

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Физтех-школа Фундаментальной и Прикладной Физики
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки: 03.03.01, Прикладные математика и физика (бакалавриат)
Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная и прикладная физика
Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
«СКВИД с высшими гармониками в ток-фазовом соотношении»
(бакалаврская работа)

Студент: Михайлов Дмитрий Сергеевич

(подпись студента)

Научный руководитель: Фоминов Яков Викторович,
к. ф.-м. н., доц.

(подпись научного руководителя)

Москва 2018

Содержание

1	Введение	3
1.1	Мотивация	3
1.2	Постановка задачи и обозначения	5
2	Вольт-амперная характеристика	6
2.1	Поведение вольт-амперной характеристики при $0 < j - j_{\pm} \ll j_{\pm} $	6
2.2	Поведение вольт-амперной характеристики при $ j \gg j_{\pm} $	7
2.3	Заключение	7
3	Ступеньки Шапиро	8
3.1	Режим заданного напряжения. Симметричный случай	8
3.2	Режим заданного напряжения. Асимметричный случай	9
3.3	Режим заданного тока. Невозмущенный случай.	9
4	Заключение	13
	Список литературы	14

1 Введение

1.1 Мотивация

Асимметрическим джозефсоновским контактом мы называем такой контакт, у которого величины максимальных сверхпроводящих токов, способных протекать через него, зависят от направления, в котором эти токи протекают. Эффективно, такую систему можно получить, рассмотрев СКВИД с ненулевым магнитным потоком внутри, контакты которого имеют различные ток-фазовые соотношения. Для определенности, возьмем минимальную модель (с которой будем работать в дальнейшем), суть которой состоит в следующем: рассмотрим петлю СКВИДа, замкнутую на два контакта с ток-фазовыми соотношениями $I_1(\varphi)$ и $I_2(\varphi)$, равными соответственно:

$$I_1(\varphi) = I_c \sin \varphi, \quad (1.1a)$$

$$I_2(\varphi) = I_c (\sin \varphi + A \sin 2\varphi), \quad (1.1b)$$

где I_c - максимальный (критический) сверхток через контакт, φ - разность фаз параметра порядка на разных берегах контакта, A - безразмерная величина, параметризирующая «степень отличия» двух контактов. Можно легко убедиться в том, что уже при сколь угодно малых A максимальный сверхпроводящий ток в положительном направлении $I_{Sc}^+(\Phi)$ отличается от максимального сверхпроводящего тока в отрицательном направлении $I_{Sc}^-(\Phi)$. Действительно, вычисляя минимум и максимум «эффективного» ток-фазового соотношения СКВИДа: ё по φ , считая $A \ll 1$, получим в первом порядке по A (при $\Phi \neq \Phi_0/2$):

$$I_{Sc}^\pm(\Phi) \approx \pm 2I_c \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + AI_c \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (1.2)$$

где Φ - поток через петлю СКВИДа, а $\Phi_0 = 2\pi\hbar/2e$ - квант магнитного потока.

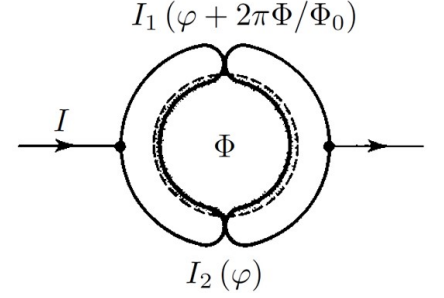


Рис. 1: Асимметричность проявляется, когда $\Phi \neq 0, \Phi_0/2$, и $I_1(\varphi)$ имеет гармоники, которых нет в $I_2(\varphi)$ или наоборот. Изображение взято из [1]

Результаты численной максимизации и минимизации суммы $I_S(\varphi, \Phi)$ по φ при произвольных A (см. рис. 3), показывают эту асимметрию более явно. Изломы, хорошо наблюдаемые на рисунках а) и б) – особенность связанная с появлением локальных минимумов. При варьировании потока локальные минимумы иногда сменяются глобальными и наоборот (см. рис. 2). На рис. 2 хорошо видно существование одного локального минимума на одном периоде кривой. При росте Φ этот значение $I_S(\varphi, \Phi)$ в этом локальном минимуме убывает, в то время как $I_S(\varphi, \Phi)$ в глобальном минимуме уменьшается. В момент когда эти два значения сравниваются, локальный минимум становится глобальным и продолжает углубляться, а I_{Sc}^- скачком меняет свою производную с некоторого отрицательного значения на положительное.

