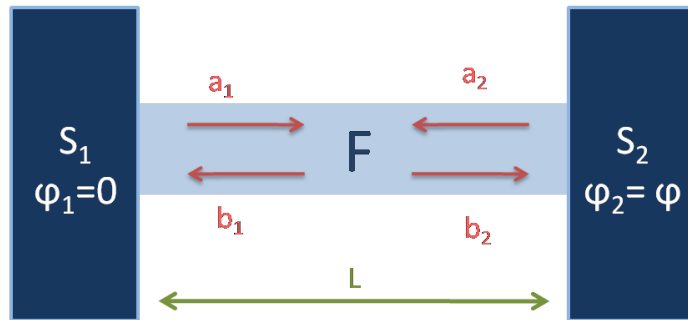


Рис. 6: Схема SFS - перехода

Для конкретизации приведенного выше общего рассуждения выпишем вектора $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ из

(37), (38) в явном виде

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{e\uparrow}^{(1)} \\ a_{e\downarrow}^{(1)} \\ a_{h\uparrow}^{(1)} \\ a_{h\downarrow}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{e\uparrow}^{(2)} \\ a_{e\downarrow}^{(2)} \\ a_{h\uparrow}^{(2)} \\ a_{h\downarrow}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{e\uparrow}^{(1)} \\ b_{e\downarrow}^{(1)} \\ b_{h\uparrow}^{(1)} \\ b_{h\downarrow}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{e\uparrow}^{(2)} \\ b_{e\downarrow}^{(2)} \\ b_{h\uparrow}^{(2)} \\ b_{h\downarrow}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (42)$$

Здесь индексы коэффициентов символизируют следующее деление: на электроны и дырки (e, h), на частицы со спином вверх и вниз.

Выпишем все матрицы, входящие в уравнения (37) и (38).

4.2 SF - граница

Матрица Σ для отражения от сверхпроводника при падении из ферромагнетика получается сшивкой собственных функций в ферромагнетике (см. 1.5.1) с одной стороны и в сверхпроводнике (см. 1.5.2) с другой стороны.

Безразмерная щель $\Delta \ll 1$ (напомним, что за единицу принята энергия Ферми), а значит и характерная энергия возбуждений (нас в основном интересуют подщелевые возбуждения) также является малым параметром.

В то же время мы собираемся рассматривать сильные ферромагнетики с h достигающими единицы. Поэтому имеет смысл пренебречь энергиями E в формулах (23) и (24). Таким образом далее рассматриваются только два различных значения волнового вектора

$$k_{\uparrow} = \sqrt{1 + h} \quad (43)$$

$$k_{\downarrow} = \sqrt{1 - h}$$

Матрица имеет следующую структуру

$$\Sigma = \begin{pmatrix} r_{\uparrow\uparrow} & 0 & 0 & r_{eh} \\ 0 & r_{\downarrow\downarrow} & -r_{eh} & 0 \\ 0 & -r_{he} & r_{\uparrow\uparrow} & 0 \\ r_{he} & 0 & 0 & r_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Здесь коэффициенты $r_{\uparrow\uparrow}, r_{\downarrow\downarrow}$ отвечают нормальному отражению электрона в электрон и дырки в дырку без переворота спина. При нормальном отражении тип частицы не важен, а значение имеет только спин.

Коэффициенты r_{he}, r_{eh} описывают андреевское отражение соответственно электрона в дырку и дырки в электрон с переворотом спина. При андреевском отражении спин частицы не важен.

В явном виде

$$\Sigma = e^{-i\theta_1} \begin{pmatrix} \sqrt{1-r^2}e^{-i\theta_2} & 0 & 0 & re^{i\varphi} \\ 0 & -\sqrt{1-r^2}e^{i\theta_2} & -re^{i\varphi} & 0 \\ 0 & -re^{-i\varphi} & \sqrt{1-r^2}e^{-i\theta_2} & 0 \\ re^{-i\varphi} & 0 & 0 & -\sqrt{1-r^2}e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{Arg} [(k_\uparrow + k_\downarrow) \cos \chi + i (1 + k_\uparrow k_\downarrow) \sin \chi] \\ \theta_2 &= \text{Arg} [(k_\uparrow - k_\downarrow) \cos \chi + i (1 - k_\uparrow k_\downarrow) \sin \chi] \\ r &= \sqrt{\frac{4k_\uparrow k_\downarrow}{(k_\uparrow + k_\downarrow)^2 \cos^2 \chi + (1 + k_\uparrow k_\downarrow)^2 \sin^2 \chi}} \end{aligned} \quad (46)$$

Учтем наложенные на χ ограничения (29) и выберем определенную ветвь функции аргумента

$$\begin{aligned} \theta_1 &\in [0, \pi] \\ \theta_2 &\in [0, \pi] \end{aligned} \quad (47)$$

Величина r имеет смысл амплитуды андреевского отражения.

Зависимость вероятности андреевского отражения от величины обменного поля и энергии налетающей частицы проиллюстрирована на Рис.(7). Как видно, в пределе $h \ll 1$ (но по прежнему $h \gg \Delta$) вероятность $|r|^2$ андреевского отражения стремится к единице. При увеличении h появляется конечная вероятность нормального отражения, и когда h близко к единице, практически все частицы отражаются нормально.

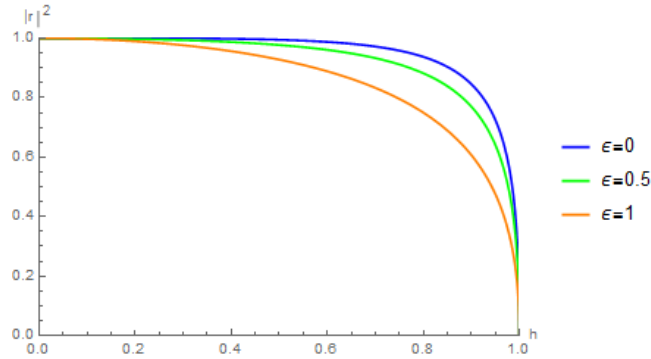


Рис. 7: Вероятность андреевского отражения в зависимости от энергии $E/\Delta = \cos \chi$ и обменного поля h .

Этим мы воспроизводим результат статьи [10].

4.3 Матрица рассеяния ферромагнетика

В одноканальном баллистическом проводе блоки r_{11}, r_{22} (см. (32)) нулевые, а весь эффект сводится к набору фазы в блоках

$$t_{12} = t_{21} = \begin{pmatrix} e^{ik_{\uparrow}L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_{\downarrow}L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{\uparrow}L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_{\downarrow}L} \end{pmatrix} \quad (48)$$

(здесь сделано предположение (43))

4.4 Уравнение на спектр

Ввиду того, что намагниченность в проводе однородна, единственным процессом, в котором спин частицы переворачивается, является андреевское отражение. Это позволяет нам разделить все уровни на два независимых спиновых сектора:

$$e \uparrow, h \downarrow \quad \text{и} \quad e \downarrow, h \uparrow$$

Формально это выражается в разделении уравнения(39), содержащего матрицу 8×8 , на два независимых уравнения с матрицами 4×4 . Для разделения необходимо изменить порядок элементов в векторах $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$. Получаем

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & r_{he}^{(1)} e^{-ik_{\downarrow}L} & r_{\uparrow\uparrow} e^{ik_{\uparrow}L} & 0 \\ r_{eh}^{(2)} e^{ik_{\uparrow}L} & -1 & 0 & r_{\downarrow\downarrow} e^{-ik_{\downarrow}L} \\ \hline r_{\uparrow\uparrow} e^{ik_{\uparrow}L} & 0 & -1 & r_{he}^{(2)} e^{-ik_{\downarrow}L} \\ 0 & r_{\downarrow\downarrow} e^{-ik_{\downarrow}L} & r_{eh}^{(1)} e^{ik_{\uparrow}L} & -1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_{e\uparrow}^{(1)} \\ a_{h\downarrow}^{(2)} \\ a_{e\uparrow}^{(2)} \\ a_{h\downarrow}^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (49)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & r_{he}^{(1)} e^{-ik_{\uparrow}L} & r_{\downarrow\downarrow} e^{ik_{\downarrow}L} & 0 \\ r_{eh}^{(2)} e^{ik_{\downarrow}L} & -1 & 0 & r_{\uparrow\uparrow} e^{-ik_{\uparrow}L} \\ \hline r_{\downarrow\downarrow} e^{ik_{\downarrow}L} & 0 & -1 & r_{he}^{(2)} e^{-ik_{\uparrow}L} \\ 0 & r_{\uparrow\uparrow} e^{-ik_{\uparrow}L} & r_{eh}^{(1)} e^{ik_{\downarrow}L} & -1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_{e\downarrow}^{(1)} \\ a_{h\uparrow}^{(2)} \\ a_{e\downarrow}^{(2)} \\ a_{h\uparrow}^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad (50)$$

Каждое из этих уравнений описывает свою группу и одно получается из другого заменой $h \rightarrow -h$, что сводится к $\uparrow \rightarrow \downarrow, \downarrow \rightarrow \uparrow$ и $\theta_2 \rightarrow -\theta_2$.

