

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Физтех-школа Фундаментальной и Прикладной Физики
Кафедра «Проблемы теоретической физики»

Направление подготовки: Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная и прикладная физика

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
«Мезоскопические флуктуации вариации числа частиц и энтропии запутанности»
(бакалаврская работа)

Студент: Биктаиров Юрий Александрович

(подпись бакалавра)

Научный руководитель: д.ф.-м.н., Бурмистров Игорь
Сергеевич

(подпись научного руководителя)

Москва 2018

Содержание

Содержание	1
1 Вступление	3
2 Теоретический анализ	4
2.1 Вычисление дисперсии C_2 в баллистическом пределе $\lambda_F \ll L \ll l$	6
2.1.1 Вычисление баллистической диаграммы	6
2.1.2 Анализ результата	9
2.2 Вычисление дисперсии C_2 в диффузионном пределе $l \ll L$	10
2.2.1 Вычисление баллистического вклада	10
2.2.2 Вычисление диффузионного вклада	11
2.2.3 Анализ результата	15
3 Численное моделирование	15
3.1 Описание расчета	15
3.1.1 Исследуемые величины	15
3.1.2 Процесс вычислений	16
3.1.3 Важность выбора параметров	16
3.2 Средний C_2 в одномерии	16
3.3 Дисперсия C_2 в одномерии	17

3.4	C_2 в $2d$	17
3.5	Сравнение распределений S и C_2 . . .	18
4	Выводы	18
	Список литературы	20

1 Вступление

Запутанность – одна из важнейших идей современной квантовой механики и теории квантовой информации. Она описывает величину корреляций между различными частями системы. В последние годы был достигнут заметный прогресс в исследовании запутанности в рамках различных моделей, особенно много результатов получено для одномерных систем.

Для количественного рассмотрения степени запутанности систем вводят энтропию запутанности. Рассмотрим систему частиц в пространстве произвольной размерности. Энтропия запутанности фон-Неймана подсистемы, заданной областью A (смотри рисунок 1) определяется как

$$S_A = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A),$$

где $\rho_A = \text{Tr}_{\bar{A}}(\rho)$ – матрица плотности подсистемы, полученная из матрицы плотности всей системы взятием следа по внешним степеням свободы. Можно показать, что это определение симметрично в том смысле, что $S_A = S_{\bar{A}}$. Аналогичным образом можно ввести более общую энтропию Реньи

$$S_A^\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr}(\rho_A^\alpha),$$

которая переходит в S_A в пределе $\alpha \rightarrow 1$.

Известно, что в интересующем нас случае отсутствия взаимодействия между фермионами и нулевой температуры (это значит, что $\rho = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$, где Ψ_0 – основное состояние системы), энтропию фон-Неймана можно связать со статистикой числа частиц в подсистеме A . А именно, если ввести кумулянты числа частиц в подсистеме с помощью соотношения

$$K(t) = \log \langle e^{itN_A} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{(it)^n}{n!},$$

где N_A – оператор числа частиц в подсистеме (он будет определен строго ниже), а C_n суть кумулянты, то энтропия запутанности представляется в виде ряда [1]

$$S_A = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) C_{2n},$$

где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана.

В случае чистого металла и простого вида области (шар радиуса L) поведение кумулянтов хорошо изучено: в пределе $k_F L \gg 1$ C_2 растет пропорционально $(k_F L)^{d-1} \log k_F L$, в то время, как остальные слагаемые пропорциональны $(k_F L)^{d-1}$ [2]. Поэтому в озвученном пределе $S_L \sim C_2 \sim (k_F L)^{d-1} \log k_F L$. Стоит заметить, что

¹Импульс Ферми k_F определяется концентрацией частиц в системе, исходя из условия $\frac{A_d}{d} k_F^d = (2\pi)^d n$, где A_d – площадь d -мерной единичной сферы.

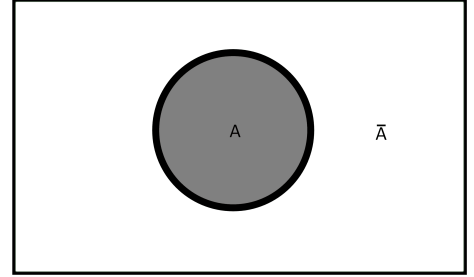


Рис. 1: Подсистема, заданная областью A .

C_2 совпадает с дисперсией числа частиц, в то время как кумулянты высших порядков отличны от соответствующих центральных моментов.

Если произвести точное вычисление, то получим

$$S_A \simeq \frac{\pi^2}{3} C_2 \simeq \frac{\pi}{(2\pi)^d} \frac{A_{d-1} A_d}{3(d-1)} (k_F L)^{d-1} \log k_F L,$$

где A_d – снова площадь d -мерной единичной сферы.

Представляет интерес исследование систем с беспорядком, описывающих грязные металлы. Например, в слабом беспорядке ($l \gg k_F^{-1}$, где l – длина свободного пробега частиц), в котором уже имеется представление о поведении кумулянтов числа частиц. При слабом беспорядке для усредненных кумулянтов функционально повторяются результаты, полученные для чистого случая, когда размеры подсистемы много меньше длины свободного пробега $\lambda_F \ll L \ll l$ и движение фермионов на масштабах подсистемы баллистично. В диффузионном пределе $L \gg l$ изменяется функционально только величина C_2 : при переходе L через l логарифмический рост прекращается, и от логарифма остается вклад $\log k_F l$ [2].

Если учесть, что коэффициенты пропорциональности в $\overline{C_{2m}} = a_m(l) (k_F L)^{d-1}$, $m > 1$ стремятся к своим «чистым» значениям в пределе $k_F l \gg 1$, то в этом же пределе C_2 со своим логарифмическим множителем оказывается параметрически больше всех остальных кумулянтов, и формула, справедливая для чистого случая, становится верной и здесь [2]

$$\overline{S_A} \simeq \frac{\pi^2}{3} \overline{C_2}. \quad (1)$$

В связи с этим, возникает гипотеза, что подобное простое соотношение может быть справедливо не только для средних значений величин, но и для высших моментов распределения энтропии запутанности. Это позволило бы использовать кумулянты в качестве инструмента для изучения всей статистики S , что представляет немалый интерес (смотри, например, [3]). В настоящей работе было проведено исследование наиболее простого кумулянта – вариации C_2 числа частиц в области A . А именно: было произведено аналитическое вычисление дисперсии C_2 в разных режимах; был произведен численный эксперимент, подтверждающий выводы аналитического анализа и демонстрирующий соответствие распределений S_A и C_2 .

2 Теоретический анализ

Мы будем рассматривать систему фермионов в случайном потенциале. Она описывается гамильтонианом

$$H = \int d\mathbf{x} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \left[-\frac{1}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{x}) \right] \Psi(\mathbf{x}),$$

где $\Psi(\mathbf{x})$ – оператор уничтожения частицы в точке \mathbf{x} , а $U(\mathbf{x})$ потенциал случайно расположенных рассеивающих примесей.

Для нахождения $C_2 = \langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2$ сначала строго определим оператор числа частиц в области A как

$$N_A = \int_A d\mathbf{x} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}),$$

следовательно

$$\langle N_A^2 \rangle = \int_A \int_A d\mathbf{x} d\mathbf{y} \langle \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) \rangle.$$

При раскрытии среднего по теореме Вика получим

$$\begin{aligned} \langle \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) \rangle &= \langle \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) \rangle \langle \Psi^\dagger(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) \rangle + \\ &+ \langle \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{y}) \rangle \langle \Psi(\mathbf{x}) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) \rangle \end{aligned}$$

Первое слагаемое даст просто $\langle n(\mathbf{x}) \rangle \langle n(\mathbf{y}) \rangle$ и, следовательно, $\langle N_A \rangle^2$ окончательный ответ, поэтому для вычисления дисперсии нас интересует только второе слагаемое. Разложим операторы рождения по собственным функциям системы

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) a_{\alpha}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{y}) \rangle &= \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{x}) \psi_{\beta}(\mathbf{y}) \langle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} \rangle = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{x}) \psi_{\beta}(\mathbf{y}) \delta_{\alpha\beta} n_{\alpha} = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{x}) \psi_{\alpha}(\mathbf{y}) n_{\alpha}, \end{aligned}$$

где n_{α} – число заполнения уровня α , и

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\mathbf{x}) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) \rangle &= \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \psi_{\beta}^*(\mathbf{y}) \langle a_{\alpha} a_{\beta}^{\dagger} \rangle = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \psi_{\beta}^*(\mathbf{y}) \delta_{\alpha\beta} (1 - n_{\beta}) = \sum_{\beta} \psi_{\beta}(\mathbf{x}) \psi_{\beta}^*(\mathbf{y}) (1 - n_{\beta}). \end{aligned}$$

Итого для дисперсии числа частиц в подсистеме при термодинамическом равновесии выходит

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_A \int_A d\mathbf{x} d\mathbf{y} \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{x}) \psi_{\alpha}(\mathbf{y}) \psi_{\beta}(\mathbf{x}) \psi_{\beta}^*(\mathbf{y}) (1 - n_{\beta}) n_{\alpha} = \\ &= \int_A \int_A d\mathbf{x} d\mathbf{y} \int d\omega dE dE' (1 - n(E)) n(E') \delta(E' - E - \omega) F(E, E', \mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

где $F(E, E', \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{x}) \psi_{\alpha}(\mathbf{y}) \psi_{\beta}(\mathbf{x}) \psi_{\beta}^*(\mathbf{y}) \delta(E - \epsilon_{\beta}) \delta(E' - \epsilon_{\alpha})$ – так называемый структурный фактор, а $n(E)$ – фермиевская функция распределения.