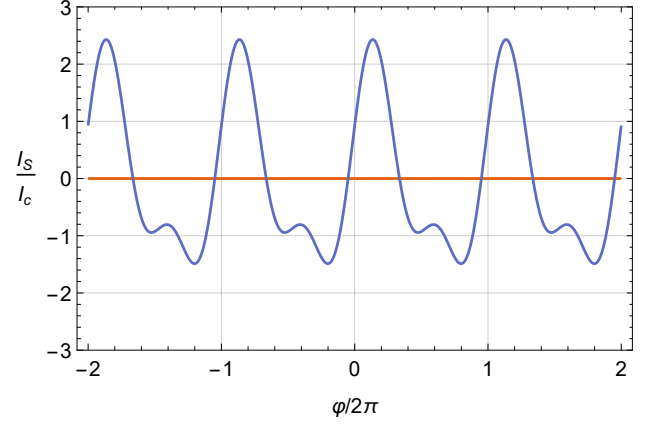


Рис. 2: $I_S(\varphi, \Phi)$ при $A \approx 0.79$, $\Phi \approx 1.18\Phi_0$. Хорошо видны локальные минимумы, наличие которых приводит к особенностям

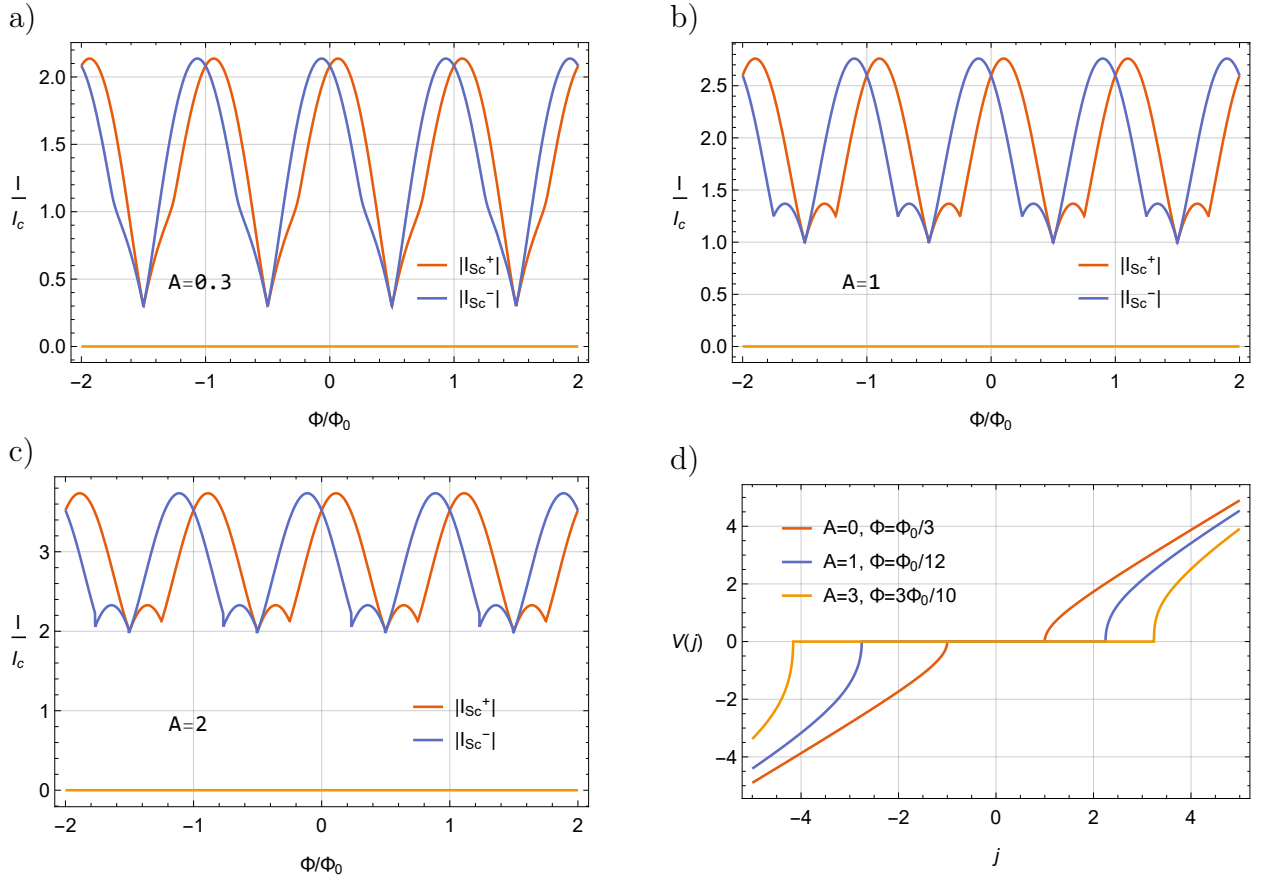


Рис. 3: а), б), с) – результаты численной минимизации/максимизации $I_S(\varphi, \Phi)$ с $I_c = 1$, д) – примеры вольт-амперных характеристик для различных параметров A и Φ