Спектральное уравнение (40) распадается следующим образом:

$$\cos [2\theta_1 - (k_{\uparrow} - k_{\downarrow}) L] - (1 - r^2) \cdot \cos [2\theta_2 - (k_{\uparrow} + k_{\downarrow}) L] = r^2 \cos \varphi \quad (51)$$

$$\cos [2\theta_1 + (k_{\uparrow} - k_{\downarrow}) L] - (1 - r^2) \cdot \cos [2\theta_2 + (k_{\uparrow} + k_{\downarrow}) L] = r^2 \cos \varphi \quad (52)$$

5 Спектр возбуждений. Ток-Фазовое соотношение

5.1 Предел слабого ферромагнетика $h \ll 1$

5.1.1 Некритические точки

Спектральные уравнения (51) и (52) могут быть решены приближенно в предельном случае слабого ферромагнетика $h \ll 1$ (при этом величина hL может принимать любые значения). Для более общего случая проведено численное решение спектральных уравнений (5.2).

В этом пределе уравнения можно разложить в ряд по малому параметру h

$$k_{\uparrow} = \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2$$

$$k_{\downarrow} = \sqrt{1-h} \approx 1 - \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2$$

Разложим все входящие в уравнение величины

$$\theta_1 \approx \chi - \frac{h^2}{16} \sin 2\chi$$

$$\theta_2 \approx \frac{h}{2} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

$$r \approx 1 - \frac{\varepsilon^2 h^2}{8}$$

$$\sqrt{1-r^2} \approx \frac{\varepsilon h}{2}$$

(54)

Отбрасывая члены $\sim h^3$ и выше, получаем приближенные уравнения

$$\cos(2\chi - hL) - \cos \varphi = -\frac{h^2}{8} \{ \sin 2\chi \sin(2\chi - hL) + 2 \cos^2 \chi (\cos \varphi - \cos 2L) \}$$

$$\cos(2\chi + hL) - \cos \varphi = -\frac{h^2}{8} \{ \sin 2\chi \sin(2\chi + hL) + 2 \cos^2 \chi (\cos \varphi - \cos 2L) \}$$

Правая часть имеет порядок $\sim h^2 \ll 1$. Она описывает эффекты нормального отражения, которое для слабого ферромагнетика маловероятно. Пренебрегая этой частью, мы рассматриваем замкнутые электрон - дырочные “траектории”, когда в одну стороны летит электрон, а в обратную - дырка (см.Рис.8). Нормальное отражение “замешивает” две траектории с противоположными направлениями: (a) и (b), (c) и (d). Этим можно пренебречь, если соответствующие энергии далеки друг от друга. Это действительно так для всех точек за исключением особых $\varphi = 0, \pm\pi$. Они будут рассмотрены отдельно ниже.

Таким образом, оставляем только тот вклад от h , который описывает набор фазы при прохождении по проводу:

$$\sin \left[\chi + \frac{-\varphi - hL}{2} \right] \cdot \sin \left[\chi + \frac{\varphi - hL}{2} \right] = 0$$

$$\sin \left[\chi + \frac{-\varphi + hL}{2} \right] \cdot \sin \left[\chi + \frac{\varphi + hL}{2} \right] = 0$$

(56)

И решения в терминах угла χ (29) имеют вид (расположение решений соответствуют Рис.8)

$$(a) \quad \chi = \frac{\varphi}{2} + \frac{hL}{2} + \pi n \quad \chi = -\frac{\varphi}{2} + \frac{hL}{2} + \pi n \quad (b)$$

$$(c) \quad \chi = \frac{\varphi}{2} - \frac{hL}{2} + \pi n \quad \chi = -\frac{\varphi}{2} - \frac{hL}{2} + \pi n \quad (d)$$

На Рис. (10) показан спектр в терминах $\varepsilon = \frac{E}{\Delta}$.

На первый взгляд, из того, что имеется четыре уравнения, следует наличие четырех незаполненных уровней энергии над поверхностью Ферми и четырех под ней (соответственно для $E > 0$ и $E < 0$). Однако это не так (см Рис.11): каждому значению φ соответствуют всего два уровня.

Для пояснения рассмотрим более простую систему - SNS - переход. Для него в уравнениях (57) исчезает h и уровни (b), (d) сливаются в (I) и (a), (c) сливаются в (II):

$$(I) \quad \chi = -\frac{\varphi}{2} + \pi n \quad \rightarrow \quad \varepsilon = -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{sign}(\sin \varphi)$$

$$(II) \quad \chi = \frac{\varphi}{2} + \pi n \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{sign}(\sin \varphi)$$

Так как на χ наложено ограничение (29) в терминах ε необходимо ввести дополнительные переключения знака при $\varphi = 0$ (см. Рис.9). Поэтому решения (I) и (II) не сосуществуют при одном φ . Они скачком переходят друг в друга, и уровень остается двукратно вырожденным (по спине).

Аналогичная ситуация имеет место в SFS - переходе. Только здесь каждая кривая разделится на две по направлениям спина - каждая кривая получает фазовый сдвиг hL в том или ином направлении.

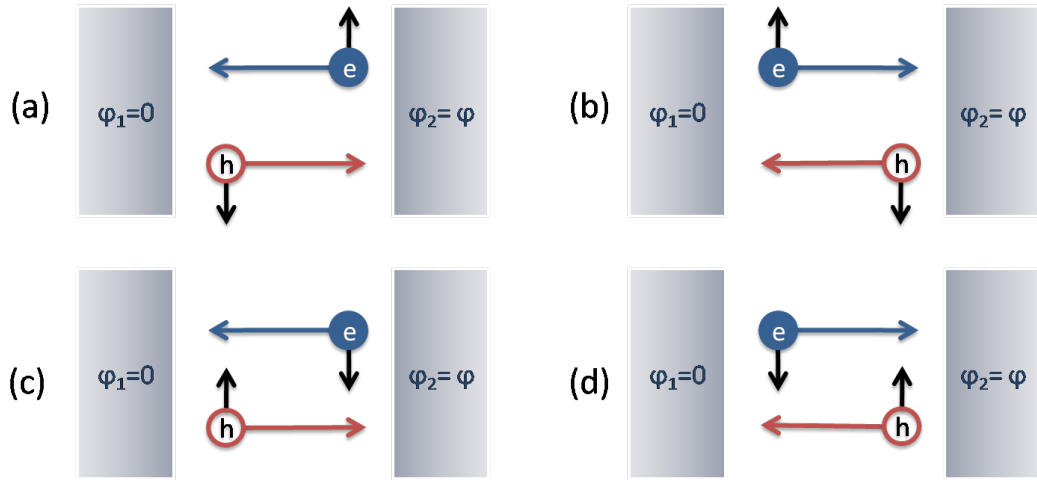


Рис. 8: Структура связанных состояний в SFS - контакте

5.1.2 Критические точки

Перейдем теперь к более детальному анализу точек вырождения.