Теперь если учесть нулевую температуру $T = 0$ и сделать логичное предположение о том, что основной вклад дается состояниями, близкими по энергии к энергии Ферми (то есть $\omega \ll E_F$), то мы получим следующее упрощенное выражение

$$C_2 = \int_A \int_A d\mathbf{x} d\mathbf{y} \int_0^{\infty} \omega d\omega F(E_F, E_F + \omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

На этом этапе следует заметить, что если одно из интегрирований по координатам распространить на все пространство, то в структурном факторе из-за соотношения ортогональности появится $\delta_{\alpha\beta}$, которая обнулит все выражение. Из этого следует, что верна также формула

$$C_2 = - \int_A \int_{\bar{A}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \int_0^{\infty} \omega d\omega F(E_F, E_F + \omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Осталось заметить, что структурный фактор может быть записан через петлю из мнимых частей запаздывающей функции Грина. Действительно

$$\begin{aligned} G^{\mathbf{R}}(E_F + \omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \sum_{\alpha} \frac{\psi_{\alpha}(\mathbf{x}_1) \psi_{\alpha}^*(\mathbf{x}_2)}{E_F + \omega - \epsilon_{\alpha} + i0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Im G^{\mathbf{R}}(E_F + \omega, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\pi \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{x}_1) \psi_{\alpha}^*(\mathbf{x}_2) \delta(E_F + \omega - \epsilon_{\alpha}), \end{aligned}$$

откуда

$$F(E_F, E_F + \omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi^2} \Im G^R(E_F + \omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \Im G^R(E_F, \mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Подобным же образом структурный фактор можно связать с запаздывающим поляризационным оператором

$$F(E_F, E_F + \omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi\omega} \Im \Pi^R(\omega, \mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

Эти два выражения удобны тем, что для изучения их статистики относительно беспорядка можно использовать всю мощь крестовой техники, чем мы далее и займемся.

Таким образом, если бы мы хотели вычислить средний C_2 в грязном случае, нам надо было бы усреднять петлю, подобную изображенной на рисунке 2. Основной

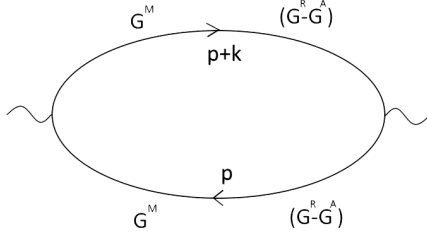


Рис. 2: Петля для среднего C_2 .

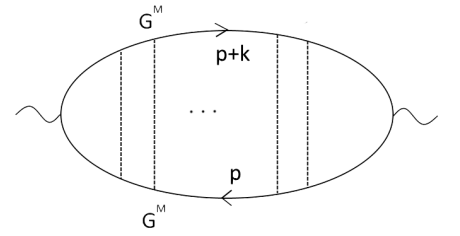


Рис. 3: Диффузионная лестница.

вклад в такое усреднение дают диаграммы с непересекающимися примесными линиями, откуда следует, что для вычисления $\overline{C_2}$ следует анализировать выражение для диффузионной лестницы, изображенной на рисунке 3.

Нас же будет интересовать дисперсия C_2 – ей соответствуют диаграммы с двумя подобными петлями (см. рисунок 4), причем две петли должны быть соединены между собой хотя бы одной примесной линией.

2.1 Вычисление дисперсии C_2 в баллистическом пределе $\lambda_F \ll L \ll l$

В указанном пределе столкновения с примесями крайне редки, так что основной вклад дает диаграмма, изображенная на рисунке 5, с одной единственной примесной линией, соединяющей две петли.

2.1.1 Вычисление баллистической диаграммы

Мы видим, что на этой диаграмме есть две одинаковые части (внешняя петля и внутренняя петля). Введем обозначение

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega, \mathbf{R}) = & \frac{1}{2\pi^2} \sum_{R(A)} (-1)^{R(A)} \int_{x \in A, y \in A} d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{y} G^{R(A)}(E_F + \omega, \mathbf{x}, \mathbf{R}) \times \\ & \times G^{R(A)}(E_F + \omega, \mathbf{R}, \mathbf{y}) \Im G^R(E_F, \mathbf{y}, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

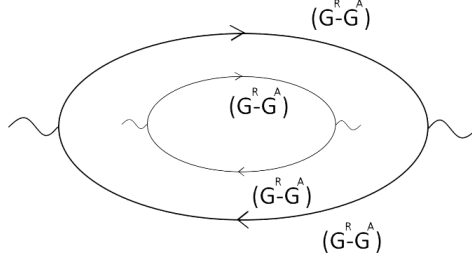


Рис. 4: Диаграмма с двумя петлями.

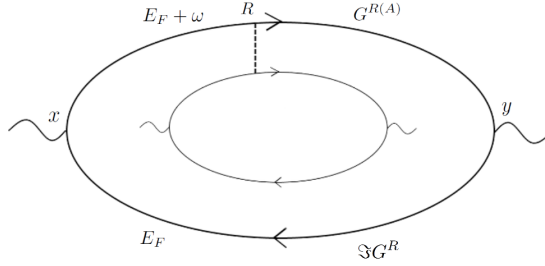


Рис. 5: Диаграмма для баллистического случая.

тогда

$$\text{Var}C_2 = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int d^d \mathbf{R} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^\infty \Omega d\Omega \Gamma(\omega, \mathbf{R}) \Gamma(\Omega, \mathbf{R}).$$

Преобразуем выражение для Γ следующим образом

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{R(A)} (-1)^{R(A)} \int_A d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{y} G^{R(A)}(E_F + \omega, \mathbf{x}, \mathbf{R}) \times \\ &\times G^{R(A)}(E_F + \omega, \mathbf{R}, \mathbf{y}) \Im G^R(E_F, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{R(A)} (-1)^{R(A)} \int_A d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{y} \int (d\mathbf{k}_1) (d\mathbf{k}_2) (d\mathbf{k}_3) G^{R(A)}(E_F + \omega, \mathbf{k}_1) \times \\ &\times G^{R(A)}(E_F + \omega, \mathbf{k}_2) \Im G^R(E_F, \mathbf{k}_3) e^{i\mathbf{k}_1(\mathbf{R}-\mathbf{x}) + i\mathbf{k}_2(\mathbf{y}-\mathbf{R}) + i\mathbf{k}_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{R(A)} (-1)^{R(A)} \int (d\mathbf{k}_1) (d\mathbf{k}_2) (d\mathbf{k}_3) G^{R(A)}(E_F + \omega, \mathbf{k}_1) \times \\ &\times G^{R(A)}(E_F + \omega, \mathbf{k}_2) \Im G^R(E_F, \mathbf{k}_3) e^{i\mathbf{R}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} \mathcal{J}_L(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \mathcal{J}_L(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3). \end{aligned}$$

Где $\mathcal{J}_L(\mathbf{q}) = \int_{x < L, y < L} d^d \mathbf{x} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} = \frac{(2\pi)^{d/2} L^d}{(qL)^{d/2}} J_{d/2}(qL)$.

