

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика
(бакалавриат)

Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная и прикладная физика

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОГЕРЕНТНОГО ВИХРЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ЗА СЧЕТ ОБРАТНОГО КАСКАДА В ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(бакалаврская работа)

Студент:

Ивченко Николай Александрович

(подпись студента)

Научный руководитель:

Лебедев Владимир Валентинович,
д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., чл.-кор.
РАН

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2020

Аннотация

В данной работе в рамках квазилинейного приближения флуктуаций изучалась динамика скорости когерентного вихря - крупномасштабного течения, образующегося в ограниченной системе из-за обратного энергетического каскада в теории двумерной турбулентности. Было получено общее выражение нелинейного вклада флуктуаций в уравнение эволюции скорости. Рассматривалась задача о свободном затухании вихря в его различных областях в пространстве: найдены асимптотики затухания когерентной и флуктуационной части. Изучалась задача об изменении мощности накачки. В рамках адиабатического приближения было получено и решено уравнение на скорость. Также исследован линейный отклик в динамике вихря - получено уравнение, в рамках которого был рассмотрен случай гармонической модуляции накачки.

Содержание

Введение	4
1 Уравнение на скорость когерентного вихря	6
2 Квазилинейное приближение флуктуаций	8
2.1 Уравнение на флуктуацию завихренности	8
2.2 Решение неоднородного уравнения, выражение коррелятора	9
2.3 Стационарная накачка, универсальный интервал скорости	11
3 Свободная эволюция вихря после отключения накачки	12
3.1 Решение однородного уравнения, учет начальных условий	12
3.2 Решение системы уравнений на скорость	14
4 Эволюция кора вихря при затухших флуктуациях	15
4.1 Функция Грина задачи на скорость	15
4.2 Решение на пробный профиль	16
5 Адиабатический подход к изменению накачки	18
5.1 Уравнение на скорость в адиабатике и его решение	18
5.2 Примеры применения адиабатического приближения	19
6 Исследование линейного отклика в скорости	20
6.1 Теория возмущения по малому параметру, запись уравнения.	20
6.2 Гармоническая модуляция накачки	22
6.3 Исследование пространственного оператора на скорость	22
7 Приложение	24
7.1 Вычисление интегралов с корреляционной функцией гауссова вида	24
7.2 Интегрирование по частям: оценка остаточных интегралов	25
7.3 Интегралы в задаче о линейном отклике	26
Заключение	29
Список литературы	30

Введение

Турбулентность в гидродинамике - это хаотическое состояние движения жидкости, реализующееся при больших числах Рейнольдса [1]. Для однородного случая известно стационарное статистическое решение - спектр Колмогорова прямого каскада энергии, переносящего ее с масштаба возбуждающей силы накачки l_f в сторону меньших масштабов за счет нелинейного взаимодействия [2].

В работе изучается двумерная турбулентность, образуемая, например, в тонком слое жидкости, когда можно пренебречь малой поперечной компонентой скорости. Теоретические работы [3, 4] показали, что она существенно отличается от трехмерного случая. В связи с существованием двух квадратичных интегралов в двумерном уравнении Эйлера (энергии и энтропии - квадрата завихренности), из-за нелинейного взаимодействия возникают 2 каскада: энтропия переносится от l_f к меньшим масштабам (прямой каскад) со спектральной зависимостью $E(k) \sim k^{-3}$, а энергия - на большие масштабы (обратный каскад) со скейлингом $E(k) \sim k^{-5/3}$. Статистические свойства флуктуаций скорости в обратном каскаде исследовались как численно [5], так и экспериментально [6], данные подтверждают теоретический результат.

В системе без стенок обратный каскад заканчивается на масштабе $L_\alpha \sim \epsilon^{1/2} \alpha^{-3/2}$, где достигается баланс между потоком энергии на единицу массы ϵ и потерями из-за трения о дно с коэффициентом α . Каскад энтропии прерывается на малых масштабах диссипацией от вязкого трения [7]. Тогда, если ограничить систему характерным размером $L \gg l_f$, но сделать его меньше, чем L_α , то образуется обратный каскад, переносящий энергию на масштабы порядка L , где та начнет накапливаться. Это приводит к образованию когерентных структур - устойчивого крупномасштабного движения, примером которого является вихрь (см. Рис.(1)). Впервые они наблюдались в опыте [8].

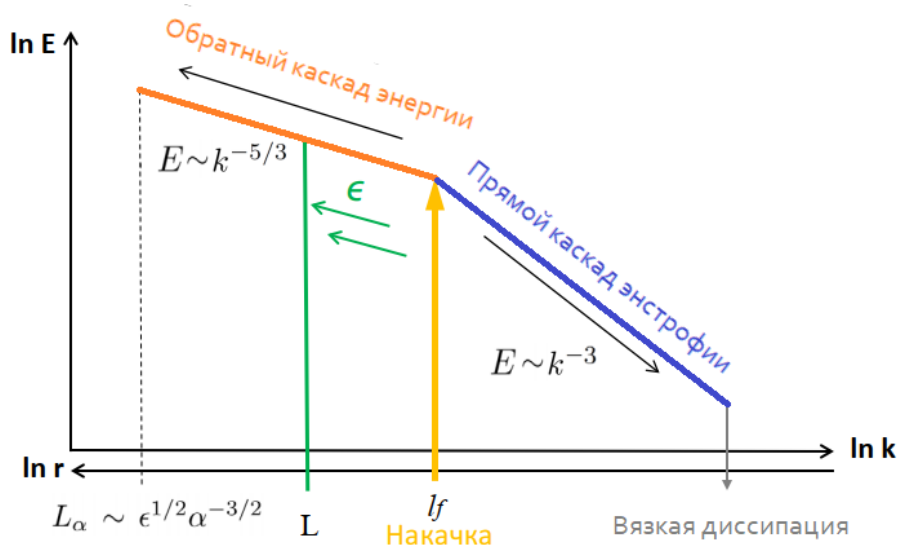


Рис. 1: Спектры Крайчнана двумерной турбулентности [3] - энергия переносится в сторону больших масштабов. Ее конденсация происходит на границе системы $L < L_\alpha$, тем самым вызывая формирование когерентных течений.

В численном эксперименте [9] на квадратной ячейке с периодическими условиями наблюдалось, что профиль азимутальной скорости вихря оказывается плоским на некотором интервале расстояний от центра. Как было показано в теоретической работе [10], он соответствует квазилинейному (пассивному) режиму флуктуаций скорости. В статье [11] в рамках этого режима были рассчитаны структурные функции флуктуаций. Экспериментальное подтверждение такого профиля было в работе [12], где исследовалась статическая накачка, вызываемая силой Лоренца в тонком слое электролита.

Целью данной работы является исследование нестационарной задачи. В главах 1, 2 выведены общие выражения, используемые далее. Динамика затухания вихря в случае резкого отключения накачки изучалась в главах 3, 4. Главы 5 и 6 посвящены формулированию и решению уравнений при слабом изменении мощности накачки в общем виде. Построение графиков решений проводилось на основе данных эксперимента [12]. Многие схожие между разделами промежуточные выкладки для удобства были перемещены в математическое Приложение (глава 7) в конце работы.

1 Уравнение на скорость когерентного вихря

В эффективно двумерной системе компонента скорости, перпендикулярная слою жидкости, будет подавлена за счет границ системы. Поэтому течение будет описываться двумерным уравнением Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с дополнительным слагаемым $\alpha \mathbf{v}$, возникающим из-за трения о дно [9]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (1.1)$$

где ν - кинематическая вязкость, ρ - плотность жидкости.

Для нахождения коэффициента α (значение которого должно определяться геометрией системы и свойствами жидкости) рассматривается случай тривиального течения вдоль слоя, зависящего только от поперечной координаты $\mathbf{v} = v(t, z) \mathbf{e}_x$. Его будет описывать трехмерное уравнение Навье-Стокса в слое без внешних сил и градиента давления. Поиск решения с разделением переменных $v = F(t)G(z)$ сводится к экспоненциальному затуханию со временем функции F :

$$F'(t) = \nu \lambda F(t)$$

где $\lambda < 0$ - собственное значение $G''(z) = \lambda G(z)$, дополненного граничными условиями.

В случае слоя жидкости толщины h , условия можно сформулировать как: отсутствие проскальзывания на дне $v(z=0) = 0$ и ноль тангенциальной компоненты тензора напряжений на свободной поверхности $v'_z(z=h) = 0$. Выбрав наибольшую моду из решения на спектр (самое медленное затухание), находим α из разницы между значениями $\Delta \mathbf{v}$ в разных размерностях. Ответ согласуется с результатом [13]:

$$\begin{aligned} \nu \Delta^{(3D)} &= \nu \Delta^{(2D)} + \nu \lambda_m \rightarrow \alpha = -\nu \lambda_m \\ \alpha &= \nu \frac{\pi^2}{4h^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для достижения малого α (что важно в исследуемой модели; подробнее см. след главу) и при этом сохранении двумерности у течения с характерным масштабом $L \gg h$, в эксперименте используется система с нижним слоем из другой жидкости, играющим роль смазки (в то время как в верхнем слое электролита при пропускании тока возбуждается турбулентность силой Лоренца). В таком случае уравнение на спектр $G(z)$ дополняется граничными условиями на разделе жидкостей: нужна непрерывность скорости и касательного напряжения. В итоге, коэффициент α определяется как наименьший корень уравнения (индекс b обозначает параметры жидкости нижнего слоя) [12]:

$$\frac{\rho_b}{\rho} \sqrt{\frac{\nu_b}{\nu}} = \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\nu_b}} h_b \right) \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} h \right) \quad (1.3)$$

Выбрав за начало координат центр вихря, выделим усреднением по времени его скорость U на фоне флуктуаций. В полярных координатах это запишется как:

$$\mathbf{v} = U(r)\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{u}; \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (1.4)$$

Запишем (1.1) в проекции на \mathbf{e}_φ и усредним его по времени. Сначала рассмотрим отдельно нелинейное слагаемое - его проекция равна:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi &= v_r\partial_r v_\varphi + \frac{1}{r}v_\varphi\partial_\varphi v_\varphi + \frac{1}{r}v_r v_\varphi \\ \langle (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi \rangle &= \partial_r \langle v_r v_\varphi \rangle - \langle v_\varphi \partial_r v_r \rangle + \frac{1}{r} \langle v_r v_\varphi \rangle \end{aligned}$$

Используя условие несжимаемости жидкости, приводим его к виду:

$$\begin{aligned} \partial_r v_r + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi &= 0 \\ \langle (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi \rangle &= \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \langle u_r u_\varphi \rangle \end{aligned} \quad (1.5)$$

Остальные слагаемые оставят лишь среднюю скорость U . Получаем уравнение на нее [1]:

$$\partial_t U + \alpha U - \nu \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2} \right) U = - \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \langle u_r u_\varphi \rangle \quad (1.6)$$

Следующая глава работы посвящена вычислению выражения в правой части уравнения и его роли в определении среднего течения в стационарном режиме.