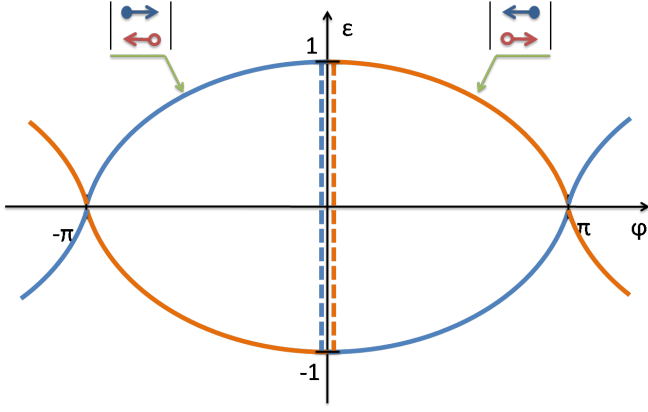


Рис. 9: Спектр SNS - контакта

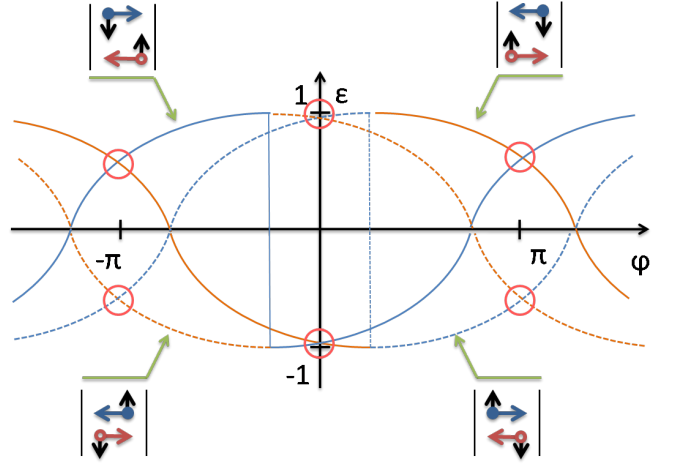


Рис. 10: Спектр SFS - контакта

На качественном уровне расщепление возникнет там, где сближаются уровни соответствующие состояниям (a) и (b), (c) и (d) (обведены красными кружками на Рис. 10). Так нормальное отражение не переворачивает спин, пересечения уровней, принадлежащих различным спиновым блокам к расщеплению не приведет. Численный результат приведен на Рис.11. На нем синяя часть кривой соответствует первому из уравнений (55), а желтая - второму. Как обсуждалось выше, когда ε достигает 0 или 1, происходит резкое изменение внутренней структуры состояния (см. Рис.9 и Рис.10).

Рассмотрим $\varphi = 0$ и пресечение состояний (a) и (b). Обозначим как x поправку ($x \ll 1$) к уже полученным уровням

$$\chi = \frac{hL}{2} + x \quad (59)$$

Разложение вблизи $\varphi = 0$ и $x = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} LHS &= 1 + x \cdot \frac{h^2}{4} \sin hL - x^2 \cdot \left(2 - \frac{h^2}{2} \cos hL\right) + O(h^3) \\ RHS &= 1 - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{h^2}{4} \cos^2\left(\frac{hL}{2}\right) \left[1 - \frac{\varphi^2}{2} - \cos 2L\right] + \\ &+ x \cdot \frac{h^2}{2} \sin hL \left[1 - \frac{\varphi^2}{2} - \cos 2L\right] + \\ &+ x^2 \cdot \frac{h^2}{4} \cos hL \left[1 - \frac{\varphi^2}{2} - \cos 2L\right] \end{aligned} \quad (60)$$

Получаем квадратичное уравнение на x

$$ax^2 + bx + c = 0$$

где

$$a = 1$$

$$b = \frac{h^2}{4} \sin hL \left[1 - \frac{\varphi^2}{2} - \cos 2L \right] \quad (61)$$

$$c = -\frac{h^2}{8} \cos^2 \left(\frac{hL}{2} \right) (1 - \cos 2L) - \frac{\varphi^2}{4} \left[1 + \frac{h^2}{8} \cos hL \cdot (1 + \cos 2L) - \frac{h^2}{4} \cos^2 \left(\frac{hL}{2} \right) \right]$$

В точке $\varphi = 0$ дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = \frac{h^2}{2} \cos^2 \left(\frac{hL}{2} \right) (1 - \cos 2L) + O(h^4) > 0 \quad (62)$$

В терминах χ решения имеют вид:

$$\chi_{1,2} = \frac{hL}{2} \pm \frac{h}{2} \left| \cos \left(\frac{hL}{2} \right) \sin L \right| + O(h^2) \quad (63)$$

и величина расщепления (см. Рис.12)

$$\Delta\varepsilon = \left| \sin \left(\frac{hL}{2} \right) \Delta\chi \right| = \frac{h}{2} \left| \sin hL \cdot \sin L \right| \quad (64)$$

Видно, что в особых точках $\cos \left(\frac{hL}{2} \right) \sin L = 0$ расщепление исчезает. Это означает что матричный элемент перехода из (a) в (b) за счет нормального отражения зануляется. Действительно, при $\varphi = 0$ и $\chi = \frac{hL}{2}$ правая часть формул (55) имеет вид:

$$\sin(hL) \sin(hL - hL) + 2 \cos^2 \left(\frac{hL}{2} \right) [1 - \cos 2L] = 4 \cos^2 \left(\frac{hL}{2} \right) \sin^2 L \quad (65)$$

и матричный элемент пропадает при $\sin L = 0$ (величина $\frac{hL}{2}$ меняется гораздо медленнее, чем само L , так как $h \ll 1$, и описывает крупномасштабное изменение формы спектра).

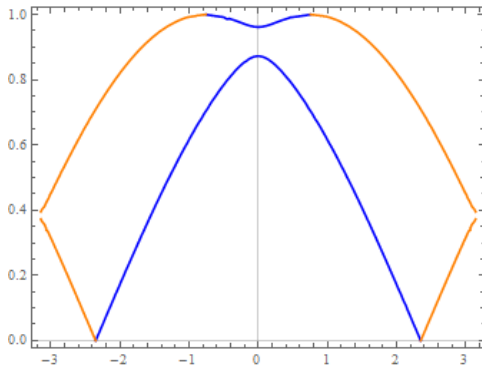


Рис. 11: Численный спектр SFS - перехода. $h = 0.2, hL = 0.35\pi$

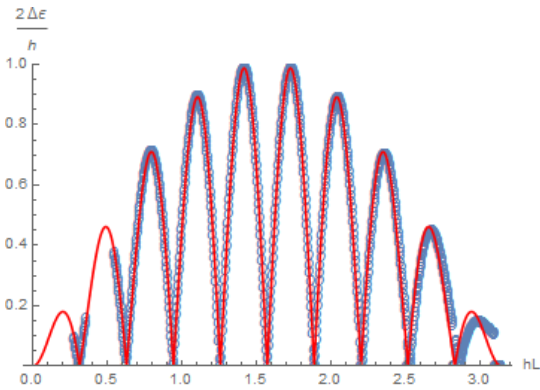


Рис. 12: Величина расщепления в $\varphi = 0$

5.2 Численные результаты для неперedefьного случая

Для произвольных значений обменного поля решить уравнения (51),(52) не получится. Здесь применим только численный подход. На Рис.13 приведены графики спектра и ток - фазового соотношения для $h = 0.9$. Разница между парами графиков состоит в значении hL . Как видно, при $hL = \pi$ ток - фазовая характеристика приобретает характерный вид π - перехода. Первая пара графиков построена для ($hL = 1.8\pi$). Это сделано для того, чтобы получить график для $hL = 2\pi n$. При подстановке $hL = 0$ эффект ферромагнетика исчезает.