Основной вклад дается $k_3 \sim k_F$, поэтому соответствующий интеграл возьмем по ξ и сделаем замены $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 = \mathbf{q}$ и $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 = \mathbf{Q}$. В пределе $\tau \rightarrow \infty$ этот переход

становится абсолютно точным, так как $\Im G^R(E_F, \mathbf{k}_3) = -\pi \delta(E_F - \xi_{\mathbf{k}_3})$. Получаем

$$\Gamma(\omega, \mathbf{R}) = -\nu \frac{1}{2\pi} \sum_{R(A)} (-1)^{R(A)} \int d\mathbf{q} (d\mathbf{Q}) \times \\ \times \left\langle \frac{e^{i\mathbf{R}(\mathbf{q}-\mathbf{Q})} \mathcal{J}_L(\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{Q})}{(E_F + \omega - \xi - \mathbf{v}_F \mathbf{q} \pm i0)(E_F + \omega - \xi - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} \pm i0)} \right\rangle_{\mathbf{v}_F} \delta(E_F - \xi),$$

где усреднение идет по сфере Ферми. После взятия интеграла по ξ

$$\Gamma(\omega, \mathbf{R}) = -\nu \frac{1}{2\pi} \sum_{R(A)} (-1)^{R(A)} \int (d\mathbf{q}) (d\mathbf{Q}) \left\langle \frac{e^{i\mathbf{R}(\mathbf{q}-\mathbf{Q})} \mathcal{J}_L(\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{Q})}{(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{q} \pm i0)(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} \pm i0)} \right\rangle_{\mathbf{v}_F}.$$

Заметим, что

$$\sum_{R(A)} (-1)^{R(A)} \frac{1}{(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{q} \pm i0)(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} \pm i0)} = 2\Im \frac{1}{(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{q} + i0)(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} + i0)},$$

что можно преобразовать, используя формулу Сохоцкого, и сразу проинтегрировать по частотам²

$$\int_0^\infty \omega d\omega \Gamma(\omega, \mathbf{R}) = -\frac{\nu}{\pi} \int_0^\infty \omega d\omega \int (d\mathbf{q}) (d\mathbf{Q}) \times \\ \times \Im \left\langle \frac{\mathcal{J}_L(\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{Q})}{(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{q} + i0)(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} + i0)} \right\rangle_{\mathbf{v}_F} e^{i\mathbf{R}(\mathbf{q}-\mathbf{Q})} = \\ = \nu \int (d\mathbf{q}) (d\mathbf{Q}) \left\langle \frac{\mathbf{v}_F \mathbf{q} \theta(\mathbf{v}_F \mathbf{q}) - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} \theta(\mathbf{v}_F \mathbf{Q})}{\mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} \right\rangle_{\mathbf{v}_F} e^{i\mathbf{R}(\mathbf{q}-\mathbf{Q})} \mathcal{J}_L(\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{Q}).$$

Среднее по ферми сфере оказывается постоянным вне зависимости от размерности. Покажем это.

Чтобы его (среднее) вычислить заметим, что сферу (многомерную), по которой ведется интегрирование, можно разбить на 4 области:

1. обе θ равны единице;
2. первая θ равна единице, а вторая – нулю;
3. первая θ равна нулю, а вторая – единице;
4. обе θ равны нулю.

Заметим, что вторая и третья области переходят друг в друга, если умножить соответствующий вектор на -1 .

В первой области усредняемое выражение

$$\frac{\mathbf{v}_F \mathbf{q} - \mathbf{v}_F \mathbf{Q}}{\mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} = 1.$$

В четвертой области выражение равно нулю.

²Здесь θ -функция Хевисайда определяется стандартным образом: $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

Интегрирование по второй и третьей области объединим, оставив интегрирование по второй области и заменив во втором слагаемом \mathbf{v}_F на $-\mathbf{v}_F$. Подынтегральное выражение имеет вид

$$\frac{\mathbf{v}_F \mathbf{q}}{\mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} - \frac{(-\mathbf{v}_F) \mathbf{Q}}{(-\mathbf{v}_F) (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} = \frac{\mathbf{v}_F \mathbf{q}}{\mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} - \frac{\mathbf{v}_F \mathbf{Q}}{\mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} = 1.$$

В итоге мы интегрируем 1 по объединению первой и второй областей. Осталось заметить, что это объединение – половина всей сферы, а значит

$$\left\langle \frac{\mathbf{v}_F \mathbf{Q} \theta(\mathbf{v}_F \mathbf{Q}) - \mathbf{v}_F \mathbf{q} \theta(\mathbf{v}_F \mathbf{q})}{\mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} \right\rangle_{\mathbf{v}_F} = \frac{1}{2},$$

вне зависимости от размерности.

Окончательно получаем для интеграла от $\Gamma(\omega, \mathbf{R})$ по частотам

$$\frac{\nu}{2} \int (d\mathbf{q}) (d\mathbf{Q}) e^{i\mathbf{R}(\mathbf{q}-\mathbf{Q})} \mathcal{J}_L(\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{Q}) = \frac{\nu_0}{2} \int (d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{R}\mathbf{k}} \mathcal{J}_L(\mathbf{k}),$$

где мы воспользовались тем свойством функций \mathcal{J}_L , что

$$\int (d\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \mathcal{J}_L(\mathbf{q}) = \int (d\mathbf{q}) \int_L d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{q}+\mathbf{k})} \int_L d\mathbf{y} e^{i\mathbf{y}\mathbf{q}} = \int_L d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}\mathbf{k}} = \mathcal{J}_L(\mathbf{k}).$$

Исходное выражение для дисперсии C_2 приобретает следующий простой вид

$$\text{Var}C_2 = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \frac{\nu^2}{4} \int d^d \mathbf{R} e^{i\mathbf{R}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \int (d\mathbf{k}) \mathcal{J}_L(\mathbf{k}) \int (d\mathbf{k}') \mathcal{J}_L(\mathbf{k}'),$$

где интеграл по \mathbf{R} дает дельта-функцию, которая снимает одно из интегрирований по импульсам

$$\text{Var}C_2 = \frac{\nu\nu_F}{8\pi l} \int (d\mathbf{k}) \mathcal{J}_L(\mathbf{k}) \mathcal{J}_L(-\mathbf{k}) = \frac{\nu_0\nu_F}{8\pi l} \int (d\mathbf{k}) \mathcal{J}_L^2(\mathbf{k})$$

Из этой формулы, учитывая известные выражения для интегралов от функций Бесселя, получаем окончательный ответ

$$\begin{aligned} \text{Var}C_2 &= \frac{\nu\nu_F}{8\pi l} \int (d\mathbf{k}) \frac{(2\pi)^d L^{2d}}{(kL)^d} J_{d/2}^2(kL) = \\ &= \frac{\nu\nu_F}{8\pi l} L^d \int \frac{d^d \mathbf{x}}{x^d} J_{d/2}^2(x) = \frac{\nu\nu_F}{8\pi l} L^d d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} \int_0^\infty dx \frac{J_{d/2}^2(x)}{x} = \\ &= \frac{\nu\nu_F}{8\pi l} L^d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} = \frac{k_F^{d-1} L^d}{l} \frac{d}{\pi 2^{d+3} \Gamma^2(1+d/2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

В частности, при $d = 1$ находим

$$\text{Var}C_2 = \frac{2L}{8\pi^2 l}.$$

2.1.2 Анализ результата

Видим, что в баллистической области дисперсия C_2 растет пропорционально объему рассматриваемой области. Важно отметить, что все указанные выше рассуждения справедливы тогда, когда размер объемлющей системы много больше длины свободного пробега l .

2.2 Вычисление дисперсии C_2 в диффузном пределе $l \ll L$

В диффузном режиме ($l \ll L$) следует отдельно рассмотреть баллистический и диффузионный вклады. Первый определяется масштабами, малыми по сравнению с длиной свободного пробега, а второй – большими по сравнению с длиной свободного пробега. Баллистический вклад вычисляется с помощью диаграмм, аналогичных предыдущей, а диффузионный вклад должна описывать диаграмма с двумя диффузонами, изображенная на рисунке 6.

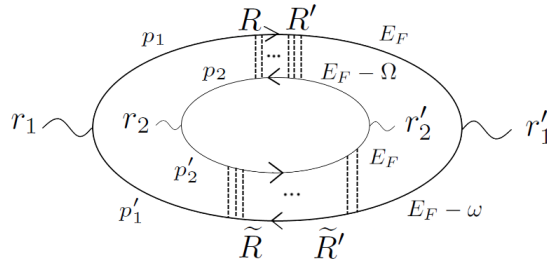


Рис. 6: Диаграмма с двумя диффузонами.

2.2.1 Вычисление баллистического вклада

Для простоты рассмотрим диаграмму, изображенную на рисунке 5.

На этот раз запишем $\Im G^R(E_F, \mathbf{k}_3)$ как $\frac{1}{2} \sum_p p G^p(E_F, \mathbf{k}_3)$, где p принимает значения R или A в индексах и, соответственно, ± 1 в качестве множителя

$$\Gamma(\omega, \mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p_1, p_2} p_1 p_2 \int (d\mathbf{k}_1) (d\mathbf{k}_2) (d\mathbf{k}_3) G^{p_1}(E_F + \omega, \mathbf{k}_1) \times \\ \times G^{p_1}(E_F + \omega, \mathbf{k}_2) G^{p_2}(E_F, \mathbf{k}_3) e^{i\mathbf{R}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} \mathcal{J}_L(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \mathcal{J}_L(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3).$$

Опять возьмем интеграл по импульсам \mathbf{k}_3 по ξ и сделаем замены $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 = \mathbf{q}$ и $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 = \mathbf{Q}$. Получаем

$$\Gamma(\omega, \mathbf{R}) = \nu \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p_1, p_2} p_1 p_2 \int d\xi (d\mathbf{q}) (d\mathbf{Q}) \times \\ \times \left\langle \frac{e^{i\mathbf{R}(\mathbf{q} - \mathbf{Q})} \mathcal{J}_L(\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{Q})}{(E_F + \omega - \xi - \mathbf{v}_F \mathbf{q} + p_1 \frac{i}{2\tau}) (E_F + \omega - \xi - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} + p_1 \frac{i}{2\tau})} \right\rangle_{\mathbf{v}_F} \frac{1}{E_F - \xi + p_2 \frac{i}{2\tau}},$$