2 Квазилинейное приближение флуктуаций

В работе рассматривается турбулентность с мощностью возбуждения, превышающей диссипацию энергии за счет трения: вязкого и о дно. Сформулируем это в виде неравенства, оценив градиент по скорости на масштабе накачки как:

$$\epsilon^{1/3} k_f^{2/3} \gg \alpha, \nu k_f^2 \quad (2.1)$$

Далее, в модели рассматривается случай, когда скорость U достаточно велика:

$$\frac{U}{r} \gg \epsilon^{1/3} k_f^{2/3} \quad (2.2)$$

Неравенство означает, что флуктуации на малых по сравнению с r масштабах будут подавлены когерентным течением. Реализуется квазилинейное приближение: в уравнении на флуктуации можно пренебречь членом их собственной нелинейности [10]. Этот режим подтверждается и в эксперименте. Более того, в работе [15] показано, что моменты флуктуационной части скорости приобретают статистику, близкую к гауссовой.

Выполнение неравенств (2.1) и (2.2) приводит к малым параметрам, появляющимся в ходе вычисления. Также считается, что трение о дно слабое - этот предел может наблюдаться, к примеру, в численном счете [9]. Итого имеются соотношения:

$$\frac{\alpha}{|\Sigma|} \ll \frac{\nu k_f^2}{|\Sigma|} \ll 1 \quad (2.3)$$

2.1 Уравнение на флуктуацию завихренности

Флуктуации на фоне вихря $U(r)e_\varphi$ удобно исследовать через завихренность $\text{rot } \mathbf{v} = \Omega + \omega$, где Ω относится к среднему течению, ω - к флуктуационной:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{r} (\partial_r (r v_\varphi) - \partial_\varphi v_r); \quad \Omega = \partial_r U + \frac{U}{r}; \quad \omega = \frac{1}{r} (\partial_r (r u_\varphi) - \partial_\varphi u_r) \quad (2.1.1)$$

Взяв в уравнении Навье-Стокса двумерный ротор и выделив в нем флуктуирующую часть, получим скалярное уравнение на функцию ω :

$$\partial_t \omega + \frac{U}{r} \partial_\varphi \omega + u_r \partial_r \Omega + \text{div } (\mathbf{u} \omega - \langle \mathbf{u} \omega \rangle) = \phi - \hat{\Gamma} \omega \quad (2.1.2)$$

где $\phi = \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha f_\beta$ является силой накачки для завихренности, а оператор $\hat{\Gamma} = \alpha + \nu \Delta$ отвечает за диссипацию энергии, включая в себя вязкость и трение о дно. С уравнением работаем, пренебрегая обратным влиянием флуктуаций на среднее течение, тем самым линеаризовывая его. Для точки на расстоянии R от центра перейдем в систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью $U(R)/R$. В ней введем локальную систему координат

$x_1 = r - R$, $x_2 = R\varphi$, в которой уравнение переписется в виде:

$$\partial_t \omega + R \partial_{x_1} \left(\frac{U}{r} \right) x_1 \partial_{x_2} \omega + u_r \partial_{x_1} \Omega = \phi - \hat{\Gamma} \omega \quad (2.1.3)$$

Последнее слагаемое в левой части будет мало по сравнению со вторым по параметру $k_f R \gg 1$ (k_f - характерный волновой вектор накачки). Произведя фурье-преобразование, получаем уравнение на завихренность, обозначая как коэффициент, слабо меняющийся на масштабах флуктуаций, параметр дифференциального сдвига Σ . В итоге, приходим к фурье-уравнению флуктуаций завихренности в сдвиговом течении [10, 11]:

$$\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial t} - \Sigma(t) k_2 \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial k_1} + \Gamma(k) \omega_{\mathbf{k}} = \phi_{\mathbf{k}}(t) \quad (2.1.4)$$

$$\Gamma(k) = \alpha + \nu k^2, \quad \Sigma = r \partial_r \left. \frac{U}{r} \right|_{r=R}$$

2.2 Решение неоднородного уравнения, выражение коррелятора

Запишем формальный вид решения (2.1.4) с силой накачки произвольного вида на характеристике \mathbf{k}' (нижний предел выбран $\tau \rightarrow -\infty$, где начальные условия - скорость 0):

$$\omega_{\mathbf{k}}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau \phi(t, \mathbf{k}'(x)) \exp \left[- \int_{\tau}^t dx \Gamma(k'(y)) \right]; \quad \mathbf{k}'(\tau) = \left(k_1 + k_2 \int_{\tau}^t \Sigma(\xi) d\xi; k_2 \right) \quad (2.2.1)$$

Считаем, что силы накачки подчиняются гауссовой статистике и характеризуются парным коррелятором: они являются δ -коррелированными по времени, вбрасывают в систему энергию с мощностью $\epsilon(t)$ (удовлетворяющей неравенству (2.1) на всем времени):

$$\langle \phi_{\mathbf{k}}(t) \phi_{\mathbf{p}}(t') \rangle = 2 (2\pi)^2 \epsilon(t) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \delta(t - t') k^2 \chi(\mathbf{k}) \quad (2.2.2)$$

где $\chi(\mathbf{k})$ - корреляционная функция накачки, которая в общем случае затухает на $k \gtrsim k_f$ и нормирована (также подразумевается изотропной, зависящей только от модуля k):

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \chi(k) = 1$$

Используя соотношение $u_{\mathbf{k}} = i \epsilon_{\alpha\beta} k_{\beta} \omega_{\mathbf{k}} / k^2$, можно записать усредненное выражение непосредственно на скорости, отталкиваясь от завихренностей и проинтегрировав по \mathbf{k} . Снимая интегрирование по одному времени τ' и делая замену переменной на $z = t - \tau$ - интегрирование по времени в прошлое, получим выражение:

$$\langle u_r u_{\varphi} \rangle = \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \int_0^T dz \frac{k_1 p_2}{k^2 p^2} \langle \phi(\mathbf{k}'(z)) \phi(\mathbf{p}'(z)) \rangle (t - z) e^{-\int_0^z dx (\Gamma(k'(x)) + \Gamma(p'(x)))}$$

где T - время, в течение которого была включена накачка, а выражение характеристики получило сдвиг аргумента $\tau \rightarrow t - \tau$. Подставив (2.2.2), и сняв интегрирование по $d^2\mathbf{p}$ приходим к выражению коррелятора (здесь возможная конечность времени накачки зашита в определение функции ϵ):

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = -2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dz \frac{k_1 k_2}{k^4} \epsilon(t-z) (k'(z))^2 \chi(\mathbf{k}'(z)) e^{-2 \int_0^z dx \Gamma(k'(x))} \quad (2.2.3)$$

Выберем для функции χ выражение, отвечающее гауссовому затуханию на больших значениях аргумента и растущему как k^2 на малых (тем самым ограничивая вклад как $k \ll k_f$, так и $k \gg k_f$) [14, 17]. Далее произведем замену вектора интегрирования на \mathbf{k}' , обезразмеривание на k_f и перейдем в полярную систему координат (k, θ) :

$$\chi(k) = \frac{4\pi}{k_f^4} k^2 \exp\left(-\frac{k^2}{k_f^2}\right), \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}'(z) \mapsto \tilde{\mathbf{k}} = k_f k (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{так, что: } \chi(k) = 4\pi \exp(-k^2)$$

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dz \epsilon(t-z) e^{-2\alpha z} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty k^3 dk \frac{\sin \theta \left(\cos \theta + \sin \theta \int_t^{t-z} \Sigma(x) dx \right)}{f^2(\theta, z)} e^{-k^2(1+2\nu k_f^2 F(\theta, z, t))} \quad (2.2.5)$$

где были введены функции:

$$f(\theta, z, t) = \sin^2 \theta + \left(\cos \theta + \sin \theta \int_t^{t-z} \Sigma(y) dy \right)^2 \quad (2.2.6)$$

$$F(\theta, z, t) = \int_0^z dx \sin^2 \theta + \left(\cos \theta + \sin \theta \int_{t-x}^{t-z} \Sigma(y) dy \right)^2$$

Проинтегрировав по k , соберем часть подынтегральной функции в производную по z :

$$\begin{aligned} \langle u_r u_\varphi \rangle(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz \int d\theta \frac{e^{-2\alpha z} \epsilon(t-z) \sin \theta \left(\cos \theta + \sin \theta \int_t^{t-z} dx \Sigma(x) \right)}{f(\theta, z, t)^2 [1 + 2\nu k_f^2 F(\theta, z, t)]^2} = \quad (2.2.7) \\ &= -\int_0^\infty dz \frac{\epsilon(t-z) e^{-2\alpha z}}{\Sigma(t-z)} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{[1 + 2\nu k_f^2 F(\theta, z, t)]^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f(\theta, z, t)} \right) \end{aligned}$$

В главах 3 – 6 работы данное вычисление было продолжено и доведено до явной записи, которое подставлялось в уравнение динамики вихря. Стационарный случай, разобранный в следующем разделе, включает в себе результат, характерный для квазилинейного приближения в целом [10].

