

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика
Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

СОСТОЯНИЕ Ю-ШИБЫ-РУСИНОВА В КОНТАКТЕ НОРМАЛЬНЫЙ МЕТАЛЛ – СВЕРХПРОВОДНИК

(бакалаврская работа)

Студент:

Люблинская Анастасия Александровна

(подпись студента)

Научный руководитель:

Бурмистров Игорь Сергеевич,
д-р физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2021

Аннотация

В работе исследовались эффекты, связанные с наличием магнитной примеси внутри нормальной области контактов металл-сверхпроводник и сверхпроводник-металл-сверхпроводник в чистом и грязном пределах. При помощи уравнения Боголюбова-де-Жена в чистом пределе были получены модифицированные андреевские уровни и аналог коэффициента андреевского отражения. С использованием уравнения Узаделя в грязном пределе был исследован примесный пик в плотности состояний как функции энергии.

Содержание

1 Введение	4
2 Теория	5
2.1 Уравнение Боголюбова-де-Жена	5
2.2 Андреевские уровни и андреевское отражение	5
2.3 Уравнение Узаделя	6
2.4 Локализованные состояния Ю-Шибы-Русинова	7
3 Постановка задачи	8
4 Вычисления	9
4.1 SNS-контакт в “чистом” пределе	9
4.2 NS-контакт в “чистом” пределе	13
4.3 NS-контакт в “грязном” пределе	15
5 Результаты и обсуждение	20

1. Введение

За последнее десятилетие в физике конденсированного состояния резко возрос интерес к низкоразмерным гибридным системам из сверхпроводящих и нормальных металлов с магнитными примесями. Такие системы считаются главными кандидатами для создания топологически защищённых кубитов [1]. Необходимые для этого топологические фазы могут быть построены на основе магнитных атомов вблизи границы сверхпроводника и нормального металла.

Оживление научной активности в этой области связано, помимо интереса к топологическим свойствам, с последними технологическими достижениями. Хотя теоретические исследования начались ещё в 1960-х годах, экспериментальная характеристика до недавнего времени оставалась в зачаточном состоянии, а потому её развитие привело к возобновлению теоретических исследований. Новые разработки позволяют приготовить чистые поверхности сверхпроводника в вакууме, осаждать отдельные атомы при низких температурах и исследовать их с высоким пространственным и энергетическим разрешением при температурах значительно ниже критической температуры сверхпроводника [1].

Классическими результатами в области гибридных систем металл-сверхпроводник (NS) и сверхпроводник-металл-сверхпроводник (SNS) являются андреевское отражение и андреевские уровни [8]. Если же говорить об одиночных магнитных примесях, то центральным результатом является обнаружение связанных состояний на таких атомах внутри сверхпроводника, называемых состояниями Ю-Шиба-Русинова или YSR [2], [3], [4]. Влияние магнитной примеси на андреевские уровни для случая короткого контакта было рассмотрено в недавней работе [5], однако в общем вопрос о магнитном атоме в NS и SNS структурах до сих пор не изучен в полной мере.

В моей работе исследуются одномерные гибридные NS и SNS схемы с магнитной примесью внутри нормального металла вблизи границы со сверхпроводником.

2. Теория

Перед разговором о содержании работы представим используемые теоретические методы и основные классические результаты.

При описании электронных состояний в сверхпроводниках принципиально различают “чистый” и “грязный” пределы, различающиеся по соотношению между длиной когерентности в чистом материале и длиной свободного пробега. В первом случае мы будем использовать уравнение Боголюбова-де-Жена, а во втором – уравнение Узаделя.

2.1. Уравнение Боголюбова-де-Жена

Уравнение Боголюбова-де-Жена [11] в одномерном случае для гибридной системы с меняющейся в пространстве щелью $\Delta(x)$ и магнитной примесью в точке x_0 имеет следующий вид [5] (далее везде считаем, что фаза Δ равна нулю):

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow}^+ \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_0 + (U + J)v_F\delta(x - x_0) & \Delta(x) \\ \Delta(x) & -\hat{H}_0 - (U - J)v_F\delta(x - x_0) \end{pmatrix} \tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \quad (2)$$

Среди параметров здесь введены энергия чатицы E , химический потенциал μ , а также безразмерные константы U и J , которые описывают электростатическую и магнитную составляющие потенциала примеси. Безразмерность U и J обеспечивается множителем со скоростью Ферми $v_F = \sqrt{\frac{2\mu}{m}}$.