Ассиметричный эффект Джозефсона, несмотря на свою простоту, насколько нам известно, ранее не обсуждался в литературе. Однако, уже после начала нашей работы появилась публикация препринта статьи [3] где подобный эффект был обнаружен в гораздо более сложной системе: в сверхпроводящем переходе, через вейлевский полуметалл, где перенос носителей осуществлялся благодаря топологически защищенным краевым состояниям с различными скоростями Ферми.

В данной работе предлагалось исследовать, как подобная асимметрия повлияет на свойства перехода. В частности предлагалось исследовать что происходит с вольт-амперной характеристикой и ступеньками Шапиро. Этому посвящены первая и вторая часть настоящей работы соответственно.

1.2 Постановка задачи и обозначения

Как уже было отмечено, мы будем рассматривать минимальную модель и будем использовать ток-фазовые соотношения (1.1). Для контактов мы будем предполагать справедливой резистивную модель с нулевой емкостью, а петлю СКВИДа будем предполагать безындуктивной. Принимая во внимание эти приближения, мы записываем следующее дифференциальное уравнение на зависимость разности фаз на одном из контактов от времени $\varphi(\tau)$:

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{d\tau} = I - I_S(\varphi, \Phi), \quad (1.3a)$$

$$I_S(\varphi, \Phi) = I_1 \left(\varphi + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) + I_2(\varphi), \quad (1.3b)$$

где R – сопротивление СКВИДа в RSJ-модели. Согласно фундаментальному соотношению Джозефсона напряжение есть средняя скорость изменения фазы. Таким образом с помощью уравнений (1.3) мы должны вычислить величину:

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar}{2e} \langle \dot{\varphi} \rangle \quad (1.4)$$

Обозначения. Определим критический ток симметричного СКВИДа с $A = 0$:

$$I_{Sc}^{(0)} = 2I_c \cos \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (1.5)$$

и с помощью него следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} t = \omega_c \tau & & V_c = I_{Sc}^{(0)} R & & j = \frac{I}{I_{Sc}^{(0)}} \\ \omega_c = \frac{2eRI_{Sc}^{(0)}}{\hbar} & & v(\tau) = \frac{V(\tau)}{V_c} & & a = A \frac{I_c}{I_{Sc}^{(0)}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

после чего уравнения (1.3) и (1.4) записываются в виде:

$$\dot{\varphi} = j - j_S(\varphi, \phi) \quad (1.7a)$$

$$j_S(\varphi, \phi) = \sin\left(\varphi + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + a \sin 2\varphi \quad (1.7b)$$

$$\langle v \rangle = \langle \dot{\varphi} \rangle \quad (1.7c)$$

Отметим, что в этих единицах среднее напряжение $\langle v \rangle$ тождественно совпадает с частотой джозефсоновской генерации ω . Безразмерный максимальный сверхток в положительном(/отрицательном) направлении будем обозначать j_+ (/ j_-).

2 Вольт-амперная характеристика

Было изучено поведение зависимости $\langle v \rangle = \langle \dot{\varphi} \rangle$ в двух предельных случаях: при $0 < |j| - |j_{\pm}| \ll |j_{\pm}|$ и при $|j| \gg |j_{\pm}|$. В пределе $0 < |j| - |j_{\pm}| \ll |j_{\pm}|$ наблюдается корневое поведение вне зависимости от ток-фазового соотношения $j_S(\varphi, \Phi)$: $\langle v \rangle \sim \text{const} \sqrt{|j - j_{\pm}|}$, в пределе больших токов, ВАХ стремится к закону Ома $V(|j| \gg |j_{\pm}|) \sim |j|$

2.1 Поведение вольт-амперной характеристики

при $0 < |j| - |j_{\pm}| \ll |j_{\pm}|$

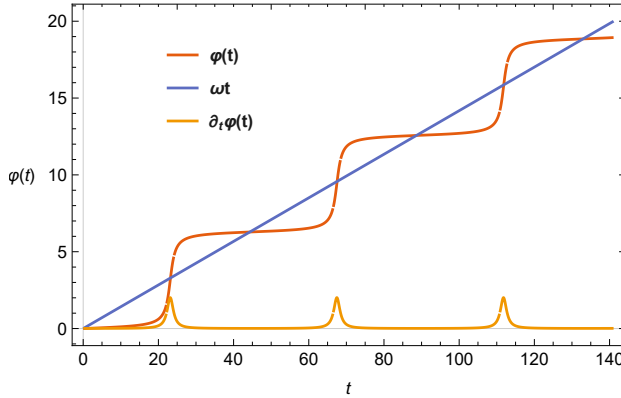


Рис. 4: Решение и первая производная решения уравнения (1.7a) с $j = 1.01$, $a = 0$, ($j_+ = j_- = 1$)