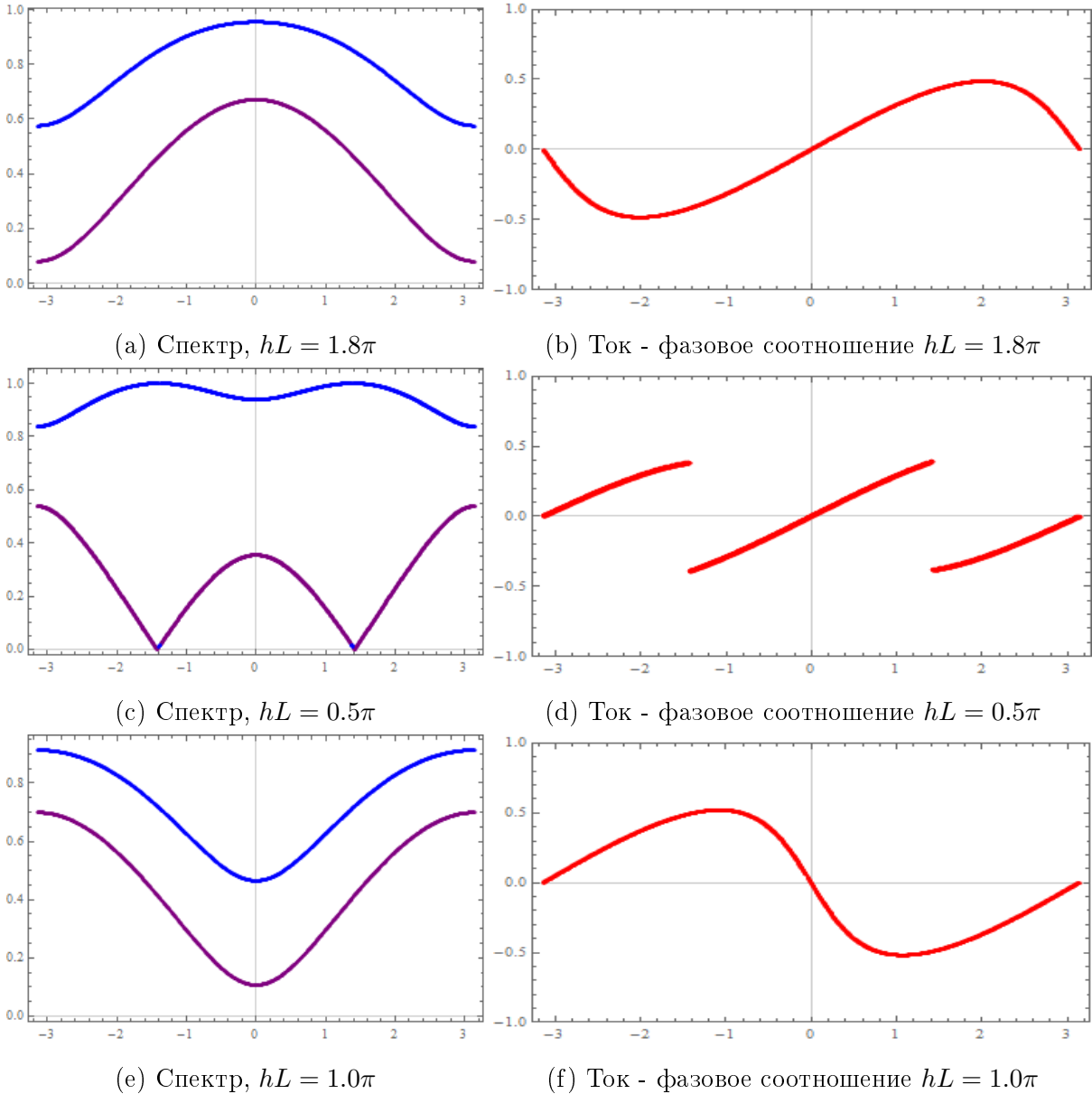


Рис. 13: На рисунках приведены численные графики для спектра и ток-фазового соотношения. $h = 0.9$.

Часть IV

Андреевские состояния в ферромагнитном делителе

В этой части мы переходим к рассмотрению исходной физической задачи - описанию андреевских уровней в системе с ферромагнитным делителем куперовских пар.

6 Модель

Для описания процессов, происходящий в подобной системе, предлагается следующая модель.

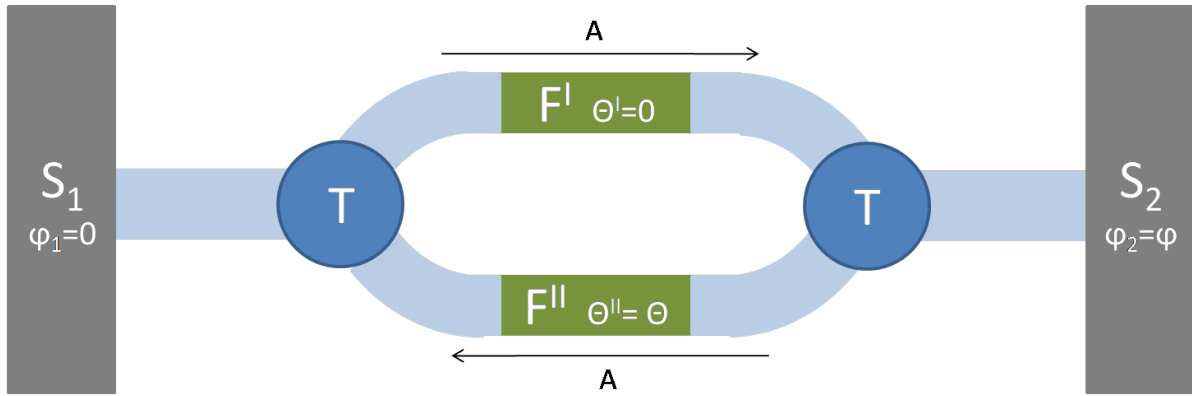


Рис. 14: Схема модельной системы

Рассматриваются два сверхпроводника S_1 и S_2 с фазами 0 и φ соответственно.

Через делители пучков T они соединены с двумя ферромагнитными рукавами F^I и F^{II} . Все остальные соединительные провода (светло-голубые части на Рис.14) считаются баллистическими и короткими (то есть при прохождении по ним нет набора фазы). Детальное описание делителей см. 6.1. Поскольку важна только относительная ориентация намагниченностей ферромагнетиков, направим \vec{h} по оси z в рукаве F^I . Тогда в F^{II} обменное поле \vec{h} составит угол θ с осью z . Описание матрицы рассеяния ферромагнитного рукава см. в 6.2.

6.1 Матрица тройника

В качестве делителей T мы рассматриваем идеальные T -симметричные делители [11]:

Матрица рассеяния такого делителя имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}^I \\ \mathbf{c}^{II} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}^I \\ \mathbf{d}^{II} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (66)$$

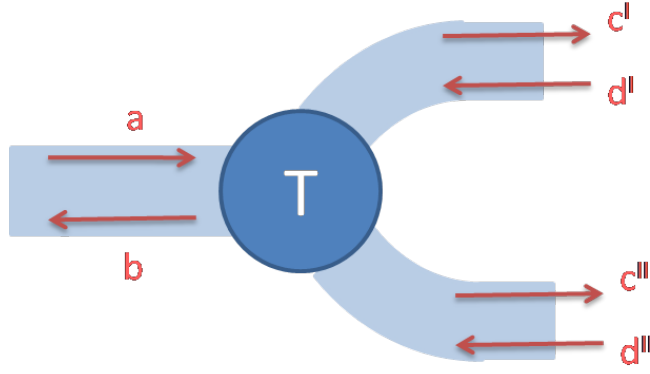


Рис. 15: Схема модельной системы

(Здесь под каждым матричным элементом подразумевается матрица 4×4 , на диагонали которой стоит указанное число)

Такой делитель называется идеальным потому, что падающая в выделенный терминал волна **a** проходит без отражения и поровну разделяется между рукавами *I* и *II*.

Приведенная матрица - минимальный по сложности выбор, позволяющий выяснить что-либо об исследуемой системе. Существует и более общий неидеальный Т-делитель, который, разумеется, лучше описывает реальную систему. Но его матрица сильно сложнее приведенной, и вычисления с ее использованием крайне затруднительны.

Надо отметить, что в предельном случае очень сильного ферромагнетика (см.) такая простая матрица действительно приводит к нефизическому результату, и возникает необходимость ее усложнения. В остальных случаях такой необходимости нет.