где усреднение идет по сфере Ферми. Для того, чтобы интеграл по ξ не был равен нулю, необходимо, чтобы полюса функций Грина находились по разные стороны действительной оси, иными словами $p_1 p_2 = -1$. Откуда получаем

$$\Gamma(\omega, \mathbf{R}) = \nu \frac{1}{2\pi} \sum_p p \int (d\mathbf{q}) (d\mathbf{Q}) \left\langle \frac{e^{i\mathbf{R}(\mathbf{q} - \mathbf{Q})} \mathcal{J}_L(\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{Q})}{(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{q} - p \frac{i}{\tau}) (\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} - p \frac{i}{\tau})} \right\rangle_{\mathbf{v}_F}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_p P \frac{1}{(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{q} - p \frac{i}{\tau})(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} - p \frac{i}{\tau})} &= 2\Im \frac{1}{(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{q} - \frac{i}{\tau})(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} - \frac{i}{\tau})} = \\ &= \frac{2}{\tau} \frac{2\omega - \mathbf{v}_F (\mathbf{q} + \mathbf{Q})}{((\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{q})^2 + \frac{1}{\tau^2})(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{Q})^2 + \frac{1}{\tau^2}}, \end{aligned}$$

что следует проинтегрировать по частотам

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \omega d\omega \Gamma(\omega, \mathbf{R}) &= \frac{\nu}{2\pi} \int_0^\infty \omega d\omega \int (d\mathbf{q})(d\mathbf{Q}) \times \\ &\times \left\langle \frac{2}{\tau} \frac{2\omega - \mathbf{v}_F (\mathbf{q} + \mathbf{Q})}{((\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{q})^2 + \frac{1}{\tau^2})(\omega - \mathbf{v}_F \mathbf{Q})^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right\rangle_{\mathbf{v}_F} \mathcal{J}_L(\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{Q}) e^{i\mathbf{R}(\mathbf{q}-\mathbf{Q})} = \\ &= \frac{\nu}{2\pi} \int \left\langle \frac{\pi \tau \mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q}) + 2\tau (\mathbf{v}_F \mathbf{q} \arctan \tau \mathbf{v}_F \mathbf{q} - \mathbf{v}_F \mathbf{Q} \arctan \tau \mathbf{v}_F \mathbf{Q})}{\tau \mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} + \right. \\ &+ \left. \frac{\log(1 + (\tau \mathbf{v}_F \mathbf{Q})^2) - \log(1 + (\tau \mathbf{v}_F \mathbf{q})^2)}{\tau \mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} \right\rangle_{\mathbf{v}_F} \times \\ &\times (d\mathbf{q})(d\mathbf{Q}) e^{i\mathbf{R}(\mathbf{q}-\mathbf{Q})} \mathcal{J}_L(\mathbf{q}) \mathcal{J}_L(\mathbf{Q}). \end{aligned}$$

Для баллистических импульсов $ql \gg 1$ и $Ql \gg 1$ получаем такое же среднее

$$\left\langle \frac{\mathbf{v}_F \mathbf{Q} \theta(\mathbf{v}_F \mathbf{Q}) - \mathbf{v}_F \mathbf{q} \theta(\mathbf{v}_F \mathbf{q})}{\mathbf{v}_F (\mathbf{q} - \mathbf{Q})} \right\rangle_{\mathbf{v}_F} = \frac{1}{2},$$

как и в баллистическом пределе. То есть основная особенность данного вычисления в том, что интегрирование ведется по большим импульсам $q, Q \gg l^{-1}$

$$(\text{Var}C_2)_{b.cont} \sim \frac{\nu v_F}{8\pi l} \int_{k>l^{-1}} (d\mathbf{k}) \frac{(2\pi)^d L^{2d}}{(kL)^d} J_{d/2}^2(kL).$$

Таким образом нижняя обрезка у интеграла по \mathbf{k} меняется с L^{-1} , обусловленной поведением функций Бесселя, на l^{-1} .

Итого имеем

$$(\text{Var}C_2)_{b.cont} \sim \frac{k_F^{d-1}}{l} L^{d-1} \int_{l^{-1}} \frac{d^d \mathbf{k}}{k^d} \frac{1}{k} \sim (k_F L)^{d-1}. \quad (3)$$

Видим, что степень длины изменилась на единицу по сравнению с баллистическим случаем.

2.2.2 Вычисление диффузионного вклада

Чтобы учесть все возможные пары из G^R и G^A в диаграмме с рисунка 6 введем индексы p_i таким же образом, как и в предыдущей части. Тогда для исследуемой

диаграммы мы можем записать следующее выражение

$$\begin{aligned}
(\text{Var}C_2)_{d.\text{cont}} = & \sum_{p_1, p_2, p'_1, p'_2} p_1 p_2 p'_1 p'_2 \int G^{(p_1)}(E_F, \mathbf{r}_1, \mathbf{R}) \times \\
& \times G^{(p_2)}(E_F - \Omega, \mathbf{R}, \mathbf{r}_2) G^{(p'_2)}(E_F, \mathbf{r}_2, \tilde{\mathbf{R}}) G^{(p'_1)}(E_F - \omega, \tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{r}_1) \times \\
& \times G^{(p_1)}(E_F, \mathbf{R}', \mathbf{r}'_1) G^{(p_2)}(E_F - \Omega, \mathbf{r}'_2, \mathbf{R}') \times \\
& \times G^{(p'_2)}(E_F, \tilde{\mathbf{R}}', \mathbf{r}'_2) G^{(p'_1)}(E_F - \omega, \mathbf{r}'_1, \tilde{\mathbf{R}}') d\mathbf{R} d\mathbf{R}' d\tilde{\mathbf{R}} d\tilde{\mathbf{R}}' \times \\
& \times \int_{V_L} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \int_{V_L} d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 \int_0^\infty D_\Omega^{(p_1 p_2)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') D_\omega^{(p'_2 p'_1)}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{R}}') \omega \Omega d\omega d\Omega,
\end{aligned}$$

где $D_\Omega^{(p_1 p_2)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ – сумма диаграмм, изображенная на рисунке 7.

$$D_\Omega^{(p_1 p_2)}(R, R') = \begin{array}{c} p_1 \xrightarrow{R=R'} \\ \vdots \\ p_2 \xleftarrow{} \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \xrightarrow{R} \xrightarrow{R'} \\ \vdots \\ p_2 \xleftarrow{} \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \xrightarrow{R} \xrightarrow{R'} \\ \vdots \\ p_2 \xleftarrow{} \end{array} + \dots$$

Рис. 7: Диффузон.

В случае, если $p_1 p_2 = -1$, она является простой суммой геометрической прогрессии ($\frac{1}{2\pi\nu\tau} + \frac{B}{(2\pi\nu\tau)^2} + \frac{B^2}{(2\pi\nu\tau)^3} + \dots$), где B – одна «ступень» лестничного ряда, и равна в импульсном представлении

$$\frac{1}{2\pi\nu\tau^2} \frac{1}{-p_1 i\omega + D\mathbf{k}^2}.$$

В случае же, если $p_1 p_2 = 1$, полюса функций Грина оказываются в одной полуплоскости и выражение получается константным, что нас не интересует.

Для начала рассмотрим размерность $d = 1$.³

Функции Грина в координатном представлении имеют вид

$$G^{(p)}(E_F + \omega, \mathbf{r}) = -2\pi i\nu \cdot \exp\left(pi \left(p_F + \frac{\omega}{v_F}\right) r - \frac{r}{2l}\right).$$

Можно видеть, что если мы пренебрежем зависимостью от частот в показателях экспонент, то в области, в которой вершины петель находятся между границ диффузонов, осциллирующая часть экспоненты полностью сократится (см. рисунок 8). Эта область и даст основной вклад в интегралы.

Таким образом, у нас получаются следующие условия на индексы суммирования

$$\begin{cases} p_1 p_2 = -1 \\ p'_1 p'_2 = -1 \\ p_1 p'_1 = 1 \\ p_2 p'_2 = 1 \end{cases},$$

которые допускают всего два различных слагаемых.

³Как известно, в одномерии длина локализации $\xi \simeq l$, так что диффузной области как таковой нет. Однако формальное рассмотрение $d = 1$ удобно в качестве иллюстрации математической структуры получающихся выражений.

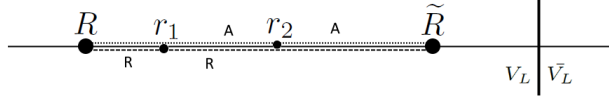


Рис. 8: Интересующая область.