При $0 < |j| - |j_{\pm}| \ll |j_{\pm}|$ оказывается, что поведение ВАХ вообще не зависит от вида ток фазового соотношения. Действительно, если обратиться к модели стиральной доски (washboard model), условие $0 < |j| - |j_{\pm}| \ll |j_{\pm}|$ означает, что локальные минимумы - только-только исчезли, приведя систему в нестационарный режим. Это в свою очередь означает, что фаза проводит большую часть периода в окрестности этого минимума. Это демонстрирует рис. 4, на нем ступенчатый вид решения соответствует долгому движению вдоль пологих участков стиральной доски и краткосрочному падению с них.

Поэтому написав формально интеграл для периода из уравнения (1.7a) можно разложить выражение в знаменателе (который, есть не что иное как производная потенциала

стиральной доски) вблизи минимума (для определенности положим $j - j_+ \ll j_+$):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= j - j_S(\varphi) \\ T &= \int \frac{d\varphi}{j - j_S(\varphi)} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{j - j_+ + j_S''(\varphi_0) \frac{\varphi^2}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{j_S''(\varphi_0) (j - j_+)}} \\ \langle v \rangle &= \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{2j_S''(\varphi_0) (j - j_+)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где φ_0 – значение фазы в точке максимума ток-фазы: $j_S(\varphi_0) = j_+$.

Этот результат совпадает с классическим результатом (т. е. с ВАХ обыкновенного джозефсоновского контакта с крит. током равным единице, что соответствует $a = 0$):

$\langle v \rangle = \sqrt{j^2 - 1} \approx \sqrt{2(j - 1)}$, и в первом порядке по a принимает вид:

$$\langle v \rangle \approx \sqrt{2|j - j_{\pm}|} \left(1 \pm a \sin 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (2.2)$$

где j_{\pm} определяется согласно уравнению (1.2).

2.2 Поведение вольт-амперной характеристики при $|j| \gg |j_{\pm}|$

Численное решение уравнения (1.7а) показывает, что при $|j| \gg |j_{\pm}|$, $\langle v(j) \rangle$ приближается к закону Ома (см. рис. 5) даже при конечных значениях параметра a и при различных гармониках.

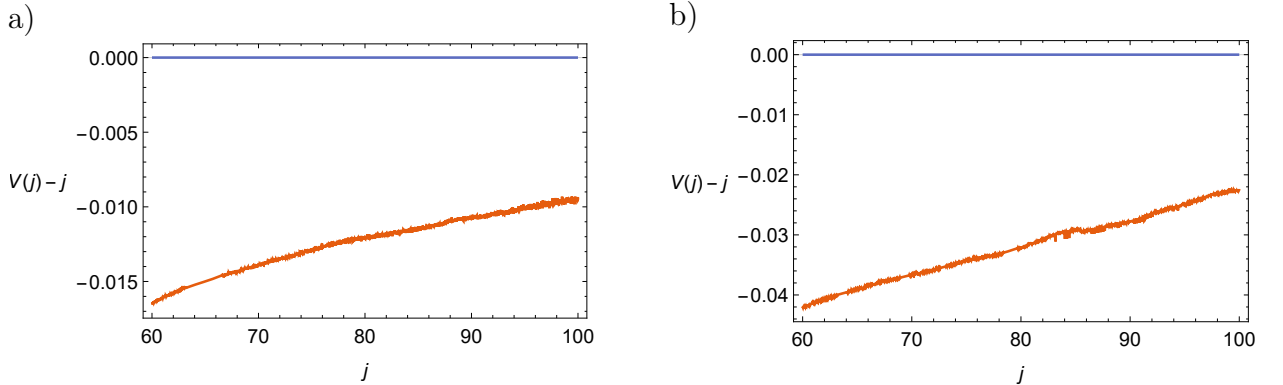


Рис. 5: Отклонение точной ВАХ от закона Ома. а) $\Phi = \Phi_0/6$, $a = 1$, $j_S = \sin(\varphi + \pi/6) + \sin 2\varphi$; б) $j_S = \sin(\varphi + \pi/4) + 2 \sin 3\varphi$; С ростом j кривая все ближе подходит к нулю.