6.2 Матрица рассеяния ферромагнитного рукава

В качестве промежуточного шага найдем матрицу рассеяния одного ферромагнитного рукава. С ее помощью далее (6.3) будет вычислена матрица рассеяния всего ферромагнитного делителя, включающего оба рукава и оба тройника. Напомним, что сейчас рассматриваются полуметаллические ферромагнетики.

Это вычисление проводится по процедуре сшивки волновых функций на левой и правой границах ферромагнитной части. При этом волновые функции раскладываются по базису собственных состояний (23), (24) и (25) и результирующее соотношение записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} \\ t_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix} \quad (67)$$

где элементы r_{ii}, t_{ij} являются матрицами 4×4 . Здесь опущен индекс рукава (*I* и *II*) поскольку оба рукава эквивалентны.

Укажем, что здесь модель ферромагнетика отличается от использованной в части III. Разница состоит в положении энергии Ферми. Там считалось, что спиновые сдвинуты вверх

и вниз симметрично относительно энергии Ферми. Поэтому там фигурировали два волновых вектора $k_{\uparrow} = \sqrt{1+h}$ $k_{\downarrow} = \sqrt{1-h}$.

В этой части используется модель, в которой выгодная спиновая подзона не сдвинута (относительно нормального металла), а вот невыгодная (спин вниз) поднялась на удвоенную величину (ср. Рис.19 и Рис.16). Теперь используются следующие волновые вектора:

$$\begin{aligned} k_{\uparrow} &= 1 & k_{\downarrow} &= \sqrt{1-2h} = \pm i\kappa \\ \kappa &= \sqrt{2h-1} \end{aligned} \quad (68)$$

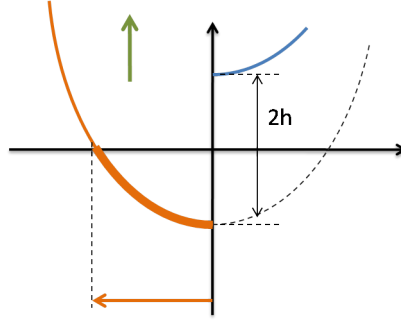


Рис. 16: Новый выбор ферми-уровня

Для простоты выпишем матрицы для $\theta = 0$:

$$r_{11} = r_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^* \end{pmatrix} \quad (69)$$

$$t_{12} = \begin{pmatrix} e^{iL+i\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & e^{-iL-i\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^* \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad t_{21} = \begin{pmatrix} e^{iL-i\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & e^{-iL+i\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^* \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (70)$$

где коэффициенты r и t имеют смысл амплитуды отражения и прохождения:

$$r = \frac{(\kappa^2 + 1) \sinh(\kappa L)}{(\kappa^2 - 1) \sinh(\kappa L) - 2i\kappa \cosh(\kappa L)} \quad (71)$$

$$t = \frac{-2i\kappa e^{-iL}}{(\kappa^2 - 1) \sinh(\kappa L) - 2i\kappa \cosh(\kappa L)} \quad (72)$$

Также здесь восстановлена фаза, возникающая из-за присутствия вектор-потенциала (см.1.5.1).

$$\gamma = L \frac{e}{c} A_x = \frac{\pi}{2} \frac{\varphi}{\varphi_0} \text{sign}(A_x) \quad (73)$$

Матрицы, соответствующие произвольному наклону θ могут быть получены из написанных переходом в повернутую систему координат. Формально это сводится к домножению на матрицу поворота $R(\theta)$:

$$\begin{aligned} r(\theta) &= R^{-1}(\theta)rR(\theta) \\ t(\theta) &= R^{-1}(\theta)tR(\theta) \end{aligned} \quad (74)$$

где

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (75)$$

6.3 Матрица рассеяния ферромагнитного делителя

Теперь нужно вычислить матрицу рассеяния S^F всего перехода (см. 37), то есть пары ферромагнитных рукавов и пары тройников.

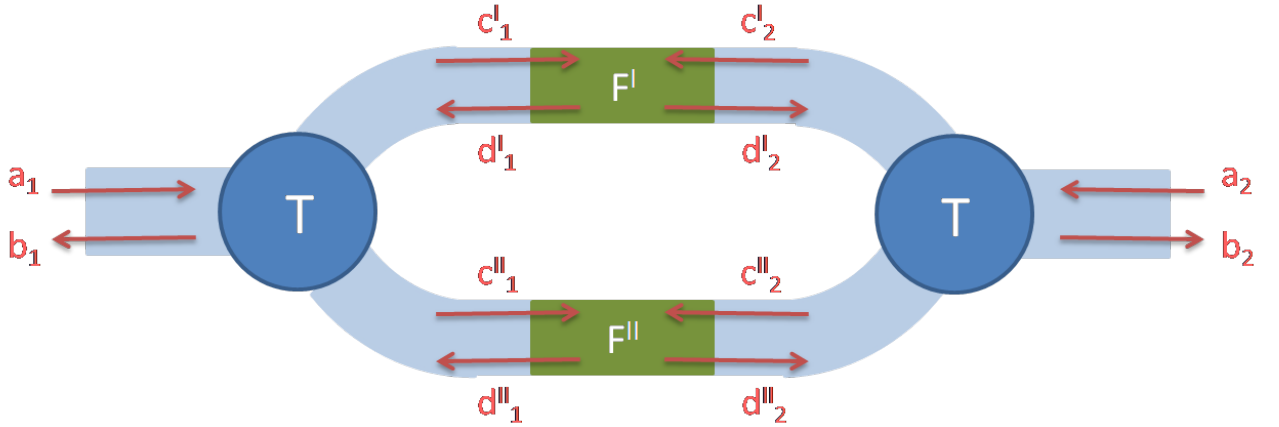


Рис. 17: Расположение обозначений

Прохождение через левый и правый делители описывается следующими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^I \\ \mathbf{c}_1^{II} \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1^I \\ \mathbf{d}_1^{II} \\ \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{c}_2^I \\ \mathbf{c}_2^{II} \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_2^I \\ \mathbf{d}_2^{II} \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

Прохождение частиц по ферромагнитным рукавам описывается следующими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_1^I \\ \mathbf{d}_2^I \\ \mathbf{d}_1^{II} \\ \mathbf{d}_2^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(0) & t_{12}(0) & 0 & 0 \\ t_{21}(0) & r(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r(\theta) & t_{12}(\theta) \\ 0 & 0 & t_{21}(\theta) & r(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^I \\ \mathbf{c}_2^I \\ \mathbf{c}_1^{II} \\ \mathbf{c}_2^{II} \end{pmatrix} \quad (77)$$

В (76) и (77) содержится 10 уравнений и столько же неизвестных векторов. Это позволяет разрешить систему и выразить вектора \mathbf{b}_i через \mathbf{a}_i . Ввиду громоздкости в явном виде матрицу S не выписываем.

Необходимо заметить, что система (76) и (77) не всегда является невырожденной. Это связано с тем, что при выполнении определенных соотношений на параметры в кольце, образованном рукавами, могут существовать собственные моды, никак не связанные с падающими извне волнами и никак не влияющими на выходящие из перехода волны. Матрица рассеяния S определена, но однозначно определить вектора \mathbf{c} , \mathbf{d} нельзя.

Обойти эту сложность можно следующим способом. Если в процессе вычисления система выродилась, достаточно поменять слабо параметры системы так, чтобы мода исчезла. Так как для матрицы рассеяния эти параметры не представляют ничего особого, результат можно продолжить по непрерывности.

7 Спектр

В этом разделе приводятся начальные результаты различных подходов к задаче об андреевских уровнях в исследуемой системе. Сложность состоит в том, что задача оказывается очень чувствительной к выбору приближения. С одной стороны упрощение модели приводит к крайне нефизичным результатам. С другой стороны вычисления в более сложной постановке становятся настолько громоздкими, что их не получается довести до конца.

Ниже приведены следующие подходы:

- 7.1 Модель предельного ферромагнетика ($h \rightarrow \infty$) и тройника, содержащего дополнительный набег фазы.
- 7.2 Модель непердельного, но сильного ферромагнетика ($h \gg 1$).
- 7.3 Приведены предварительные численные результаты.