2.2. Андреевские уровни и андреевское отражение

Классическими результатами для “чистых” NS и SNS контактов, полученными при помощи уравнения Боголюбова-де-Жена, являются андреевское отражение и андреевские уровни соответственно [8].

- Явление андреевского отражения заключается в том, что электрон с энергией $E < \Delta$, налетающий на NS границу со стороны нормального металла, отражается обратно в виде дырки с амплитудой вероятности $e^{-i \arccos \frac{E}{\Delta}}$. Математически в терминах предыдущего пунк-

та это можно записать следующим образом (одномерный случай, $\Delta \ll \mu = E_F$, граница $x = 0$):

$$\tilde{\psi}_{\text{пад}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(k_F + \frac{E}{v_F})x}, \quad \tilde{\psi}_{\text{отр}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i \arccos \frac{E}{\Delta}} \end{pmatrix} e^{i(k_F - \frac{E}{v_F})x} \quad (3)$$

$$\tilde{\psi}_{\text{прош}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i \arccos \frac{E}{\Delta}} \end{pmatrix} e^{i(k_F + \frac{i}{v_F} \sqrt{\Delta^2 - E^2})x} \quad (4)$$

- Если же электрон с энергией $E < \Delta$ в нормальном металле зажат между двумя сверхпроводниками в SNS контакте, то получающееся многократными отражениями от стенок локализованное состояние оказывается дискретным андреевским уровнем. В случае $\Delta \ll \mu = E_F$ энергия такого состояния равна $E_n = \frac{\pi \hbar v_F}{d} [n + \frac{1}{2}]$ ($n \in \mathbb{N}$), где d обозначает ширину нормального металла.

Одной из целей работы является проверка того, как наличие магнитной примеси повлияет на андреевское отражение и андреевские уровни.

2.3. Уравнение Узаделя

Уравнение Узаделя [9] получается как “грязный” предел для уравнения Эйленбергера и описывает функцию $\theta(\mathbf{r}, E)$, такую что $\cos \theta(\mathbf{r}, E)$ является квазиклассической нормальной функцией Грина, в то время как $\sin \theta(\mathbf{r}, E)$ – квазиклассической аномальной функцией Грина.

Уравнение Узаделя для системы с магнитной примесью в точке \mathbf{r}_0 имеет общий вид:

$$\frac{D}{2} \nabla^2 \theta + iE \sin \theta + \Delta \cos \theta = \frac{1}{\pi \nu} \cdot \frac{\alpha \sin(2\theta)}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\theta)} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (5)$$

Здесь D – коэффициент диффузии, E – энергия, Δ – энергетическая щель в спектре сверхпроводника, ν – плотность состояний на уровне Ферми в нормальном металле, $\alpha = (\pi \nu J S)^2$ – константа, описывающая потенциал примеси.

Для металла в нормальном состоянии это уравнение выполняется при $\Delta = 0$. Если же исследуется гибридная система, то решения в соседних областях (обозначим 1 и 2) необходимо сшить на границе согласно следующим условиям ($\sigma_{1,2}$ обозначает проводимость):

$$\theta_1|_{\text{boundary}} = \theta_2|_{\text{boundary}}, \quad \sigma_1 \frac{d\theta_1}{dx} \Big|_{\text{boundary}} = \sigma_2 \frac{d\theta_2}{dx} \Big|_{\text{boundary}} \quad (6)$$

Полученная таким образом функция $\theta(\mathbf{r}, E)$ позволяет найти плотность электронных состояний в системе.

$$\rho(\mathbf{r}, E) = 2\nu \operatorname{Re} \cos \theta(\mathbf{r}, E) \quad (7)$$

2.4. Локализованные состояния Ю-Шибы-Русинова

Состояниями Ю-Шибы-Русинова (YSR) называют связанные состояния, локализованные на магнитной примеси, помещённой внутрь сверхпроводящего образца [1]. Они имеют резонансную природу и представляют собой низколежащее возбуждение многочастичного состояния внутри щели Δ сверхпроводника. Энергия резонанса YSR в обозначениях предыдущего раздела определяется формулой:

$$E = \pm \Delta \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (8)$$

Одной из целей работы является проверка того, как изменится резонансная картина YSR при перемещении магнитной примеси из сверхпроводника внутрь нормального металла вблизи границы.

3. Постановка задачи

В рамках изучения эффектов, связанных с наличием магнитной примеси в гибридной сверхпроводниковой системе, в работе рассматриваются три различные постановки задачи. Для простоты рассматривается только одномерный случай.