Впредь будем опускать численные коэффициенты. В рассматриваемой области получаем выражение

$$\begin{aligned}
(\text{Var}C_2)_{d.cont} &\sim \nu^8 \sum_p \int e^{-\frac{|r_1 - \mathbf{R}|}{2l}} e^{-\frac{|r_2 - \mathbf{R}|}{2l}} e^{-\frac{|r_2 - \tilde{\mathbf{R}}|}{2l}} e^{-\frac{|r_1 - \tilde{\mathbf{R}}|}{2l}} \times \\
&\times e^{-\frac{|r'_1 - \mathbf{R}'|}{2l}} e^{-\frac{|r'_2 - \mathbf{R}'|}{2l}} e^{-\frac{|r'_2 - \tilde{\mathbf{R}}'|}{2l}} \times \\
&\times e^{-\frac{|r'_1 - \tilde{\mathbf{R}}'|}{2l}} d\mathbf{R}d\mathbf{R}'d\tilde{\mathbf{R}}d\tilde{\mathbf{R}}' \times \\
&\times \int_{V_L} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \int_{\tilde{V}_L} d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 \times \\
&\times \int_0^\infty D_\Omega^{(p)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') D_\omega^{(-p)}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{R}}') \omega \Omega d\omega d\Omega,
\end{aligned}$$

где $D_\Omega^{(p)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{1}{2\pi\nu\tau^2} \int (d\mathbf{k}) \frac{e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')}}{D\mathbf{k}^2 - p i\Omega}$.
Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 \\ \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{R}' = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 \\ \tilde{\mathbf{R}}' = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_2 \end{cases},$$

которая приводит выражение к виду

$$\begin{aligned}
(\text{Var}C_2)_{d.cont} &\sim \nu^8 \int e^{-\frac{|\mathbf{u}_1|}{2l}} e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_2|}{2l}} e^{-\frac{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2|}{2l}} e^{-\frac{|\mathbf{u}_2|}{2l}} \times \\
&\times e^{-\frac{|\mathbf{v}_1|}{2l}} e^{-\frac{|\mathbf{r}'_1 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{r}'_2|}{2l}} e^{-\frac{|\mathbf{r}'_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{r}'_2|}{2l}} e^{-\frac{|\mathbf{v}_2|}{2l}} \times \\
&\times d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \int_{V_L} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \int_{\tilde{V}_L} d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 \times \\
&\times F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1) F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2),
\end{aligned}$$

где $F(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \Omega d\Omega D_\Omega^{(\pm)}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \# \frac{1}{\nu\tau^2} \frac{D}{x^3}$.

Мы видим, что интегралы по новым переменным экспоненциально падают на длине свободного пробега l , так что в диффузном пределе $L \gg l$ остается только две не связанных экспонентами группы переменных, остальные интегрирования дают вклады l^6 . При этом новыми переменными в аргументах диффузонов можно пренебречь, так они порядка l , а интеграл набирается на $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gtrsim l$. Получаем

$$\begin{aligned}
(\text{Var}C_2)_{d.cont} &\sim \nu^8 l^6 \left(\frac{D}{\nu\tau^2}\right)^2 \int_{V_L} d\mathbf{r}_1 \int_{\tilde{V}_L} d\mathbf{r}'_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|^6} \sim \\
&\sim \nu^8 l^6 \left(\frac{D}{\nu\tau^2}\right)^2 \int_l^{\infty} \frac{r dr}{r^6} \sim \nu^8 l^6 \left(\frac{D}{\nu\tau^2}\right)^2 \frac{1}{l^4} \sim \nu^8 l^6 \left(\frac{v_F}{l}\right)^2 \frac{1}{l^4} \sim const,
\end{aligned}$$

не зависящий от параметров вклад в дисперсию C_2 .

Теперь рассмотрим размерности $d > 1$.

Запишем выражение для вклада в дисперсию, пренебрегая различиями между \mathbf{R} и \mathbf{r}_1 и другими парами экспоненциально связанных величин в аргументах диффузона и отличаем частот от нуля в аргументах функций Грина

$$\begin{aligned}
(\text{Var}C_2)_{d.\text{cont}} &\sim \sum_{p,p'} p^2 p'^2 \int G^{(p)}(E_F, \mathbf{r}_1, \mathbf{R}) G^{(-p)}(E_F, \mathbf{R}, \mathbf{r}_2) \times \\
&\times G^{(-p')} (E_F, \mathbf{r}_2, \tilde{\mathbf{R}}) G^{(p')} (E_F, \tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{r}_1) \times \\
&\times G^{(p)}(E_F, \mathbf{R}', \mathbf{r}'_1) G^{(-p)}(E_F, \mathbf{r}'_2, \mathbf{R}') G^{(-p')} (E_F, \tilde{\mathbf{R}}', \mathbf{r}'_2) \times \\
&\times G^{(p')} (E_F, \mathbf{r}'_1, \tilde{\mathbf{R}}') d\mathbf{R} d\mathbf{R}' d\tilde{\mathbf{R}} d\tilde{\mathbf{R}}' \times \\
&\times \int_{V_L} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \int_{\bar{V}_L} d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 F^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1),
\end{aligned}$$

теперь, сдвинув надлежащим образом интегрирование по границам диффузона, можно получить

$$A^2 \int_{V_L} d\mathbf{r}_1 \int_{\bar{V}_L} d\mathbf{r}'_1 F^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1),$$

где, после замены $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \rightarrow \boldsymbol{\rho}$,

$$A = \int d\boldsymbol{\rho} \left[\int d\mathbf{R} G^{(p)}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}) G^{(-p)}(\mathbf{R}) \right]^2.$$

Этот коэффициент можно легко посчитать, заметив, что Фурье-образ свертки есть произведение Фурье-образов функций, а интеграл квадрата функции по пространству есть интеграл квадрата Фурье-образа по пространству импульсов. То есть

$$A = \int (d\mathbf{k}) \left[\frac{1}{-\xi_{\mathbf{k}} + p \frac{i}{2\tau}} \cdot \frac{1}{-\xi_{\mathbf{k}} - p \frac{i}{2\tau}} \right]^2 = \int \frac{(d\mathbf{k})}{\left(\xi_{\mathbf{k}}^2 + \left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 \right)^2} \sim \nu \tau^3.$$

В произвольной размерности получаем для интегралов от диффузона $F(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{\nu \tau^2} \frac{D}{x^{d+2}}$. Итого диффузионный вклад

$$\tau^2 \int_{V_L} d\mathbf{r}_1 \int_{\bar{V}_L} d\mathbf{r}'_1 F^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1),$$

где интеграл набирается вблизи границы области, так что ее можно представить «плоской»

$$\begin{aligned}
(\text{Var}C_2)_{d.\text{cont}} &\sim (\tau D)^2 \int_{V_L} d\mathbf{r}_1 \int_{\bar{V}_L} d\mathbf{r}'_1 F^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \sim l^4 \int_{V_L} d\mathbf{r}_1 \int_{\bar{V}_L} d\mathbf{r}'_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|^{2d+4}} \sim \\
&\sim l^4 L^{d-1} \int_l^\infty x dx \int_0^\infty r^{d-2} dr \frac{1}{(x^2 + r^2)^{d+2}} \sim l^4 L^{d-1} \int_l^\infty x dx \frac{1}{x^{d+5}} \sim \\
&\sim l^4 L^{d-1} \frac{1}{l^{d+3}} \sim \left(\frac{L}{l} \right)^{d-1}. \tag{4}
\end{aligned}$$

Здесь следует отметить, что интегралы садятся на импульсы порядка $\frac{1}{l}$, а не $\frac{1}{L}$, как можно было бы наивно ожидать.

2.2.3 Анализ результата

Объединяя формулы 3 и 4, получаем

$$\text{Var}C_2 = c_1 (k_F L)^{d-1} + c_2 \left(\frac{L}{l}\right)^{d-1}.$$

Видим, что в диффузном случае при $d > 1$ основным является баллистический вклад в дисперсию, и вклад этот $(k_F L)^{d-1}$, диффузионный же вклад хоть и имеет ту же зависимость от размеров системы, параметрически мал согласно условию $k_F l \gg 1$.

В одномерном же случае, оба вклада получаются константными и не зависят от параметров.

3 Численное моделирование

Для проверки аналитических результатов было проведено численное исследование. В качестве системы рассматривалась стандартная модель Андерсона на квадратной решетке с периодическими граничными условиями.

3.1 Описание расчета

Более подробно, рассматривается гамильтониан

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} \epsilon_i a_i^\dagger a_i - a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i,$$

где ϵ_i – равномерно распределенные на отрезке $[-W, W]$ независимые случайные величины, a_i – фермионные переменные, а суммирование идет по всем упорядоченным парам смежных вершин с учетом периодических граничных условий.

3.1.1 Исследуемые величины

Нас интересует статистика числа частиц в какой-то области A системы (отрезок, квадрат) размера $L < L_{max}$ (где L_{max} – размер всей системы) при различном количестве фермионов в системе и нулевой температуре. В частности, интересна статистика (в смысле беспорядка) кумулянтов числа частиц в области, например

$$C_2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2,$$

$$C_4 = \langle (n - \langle n \rangle)^4 \rangle - 3C_2^2,$$

где $n = \sum_{i \in A} a_i^\dagger a_i$ – оператор числа частиц в рассматриваемой области. Еще одной интересной величиной является непосредственно энтропия запутанности для каждой конкретной реализации беспорядка

$$S = -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A),$$

где ρ_A – матрица плотности рассматриваемой области, и статистика этой энтропии.