2.3 Заключение

Результаты пункта 2.1 свидетельствуют, что наличие второй гармоники в ток-фазовом соотношении одного из контактов приводит к изменению величины критического тока (в меру коэффициента a), а также изменению коэффициента в корневой зависимости (2.2). Так же как и в работе [3], наблюдается асимметрия критического тока $j_- \neq j_+$.

Согласно результатам пункта 2.2 на больших токах вольт-амперная характеристика выходит на закон Ома.

3 Ступеньки Шапиро

Следующим шагом было решено исследовать поведение ступенек Шапиро. Как известно, задачу о ступеньках Шапиро можно ставить в двух формах: зафиксировав явно периодическое напряжение на контактах, или, зафиксировав зависимость тока от времени. Мы рассмотрим оба этих случая, напомним предварительно, как решается задача в невозмущенном случае (случае одинаковых контактов). Для случая заданного напряжения (см. ниже. раздел 3.1) результаты хорошо известны и изложены в учебной литературе [1, 2]. Для случая заданного тока (см. ниже. раздел 3.3) мы следуем методу «медленно меняющейся амплитуды», изложение которого можно найти в [4, 5].

Как известно, ступеньки Шапиро появляются именно в режиме заданного тока, более удобного с экспериментальной точки зрения, однако сложнее поддающегося теоретическому анализу. Мы же начнем с более простого с точки зрения анализа случая заданного напряжения, когда появление переменной компоненты напряжения вызывает на ВАХ появление характерных пиков (Shapiro spikes).

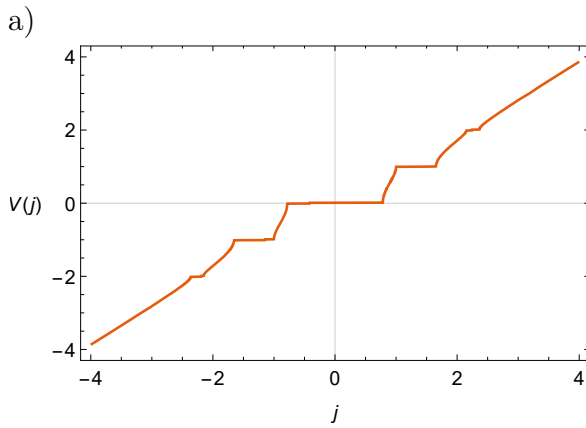


Рис. 6: Ступеньки Шапиро (Shapiro steps)

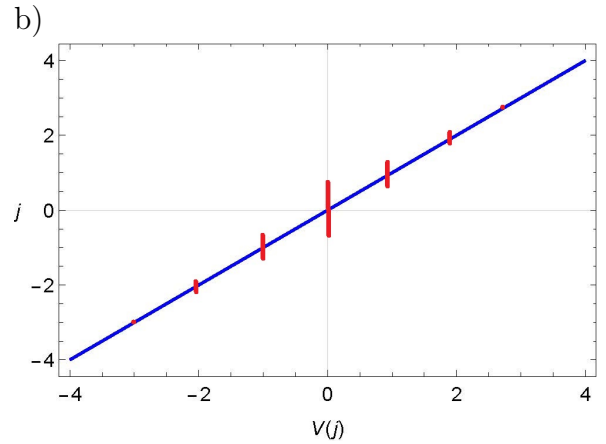


Рис. 7: «Пики» Шапиро (Shapiro spikes)

3.1 Режим заданного напряжения. Симметричный случай

В этом режиме в силу основного джозефсоновского соотношения $\dot{\varphi}(t) = v(t)$ эволюция фазы задана, что дает возможность легко получить вольт-амперную характеристику. Будем считать, что напряжение имеет вид:

$$v(t) = \omega + \omega_0 \cos \Omega t, \quad (3.1)$$

тогда фаза будет устроена:

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 + \frac{\omega_0}{\Omega} \sin \Omega t. \quad (3.2)$$

Для тока получаем:

$$j(\omega) = \sin \varphi(t) = \sin \left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\omega_0}{\Omega} \sin \Omega t \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right) \sin ((\omega + n\Omega)t + \varphi_0) \quad (3.3)$$

$$\langle j(\omega) \rangle = \omega + \begin{cases} J_{-n} \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right) \sin \varphi_0 & \text{if } \omega = n\Omega \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3.4)$$

где в (3.3) множители типа $\sin \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \sin \Omega t \right)$ и $\cos \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \sin \Omega t \right)$ разложены в ряд Фурье. Формула (3.4) свидетельствует о появлении пиков на вольт-амперной характеристике высотой $J_n \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right)$.