- “чистый” материал, SNS контакт

Нормальный металл занимает область $-d_1 < x < d_2$, сверхпроводник – области $x > d_2$ и $x < -d_1$. Магнитная примесь находится в точке $x = 0$.

Требуется получить аналог андреевских уровней и определить, как наличие магнитной примеси влияет на классический результат.

- “чистый” материал, NS контакт

Нормальный металл занимает область $x < 0$, сверхпроводник – область $x > 0$. Магнитная примесь находится в точке $x = -d$ ($d > 0$).

Требуется получить коэффициент андреевского отражения налетающего из области нормального металла электрона и сравнить с классическим результатом.

- “грязный” материал, NS контакт

Нормальный металл занимает область $x < 0$, сверхпроводник – область $x > 0$. Магнитная примесь находится в точке $x = -b$ вблизи границы ($b > 0$).

Требуется получить плотность состояний как функцию координаты и энергии, исследовать её на наличие пиков в области энергии YSR.

4. Вычисления

4.1. SNS-контакт в “чистом” пределе

Рассмотрим одномерный SNS контакт из чистых материалов с магнитной примесью внутри нормального металла. Пусть примесь находится в точке $x = 0$, а границы материалов в $x = -d_1$ и $x = d_2$. Уравнение Боголюбова-де-Жена (1)-(2) будет иметь решение следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\psi}(x < -d_1) = \left(C_1 e^{i(x+d_1)\sqrt{2m\mu-i2m\sqrt{\Delta^2-E^2}}} + C_2 e^{-i(x+d_1)\sqrt{2m\mu+i2m\sqrt{\Delta^2-E^2}}} \right) \\ \quad \varepsilon C_1 e^{i(x+d_1)\sqrt{2m\mu-i2m\sqrt{\Delta^2-E^2}}} + \frac{C_2}{\varepsilon} e^{-i(x+d_1)\sqrt{2m\mu+i2m\sqrt{\Delta^2-E^2}}} \\ \tilde{\psi}(-d_1 < x < 0) = \left(A_1 e^{ix\sqrt{2m(\mu+E)}} + A_2 e^{-ix\sqrt{2m(\mu+E)}} \right) \\ \quad B_1 e^{ix\sqrt{2m(\mu-E)}} + B_2 e^{-ix\sqrt{2m(\mu-E)}} \\ \tilde{\psi}(0 < x < d_2) = \left(F_1 e^{ix\sqrt{2m(\mu+E)}} + F_2 e^{-ix\sqrt{2m(\mu+E)}} \right) \\ \quad G_1 e^{ix\sqrt{2m(\mu-E)}} + G_2 e^{-ix\sqrt{2m(\mu-E)}} \\ \tilde{\psi}(x > d_2) = \left(D_1 e^{i(x+d_1)\sqrt{2m\mu+i2m\sqrt{\Delta^2-E^2}}} + D_2 e^{-i(x+d_1)\sqrt{2m\mu-i2m\sqrt{\Delta^2-E^2}}} \right) \\ \quad \frac{D_1}{\varepsilon} e^{i(x+d_1)\sqrt{2m\mu+i2m\sqrt{\Delta^2-E^2}}} + \varepsilon D_2 e^{-i(x+d_1)\sqrt{2m\mu-i2m\sqrt{\Delta^2-E^2}}} \end{array} \right. \quad (9)$$

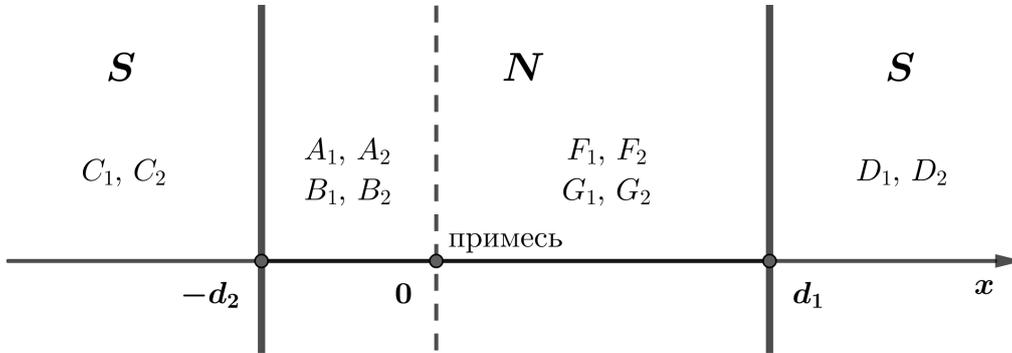


Рис. 1: Геометрия SNS контакта, чистый случай.