2.3 Стационарная накачка, универсальный интервал скорости

Считаем, что в систему вбрасывается постоянная по мощности энергия - опускающая зависимость от времени параметров ϵ , Σ , приходим к упрощению функций, введенных в (2.2.6) и выражения коррелятора (2.2.7):

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = -\frac{\epsilon}{\Sigma} \int_0^\infty dz e^{-2\alpha z} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{[1 + 2\nu k_f^2 F_0(\theta, z)]^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f_0(\theta, z)} \right)$$

$$f_0(\theta, z) = \sin^2 \theta + (\cos \theta - \Sigma z \sin \theta)^2; \quad F_0(\theta, z) = \int_0^z dx f_0(\theta, x) \quad (2.3.1)$$

Его вычисление в ведущем порядке по малости $2\nu k_f^2 / |\Sigma_0|$, $\alpha / |\Sigma_0|$ (см. Приложение) даст:

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} \quad (2.3.2)$$

В уравнении на $U(r)$ (1.6) при рассмотрении за пределами кора вихря размером $R_c \sim \sqrt{\nu/\alpha}$, вязкий член оказывается пренебрежимо мал. Полученное же имеет решение, не зависящее от r :

$$\alpha U = - \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \frac{\epsilon}{\Sigma} \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{\frac{3\epsilon}{\alpha}} \quad (2.3.3)$$

Этот плоский профиль скорости подтверждается как численно [9], так и экспериментально [12]. Он реализуется на т.н. универсальном интервале $R_c \ll r \ll R_u$ в пространстве, верхняя граница которого обусловлена нарушением квазилинейного приближения (неравенства (2.2))

$$R_u \sim L_\alpha^{1/3} k_f^{-2/3} \sim \epsilon^{1/6} \alpha^{-1/2} k_f^{-2/3} \quad (2.3.4)$$

Если величина R_u превосходит границы системы L , то можно считать, что универсальный интервал распространяется повсеместно вне кора (наблюдается, например, в эксперименте [16]). В противном случае, $R_u < L$ является характерным размером вихря.

3 Свободная эволюция вихря после отключения накачки

Рассмотрим задачу о свободной эволюции скорости вихря: считаем, что система находилась в режиме стационарной накачки (с постоянной мощностью ϵ), но в момент времени $t = 0$ накачку полностью отключают. В данной главе будет получено в ведущем приближении выражение поперечного коррелятора скорость-скорость флуктуаций и изучен его нелинейный вклад в уравнение на динамику затухания вихря.

3.1 Решение однородного уравнения, учет начальных условий

В случае свободной эволюции, в уравнении (2.1.4) отсутствует сила $\phi_{\mathbf{k}} = 0$. Переходя на характеристику $\mathbf{k}'(t)$, запишем решение:

$$\omega_{\mathbf{k}}(t) = \omega_{\mathbf{k}}^{\text{st}} \exp \left[- \int_0^t d\tau \Gamma \left(\sqrt{k_2^2 + (k_1 - k_2 \int_t^\tau \Sigma(\xi) d\xi)^2} \right) \right] \quad (3.1.1)$$

где множитель $\omega_{\mathbf{k}}^{\text{st}}$ определяется через начальное условие - на временах $t < 0$ система находилась в режиме стационарной накачки.

Вычисление коррелятора приводит к выражению, аналогичному (2.2.3), но с экспонентой эволюции на характеристике \mathbf{k}' , внешней для интеграла по dz , а внутренняя характеристика \mathbf{k}'' упрощена из-за постоянности $\Sigma = \Sigma_0$:

$$\begin{aligned} \langle u_r u_\varphi \rangle(t) &= -2\epsilon \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \exp \left[-2 \int_0^t dx \Gamma(k'(x)) \right] \times \\ &\times \int_0^\infty dz \frac{k_1 k_2}{k^4} (k''(z))^2 \chi(\mathbf{k}''(z)) \exp \left[-2 \int_0^z dy \Gamma(k''(y)) \right], \quad \mathbf{k}''(\tau) = (k_1 + \tau \Sigma_0 k_2; k_2) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

При подстановке $\chi(k)$ гауссова вида (2.2.4), смене вектора интегрирования $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}''(z)$ и последующего взятия $\int dk$, получается выражение, в котором так же была собрана частная производная по dz :

$$\begin{aligned} \langle u_r u_\varphi \rangle &= -\frac{\epsilon}{\pi} e^{-2\alpha t} \int_0^\infty dz \int d\theta \frac{e^{-2\alpha z} \sin \theta (\cos \theta - \Sigma_0 z \sin \theta)}{f_0^2(\theta, z) [1 + 2\nu k_f^2 (G(\theta, z, t) + F_0(\theta, z, t))]^2} = \\ &= -\frac{\epsilon}{\Sigma_0} e^{-2\alpha t} \int \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^\infty dz \frac{e^{-2\alpha z}}{[1 + 2\nu k_f^2 (G(\theta, z, t) + F_0(\theta, z, t))]^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f_0(\theta, z)} \right) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где функции f_0, F_0 были в разделе (2.3.1) стационарной накачки, а также была введена G :

$$G(\theta, z, t) = \int_0^t dx \sin^2 \theta + \left(\cos \theta - \Sigma_0 z \sin \theta - \sin \theta \int_t^x d\xi \Sigma(\xi) \right)^2 \quad (3.1.4)$$

Далее применим прием интегрирования по частям: $\int u dv = uv|_0^\infty - \int v du$. Остаточный интеграл окажется малым по параметрам $2\nu k_f^2 / |\Sigma_0|$, $\alpha / |\Sigma_0|$ (см. Приложение), в ведущем порядке лишь выражение с интегрированием по углу θ при $z = 0$:

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon e^{-2\alpha t}}{2\pi \Sigma_0} \int_0^\infty dz \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{[1 + 2\nu k_f^2 (t + 2 \sin \theta \cos \theta L(t) + \sin^2 \theta K(t))]^2} \quad (3.1.5)$$

$$L(t) = \int_0^t dx \int_x^t d\xi \Sigma(x); \quad K(t) = \int_0^t dx \left(\int_x^t d\xi \Sigma(\xi) \right)^2$$

Перейдем к интегрированию по $y = \text{ctg } \theta$. Выражение в знаменателе разложим как квадратный трехчлен с комплексными корнями $y_{1,2} = a \pm ib$ (введена $\varphi(t) = 2\nu k_f^2 / (1 + 2\nu k_f^2 t)$):

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon e^{-2\alpha t}}{\pi \Sigma_0 (1 + 2\nu k_f^2 t)^2} \int \frac{dy (1 + y^2)}{[(y - a)^2 + b^2]^2}; \quad \begin{cases} a = \varphi(t)L(t) \\ b = \sqrt{1 + \varphi(t)K(t) - (\varphi(t)L(t))^2} \end{cases}$$

Проинтегрируем взятием вычета и получаем:

$$\langle u_r u_\varphi \rangle (t) = \frac{\epsilon e^{-2\alpha t}}{2\Sigma_0 (1 + 2\nu k_f^2 t)^2} \frac{2 + \varphi(t)K(t)}{[1 + \varphi(t)K(t) - (\varphi(t)L(t))]^{3/2}} \quad (3.1.6)$$

Поставим задачу о затухании вихря как решение системы дифференциальных уравнений, получив соответствующие на функции $L(t)$ и $K(t)$:

$$L(t) = \int_0^t dy \int_y^t dx \Sigma(x) = \int_0^t x dx \Sigma(x) \quad \Rightarrow \quad L'(t) = t \Sigma(t)$$

$$K(t) = \int_0^t dy \left(\int_y^t dx \Sigma(x) \right)^2 = 2 \int_0^t x dx \Sigma(x) \int_x^t dy \Sigma(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{K'(t)}{V(t)} \right) = 2t \Sigma(t)$$

3.2 Решение системы уравнений на скорость

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U(r, t) + \alpha U(r, t) - \nu \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \Sigma(r, t) = \frac{-\epsilon e^{-2\alpha t}}{\Sigma_0 (1 + 2\nu k_f^2 t)^2} \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \frac{1 + \varphi K/2}{[1 + \varphi K - (\varphi L)]^{3/2}} \\ U(r, t) = U_0(r) \\ \Sigma = r \partial_r \left(\frac{U}{r} \right) \\ \partial_t L = t \Sigma \\ L(t=0) = 0 \\ \Sigma \partial_t^2 K - \partial_t K \partial_t \Sigma = 2t \Sigma^3 \\ K(t=0) = K'(t=0) = 0 \\ \varphi(t) = \frac{2\nu k_f^2}{1 + 2\nu k_f^2 t} \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

При удалении от центра вихря его скорость выходит на плоский профиль, $U \approx r$. Полагая, что при затухании это не будет нарушаться на начальных временах, (3.2.1) может значительно упроститься и мы приходим к только временной зависимости для $U(t)$: $\Sigma(t) = -U(t)/R$. Подставляя характерные значения величин из эксперимента [12], приходим к выводу, что главным слагаемым в уравнении на эволюцию остается слагаемое трения о дно и $U \sim e^{-\alpha t}$. Учитывая этот факт, получаем, что на начальных временах $t \ll \alpha^{-1}$ $\Sigma \sim \Sigma_0$, а потому $L \sim t^2$, $K \sim t^3$. Отсюда следует, что вклад флуктуаций в правой части уравнения затухает как t^{-3} , а потому может быть исключен из рассмотрения системы вовсе. Ниже были приложены результаты численного счета (Рис. 2).