3.2 Режим заданного напряжения. Асимметричный случай

Выражение для асимметричного случая мы получим, подставив выражение для эволюции фазы (3.2) в выражения для тока (1.3b) и модифицировав формулу (3.3) из предыдущего пункта 3.1:

$$\sin (\varphi(t) + \pi\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right) \sin ((\omega + n\Omega)t + \varphi_0 + \pi\phi) \quad (3.5a)$$

$$\sin (2\varphi(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(2\frac{\omega_0}{\Omega} \right) \sin ((2\omega + n\Omega)t + 2\varphi_0), \quad (3.5b)$$

после чего получим выражение:

$$\langle j(\omega) \rangle = \omega + \begin{cases} J_{-n} \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right) \sin \left(\varphi_0 + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) + aJ_{-2n} \left(2\frac{\omega_0}{\Omega} \right) \sin 2\varphi_0 & \text{if } \omega = n\Omega \\ aJ_{-n} \left(2\frac{\omega_0}{\Omega} \right) \sin 2\varphi_0 & \text{if } \omega = \frac{n}{2}\Omega \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3.6)$$

Видно таким образом, что появление побочных гармоник в режиме заданного тока приводит во-первых к асимметричности основных пиков, а во-вторых к появлению побочных (на дробных частотах $\omega - \frac{n}{2}\Omega$). Заметим, что эти рассуждения никак не использовали малость второй гармоники; кроме этого замена $\sin 2\varphi \rightarrow \sin m\varphi$, ($m \in \mathbb{Z}$) в ток-фазовом соотношении отличающегося контакта приводит только к замене $2 \rightarrow m$ во всех формулах, а потому полученный результат с легкостью обобщается на случай произвольной гармоники. Поэтому асимметричность СКВИДа в случае заданного напряжения приводит к появлению серии пиков при $\langle v \rangle = \frac{n}{m}\Omega$ (одной серии на каждую m -тую гармонику) и асимметричности основных пиков.

3.3 Режим заданного тока. Невозмущенный случай.

Сложность режима заданного тока, по сравнению с режимом заданного напряжения, связана с тем, что в первом случае, для того, чтобы определить закон изменения

фазы, приходится решать неавтономное дифференциальное уравнение. В случае, когда периодическая часть тока мала, можно развить теорию возмущений, однако наивное разложение решения в ряд по параметру малости возмущения, столкнется с трудностями, в случае, когда частота джозефсоновских осцилляций будет кратна частоте возмущения. Для изучения ступенек Шапиро (которые как раз и являются следствием резонанса) такая теория возмущений неприменима и нуждается в модификации. В этом разделе мы увидим, в чем именно заключается трудность, а так же изложим способ позволяющий обходить эти трудности, следуя [4, 5].

Построение теории возмущений. Итак, пусть ток j в (1.7а) зависит от времени по закону:

$$j(t) = j_{dc} + j_{ac}(t) = j_{dc} + j_{ac} \sin \Omega t \quad (3.7)$$

Мы будем считать j_{ac} малой величиной, строя теорию возмущений по параметру $j_{ac}/j_{dc} \ll 1$ и представляя решения уравнения (1.7а) в виде ряда:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_n, \quad (3.8)$$

по степеням этого малого параметра. Подставляя ряд (3.8) в уравнение:

$$\dot{\varphi} = j - \sin \varphi, \quad (3.9)$$

и собирая множители при одинаковых степенях, получим цепочку уравнений:

$$\dot{\varphi}_0 + \sin \varphi_0 = j_{dc} \quad (3.10a)$$

$$\dot{\varphi}_1 + \varphi_1 \cos \varphi_0 = j_{ac}(t) \quad (3.10b)$$

$$\dot{\varphi}_2 + \varphi_2 \cos \varphi_0 = \frac{\varphi_1^2}{2} \sin \varphi_0 \quad (3.10c)$$

$$\dot{\varphi}_n + \varphi_n \cos \varphi_0 = f_n(t) \quad (3.10d)$$

где $f_n(t)$ – n -тый член разложения $\sin(\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_n)$ за вычетом $\varphi_n \cos \varphi_0$ имеющий вид $P_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cos \varphi_0$, где $P_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ многочлен, состоящий из членов соответствующего порядка. Каждое уравнение в (3.10) представляет собой простой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого тут же выписывается:

$$\varphi_k = \frac{1}{F(t)} \int_{t_0}^t F(\tilde{t}) f_k(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (3.11a)$$

$$F(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \cos \varphi_0(t_1) dt_1 \right\} \quad (3.11b)$$

$$\varphi_0 = 2 \arctan \left\{ \frac{\omega \tan(\frac{\omega t}{2}) + 1}{j_{dc}} \right\}, \quad (3.11c)$$

где введено обозначение: $\omega = \sqrt{j_{dc}^2 - 1}$ – частота джозефсоновской генерации (она же напряжение в нашей системе единиц).