Здесь введено обозначение $\varepsilon = \frac{E+i\sqrt{\Delta^2-E^2}}{\Delta} = e^{i \arccos \frac{E}{\Delta}}$. Учтём соотношение $E < \Delta \ll \mu$ и разложим показатели экспонент.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\tilde{\psi}(x < -d_1) = \left(C_1 e^{imv_F(x+d_1)} + C_2 e^{-imv_F(x+d_1)} \right) \exp \left[\frac{x+d_1}{v_F} \sqrt{\Delta^2 - E^2} \right] \\
\tilde{\psi}(-d_1 < x < 0) = \begin{pmatrix} A_1 e^{ix \left(mv_F + \frac{E}{v_F} \right)} + A_2 e^{-ix \left(mv_F + \frac{E}{v_F} \right)} \\ B_1 e^{ix \left(mv_F - \frac{E}{v_F} \right)} + B_2 e^{-ix \left(mv_F - \frac{E}{v_F} \right)} \end{pmatrix} \\
\tilde{\psi}(0 < x < d_2) = \begin{pmatrix} F_1 e^{ix \left(mv_F + \frac{E}{v_F} \right)} + F_2 e^{-ix \left(mv_F + \frac{E}{v_F} \right)} \\ G_1 e^{ix \left(mv_F - \frac{E}{v_F} \right)} + G_2 e^{-ix \left(mv_F - \frac{E}{v_F} \right)} \end{pmatrix} \\
\tilde{\psi}(x > d_2) = \left(\frac{D_1}{\varepsilon} e^{imv_F(x-d_2)} + D_2 e^{-imv_F(x-d_2)} \right) \exp \left[-\frac{x-d_2}{v_F} \sqrt{\Delta^2 - E^2} \right]
\end{array} \right. \quad (10)$$

Сшивка решений на разных участках даст систему из 12 уравнений на 12 введённых коэффициентов.

$$\left\{ \begin{array}{l}
A_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} + A_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} = C_1 + C_2 \\
B_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} + B_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} = \varepsilon C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon} \\
A_1 + A_2 = F_1 + F_2 \\
B_1 + B_2 = G_1 + G_2 \\
F_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} + F_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} = D_1 + D_2 \\
G_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} + G_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} = \frac{D_1}{\varepsilon} + \varepsilon D_2 \\
A_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} - A_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} = C_1 - C_2 \\
B_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} - B_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} = \varepsilon C_1 - \frac{C_2}{\varepsilon} \\
(U+J)(A_1 + A_2) = \frac{i}{2}(F_1 - F_2 - A_1 + A_2) \\
(U-J)(B_1 + B_2) = \frac{i}{2}(G_1 - G_2 - B_1 + B_2) \\
F_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} - F_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} = D_1 - D_2 \\
G_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} - G_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} = \frac{D_1}{\varepsilon} - \varepsilon D_2
\end{array} \right. \quad (11)$$

Чтобы решение оказалось нетривиальным, детерминант полученной системы уравнений должен равняться нулю. Это даёт условие на энергию E . Для сокращения записей введём обозначение $\phi = \frac{2E}{v_F}$.

$$[U^2 - (J+i)^2] e^{2i(d_1+d_2)\phi} - \varepsilon^2 \left[(U^2 - J^2)(e^{2id_1\phi} + e^{2id_2\phi}) + 2e^{i(d_1+d_2)\phi} \right] + \varepsilon^4 [U^2 - (J-i)^2] = 0 \quad (12)$$

Решая уравнение относительно $\varepsilon^2 = e^{2i \arccos \frac{E}{\Delta}}$, можно получить аналог андреевских уровней для исследуемой системы. Изобразим зависимость этих уровней от длины контакта на графике.

$$e^{2i\alpha} = \frac{(U^2 - J^2) \cos \delta + 1 \pm i \sqrt{(U^2 - J^2)^2 \sin^2 \delta + 4U^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} + 4J^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}}}{U^2 - (J-i)^2}, \quad \delta = (d_1 - d_2)\phi \quad (13)$$

$$e^{2i \arccos \frac{E}{\Delta}} = e^{i \frac{2E}{v_F} (d_1+d_2)} e^{2i\alpha} \Rightarrow \boxed{\arccos \frac{E}{\Delta} = \frac{E}{v_F} (d_1 + d_2) + \alpha + \pi k} \quad (14)$$