7.1 Предельный ферромагнетик $h \rightarrow \infty$

Для нахождения спектра системы используем формулу 40, в которой нам уже все известно. Матрица Σ для отражения от границы сверхпроводник - нормальный металл получается предельным переходом $h \rightarrow 0$ из формулы (45). Она имеет вид:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-i\chi+i\varphi} \\ 0 & 0 & -e^{-i\chi+i\varphi} & 0 \\ 0 & -e^{-i\chi-i\varphi} & 0 & 0 \\ e^{-i\chi-i\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Матрица рассеяния всего ферромагнитного делителя (пары рукавов и пары тройников), была найдена выше 6.3. Однако в таком общем виде провести с ней вычисления слишком затруднительно.

Для упрощения рассмотрим предельно сильный ферромагнетик, для которого $h \rightarrow \infty$ и $\kappa \rightarrow \infty$. В таком ферромагнетике невыгодной спиновой подзоны нет. Выгодные спины беспрепятственно проходят через него, в то время как невыгодные отражаются с фазой π .

Формально, как следует из (71) и (72):

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} r = 1 \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} t = 0 \quad (79)$$

Поэтому матрицы отражения и прохождения (69) и (70) имеют простой вид:

$$r_{11} = r_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad t_{12} = \begin{pmatrix} e^{iL+i\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-iL-i\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t_{21} = \begin{pmatrix} e^{iL-i\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-iL+i\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Однако, такое упрощение приводит к тривиальному результату.

Результатом решения системы (76) и (77) является следующий тривиальный ответ:

$$r_{11}^F = r_{22}^F = -\hat{1} \quad t_{21}^F = t_{21}^F = 0 \quad (81)$$

То есть делитель оказывается абсолютно непрозрачным для любых частиц вне зависимости от их спина, и при отражении частицы получают фазовую добавку π .

Заметим, что это неочевидный результат, поскольку каждый из рукавов по прежнему абсолютно прозрачен для выгодного спина. Можно, например, провести электрон со спином вверх по верхнему рукаву и дырку со спином вниз по нижнему. Таким образом, явной причины для непроходимости видно. Кроме того, делитель является непроницаемым при любых взаимных ориентациях ферромагнетиков, при любых набегах фаз в рукавах.

Как объяснено в приложении А, этот эффект является следствием интерференции. Непроходимость делителя аналогична эффекту затемнения в оптике, когда добавление прозрачного слоя приводит к деструктивной интерференции и полной непрозрачности.

Для того, чтобы получить нетривиальный результат, требуется усложнить модель. Деструктивную интерференцию можно разрушить введением дополнительного набега фазы при прохождении по проводам, соединяющим Т - делители и ферромагнитные проставки.

Формально эти фазы можно занести непосредственно в матрицу Т-делителя, изменив ее следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{i\alpha} & \frac{1}{2}e^{i\alpha} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{1}{2}e^{i\alpha} & -\frac{1}{2}e^{i\alpha} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

где используется обозначение

$$e^{i\alpha} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \quad (83)$$

Величина α есть фаза, которую набирает электрон пройдя туда и обратно через соединительный провод. Для провода, соединяющего делитель и сверхпроводник, такую фазу вводить не имеет смысла, так как после отражения от сверхпроводника обратно пойдет дырка и наберет противоположную фазу.

Для такой нетривиальной модели делитель действительно пропускает частицы.

Рассмотрим антипараллельную ориентацию ферромагнетиков $\theta = \pi$.

Спектр имеет вид:

$$E = \Delta \left[1 - T_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]^{1/2}, \quad (84)$$

где

$$T_0 = \frac{16 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{16 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 L + 4 \sin \left(2L + \frac{3\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (85)$$

Видно, что при $\alpha = 0$ угол φ выпадает и $\varepsilon = 1$. Система эффективно превращается в два коротких SNS контакта.

Уравнению можно придать более простой вид, если подобрать конкретные значения параметров.

- При $\alpha = \frac{\pi}{2}, k_{\uparrow}L = 0$ (короткий контакт) спектр следующий:

$$E(\varphi) = \Delta \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (86)$$

Заметим, что в этой формуле фаза γ положена нулем. Причина состоит в том, что влияние магнитного потока пока не рассмотрено достаточно детально.

Ток фазовое соотношение перехода:

$$J(\varphi) = \frac{e\Delta}{\hbar} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3 + \cos \varphi}} \quad (87)$$

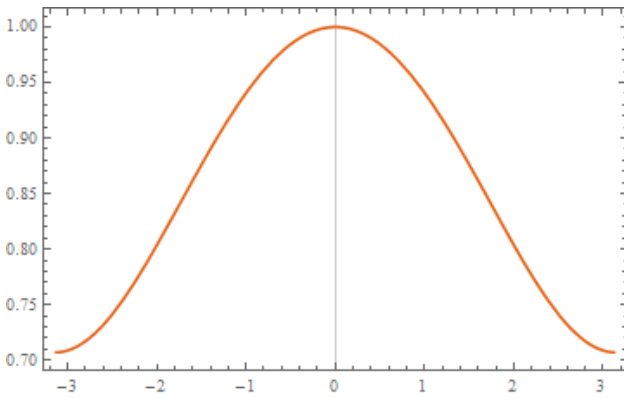


Рис. 18: Спектр перехода

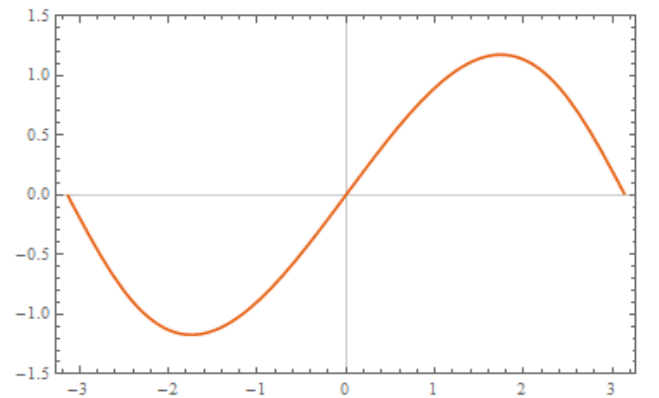


Рис. 19: Ток - фазовое соотношение

- При $\alpha = \pi, k_{\uparrow}L = 0$. В этом случае система обладает спектром и ток - фазовым соотношением, характерными для чистого SNS - перехода:

$$\varepsilon(\varphi) = \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| \quad (88)$$

$$J(\varphi) = \frac{2e\Delta}{\hbar} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{sign}\left[\cos\frac{\varphi}{2}\right] \quad (89)$$

В рамках этой модели можно добавить внешний поток. Также можно рассмотреть произвольные значения угла θ . Это можно сделать прибегая к численным методам (см. 7.3).

На этом мы завершаем рассмотрение передельных ферромагнетиков и переходим к другой модели.

7.2 Непредельный полуметаллический ферромагнетик $h \gg 1$

Рассмотрим очень сильный ферромагнетик с $h \gg 1$ и $\kappa = \frac{1}{\delta} \gg 1$. Здесь величина δ есть характерная глубина проникновения частиц с невыгодным спином.

В пределе $L \gg \delta$ коэффициент t в формуле (72) экспоненциально подавлен. С другой стороны коэффициент r (см. 71) равен:

$$r = \frac{1 + i\delta}{1 - i\delta} = e^{2i\delta} \quad (90)$$

Теперь можно постараться найти ответ в виде ряда по δ . Ввиду чрезвычайной громоздкости выражений сделать это удастся только для малой окрестности $\theta = \pi$ при дополнительном условии $L = 0$.

Разложение по малым δ и отклонению $\delta\theta$ имеет вид:

$$\varepsilon = 1 - 2\delta^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + O(\delta\theta^3) + O(\delta^3) \quad (91)$$

Соответственно ток - фазовое соотношение:

$$J \sim \delta^2 \sin \varphi \quad (92)$$

Такое ток - фазовое соотношение характерно для туннельного контакта. Как видно, в пределе $h \rightarrow \infty$ фаза $\gamma \rightarrow 0$ и делитель закрывается - ток в переходе исчезает.