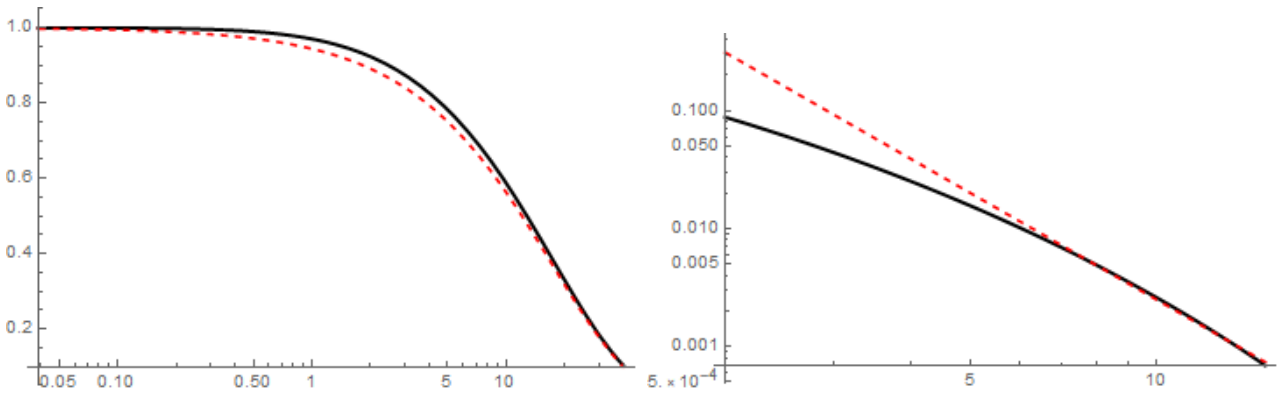


Рис. 2: Численное решение системы в обезразмеренном времени $2\nu k_f^2 t$. На графике слева отложена $U(t)/U_0$ в логарифмическом масштабе (черная линия - численный результат, красный пунктир - затухание от трения о дно $e^{-\alpha t}$). На графике справа отложено значение флуктуационного члена в уравнении в log-log масштабе (для сравнения красным пунктиром отмечено спадание $\sim t^{-3}$).

4 Эволюция кора вихря при затухших флуктуациях

Принимая во внимание незначительность и быстрое затухание флуктуаций, показанных в предыдущей главе, аналитическое исследование свободной эволюции внутри вязкого кора вихря может быть сведено к рассмотрению линейного дифференциального уравнения с начальным условием - профилем скорости в стационарном режиме:

$$\begin{cases} \partial_t U + \alpha U - \nu \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) U(t, r) = 0 \\ U(t = 0) = V(r) \end{cases} \quad (4.1)$$

4.1 Функция Грина задачи на скорость

Найдем функцию Грина $G(t, r, r')$ данной задачи без стенок, эволюционной по t , с нулевыми условиями по r : $U(r = 0) = U(r \rightarrow \infty) = 0$ (для удобства вычислений тривиальная экспонента затухания $e^{-\alpha t}$ будет воостановлена в конечном ответе).

$$\partial_t G(t, r, r') - \nu \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) G(t, r, r') = \delta(t) \delta(r - r')$$

Проведем преобразование Лапласа данного уравнения, перейдя к новой переменной $t \rightarrow s$ и перепишем его, оставив единицей коэффициент при ∂_r^2 :

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} - \frac{s}{\nu} \right) G(s, r, r') = -\frac{1}{\nu} \delta(r - r') \quad (4.1.1)$$

В левой части стоит модифицированное уравнение Бесселя порядка 1 относительно переменной $\sqrt{s/\nu}r$. Решаем граничную задачу относительно переменной r : решение 1 зануляется в $r = 0$, решение 2 зануляется на $r \rightarrow \infty$:

$$v_1(s, r) = I_1 \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} r \right); \quad v_2(s, r) = K_1 \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} r \right) \quad \Rightarrow \quad G(r) = \begin{cases} Av_1(r), & \text{if } 0 \leq r < r' \\ Bv_2(r), & \text{if } 0 \leq r' < r \end{cases}$$

Сшивая непрерывно решения и учитывая скачок производной, $\Delta G'_r = -1/\nu$ в $r = r'$, получаем функцию Грина граничной задачи:

$$G(s, r, r') = -\frac{1}{\nu} \frac{1}{W[v_1, v_2](r')} v_1(r_<) v_2(r_>) = \frac{r'}{\nu} I_1 \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} r_< \right) K_1 \left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} r_> \right) \quad (4.1.2)$$

где за $r_<, r_>$ принято меньшее/большее из пары (r, r') . Обратное преобразование Лапласа:

$$G(t, r, r') = r' \int_{+0-i\infty}^{+0+i\infty} \frac{dw}{2\pi i} e^{\nu w t} I_1(\sqrt{w} r_<) K_1(\sqrt{w} r_>) \quad (4.1.3)$$

В комплексной плоскости переменной интегрирования w имеется разрез из-за квадратного корня. С учетом этого, а также свойств функции Бесселя, перемещение контура на его

границы преобразует выражение к виду:

$$G(t, r, r') = \frac{r'}{2} \int_0^{\infty} dw e^{-wvt} J_1(\sqrt{w}r_{<}) J_1(\sqrt{w}r_{>})$$

Воспользуемся табличным соотношением [19]:

$$\mathcal{L}_t \left[J_\mu(a\sqrt{t}) J_\mu(b\sqrt{t}) \right] (p) = \frac{1}{p} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{4p}\right) I_\mu\left(\frac{ab}{2p}\right), \quad \text{Re } p > 0$$

и, таким образом, получаем ответ - функцию Грина задачи:

$$G(t, r, r') = \theta(t) \frac{r' e^{-\alpha t}}{2\nu t} \exp\left(-\frac{r^2 + (r')^2}{4\nu t}\right) I_1\left(\frac{rr'}{2\nu t}\right) \quad (4.1.4)$$

4.2 Решение на пробный профиль

Решение задачи получается путем интегрирования функции Грина, домноженной на $V(r')$ по r' - так в данном случае выйдет свертка с начальным условием $V(r')\delta(t)$. Выберем профиль V в стационарном случае пробного вида с линейно-логарифмическим поведением в коре [17]:

$$V(r) = U_0 \begin{cases} \frac{r}{R_c} \left(\ln \frac{R_c}{r} + 1 \right), & r < R_c \\ 1, & r \geq R_c \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Вычисление свертки будем проводить, введя безразмерные переменные $a = r/R_c$, $b = R_c^2/(4\nu t)$ и перейдя к интегрированию по $x = (r'/R_c)^2$. Интеграл запишется как:

$$U(t, r) = U_0 b e^{-\alpha t} e^{-ba^2} \left[\int_0^1 dx \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2} \ln x \right) e^{-bx} I_1(2ab\sqrt{x}) + \int_1^{\infty} dx e^{-bx} I_1(2ab\sqrt{x}) \right] \quad (4.2.2)$$

Дополним пределы второго слагаемого в квадратных скобках до табличного интеграла в форме преобразования Лапласа [19]:

$$T = \int_0^{\infty} dx e^{-bx} I_1(2ab\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} a e^{a^2 b/2} \left(I_0\left(\frac{a^2 b}{2}\right) + I_1\left(\frac{a^2 b}{2}\right) \right) \quad (4.2.3)$$

Остаточное слагаемое обозначим за функцию S :

$$S = \int_0^1 dx \left(\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2} \ln x \right) - 1 \right) e^{-bx} I_1(2ab\sqrt{x}) \quad (4.2.4)$$

При его вычислении избавимся от логарифма записью через производную функции по параметру, а так же воспользуемся разложением функций в ряд Маклорена (оставив интегрирование степенной функции):

$$S = \sum_{k,n=0}^{\infty} \partial_p \left[\frac{(-b)^n (ab)^{2k+1}}{n! k!(k+1)!} \int_0^1 dx x^{n+k+1/2} ((p-1)x^p - p) \right] \Bigg|_{p=1/2}$$

Перепишем сумму, перейдя от n к $m = k+n$. Второй индекс будет ограничен сверху $k \leq m$, а ряд по нему имеет гипергеометрический вид:

$$S = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m b^m}{2(m+2)^2 (2m+3)} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k a^{2k+1} b^{k+1}}{k!(m-k)!(k+1)!} = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m ab^{m+1} L_m^1(a^2b)}{2(m+2)^2 (2m+3)(m+1)!}$$

где L_m^1 - обобщенный многочлен Лагерра.

Для оценки поведения временного поведения решения, начиная с $t \gtrsim r^2/\nu$ достаточно лишь оставить первый член ряда. Для функции T (4.2.3) на больших временах воспользуемся асимптотическими соотношениями на функции Инфельда и получим:

$$U(t, r) = U_0 b e^{-\alpha t} e^{-ba^2} (T + S) \sim U_0 \frac{\sqrt{\pi} e^{-\alpha t}}{4\sqrt{\nu t}} \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right) \quad (4.2.5)$$

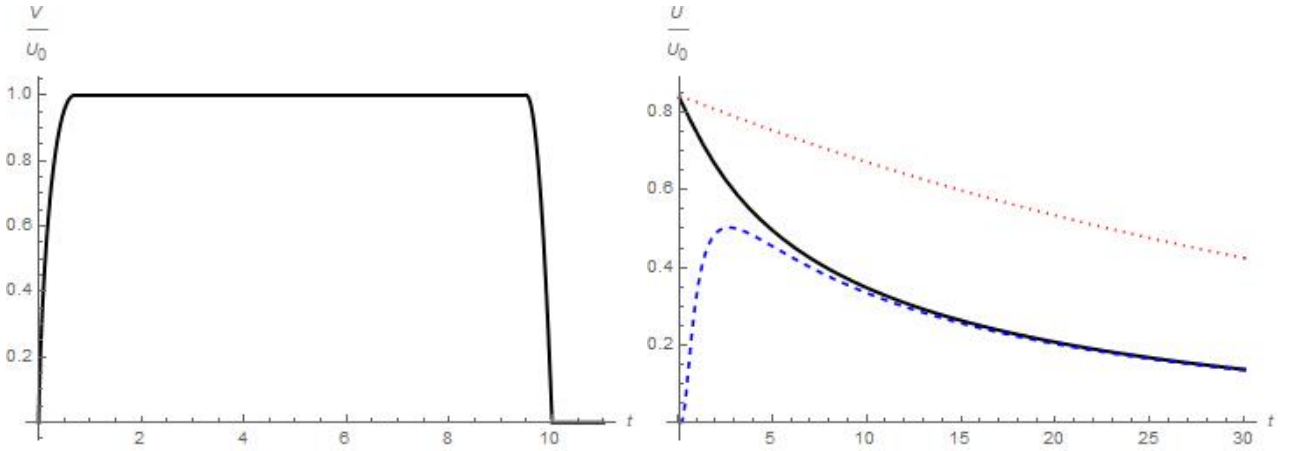


Рис. 3: Численный результат решения с начальным $V(r)$ (график слева - гладкий профиль по данным [12]). Его переход в 0 отражает конечный размер системы. На графике справа (внутри кора при $r/R_c = 0.5$) - его свертка, дает затухание в коре (черная линия), которое выходит на (4.2.5) (синяя штрихованная) - затухание от трения о дно с дополнительной корневой поправкой (для сравнения отображена красная точечная линия, соответствующая затуханию $e^{-\alpha t}$).