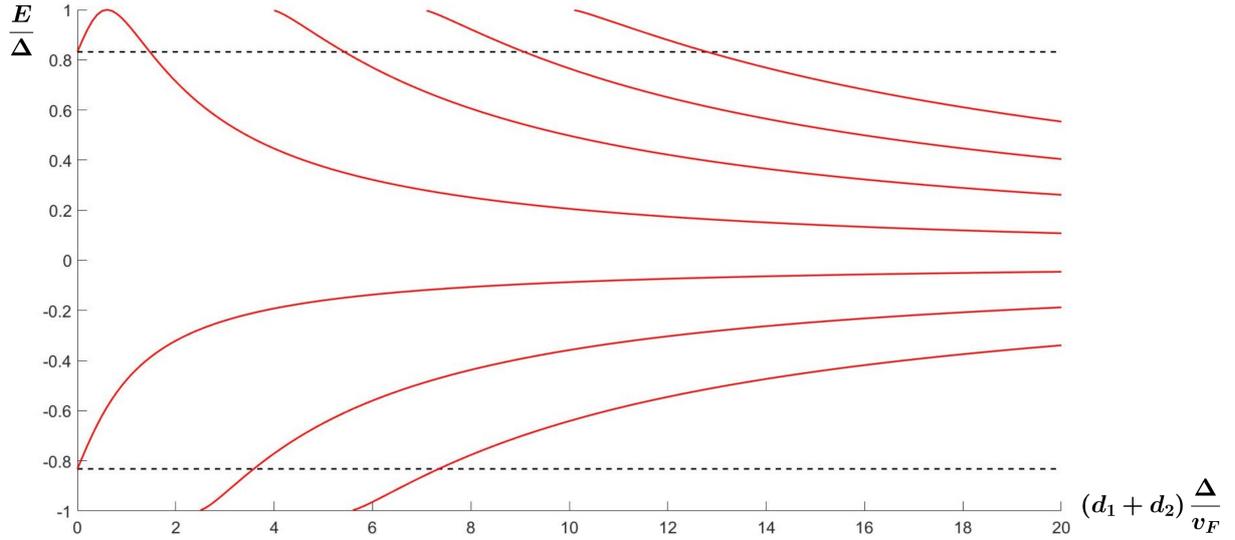


Рис. 2: Эволюция энергетических уровней E в SNS контакте с примесью с увеличением ширины нормального металла $d_1 + d_2$. Пунктирная линия обозначает энергию YSR. Для потенциалов примеси используются значения $U = 0.6$ и $J = 0.4$. Фиксировано отношение $d_1/d_2 = 2$.

Заметим, что при $U = J = 0$ полученная формула даёт андreeвские уровни, как и должно быть. Если же рассмотреть $U, J \neq 0$ в случае короткого контакта (в пределе $d_1 = d_2 = 0$), то ответ можно сравнить с результатом [5].

Теперь рассмотрим эту же задачу в более общей постановке. Учтём упругое отражение от границ разделов, введя дельта-функциональные потенциалы на их поверхностях (см. [10]). Это означает, что в уравнениях (1)-(2) надо добавить к невозмущённому гамильтониану $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu$ потенциал $H_1 v_F \delta(x + d_1) + H_2 v_F \delta(x - d_2)$. При этом вид решения (10) останется прежним, а условия шивки (11) поменяются.

$$\begin{cases}
 A_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} + A_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} = C_0 + C_1 \\
 B_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} + B_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} = \varepsilon C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon} \\
 A_1 + A_2 = F_1 + F_2 \\
 B_1 + B_2 = G_1 + G_2 \\
 F_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} + F_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} = D_0 + D_1 \\
 G_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} + G_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} = \frac{D_0}{\varepsilon} + \varepsilon D_1 \\
 H_1 \left[A_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} + A_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} \right] = \frac{i}{2} \left[A_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} - A_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu+E)}} - C_0 + C_1 \right] \\
 H_1 \left[B_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} + B_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} \right] = \frac{i}{2} \left[B_1 e^{-id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} - B_2 e^{id_1 \sqrt{2m(\mu-E)}} - \varepsilon C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon} \right] \\
 (U + J)(A_1 + A_2) = \frac{i}{2}(F_1 - F_2 - A_1 + A_2) \\
 (U - J)(B_1 + B_2) = \frac{i}{2}(G_1 - G_2 - B_1 + B_2) \\
 H_2 \left[F_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} + F_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} \right] = \frac{i}{2} \left[D_0 - D_1 - F_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} + F_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu+E)}} \right] \\
 H_2 \left[G_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} + G_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} \right] = \frac{i}{2} \left[\frac{D_0}{\varepsilon} - \varepsilon D_1 - G_1 e^{id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} + G_2 e^{-id_2 \sqrt{2m(\mu-E)}} \right]
 \end{cases} \quad (15)$$