Эту модель можно расширить, добавив магнитный поток и рассмотрев произвольный значения θ . Это можно сделать численными методами (см. 7.3).

7.3 Численные результаты

Для того, чтобы рассмотреть более реалистичный ферромагнетик с $h \sim 1$, или для того, чтобы обобщить полученные выше результаты на ненулевой внешний поток и произвольные угла, приходится прибегать вычислительному решению уравнений.

На рисунках 20а, 20б приведены предварительные результаты расчета для системы со следующими параметрами: $h = \kappa = 1$, $L = 1$, $q = 0.73\pi$

Другие численные данные не представлены, так как они содержат некоторые особенности, требующие более детального рассмотрения.

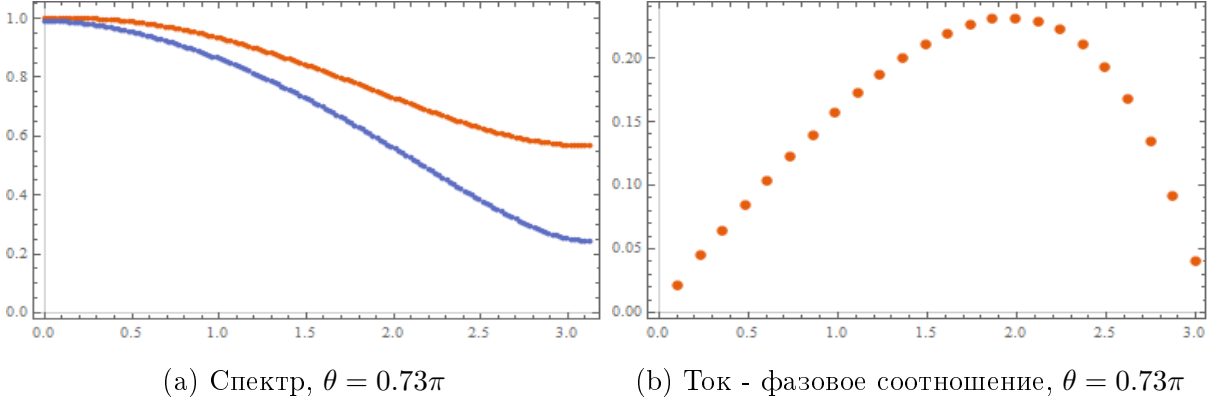


Рис. 20: На рисунках приведены численные графики спектра и ток-фазового соотношения для угла $\theta = 0.73\pi$.

Часть V

Заключение

В работе проведена предварительная подготовка к вычислению спектра андреевских уровней в системе с ферромагнитным делителем куперовских пар. Детально рассмотрена более простая задача SFS - перехода. Также найдены две модели исследуемой системы. Сложность подбора состояла в том, что система оказывается очень чувствительной к выбору приближения: переупрощение ведет к нефизичному результату, а добавление дополнительных параметров делает вычисления крайне громоздкими.

Для найденных моделей планируется обобщение на случай конечного магнитного потока и произвольного угла между намагниченностями ферромагнетиков. Также необходимо провести численное моделирование системы для промежуточных значений параметров.

Приложение А Интерференционные эффекты в ферромагнитном делителе

Покажем, как непроходимость ферромагнитного делителя объясняется интерференцией.

Чтобы продемонстрировать, что непрозрачность не является следствием выбора идеального T - симметричного делителя, рассмотрим более общий случай с неидеальным делителем.

Его матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\sin^2 \frac{\beta}{2} & \cos^2 \frac{\beta}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \beta \\ \cos^2 \frac{\beta}{2} & -\sin^2 \frac{\beta}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \beta \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \beta & \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \quad (93)$$

Параметр β характеризует неидеальность тройника. При $\beta = \frac{\pi}{2}$ тройник идеальный, то

есть падающая в выделенный вход волна входит без отражения. Напротив, при $\beta = 0$ волна вообще не может войти в этот вход.

Рассмотрим случай антипараллельной ориентации ферромагнетиков. Выберем, например, частицу со спином вверх. Она беспрепятственно проходит через верхний рукав, а нижний рукав для нее перекрыт (см. Рис21a).

Амплитуда отражения от одного тройника.

Вычислим амплитуду отражения частицы. При этом достаточно рассмотреть проходимость только одного тройника (см. Рис21b) - уже он становится непроницаемым, не говоря уже о всем делителе в целом.

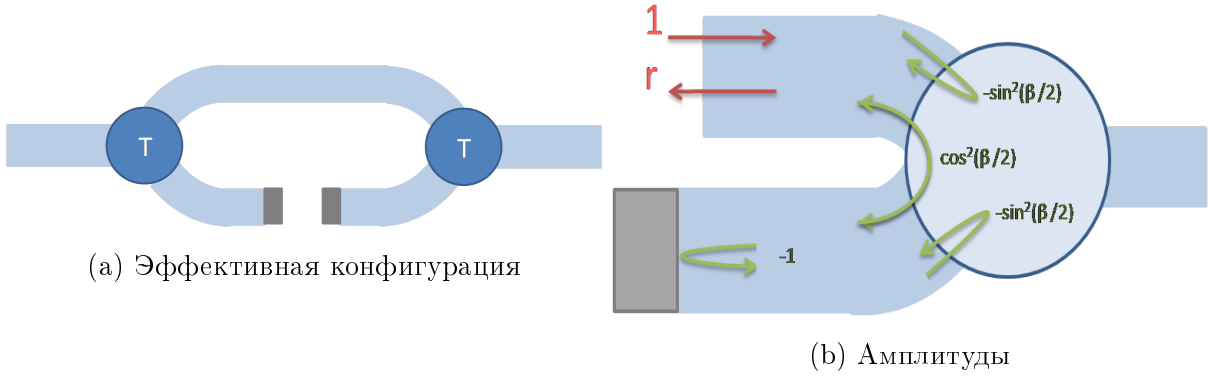


Рис. 21: Расчет амплитуды отражения в случае предельного ферромагнетика

Частица может отразиться непосредственно от тройника: это дает вклад в амплитуду отражения $a_1 = -\sin^2 \frac{\beta}{2}$.

Также частица может пройти в тупиковый рукав и многократно переотражаться от ферромагнитного барьера, получая множитель -1 , и тройника, получая множитель $-\sin^2 \frac{\beta}{2}$. Для нахождения полной амплитуды процесса с заходом в закрытый рукав необходимо просуммировать весь ряд (“ужирнить” соответствующую линию):

$$a_2 = \cos^2 \frac{\beta}{2} \left[(-1) + (-1) \left(-\sin^2 \frac{\beta}{2} \right) (-1) + \dots \right] \cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{-\cos^4 \frac{\beta}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2}} = -\cos^2 \frac{\beta}{2} \quad (94)$$

Полная амплитуда отражения:

$$a = a_1 + a_2 = -1 \quad (95)$$

Это значит что добавление тупикового резонатора к тройнику приводит к полному затемнению. И это никак не зависит от его неидеальности.

Для получения нетривиального результата требуется ввести некоторую фазовую добавку, которая разрушила бы интерференцию. Это можно сделать следующими способами:

- Ввести набег фазы при прохождении по проводам тройника. Физически это соответствует геометрии SQUID-а, где плечи сделаны из нормального металла, а слабые связи - из полуметаллического ферромагнетика. Этот подход обсуждается в 7.1;

- Рассмотрим более реалистичный предел $h \gg 1$ вместо абсолютно предельного ферромагнетика. Этот подход описан в 7.2.

Вычисление полной матрицы делителя

Найдем теперь полную матрицу S_F всей структуры (пары тройников и пары рукавов). Это вычисление немного более сложное.