Оказывается, указанные величины удобно вычислять с помощью матрицы корреляторов $G_{ij} = \langle a_i^\dagger a_j \rangle$ рассматриваемой области. Если λ_i – собственные числа матрицы G , то

$$C_2 = \sum_i \lambda_i (1 - \lambda_i),$$

$$C_4 = \sum_i \lambda_i^3 (1 - \lambda_i) + \lambda_i (1 - \lambda_i)^3 - 4\lambda_i^2 (1 - \lambda_i)^2,$$

$$S = - \sum_i (1 - \lambda_i) \log (1 - \lambda_i) + \lambda_i \log \lambda_i.$$

3.1.2 Процесс вычислений

Алгоритм вычислений выглядит следующим образом:

1. с помощью генератора случайных чисел выбираются значения ϵ_i из нужного распределения;
2. составляется и диагонализуется матрица, соответствующая одночастичному гамильтониану системы;
3. с помощью собственных векторов гамильтониана считается матрица корреляторов G всей системы целиком;
4. далее идет перебор всех интересующих нас размеров областей A и всех расположений области фиксированного размера;
5. матрица G сужается на каждую получившуюся область и диагонализуется;
6. из ее собственных чисел λ_i рассчитываются исследуемые величины.

Данная процедура продолжается до тех пор, пока не будут достигнуты необходимые размеры выборок.

3.1.3 Важность выбора параметров

Чтобы модель Андерсона соответствовала нашей аналитической модели рассеяния на случайном потенциале, в моделируемой системе должно происходить много «столкновений». Это накладывает ограничения на L_{max} , а именно необходимо, чтобы $L_{max} \gg l$. При этом условие $k_F l \gg 1$ при типичной для нас концентрации фермионов $\frac{1}{2}$ сводится к $l \gg 1$. Итого имеем $1 \ll l \ll L_{max}$.

В одномерии данные условия могут быть выполнены с достаточно хорошей точностью. Для типичных исследуемых значений беспорядка длина свободного пробега имеет порядок $l \sim 10$, а размер системы $L_{max} \sim 800$.

В двумерии же из-за многократно возрастающей вычислительной сложности удалось достигнуть лишь $l \sim 5$ и $L_{max} \sim 40$.

3.2 Средний C_2 в одномерии

Рассмотрим поведение среднего второго кумулянта при концентрации фермионов $\frac{1}{2}$.

График зависимости среднего по беспорядку C_2 от длины рассматриваемого отрезка изображен на рисунке 9 в логарифмическом масштабе, в котором хорошо видно начальный линейный отрезок и отклонение от него при $L \sim l$. Качественное поведение кривых на графике подтверждает известные теоретические результаты.

На графике так же видны осцилляции с периодом в два шага (что соответствует пространственной частоте в $2k_F$), которые описываются осцилляциям в чистом случае $\delta \langle C_2 \rangle = \frac{1}{\pi^2} \frac{\cos(2k_F L)}{(2L \sin k_F)^2}$. Для того, чтобы в этом убедиться, можно посмотреть на график 10, на котором изображена зависимость осциллирующей части среднего C_2 от L . Как видно, осциллирующая часть спадает с хорошей точностью квадра-

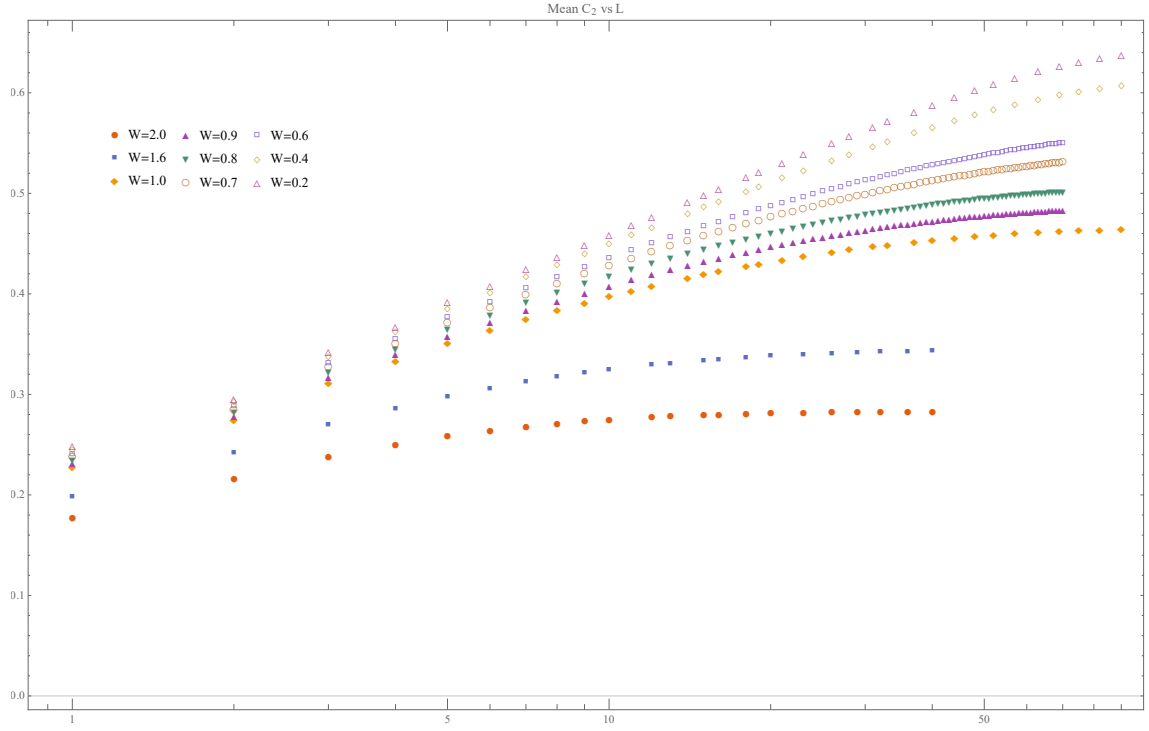


Рис. 9: Зависимость среднего C_2 от L .

точно, причем, если искать коэффициент при L^{-2} , результат также согласуется с теоретической зависимостью для чистого случая.

Из сказанного выше следует, что модель Андерсона способна не только качественно воспроизводить теоретические результаты, но и служить для оценки конкретных численных коэффициентов.

3.3 Дисперсия C_2 в одномерии

Теперь рассмотрим поведение дисперсии C_2 при той же концентрации – наиболее интересующая нас величина.

График зависимости дисперсии второго кумулянта от длины рассматриваемого отрезка изображен на рисунке 11, где штрихами отмечены длины свободного пробега. Видно, что кривые согласуются с теоретической оценкой $\frac{L}{8\pi^2 l}$ при $L \ll l$ и потом выходят на константу, что и ожидалось, исходя из полученных аналитических результатов.

Количественную оценку результату можно дать, если использовать известную формулу, связывающую длину свободного пробега с величиной беспорядка W в данной системе[4]

$$l \approx \frac{26}{W^2},$$

и сравнить полученные с ее помощью длины свободного пробега с длинами, оцененными с помощью наклона линейного участка зависимости. Получается достаточно хорошее согласие.

3.4 C_2 в $2d$

В двумерном случае при концентрации $\frac{1}{2}$ получается график 12, отражающий теоретические ожидания: в баллистической области зависимость среднего C_2 от размера