Новое уравнение на энергию E примет следующий вид (для сокращения записи введено обозначение $x = \varepsilon^2 - 1$):

$$\begin{aligned}
& x^2 H_1 H_2 \left[(U^2 - J^2)(H_1 + i)(H_2 - i)e^{2imv_F(d_1 - d_2)} + ((U + i)^2 - J^2)(H_1 + i)(H_2 + i)e^{2imv_F(d_1 + d_2)} + c.c. \right] + \\
& + H_2 \left[(U + J)(H_2 - i)(U - J - i)e^{-2imv_F d_2} + (U - J)(H_2 + i)(U + J + i)e^{2imv_F d_2} \right] x(1 - H_1^2 x) + \\
& + H_1 \left[(U + J)(H_1 - i)(U - J - i)e^{-2imv_F d_1} + (U - J)(H_1 + i)(U + J + i)e^{2imv_F d_1} \right] x(1 - H_2^2 x) + \\
& + (U^2 - (J + i)^2)(1 - H_1^2 x)(1 - H_2^2 x)e^{\frac{2i(d_1 + d_2)E}{v_F}} + (U^2 - (J - i)^2)(1 + x + H_1^2 x)(1 + x + H_2^2 x)e^{-\frac{2i(d_1 + d_2)E}{v_F}} - \\
& - e^{-\frac{2id_1 E}{v_F}} H_2 \left[(U + J)(H_2 + i)(U - J + i)e^{2imv_F d_2} + (U - J)(H_2 - i)(U + J - i)e^{-2imv_F d_2} \right] x(1 + x + H_1^2 x) - \\
& - e^{-\frac{2id_2 E}{v_F}} H_1 \left[(U + J)(H_1 + i)(U - J + i)e^{2imv_F d_2} + (U - J)(H_1 - i)(U + J - i)e^{-2imv_F d_2} \right] x(1 + x + H_2^2 x) - \\
& - e^{\frac{2i(d_1 - d_2)E}{v_F}} (U^2 - J^2)(1 - H_1^2 x)(1 + x + H_2^2 x) - e^{\frac{2i(d_2 - d_1)E}{v_F}} (U^2 - J^2)(1 - H_2^2 x)(1 + x + H_1^2 x) - 2(x + 1) = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\varepsilon^2 = e^{2i\beta} = 1 + x = 1 + \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \tag{17}$$