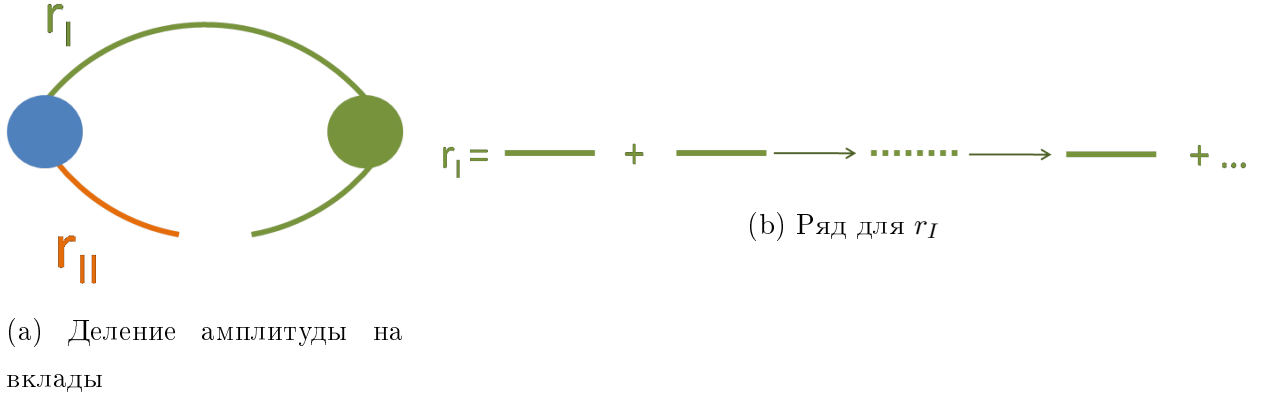


Рис. 22: Амплитуда отражения от полной системы

Разделим систему на два плеча (Рис. 22а) и вычислим для каждого плеча амплитуду отражения (r_I и r_{II} соответственно), при условии что возбуждение уже попало в соответствующий рукав и достоверно вылетит из него после некоторого числа внутренних переотражений.

Поясним на примере: вероятность попадания падающей извне частицы в верхний рукав равна $\sqrt{\frac{1}{2}} \sin \beta$. Вероятность вылета частицы из этого рукава наружу такая же. Поэтому амплитуда процесса, в котором частица, падая извне, попадает в верхний рукав, многократно переотражается туда-обратно внутри него, а затем вылетает наружу, равна $\sqrt{\frac{1}{2}} \sin \beta \cdot r_I \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \beta$.

Амплитуда r_{II} равна сумме ряда (для удобства обозначим $\frac{\beta}{2} = b$):

$$r_{II} = -1 + (-1) \cdot (-\sin^2 b) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-\sin^2 b) \cdot (-1) \cdot (-\sin^2 b) \cdot (-1) + \dots = -\frac{1}{\cos^2 b} \quad (96)$$

При вычислении амплитуды r_I необходимо учесть, что кроме переотражений внутри верхнего рукава частица может попадать в нижний тупиковый рукав, вылетая из него только после серии внутренних переотражений. Амплитуда r_I равна ряду на Рис.22b. Поясним, что означает каждый элемент.

Первый член (“толстая линия”) соответствует переотражениям внутри верхнего рукава, без попадания вниз. Он равен:

$$-\sin^2 b + (-\sin^2 b) \cdot (-\sin^2 b) \cdot (-\sin^2 b) + \dots = -\frac{\sin^2 b}{1 - \sin^4 b} \quad (97)$$

Второй член описывает процесс, в котором частица сначала находится в верхнем рукаве, потом залетает в нижний, потом возвращается и вылетает наружу. В нем “стрелка” описывает прохождение через тройник в другой рукав:

$$\frac{\cos^2 b}{-\sin^2 b} = -\cot^2 b \quad (98)$$

Он отличается от матричных элементов в (93) наличием $-\sin^2 b$ в знаменателе потому, что “толстая линия” описывает процессы “туда-обратно” от левого края рукава к правому, когда нам нужно пройти только туда, чтобы попасть в нижний рукав. Также для того чтобы выйти из нижней части частице не нужно идти “туда”, а надо сразу идти “обратно”. В обоих случаях нужно поделить на лишнюю амплитуду отражения и умножить на амплитуду прохождения, то есть домножить “толстую линию” на “стрелку”.

“Пунктирная линия” описывает процессы переотражений в нижнем рукаве:

$$-1 + (-1) \cdot (-\sin^2 b) \cdot (-1) + \dots = -\frac{1}{\cos^2 b} \quad (99)$$

Суммируя ряд для r_I , получаем:

$$r_I = \frac{\sin^2 b \tan^2 b}{1 - \sin^2 b - \sin^4 b} \quad (100)$$

Теперь можно перейти к нахождению полной амплитуды отражения. Все процессы, в которых частица влетела извне и потом вылетела наружу можно разбить на три группы:

- $r_{I>II}$ - частица вначале влетает в верхний рукав и из него же вылетает;
- $r_{I<II}$ - частица вначале влетает в нижний рукав и из него же вылетает;
- $r_{I=II}$ - влетает в один рукав, а вылетает из другого.

В процессах каждой группы частица может попадать в оба рукава много раз, но в одном из них она побывает на единицу раз больше или точно одинаковое число раз в обоих (это отражено индексом).

Найдем каждый вклад:

$$\begin{aligned} r_{I>II} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \sin 2b [r_I + r_I \cdot \cos^2 b \cdot r_{II} \cdot \cos^2 b \cdot r_I + \dots] \sqrt{\frac{1}{2}} \sin 2b = \\ &= 2 \sin^4 b \tan^2 b \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} r_{I<II} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \sin 2b [r_{II} + r_{II} \cdot \cos^2 b \cdot r_I \cdot \cos^2 b \cdot r_{II} + \dots] \sqrt{\frac{1}{2}} \sin 2b = \\ &= 2 (-1 + \sin^2 b + \sin^4 b) \tan^2 b \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} r_{I+II} &= 2\sqrt{\frac{1}{2}} \sin 2b [r_I \cdot \cos^2 b \cdot r_{II} + r_I \cdot \cos^2 b \cdot r_{II} \cdot \cos^2 b \cdot r_I \cdot \cos^2 b \cdot r_{II} + \dots] \sqrt{\frac{1}{2}} \sin 2b = \\ &= -4 \sin^4 b \tan^2 b \end{aligned} \quad (103)$$

Полный вклад от всех процессов, в которых частица влетает в делитель, равен:

$$r_{I>II} + r_{I<II} + r_{I+II} = -2 \sin^2 b \quad (104)$$

Кроме того, что частица может попасть во внутрь делителя, она может отразиться от входного тройника с амплитудой $-\cos 2b$. Суммарная амплитуда отражения частицы от ферромагнитного делителя равна -1 , то есть подтверждается также и тот факт (кроме полной непроходимости), что делитель характеризуется фазой отражения π .

Список литературы

- [1] P. Recher, E. V. Sukhorukov, and D. Loss, *Phys. Rev. B* **63**, 165314 (2001).
- [2] G. B. Lesovik, T. Martin, and G. Blatter, *Eur. Phys. J. B* **24**, 287 (2001)
- [3] J. Borlin, W. Belzig, and C. Bruder, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 197001 (2002).
- [4] N. M. Chtchelkatchev, G. Blatter, G. B. Lesovik, and T. Martin, *Phys. Rev. B* **66**, 161320(R) (2002).
- [5] L. Hofstetter, S. Csonka, J. Nygøard, and C. Schonenberger, *Nature* **461**, 960 (2009).
- [6] L. G. Herrmann, F. Portier, P. Roche, A. Levy Yeyati, T. Kontos, C. Strunk, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 026801 (2010).
- [7] J. Schindele, A. Baumgartner, C. Schonenberger, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 157002 (2012).
- [8] A. Das, Y. Ronen, M. Heiblum, D. Mahalu, A. V. Kretinin, H. Shtrikman, *Nature Commun.* **3**, 1165 (2012).
- [9] C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3836 (1991)
- [10] M.J.M. de Jong, C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 1657, (1994)
P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1966).
- [11] Yuli V. Nazarov and Yaroslav M. Blanter, *Quantum Transport: Introduction to Nanoscience* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009), 1st ed.