5 Адиабатический подход к изменению накачки

Изменим постановку задачи - пускай теперь мощность накачки есть функция времени, и необходимо получить уравнение, описывающее эволюцию скорости вихря. В данной главе общее выражение коррелятора (2.2.7) будет вычислено в приближении адиабатически медленного изменения $\epsilon(t)$ и решено уравнение на скорость вихря U .

5.1 Уравнение на скорость в адиабатике и его решение

Разделим интегрирование на промежутки \int_t^∞ - стационарной накачки и \int_0^t - период ее изменения. В каждом из них применим прием интегрирования по частям. В ведущем порядке по $\gamma \equiv 2\nu k_f^2 / |\Sigma_0|$ (оценка остальных - см. Математическое Приложение) получаем:

$$\begin{aligned} \langle u_r u_\varphi \rangle \approx & \frac{\epsilon_0}{\Sigma_0} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-2\alpha z}}{f_0(\theta, z)} \frac{1}{[1 + 2\nu k_f^2 F_0(\theta, z)]^2} \Big|_{z=t} - \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-2\alpha z}}{f(\theta, z, t)} \frac{1}{[1 + 2\nu k_f^2 F(\theta, z, t)]^2} \frac{\epsilon(t-z)}{\Sigma(t-z)} \Big|_{z=0}^{z=t} + \\ & + \int_0^t dz \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{\epsilon(t-z)}{\Sigma(t-z)} \right) \frac{e^{-2\alpha z}}{f(\theta, z, t)} \frac{1}{[1 + 2\nu k_f^2 F(\theta, z, t)]^2} \end{aligned}$$

В результате приходим к форме коррелятора из задачи о стационарной накачке, только с зависимостью от времени:

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon(t)}{\Sigma(t)} \quad (5.1.1)$$

Малость остаточного интеграла по сравнению с (5.1.1) обеспечивается пределом адиабатического приближения - медленностью изменения $\epsilon(t)$:

$$\left| \left(\frac{d}{dt} \ln \epsilon \right) \right| \ll 2\nu k_f^2 \quad (5.1.2)$$

$$\langle u_r u_\varphi \rangle_{res.} = \int_0^t dz \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\Sigma'(t-z) \epsilon(t-z) - \epsilon'(t-z) \Sigma(t-z)}{\Sigma^2(t-z)} \frac{e^{-2\alpha z}}{f(\theta, z)} \frac{1}{[1 + F(\theta, z)]^2} \ll \langle u_r u_\varphi \rangle \quad (5.1.3)$$

Теперь запишем уравнение на скорость вихря с подстановкой (5.1.1):

$$\partial_t U(t, r) + \alpha U - \nu \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \Sigma(t, r) = - \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \frac{\epsilon(t)}{\Sigma(t, r)} \quad (5.1.4)$$

Рассматривая его на универсальном интервале, где $\Sigma = -U(t)/r$, получаем линейное дифференциальное уравнение на квадрат скорости:

$$\frac{d}{dt} U^2(t) + 2\alpha U^2(t) = 6\epsilon(t) \quad (5.1.5)$$

Для постоянной накачки воспроизводится уже известное решение: $U_0 = \sqrt{3\epsilon/\alpha}$. Решение уравнения в случае произвольной $\epsilon(t)$ с учетом начального условия вида $U(t_{init.}) = U_{init.}$ в адиабатическом пределе можно записать как:

$$U^2(t) = \left(U_{init.}^2 + 6 \int_{t_{init.}}^t dx \epsilon(x) e^{2\alpha x} \right) e^{-2\alpha t} \quad (5.1.6)$$

5.2 Примеры применения адиабатического приближения

Формулу (5.1.6) можно проиллюстрировать, применив к некоторым частным случаям. Например, она показывает, что при изменении мощности на другое постоянное значение $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon$, за счет трения спустя время T : $2\alpha t \gg 1$ скорость выходит на новое стационарное значение, соответствующее ϵ :

$$U^2 = \frac{3\epsilon_0}{\alpha} e^{-2\alpha T} + \frac{3\epsilon}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha T}) \approx \frac{3\epsilon}{\alpha}$$

Пусть накачку снижают с малой постоянной производной: $\epsilon(t) - \epsilon_0 = -\epsilon_0 \beta t \ll \epsilon_0$, начиная с $t = 0$. Тогда изменение скорости (упрощение на начальных временах $\alpha t \ll 1$):

$$U^2 \approx U_0^2 - 3\epsilon_0 \beta t^2 = U_0^2 (1 - \alpha \beta t^2) \quad (5.2.1)$$

Положим, что в $t = 0$ включается гармоническая надбавка вида $\epsilon(t) - \epsilon_0 = \epsilon \sin \omega t$. Спустя время T : $2\alpha T \gg 1$ получим осциллирующую надбавку к скорости, со сдвигом фазы:

$$U^2 - U_0^2 = 6\epsilon e^{-2\alpha T} \text{Im} \int_0^T dx e^{(2\alpha + i\omega)x} \approx 6\epsilon \text{Im} \frac{e^{i\omega T}}{2\alpha + i\omega} = 2\alpha \frac{\epsilon}{\epsilon_0} U_0^2 \frac{2\alpha \sin \omega T - \omega \cos \omega T}{(2\alpha)^2 + \omega^2} \quad (5.2.2)$$

6 Исследование линейного отклика в скорости

В данной главе проведено исследование динамики вихря при малом отклонении ϵ от стационарного значения. Оно сводится к рассмотрению полученного самосогласованного уравнения, линеаризованного как по возмущению накачки, так и по изменению скорости u , записанного в неявном виде.

6.1 Теория возмущения по малому параметру, запись уравнения.

Выделим в уравнении на скорость часть, остаточную от стационарной накачки, в линейном приближении по: $\epsilon = \epsilon_0 + \varepsilon(t)$, а также малого отклика скорости $U = U_0 + u(t)$, вызываемого ε , и соответствующую ему $\Sigma = \Sigma_0 + \sigma(t)$:

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha u - \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right) \nu \sigma + \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right) \delta_\sigma \langle u_r u_\varphi \rangle = - \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right) \delta_\varepsilon \langle u_r u_\varphi \rangle \\ \sigma = \left(\partial_r - \frac{1}{r}\right) u(t, r) \end{cases} \quad (6.1.1)$$

где линеаризованная по σ часть коррелятора перенесена в левую часть.

Займемся вычислением возмущения коррелятора, воспользовавшись выражением (2.2.7), с использованием функций, введенных в стационарной накачке (2.3.1). При разложении по малости ε (т.е. варьировании интеграла) множителя $\epsilon(t - z)$ получаем:

$$\delta_\varepsilon \langle u_r u_\varphi \rangle = - \int_0^\infty dz \frac{\varepsilon(t - z) e^{-2\alpha z}}{\Sigma_0} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f_0(\theta, z)} \right) \frac{1}{[1 + 2\nu k_f^2 F_0(\theta, z)]^2} \quad (6.1.2)$$

От варьирования множителя $[1 + 2\nu k_f^2 F]^{-2}$ вклад выглядит как (подробное его вычисление показано в математическом Приложении):

$$\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0} \int_0^\infty dz \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-2\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f_0} \right) \frac{2 \cdot 2\nu k_f^2 \cdot 2 \sin \theta \int_0^z dx (\cos \theta + \sin \theta \Sigma_0(x - z)) \int_{t-x}^{t-z} d\xi \sigma(\xi)}{[1 + 2\nu k_f^2 F_0]^3} \quad (6.1.3)$$

Вклад вариации по σ выражения в числителе:

$$-\frac{\epsilon_0}{\pi} \int_0^\infty dz \int d\theta \frac{e^{-2\alpha z} \sin^2 \theta \int_t^{t-z} dx \sigma(x)}{f_0^2(\theta, z) [1 + 2\nu k_f^2 F_0(\theta, z)]^2}$$

Результат от варьирования оставшегося множителя f^{-2} запишем, собрав в нем частную производную $\partial_z (f_0^{-2})$:

$$\frac{\epsilon_0}{\pi \Sigma_0} \int_0^\infty dz \int d\theta \frac{e^{-2\alpha z} \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta \Sigma_0 z) \int_t^{t-z} dx \sigma(x)}{[1 + 2\nu k_f^2 F_0(\theta, z)]^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f_0^2} \right)$$