$$\left[\begin{aligned}
c &= e^{2i(d_1 + d_2)mv_F} \left[U^2 - (J - i)^2 - 2e^{\frac{2i(d_1 + d_2)E}{v_F}} + \left(e^{\frac{4id_1 E}{v_F}} + e^{\frac{4id_2 E}{v_F}} \right) (J^2 - U^2) + \right. \\
& \left. + e^{\frac{4i(d_1 + d_2)E}{v_F}} (U^2 - (J + i)^2) \right] \\
b &= e^{\frac{4id_1 E}{v_F} + 2i(d_1 + d_2)mv_F} (H_1^2 - H_2^2 - 1)(U^2 - J^2) + e^{\frac{4id_2 E}{v_F} + 2i(d_1 + d_2)mv_F} (H_1^2 - H_2^2 + 1)(J^2 - U^2) + \\
& + e^{2i\left(\frac{d_1 E}{v_F} + (2d_1 + d_2)mv_F\right)} H_1(H_1 + i)(J - U - i)(J + U) + \\
& + e^{2i\left(\frac{d_2 E}{v_F} + (d_1 + 2d_2)mv_F\right)} H_2(H_2 + i)(J - U - i)(J + U) - \\
& - e^{\frac{2i(d_1 E + 2d_2 E + d_2 mv_F^2)}{v_F}} H_1(H_1 - i)(J - U + i)(J + U) - \\
& - e^{\frac{2i(2d_1 E + d_2 E + d_1 mv_F^2)}{v_F}} H_2(H_2 - i)(J - U + i)(J + U) + \\
& + e^{2i\left(\frac{d_1 E}{v_F} + d_2 mv_F\right)} H_1(H_1 - i)(J - U)(J + U - i) + e^{2i\left(\frac{d_2 E}{v_F} + d_1 mv_F\right)} H_2(H_2 - i)(J - U)(J + U - i) - \\
& - e^{2i(d_1 + d_2)mv_F} (H_1^2 + H_2^2 + 2)(J - U - i)(J + U - i) + e^{\frac{2i(d_1 + d_2)(2E + mv_F^2)}{v_F}} (H_1^2 + H_2^2)((i + J)^2 - U^2) - \\
& - e^{\frac{2i(d_1 + 2d_2)E}{v_F} + 2i(2d_1 + d_2)mv_F} H_1(H_1 + i)(J - U)(J + U + i) - 2e^{\frac{2i(d_1 + d_2)(E + mv_F^2)}{v_F}} - \\
& - e^{\frac{2i(2d_1 + d_2)E}{v_F} + 2i(d_1 + 2d_2)mv_F} H_2(H_2 + i)(J - U)(J + U + i) \\
a &= H_1 H_2 \left[(U^2 - J^2)(H_1 + i)(H_2 - i)e^{2imv_F(d_1 - d_2)} + ((U + i)^2 - J^2)(H_1 + i)(H_2 + i)e^{2imv_F(d_1 + d_2)} + c.c. \right] - \\
& - H_1^2 H_2 \left[(U + J)(H_2 - i)(U - J - i)e^{-2imv_F d_2} + (U - J)(H_2 + i)(U + J + i)e^{2imv_F d_2} \right] - \\
& - H_2^2 H_1 \left[(U + J)(H_1 - i)(U - J - i)e^{-2imv_F d_1} + (U - J)(H_1 + i)(U + J + i)e^{2imv_F d_1} \right] + \\
& + H_1^2 H_2^2 (U^2 - (J + i)^2)e^{\frac{2i(d_1 + d_2)E}{v_F}} + (U^2 - (J - i)^2)(1 + H_1^2)(1 + H_2^2)e^{-\frac{2i(d_1 + d_2)E}{v_F}} - \\
& - e^{-\frac{2id_1 E}{v_F}} H_2 \left[(U + J)(H_2 + i)(U - J + i)e^{2imv_F d_2} + (U - J)(H_2 - i)(U + J - i)e^{-2imv_F d_2} \right] (1 + H_1^2) - \\
& - e^{-\frac{2id_2 E}{v_F}} H_1 \left[(U + J)(H_1 + i)(U - J + i)e^{2imv_F d_2} + (U - J)(H_1 - i)(U + J - i)e^{-2imv_F d_2} \right] (1 + H_2^2) + \\
& + H_1^2 e^{\frac{2i(d_1 - d_2)E}{v_F}} (U^2 - J^2)(1 + H_2^2) + H_2^2 e^{\frac{2i(d_2 - d_1)E}{v_F}} (U^2 - J^2)(1 + H_1^2)
\end{aligned} \right. \tag{18}$$

$$e^{2i \arccos \frac{E}{\Delta}} = e^{2i\beta} \Rightarrow \boxed{\arccos \frac{E}{\Delta} = \beta + \pi k} \quad (19)$$

Из полученных ответов видно, что введение упругого отражения от границ изменяет формулу для обсуждаемой серии энергетических уровней. Их число по-прежнему растёт с увеличением ширины нормального металла.

4.2. NS-контакт в “чистом” пределе

В этом разделе рассмотрим одномерный NS контакт из чистых материалов с границей в точке $x = 0$ и магнитной примесью в $x = -d$. На этот раз сразу же учтём упругое отражение от границы раздела, то есть заменим $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu$ в уравнениях (1)-(2) на $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu + H v_F \delta(x)$.

Будем решать задачу о рассеянии электрона слева направо. Общий вид решения выпишем по аналогии с (10). Сразу же учтём $E < \Delta \ll \mu$ и используем $\varepsilon = \frac{E + i\sqrt{\Delta^2 - E^2}}{\Delta} = e^{i \arccos \frac{E}{\Delta}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\psi}(x < -d) = \begin{pmatrix} e^{i(x+d)\sqrt{2m(\mu+E)}} + A e^{-i(x+d)\sqrt{2m(\mu+E)}} \\ B e^{i(x+d)\sqrt{2m(\mu-E)}} \end{pmatrix} \\ \tilde{\psi}(-d < x < 0) = \begin{pmatrix} C_1 e^{ix\sqrt{2m(\mu+E)}} + C_2 e^{-ix\sqrt{2m(\mu+E)}} \\ D_1 e^{ix\sqrt{2m(\mu-E)}} + D_2 e^{-ix\sqrt{2m(\mu-E)}} \end{pmatrix} \\ \tilde{\psi}(x > d_2) = \begin{pmatrix} F_1 e^{imv_F x} + F_2 e^{-imv_F x} \\ \frac{F_1}{\varepsilon} e^{imv_F x} + \varepsilon F_2 e^{-imv_F x} \end{pmatrix} \exp \left[-\frac{x}{v_F} \sqrt{\Delta^2 - E^2} \right] \end{array} \right. \quad (20)$$