Замечание о граничных условиях. Невозмущенное решение (3.11с) принимает указанный вид при специфическом выборе граничных условий $\varphi_0(t_0 = 0) = 2 \arctan(1/j_{dc})$. Для произвольного начального условия вида:

$$\varphi(t)|_{t=t_0} = \varphi_0^{init},$$

необходимо модифицировать формулу (3.11с), заменив t в ней (и во всех её следствиях) по следующему правилу:

$$t \rightarrow t - t_0 + \frac{2}{\omega} \arctan \left\{ \frac{\tan(j_0 \varphi_0^{init}/2) + 1}{\omega} \right\}$$

При дифференцировании формулы (3.11с), а так же упрощении тригонометрических выражений с φ_0 нам то и дело будут встречаться комбинации вида:

$$\cos \omega t + \omega \sin \omega t = \sqrt{\omega^2 + 1} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \cos \omega t + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin \omega t \right) = \underbrace{\sqrt{\omega^2 + 1}}_{j_{dc}} \cos(\omega t + \arctan \omega)$$

С целью одновременно упростить запись подобных выражений и учесть граничные условия мы введем обозначение:

$$\theta_0 = \omega t_0 - \arctan \omega - 2 \arctan \left\{ \frac{\tan(j_0 \varphi_0^{init}/2) + 1}{\omega} \right\} \quad (3.12)$$

Приведем также некоторые формулы для справок, пригодящиеся в дальнейшем и использующие конкретный вид функции $\varphi_0(t)$ (3.11с), используя обозначение (3.12):

$$\sin \varphi_0 = \frac{1 + j_{dc} \cos(\omega t - \theta_0)}{j_{dc} + \cos(\omega t - \theta_0)} \quad (3.13a)$$

$$\cos \varphi_0 = -\frac{\omega \sin(\omega t - \theta_0)}{j_{dc} + \cos(\omega t - \theta_0)} \quad (3.13b)$$

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{\omega^2}{j_{dc} + \cos(\omega t - \theta_0)} \quad (3.13c)$$

$$F(t) = \frac{\dot{\varphi}_0(t_0)}{\dot{\varphi}_0(t)} \quad (3.13d)$$

Первый порядок теории возмущений. Подставив $f_1(t) = j_{ac} \sin \Omega t$ в выражение (3.11а), используя (3.13а) мы получим:

$$\varphi_1 = \frac{j_{ac}}{j_{dc} + \cos(\omega t - \theta_0)} \left(\int_{t_0}^t j_{dc} \sin \Omega \tau d\tau + \int_{t_0}^t \cos(\omega \tau - \theta_0) \sin \Omega \tau d\tau \right), \quad (3.14)$$

а взяв все возникшие интегралы, получим в результате:

$$\varphi_1 = -\frac{j_{ac}}{j_{dc} + \cos(\omega t - \theta_0)} \left\{ \frac{j_{dc}}{\Omega} \cos \Omega t + \frac{\cos((\omega + \Omega)t - \theta_0)}{2(\Omega + \omega)} + \frac{\cos((\omega - \Omega)t - \theta_0)}{2(\Omega - \omega)} \right\} + \{t \rightarrow t_0\} \quad (3.15)$$

Теперь рассмотрим поведение первой поправки в резонансе.

Резонансный случай. При этом интеграл в (3.14) приводится к виду:

$$\varphi_1 = \frac{j_{ac}}{j_{dc} + \cos(\omega t - \theta_0)} \left(\int_{t_0}^t j_{dc} \sin \omega \tau d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \{ \sin(2\omega \tau - \theta_0) - \sin(\theta_0) \} d\tau \right), \quad (3.16)$$

что приводит к появлению линейного члена в выражении для φ_1 :

$$\varphi_1 = -\frac{j_{ac}}{j_{dc} + \cos(\omega t - \theta_0)} \left(\frac{j_0}{\omega} \cos \omega t + \frac{\cos(2\omega t - \theta_0)}{4\omega} + \sin(\theta_0) \frac{t}{2} \right) + j_{ac} \{t \rightarrow t_0\} \quad (3.17)$$