Выполним интегрирование по частям - остаточный интеграл имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_0}{\pi} \int_0^\infty dz \int d\theta \frac{e^{-2\alpha z} \sin^2 \theta \int_t^{t-z} dx \sigma(x)}{f_0^2(\theta, z) [1 + 2\nu k_f^2 F_0(\theta, z)]^2} + \frac{\epsilon_0}{\pi \Sigma_0} \int_0^\infty dz \int d\theta \frac{e^{-2\alpha z} \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta \Sigma_0 z) \sigma(t-z)}{f_0^2 [1 + 2\nu k_f^2 F_0(\theta, z)]^2} + \\
& + \frac{2\epsilon_0}{\pi \Sigma_0} \int_0^\infty dz \int d\theta \frac{2\nu k_f^2 e^{-2\alpha z} \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta \Sigma_0 z) \int_t^{t-z} dx \sigma(x)}{f_0(\theta, z) [1 + 2\nu k_f^2 F_0(\theta, z)]^3} + \\
& + \frac{2\alpha \epsilon_0}{\pi \Sigma_0} \int_0^\infty dz \int d\theta \frac{e^{-2\alpha z} \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta \Sigma_0 z) \int_t^{t-z} dx \sigma(x)}{f_0^2 [1 + 2\nu k_f^2 F_0(\theta, z)]^2} \quad (6.1.4)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое сокращается со вкладом предыдущего пункта. Последние два множителя (6.1.4) малы по параметрам $\gamma \equiv 2\nu k_f^2 / |\Sigma_0|$, $\alpha / |\Sigma_0|$. В итоге, приходим к линейному отклику коррелятора по σ (если возмущение длилось конечное время, приписывается соответствующая θ -функция) как сумме оставшегося и (6.1.3), имеющему вид (вычисление функций $g, h(z)$ - см. Приложение):

$$\delta_\sigma \langle u_r u_\varphi \rangle = -\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} (g(z) + h(z)) \sigma(t - z / 2\nu k_f^2) \quad (6.1.5)$$

Рассмотрение выражений (6.1.2) и (6.1.5) в ведущем порядке дало независимость интегралов от параметров с Σ_0 . Подстановка в уравнение (6.1.1) и рассмотрение на универсальном интервале приведет к независимости возмущения $-(\partial_r + \frac{2}{r}) \delta_\epsilon \langle u_r u_\varphi \rangle$ от r , а значит, нужно искать решение $u(t)$ от 1 аргумента. Итоговое уравнение после подстановки $U_0^2 = 3\epsilon_0 / \alpha$ примет вид:

$$\partial_t u + \alpha u + \alpha \int_0^\infty dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} (g(z) + h(z)) u(t - z / 2\nu k_f^2) = \frac{3}{U_0} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} g(z) \varepsilon(t - z / 2\nu k_f^2) \quad (6.1.6)$$

где эффективное поведение подынтегральных функций:

$$g(z) = \frac{18}{(z+3)^3}; \quad h(z) = \frac{6(2z^2 + 9z + 6)}{(z+3)^2} - 4z \ln\left(\frac{z+3}{z}\right) - \frac{54}{(z+3)^3} \quad (6.1.7)$$

Покажем, что результаты согласуются с предыдущей главой, получив ответ для адиабатически медленного отключения накачки. Тогда правая часть уравнения примет явный вид и его решение на временах $t \ll \alpha^{-1}$ совпадет с (5.2.1):

$$\partial_t u + \alpha u + \alpha \int_0^{2\nu k_f^2 t} dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} (g(z) + h(z)) u(t - z / 2\nu k_f^2) \approx -U_0 \alpha \beta t$$

$$\partial_t u \approx -U_0 \alpha \beta t \quad \Rightarrow \quad u(t) = -\frac{U_0 \alpha \beta}{2} t^2$$

6.2 Гармоническая модуляция накачки

В случае малой модуляции накачки с частотой ω : $\epsilon(t) = \epsilon_0 + \epsilon e^{i\omega t}$, которая даст отклик с гармоническим колебанием $U = U_0 + u(r)e^{-i\omega t}$, уравнение (6.1.6) в фурье-представлении становится алгебраическим относительно комплексного (из-за фазового сдвига) u :

$$-i\omega u + \alpha u + \alpha J(A, \Omega) u = \frac{3\epsilon}{U_0} E(A, \Omega); \quad \Omega = \frac{\omega}{2\nu k_f^2}, \quad A = \frac{\alpha}{\nu k_f^2} \quad (6.2.1)$$

где за $J(A, \Omega)$, $E(A, \Omega)$ были обозначены интегралы функций (6.1.7) в линейном отклике:

$$J(A, \Omega) = \int_0^\infty dz e^{-Az+i\Omega z} (g(z) + h(z)); \quad E(A, \Omega) = \int_0^\infty dz e^{-Az+i\Omega z} g(z) \quad (6.2.2)$$

В адиабатическом пределе $J = E(A, \Omega \ll 1) = 1$ решение уравнения воспроизведет (5.2.2).

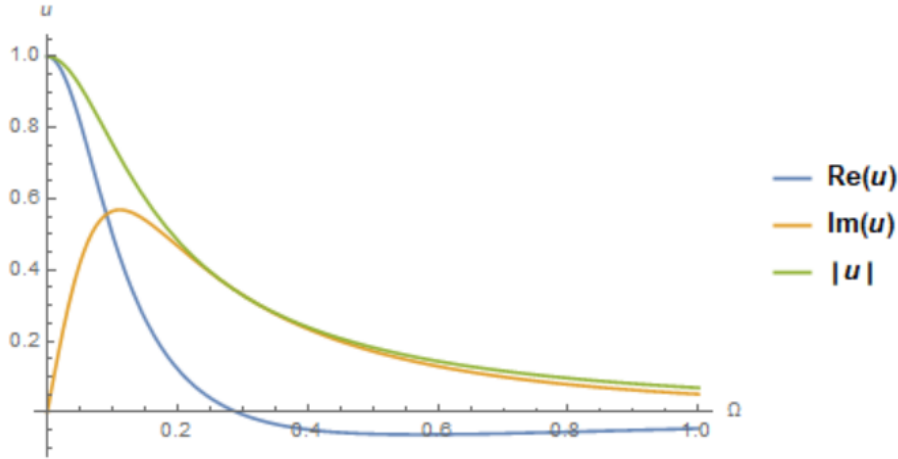


Рис. 4: Обезразмеренный график зависимости $u(\Omega)$ при экспериментальном $A = 0.12$ [12].

6.3 Исследование пространственного оператора на скорость

В случае пространственной зависимости $\epsilon(r)$ или просто приближаясь к кору, рассуждение осложняется зависимостью $u(r)$. Для этого исследуем, как в общем случае оператор в левой части уравнения действует на скорость - комплексную функцию, записанную в полярном виде $u(r) = \rho(r)e^{i\varphi(r)}$. Получится (убрав экспоненту, предварительно домножая на $e^{-i\varphi}$) выражения отдельно на действительную и мнимую части:

$$-i\omega u + \alpha u - \frac{\alpha}{3} J(\Omega, A) \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) r^2 \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) u \rightarrow \begin{cases} \text{Re: } \alpha\rho - \frac{\alpha}{3} \left[\text{Re}J\text{Re}\hat{L}u - \text{Im}J\text{Im}\hat{L}u \right] \\ \text{Im: } -\omega\rho - \frac{\alpha}{3} \left[\text{Im}J\text{Re}\hat{L}u + \text{Re}J\text{Im}\hat{L}u \right] \end{cases} \quad (6.3.1)$$

где был определен дифференциальный оператор \hat{L} :

$$\hat{L}\rho(r)e^{i\varphi(r)} \equiv (e^{-i\varphi}) \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) r^2 \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) u \quad (6.3.2)$$

$$\hat{L}\rho(r)e^{i\varphi(r)} = \left[r^2\rho'' - r^2\rho(\varphi')^2 + 3r\rho' - 3\rho \right] + i \left[r^2\rho\varphi'' + 2r^2\rho'\varphi' + 3r\rho\varphi' \right]$$

Продолжим в предположении, что сдвиг по фазе колебаний не меняется с перемещением по течению $\varphi = const$, тогда $\text{Im}\hat{L}u = 0$, а $\text{Re}\hat{L}u$ переходит в оператор, не изменяющий степень решения $\rho = r^n$:

$$\text{Re}\hat{L}u = r^2\rho'' + 3r\rho' - 3\rho(r) \quad (6.3.3)$$

Уравнение на пространственный профиль однородного решения получается из полного комплексного уравнения (уточняющее выражение (6.2.1) для плоского профиля):

$$-i\omega\rho + \alpha\rho - \frac{\alpha}{3}J(r^2\rho'' + 3r\rho' - 3\rho) = 0$$

Со степенной подстановкой получаем уравнение на показатель $\rho(r) \sim r^n$:

$$n^2 + 2n - 3 \left(1 + \frac{\alpha - i\omega}{\alpha J(\Omega, A)} \right) = 0 \quad (6.3.4)$$

$$n_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3 \left(1 + \frac{\alpha - i\omega}{\alpha J(\Omega, A)} \right)}$$

Стоит отметить, что есть так же пара комплексно сопряженных по показателю решений $n_{1,2}^*$, которые осциллируют с $e^{i\omega t}$. Итого получаем, что имеются корни уравнения на показатель n как с положительной, так и с отрицательной действительной частью (см. Рис.(5)). Это означает, что набор собственных функций включает в себя затухающее и растущее решения. Данный факт может упростить рассмотрение задачи с граничными условиями (которые в ходе работы не были определены), сделав их несущественными внутри интервала с достаточно широким диапазоном значений r .

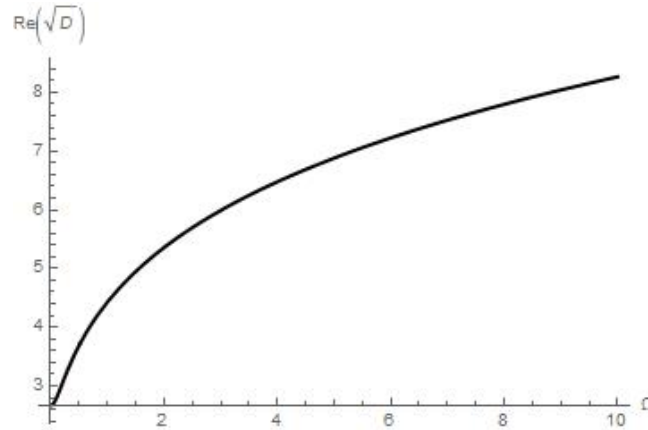


Рис. 5: График зависимости действительной части квадратного корня из дискриминанта уравнения (6.3.4) от Ω при $A = 0.12$. Независимо от A , получаются значения больше 1.