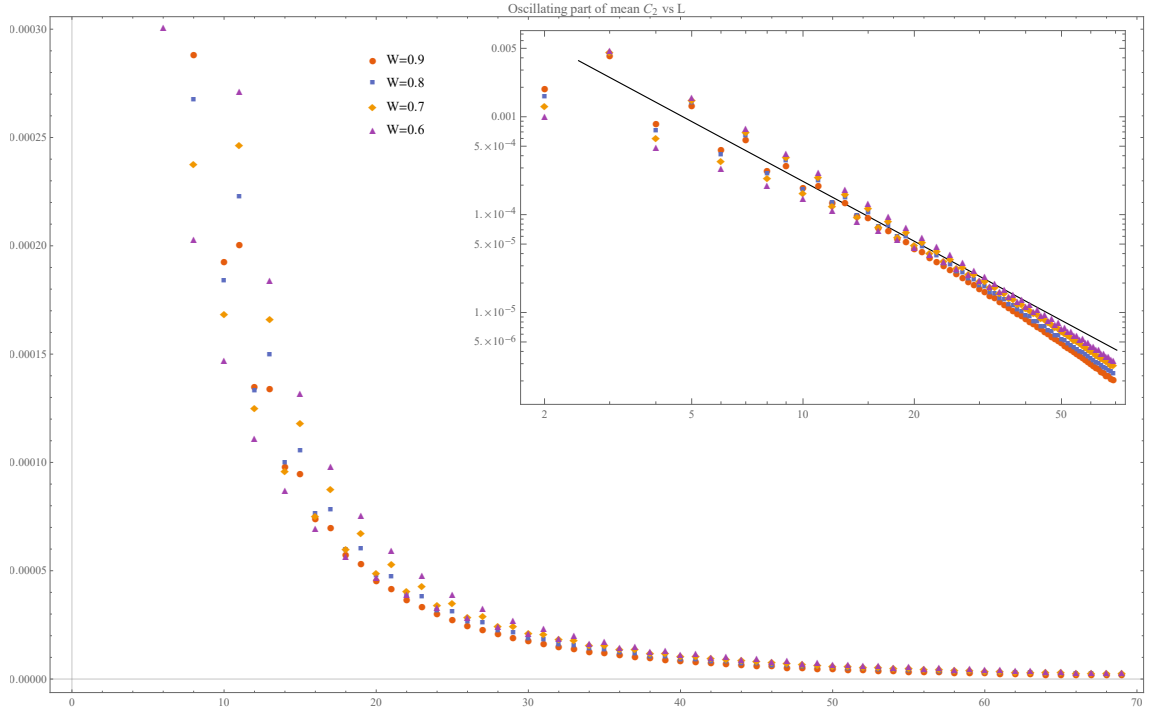


Рис. 10: Зависимость осциллирующей части $\langle C_2 \rangle$ от L .

области имеет вид $\overline{C_2} \sim k_F L \log k_F L$, в то время как в диффузной области логарифмический рост прекращается, и зависимость приобретает вид $\overline{C_2} \sim k_F L$.

Интересующий же нас график на рисунке 13, демонстрирует линейное поведение дисперсии при $L \gg l$ и небольшой квадратичный отрезок около нуля при $L \ll l$ для двух кривых с меньшим беспорядком, что согласуется с полученной аналитической оценкой.

3.5 Сравнение распределений S и C_2

На рисунках 14 (одномерие) и 15 (двумерие) можно увидеть, как соотносятся функции плотности распределения S и C_2 (приведенные к одному масштабу согласно уравнению 1). В одномерии хорошо видно, что распределения становятся все более похожими друг на друга при увеличении L , что отчасти подтверждает гипотезу о том, что статистика S_A в грязном пределе определяется, в основном, вторым кумулянтном. В двумерии параметры эксперимента не позволяют получить настолько же хорошее согласие, однако все еще можно видеть, что распределения меняются с увеличением L качественно одинаковым образом.

4 Выводы

На основании проделанного анализа, можно сделать вывод о том, что в размерностях $d > 1$ стандартное отклонение C_2 мало по сравнению с самой величиной C_2 , так как дисперсия C_2 пропорциональна $(k_F L)^{d-1}$ в диффузном пределе, в то время, как среднее значение зависит от L как $\log k_F l (k_F L)^{d-1}$. Иными словами

$$\frac{\text{Var} C_2}{\overline{C_2}^2} \sim \frac{(k_F L)^{d-1}}{\left[(k_F L)^{d-1} \log k_F l \right]^2} \sim \frac{1}{(k_F L)^{d-1} \log^2 k_F l},$$

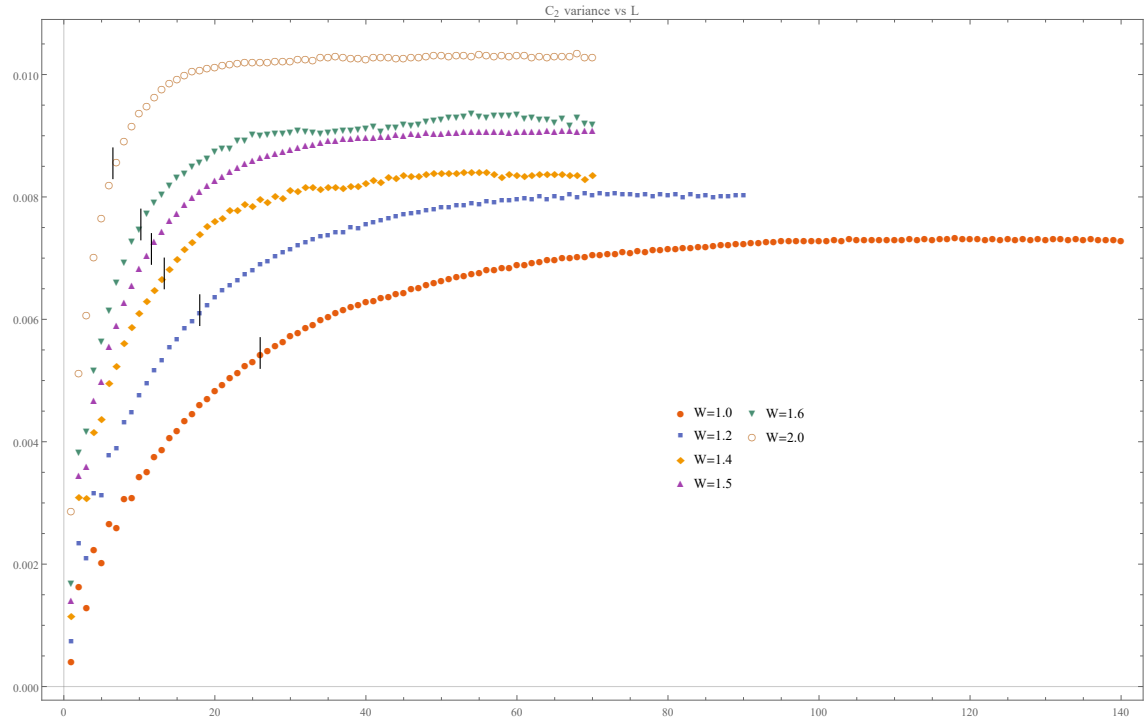


Рис. 11: Зависимость дисперсии C_2 от L .

что уменьшается как с ростом размера подсистемы, так и с ростом длины свободного пробега при фиксированных прочих параметрах.

Получается, что статистика C_2 ведет себя почти термодинамически, лишь логарифмически отклоняясь от соответствующего поведения.

На основании численного анализа можно сделать вывод о том, что распределение энтропии запутанности S_A ведет себя так же, как распределение второго кумулянта, при изменении размера области L . Следовательно, можно ожидать, что дисперсия S_A имеет такую же функциональную зависимость от L , как и вычисленная в работе дисперсия C_2 .

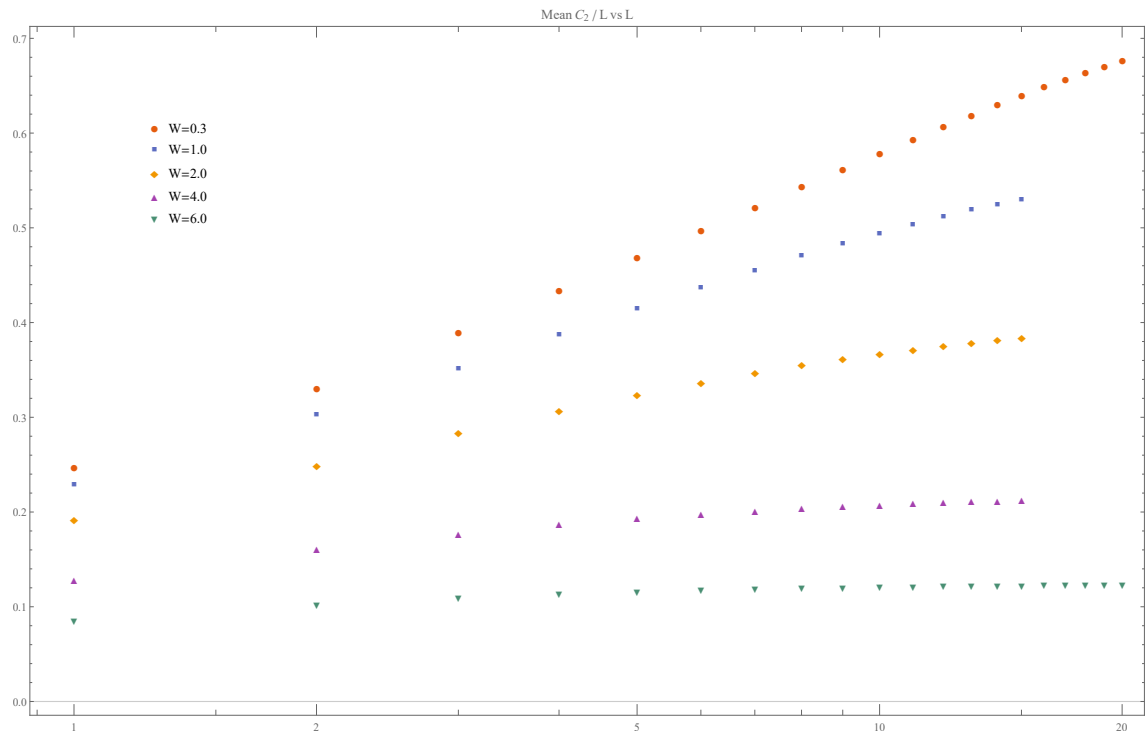


Рис. 12: Зависимость среднего C_2 , деленного на L , от L в двумерном случае.