Это приводит к росту первой поправки со временем и неприменимости теории возмущений. Метод, который позволяет избежать этих проблем – «метод медленно меняющейся фазы» изложен в [4, 5]. Сейчас мы посмотрим, как он работает в данном случае, а затем покажем, как он позволяет находить любые поправки к ширинам любых ступеней Шапиро. Идея заключается в том, чтобы допустить, будто резонанс приводит к малому изменению j_{dc} :

$$j_{dc} \approx j_0 + j_1 + O(j_{ac}^2) \quad (3.18)$$

Добавка в (3.18) приведет к изменению выражения для $f_1(t)$, после чего интеграл в (3.14) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t (j_0 + \cos(\omega \tau - \theta_0)) (j_1 + j_{ac} \sin \omega \tau) d\tau = \\ & = \left(\underbrace{(j_0 j_1 t) + \frac{j_1}{\omega} \sin(\omega t - \theta_0)}_{\text{добавка от введения } j_1} - j_{ac} \underbrace{\left\{ \frac{j_0}{\omega} \cos \omega t + \frac{\cos(2\omega t - \theta_0)}{4\omega} + \frac{1}{2} \sin(\theta_0) t \right\}}_{\text{член из обычной теории возмущений}} \right) - \\ & \quad - \{t \rightarrow t_0\}, \quad (3.19) \end{aligned}$$

откуда видно, что малая добавка к j_{dc} приводит к возникновению дополнительного линейного слагаемого, что позволяет выбрать j_1 так, чтобы все линейные члены сократили друг-друга. Из 3.19 заключаем, что j_1 следует выбрать таким образом:

$$j_1 = -\frac{j_{ac}}{2j_0} \sin \theta_0 \quad (3.20)$$

Отсюда мы заключаем, что ширина первой ступени $\Delta j_1 = \frac{j_{ac}}{j_0}$, а положение ее границ определяется:

$$j_{first\ step} = j_0 \pm \underbrace{\frac{j_{ac}}{2j_0}}_{j_1} \quad (3.21)$$

При этом первая поправка будет определяться выражением:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{\omega (j_0 + \cos(\omega t - \theta_0))} \left\{ j_0 \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos(2\omega t - \theta_0) - \frac{\sin \theta_0}{2j_0} \sin(\omega t - \theta_0) \right\} \quad (3.22)$$

Резюме. Описанную процедуру можно обобщить следующим образом:

1. Представляем j_{dc} в виде ряда

$$j_{dc} = j_0 + j_1 + j_2 + \dots + j_n \quad (3.23)$$

2. Выбираем члены ряда таким образом, чтобы поправки к $\varphi(t)$ не содержали растущих членов. Это условие можно записать так:

$$\langle \dot{\varphi}_n \rangle = 0, \quad \forall n \neq 0, \quad (3.24)$$

где усреднение происходит по периоду джозефсоновских осцилляций. Это условие можно переписать в виде условия на подынтегральное выражение в (3.11a):

$$\langle f_n(t) (j_0 + \sin(\omega t - \theta_0)) \rangle = 0 \quad (3.25)$$

3. Ширина n -той ступени определяется j_n ; как видно из (3.25) все

$j_1 = j_2 = \dots = j_{n-1} = 0$, поскольку соответствующие им выражения (3.25) не будут давать резонансных слагаемых (т. к. мы находимся в n -том резонансе $\omega = n\Omega$, а в $f_n(t)$ сидят только φ_k с $k \leq n-1$). Из-за этого ширина n -той ступени порядка $\sim j_{ac}^n$

4 Заключение

В работе изучена вольт-амперная характеристика простейшего асимметричного джозефсоновского контакта, представляющего собой СКВИД, один из контактов которого отличается от другого наличием второй гармоники. Была изучена зависимость величины критических токов от проникающего в петлю СКВИДа потока. Вольт-амперная характеристика согласуется с законом Ома при токах, сильно превышающих критический, а также установлено корневое поведение вблизи критического тока.

В дальнейшем планируется изучить поведение ВАХ асимметричного контакта под влиянием микроволнового излучения, рассмотрев изменение ступеней (их положения и ширин по току) вызванные наличием высших гармоник в ток-фазовом соотношении одного из контактов, используя метод, рассмотренный в части 3.3 настоящей работы.

Список литературы

- [1] Tinkham, M., 1996, Introduction to superconductivity (McGraw-Hill, New York)
- [2] Шмидт В. В., 2000, Введение в физику сверхпроводников. (изд. 2-е испр. и доп., Москва, МЦНМО)
- [3] Chui-Zhen Chen, James Jun He, Mazhar Ali, Gil-ho Lee, K C Fong, K. T. Law. Asymmetric Josephson Effect in Inversion Symmetry Breaking Topological Materials. arXiv:1802.10389v1 [cond-mat.supr-con]
- [4] К.К. Likharev, Dynamics of Josephson Junctions and Circuits, New York: Gordon and Breach, 1986.
- [5] E. D. Thompson, Journal of Applied Physics **44**, 5587 (1973); doi: 10.1063/1.1662201