7 Приложение

7.1 Вычисление интегралов с корреляционной функцией гауссова вида

В задачах стационарной накачки или линейного отклика выражение на коррелятор скорость-скорость принимает вид (2.3.1). Работать с ним удобно с заменой на котангенс угла $y = \text{ctg } \theta$, и безразмерной $z' = 2\nu k_f^2 z$. Запишем интеграл и определение функций в них (индекс 0 опустим для удобства):

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = -\frac{\epsilon}{2\nu k_f^2} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} \int \frac{2dy (y - z/\gamma) (1 + y^2)^2}{\pi f^2(y, z) \Phi^2(y, z)}; \quad \gamma \equiv \frac{2\nu k_f^2}{\Sigma}$$

$$f(y, z) = 1 + \left(y - \frac{z}{\gamma}\right)^2; \quad \Phi(y, z) = 1 + y^2 + \int_0^z dx f(y, x) = (1 + z) (1 + y^2) - \frac{yz^2}{\gamma} + \frac{z^3}{3\gamma^2} \quad (7.1.1)$$

Стоит сделать замечание, что выражение не меняет вида при замене $y \rightarrow -y$, $\Sigma \rightarrow -\Sigma$, что позволяет не думать о знаке Σ и перейти к рассмотрению с $0 < \gamma \ll 1$ по (2.3).

Далее выполним интегрирование по dy взятием вычетов. Заметим, что прием универсален для вычисления коррелятора и в остальных случаях, поскольку роль функции Φ всегда выполняет интеграл от положительной функции, что гарантирует мнимую часть у всех полюсов переменной y в комплексной плоскости. Преобразовав квадратный трехчлен, явно выделив их, запишем результат, введя функцию $g(z)$:

$$\langle u_r u_\varphi \rangle = \frac{\epsilon}{\Sigma} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} \int \frac{-2dy (y - z/\gamma) (1 + y^2)^2}{\pi \gamma [1 + (y - z/\gamma)^2]^2 [(y - a)^2 + b^2]^2 (1 + z)^2} = \frac{\epsilon}{\Sigma} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} g(z)$$

$$a = \frac{z^2}{2\gamma(z + 1)}; \quad b = \sqrt{1 + \frac{z^3}{\gamma^2(z + 1)} \left(\frac{1}{3} - \frac{z}{4(z + 1)}\right)} \quad (7.1.2)$$

Хотя полное выражение на $g(z)$ является достаточно громоздким, нужно отметить ее важные свойства. Во-первых, $g(0) = 0$ - оно носит общий характер, даже при учете временной зависимости $\Sigma(t)$. Во-вторых, сделав скачок в область $-1 < g(z) < 0$ на малых значениях аргумента, начиная с $z \gtrsim \gamma^{2/3}$ она выходит на асимптотику g_{eff} из (6.1.7), не содержащую параметра (см. Рис(6) на следующей странице). Поскольку начальная область станет вносить параметрически малый по γ вклад при интегрировании, то $g(z)$ эффективно в интегралах ведет себя как эта асимптотика на всех $z > 0$.

Интегрирование результата (7.1.2) по dz (пределе малости параметра $\alpha / \nu k_f^2$) приводит к искомому результату стационарной накачки. Для формулы линейного отклика достаточно удерживать временно-зависимые функции внутри интеграла. Важным следствием является то, что результат интегрирования можно считать $\approx \Sigma$, а это дает возможность в ведущем приближении вынести его множителем за операторы с ∂_r . Так, на универсальном интервале, согласно (6.1.5) и (6.1.2), приходим к: $\delta_\epsilon \langle u_r u_\varphi \rangle \sim r$, и $\delta_\sigma \langle u_r u_\varphi \rangle \sim r^2$.

7.2 Интегрирование по частям: оценка остаточных интегралов

Этот же результат взятия интеграла по dz можно было получить, применением интегрирования по частям выражения (2.3.1), что применялось в работе. При этом в данном случае в ответ бы пошло:

$$\langle u_r u_\varphi \rangle \approx -\frac{\epsilon}{\Sigma} \int \frac{dy (1+y^2)^2 e^{-\alpha z/\nu k_f^2}}{\pi (1+(y-z/y)^2) (1+z)^2 ((y-a)^2+b^2)^2} \Big|_{z=0} = \frac{\epsilon}{\Sigma}$$

Заметим, коэффициент 1 выведется и при взятии первообразной $-g_{eff}(z)$ в точке $z=0$, хотя такое упрощение g , казалось бы, неприменимо на малых z - в этом заключается смысл эффективной замены. Покажем малость остаточных интегралов (оценка подходит и для адиабатики на начальных временах, где $\Sigma \approx \Sigma_0$): от дифференцирования по $e^{-\alpha z/\nu k_f^2}$ останется известный интеграл, домноженный на малый параметр:

$$-\frac{\alpha}{\nu k_f^2} \frac{\epsilon}{\Sigma} \int_0^\infty dz \int \frac{dy (1+y^2)^2 e^{-\alpha z/\nu k_f^2}}{\pi (1+(y-z/y)^2) (1+z)^2 ((y-a)^2+b^2)^2} \approx -\frac{\alpha}{\nu k_f^2} \frac{\epsilon}{\Sigma} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z/\nu k_f^2} \frac{9}{(z+3)^2} \quad (7.2.1)$$

От дифференцирования оставшейся функции возникнет выражение вида:

$$-\frac{\epsilon}{\Sigma} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z/\nu k_f^2} \int \frac{dy 2(1+y^2)^2}{\pi (1+z)^3 ((y-a)^2+b^2)^3} = -\frac{\epsilon}{\Sigma} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z/\nu k_f^2} r(z) \quad (7.2.2)$$

Аналогично, запишем свойства функции $r(z)$:

$$r(0) = -2; \quad r(z) \sim \gamma \frac{24\sqrt{3}z^6}{(z^3(z+4))^{5/2}}, \quad \text{при } z \gtrsim \gamma^{2/3}$$

Из этого можно сделать вывод, что поправка мала как $O(\gamma^{2/3})$ (см. Рис(6)).

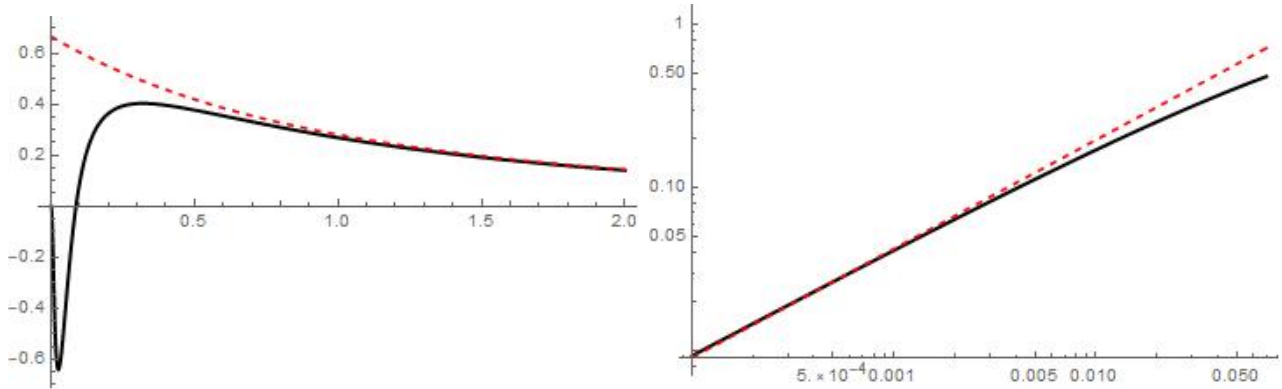


Рис. 6: Слева: сравнительный график $g(z)$ и $g_{eff}(z)$ (красная пунктирная линия) для $\gamma = 0.01$. Справа: сравнение результатов численного счета интеграла $\int dz r(z)$ от γ с асимптотикой $\gamma^{2/3}$ в log-log масштабе.

7.3 Интегралы в задаче о линейном отклике

Теперь рассмотрим поправки, возникающие в задаче о линейном отклике. Покажем малость остаточных интегралов в формуле (6.1.4). От дифференцирования $e^{-\alpha z/\nu k_f^2}$:

$$-\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z/\nu k_f^2} g(z) \left(\frac{\alpha}{\nu k_f^2} \int_0^z dx \sigma \left(t - \frac{x}{2\nu k_f^2} \right) \right) \quad (7.3.1)$$

Выражение в скобках мало в сравнении с $\sigma(t-z)$ в основном интеграле (6.1.5) (гарантировано на начальных временах возмущения $\tau \ll \alpha^{-1}$; так же проверено при гармонической модуляции). От дифференцирования F :

$$\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0} \int_0^\infty dz \int \frac{4dy e^{-\alpha z/\nu k_f^2} (y - z/\gamma) (1 + y^2)^2 \int_t^{t-z/2\nu k_f^2} dx \sigma(x)}{\pi (1 + (y - z/y)^2) (1 + z)^3 ((y - a)^2 + b^2)^3} = -\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z/\nu k_f^2} s(z) \int_t^{t-z/2\nu k_f^2} dx \sigma(x)$$

$$s(0) = 0; s(z) < 1; s(z \gtrsim \gamma^{2/3}) \sim \frac{12\sqrt{3}\gamma^2 (11z^3 + 86z^2 + 198z + 108)}{z(z+3)^3(z+4)^2\sqrt{z^3(z+4)}} \quad (7.3.2)$$

На $z < \gamma^{2/3}$ сама $\int dx \sigma(x)$ будет мала, а потому интеграл будет набираться на временах, где функция $s(z)$ будет уже мала и подынтегральное выражение быстро спадает как:

$$\sim \frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z/\nu k_f^2} \frac{\gamma}{z^4} \cdot \int_0^1 dx \sigma \left(t - \frac{zx}{2\nu k_f^2} \right)$$

значит, вклад будет меньше по параметру $\gamma \ll 1$.