Список литературы

- [1] I. Klich, L. Levitov, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 100502.
- [2] I.S. Burmistrov, K.S. Tikhonov, I.V. Gornyi, A.D. Mirlin, Annals of Physics 383 (2017) 140–156.
- [3] B. Friedman, R. Berkovits, Hallberg, Adv. Phys. 55, 477 (2006).
- [4] C.Barnes, Tan Wei-chao, J.B. Pendry, J.Phys.: Condens. Matter 3 (1991) 5297-5305.

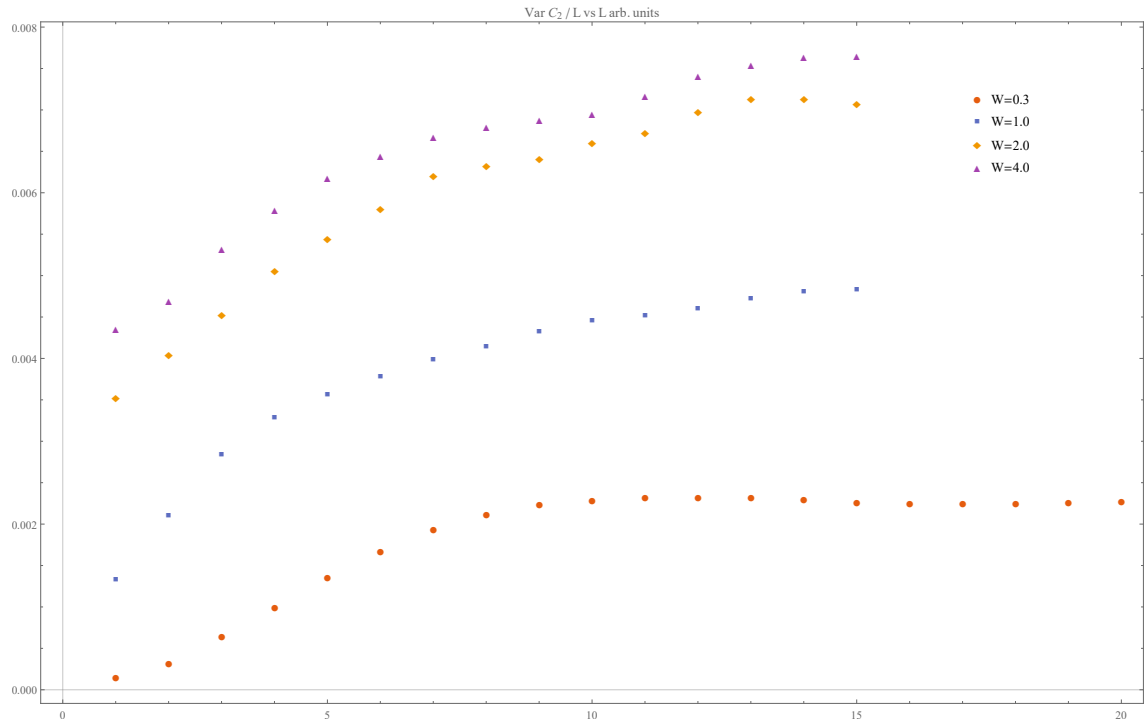


Рис. 13: Зависимость $\text{Var}C_2/L$ от L .

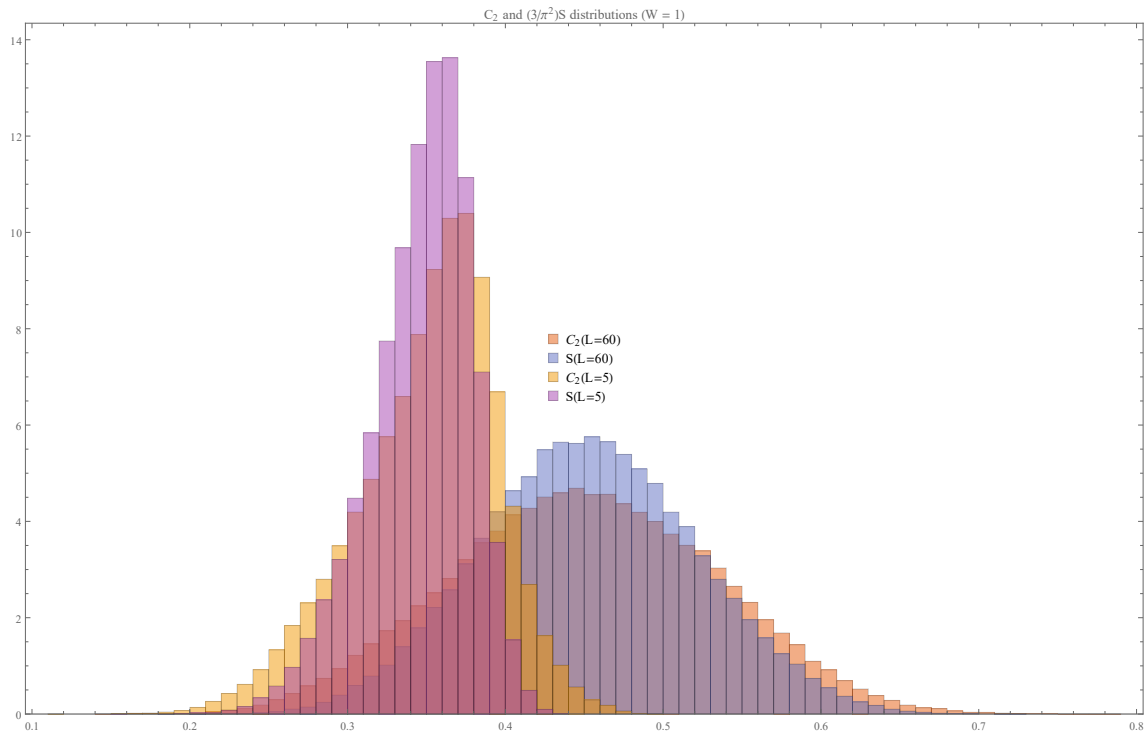


Рис. 14: Распределения в одномерии.

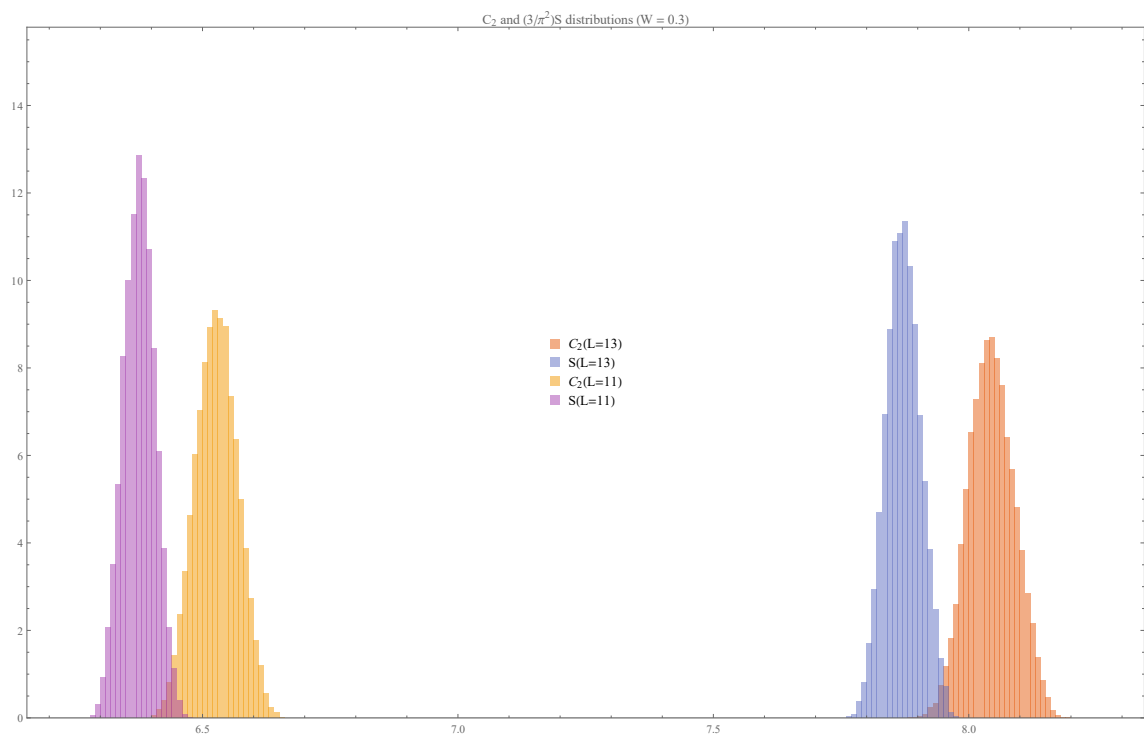


Рис. 15: Распределения в двумерии.