Наконец, от варьирования множителя с F в знаменателе полученный интеграл (6.1.3), удобно рассмотреть, разделяя на два слагаемых. Запишем первый в виде:

$$\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z/\nu k_f^2} \frac{c(z)}{\gamma} \int_0^z dx \int_{t-z/2\nu k_f^2}^{t-z/2\nu k_f^2+x/2\nu k_f^2} d\xi \sigma(\xi)$$

где после взятия $\int dy$ пришли к функции $c(z)$, у которой следующие свойства:

$$c(z) = \int dy \frac{-8y(y - z/\gamma) (1 + y^2)^2}{\pi (1 + (y - z/y)^2)^2 (1 + z)^3 ((y - a)^2 + b^2)^3}$$

$$c(0) = 1; \text{спадает, переход ноля в } z_0 \sim \gamma; c > 0.25; c(z \gtrsim \gamma^{2/3}) \sim \frac{108\gamma^2(4z+3)}{z^2(z+3)^4} \quad (7.3.3)$$

Аналогично, оценка значений проводится на $z > \gamma^{2/3}$, где интеграл будет себя вести как:

$$\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_{\gamma^{2/3}}^{\infty} dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} \frac{108(4z+3)}{z^2(z+3)^4} \int_0^z dx \int_{2\nu k_f^2 t-z}^{2\nu k_f^2 t-z+x} d\xi \sigma \left(\frac{\xi}{2\nu k_f^2} \right)$$

Это эффективное выражение для $c(z)$ я представил как полную производную и проинтегрировал по частям (пропуская экспоненту трения, дающую малый параметр) - останется интеграл, с ядром, аналогичным g :

$$\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_0^{\infty} dz \frac{108e^{-\alpha z / \nu k_f^2}}{z(z+3)^3} \frac{d}{dz} \int_0^z dx \int_{t-z/2\nu k_f^2}^{t-z/2\nu k_f^2+x} d\xi \sigma \left(\frac{\xi}{2\nu k_f^2} \right) = \frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_0^{\infty} dz \frac{108e^{-\alpha z / \nu k_f^2}}{(z+3)^3} \sigma \left(t - \frac{z}{2\nu k_f^2} \right) \quad (7.3.4)$$

Вычисление второго слагаемого приводит к:

$$\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_0^{\infty} dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} \frac{d(z)}{\gamma^2} \int_0^z x dx \int_{t-z/2\nu k_f^2}^{t-z/2\nu k_f^2+x/2\nu k_f^2} d\xi \sigma(\xi)$$

функция $d(z)$ определяется интегралом по dy как:

$$d(z) = \int dy \frac{8y(y-z/\gamma)(1+y^2)^2}{\pi(1+(y-z/y)^2)^2(1+z)^3((y-a)^2+b^2)^3}$$

$$d(0) = 0, \text{ максимум в } z_0 \sim \gamma, \text{ но } d(z) < 1; d(z \gtrsim \gamma^{2/3}) \sim -\frac{108\gamma^3(5z+6)}{z^3(z+3)^4} \quad (7.3.5)$$

Что приводит к записи интеграла в виде:

$$\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_{\gamma^{2/3}}^{\infty} dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} \frac{-108(5z+6)}{z^3(z+3)^4} \int_0^z x dx \int_{2\nu k_f^2 t-z}^{2\nu k_f^2 t-z+x} d\xi \sigma \left(\frac{\xi}{2\nu k_f^2} \right)$$

Взяв его по частям, выражение приводится к виду:

$$\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_{\gamma^{2/3}}^{\infty} dz \frac{-108e^{-\alpha z / \nu k_f^2}}{z^2(z+3)^3} \int_0^z x dx \left[\sigma \left(t - \frac{x}{2\nu k_f^2} \right) + \sigma \left(t - \frac{z}{2\nu k_f^2} \right) \right]$$

Второе слагаемое в квадратной скобке имеет тот же вид, что и (7.3.4). Применим к остатку интегрирование по частям еще раз - получится выражение:

$$\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_0^{\infty} dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} \left[\frac{-6(2z^2+9z+6)}{(z+3)^2} + 4z \ln \left(\frac{z+3}{z} \right) - \frac{54}{(z+3)^3} \right] \sigma \left(t - \frac{z}{2\nu k_f^2} \right) \quad (7.3.6)$$

Значит, вклад (6.1.3) можно записать через сумму (7.3.4) и (7.3.6) как интеграл с функцией $-h(z)$ (знак $-$ для переноса в другую часть уравнения). Это приводит к выражению (6.1.5) для формулы линейного отклика.

$$-\frac{\epsilon_0}{\Sigma_0^2} \int_0^\infty dz e^{-\alpha z / \nu k_f^2} h(z) \sigma \left(t - \frac{z}{2\nu k_f^2} \right); \quad h(z) = \frac{6(2z^2 + 9z + 6)}{(z+3)^2} - 4z \ln \left(\frac{z+3}{z} \right) - \frac{54}{(z+3)^3} \quad (7.3.7)$$

В пределе $\alpha \rightarrow 0$ интегрирование $\int dz h(z) = 0$ (использовано при демонстрации результата адиабатики в гармонической накачке).

Заключение

Основные результаты настоящей работы, полученные при рассмотрении квазилинейного режима флуктуаций с корреляционной функцией вида (2.2.4):

- Выражение коррелятора скорость-скорость - нелинейного вклада в динамику вихря, для общего вида накачки.
- Показано слабое отклонение от $e^{-\alpha t}$ в свободном затухании скорости при рассмотрении на универсальном интервале и быстрое вымирание флуктуационного вклада.
- Исследовано свободное затухание в коре вихря при вымерших флуктуациях, получена асимптотика (4.2.5): $\sim e^{-\alpha t}/\sqrt{t}$.
- В рамках адиабатически медленного изменения мощности накачки получено уравнение на универсальном интервале и его решение.
- Получено уравнение линейного отклика для малого возмущения накачки, в рамках которого был исследован случай ее гармонической модуляции.

Планируются следующие направления продолжения работы:

- Получить нелинейную поправку к уравнению адиабатики на плоском профиле.
- Обобщить результаты работы на случай столбовых вихрей - когерентных структур, образующихся в трехмерной турбулентности вращающейся жидкости при малом числе Россби и большом числе Рейнольдса [17, 18].

Автор выражает огромную благодарность Владимиру Валентиновичу Лебедеву, Сергею Сергеевичу Вергелесу и Игорю Валентиновичу Колоколову за многочисленные информативные обсуждения, ценные советы и исправления. Без их курирования данная работа не была бы написана.

Список литературы

- [1] A.S. Monin, A.M. Yaglom, “Statistical Fluid Mechanics”, v. **I**, MIT Press (1971) (1971),
- [2] A. N. Kolmogorov, “The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds’ Numbers”, C. R. Acad. Sci. URSS **30**, 301 (1941)
- [3] R. H. Kraichnan, “Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence”, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967)
- [4] G. K. Batchelor, “Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence”, Phys. Fluids **12**, 233 (1969)
- [5] G. Boffetta, A. Celani, and M. Vergassola, “Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: Deviations from Gaussian behavior”, Phys. Rev. E **61**, R29 (2000)
- [6] P. Tabeling, “Two-dimensional turbulence: a physicist approach.”, Phys. Rep. **362**, 1 (2002)
- [7] G. Boffetta and R.E. Ecke, “Two-Dimensional Turbulence”, Annu. Rev. Fluid Mech. **44**, 427 (2012)
- [8] J. Sommeria “Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box”, J. Fluid Mech. **170**, 139 (1986)
- [9] Laurie, J., Boffetta G., Falkovich G., Kolokolov I., Lebedev V, “Universal profile of the vortex condensate in two-dimensional turbulence.”, Phys. Rev. Lett. **113**, 254503 (2014).
- [10] I.V. Kolokolov, V.V. Lebedev, “Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box.” Phys. Rev. E **93**, 033104 (2016).
- [11] I.V. Kolokolov, V.V. Lebedev, “Velocity statistics inside coherent vortices generated by the inverse cascade of 2-D turbulence.” J. Fluid Mech. **809**, R-2 p. 1-11 (2016).
- [12] A.V. Orlov, M.Yu. Brazhnikov, A.A. Levchenko, “Large-scale coherent vortex formation in two-dimensional turbulence”, JETP Letters **107**, 157–162 (2018)
- [13] H.J.H. Clercx, G.J.F. Heijst, M.L. Zoetewij, “Quasi-two-dimensional turbulence in shallow fluid layers: the role of bottom friction and fluid layer depth”, Phys. Rev. E **67**, 066303 (2003)
- [14] S. Nazarenko, N.K.-R. Kevlahan, B. Dubrulle, “Nonlinear RDT theory of near-wall turbulence”, Physica D: Nonlinear Phenomena **139**, 158–176 (2000)
- [15] H. Xia, H. Punzmann, G. Falkovich, and M. G. Shats, “Turbulence-condensate interaction in two dimensions”, Phys. Rev. Lett. **101**, 194504 (2008)
- [16] H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, “Spectrally condensed turbulence in thin layers” Phys. Fluids **21**, 125101 (2009)

- [17] I. V. Kolokolov, L. L. Ogorodnikov, S. S. Vergeles, “Structure of coherent vortices generated by the inverse cascade of two-dimensional turbulence in a finite box.”, *Phys. Rev. Fluids* **5**, 034604 (2020).
- [18] K. Seshasayanan, A. Alexakis, “Condensates in rotating turbulent flows”, *JFM* **841**, 434-462 (2018).
- [19] Bateman, Harry “Tables of Integral Transforms”, vol. **1**, McGraw-Hill Book Company , New York, (1954).