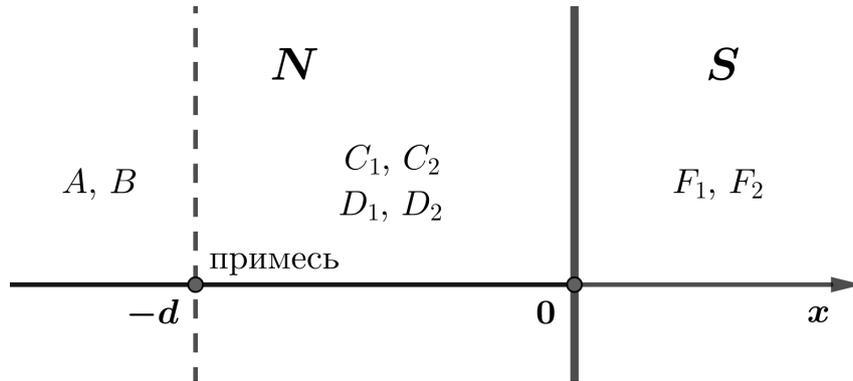


Рис. 3: Геометрия NS контакта, чистый случай.

На этот раз система сшивки неоднородная, и уравнение на коэффициенты можно решить.

$$\begin{cases}
1 + A = C_1 e^{-id\sqrt{2m(\mu+E)}} + C_2 e^{id\sqrt{2m(\mu+E)}} \\
B = D_1 e^{-id\sqrt{2m(\mu-E)}} + D_2 e^{id\sqrt{2m(\mu-E)}} \\
C_1 + C_2 = F_1 + F_2 \\
D_1 + D_2 = \frac{F_1}{\varepsilon} + \varepsilon F_2 \\
(U + J)(1 + A) = \frac{i}{2} (C_1 e^{-id\sqrt{2m(\mu+E)}} - C_2 e^{id\sqrt{2m(\mu+E)}} - 1 + A) \\
(U - J)B = \frac{i}{2} (D_1 e^{-id\sqrt{2m(\mu-E)}} - D_2 e^{id\sqrt{2m(\mu-E)}} - B) \\
H [C_1 + C_2] = \frac{i}{2} [F_1 - F_2 - C_1 + C_2] \\
H [D_1 + D_2] = \frac{i}{2} [\frac{F_1}{\varepsilon} - \varepsilon F_2 - D_1 + D_2]
\end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
B = & e^{2idp_F} \varepsilon [H (i(U - J)(U + J - i) + e^{4idp_F} (U + J)(i(J - U) + 1)) (\varepsilon^2 - 1) + \\
& + e^{-\frac{2idE}{v_F} + 2idp_F} (e^{\frac{4idE}{v_F}} (J^2 - U^2) + (U^2 - (J - i)^2) \varepsilon^2) + 2((J^2 - U^2 - iJ) \cos(2dp_F) + \\
& + \frac{1}{2}(2J - i)v_F \sin \frac{2dE}{v_F} + 2e^{2idp_F} H^2 (\varepsilon^2 - 1)((U^2 - (J - i)^2) \cos \frac{2dE}{v_F} + U \sin(2dp_F))]^{-1}
\end{aligned} \quad (22)$$

Из всех введённых констант нас интересует именно B , так как коэффициент андреевского отражения электрона R равен $|B|^2$. В случае малого d выражения для B и, как следствие, R , значительно упрощаются.

$$B = \frac{\varepsilon}{J^2 - (U + H)^2 + \varepsilon^2 [(U + H)^2 - (J - i)^2]} \quad (23)$$

$$R = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 [1 + 4J^2] - [J^2 - (H + U)^2]^2 (\varepsilon^2 - 1)^2 + [J^2 - (H + U)^2] [2iJ(\varepsilon^4 - 1) + (\varepsilon^2 - 1)^2]} \quad (24)$$

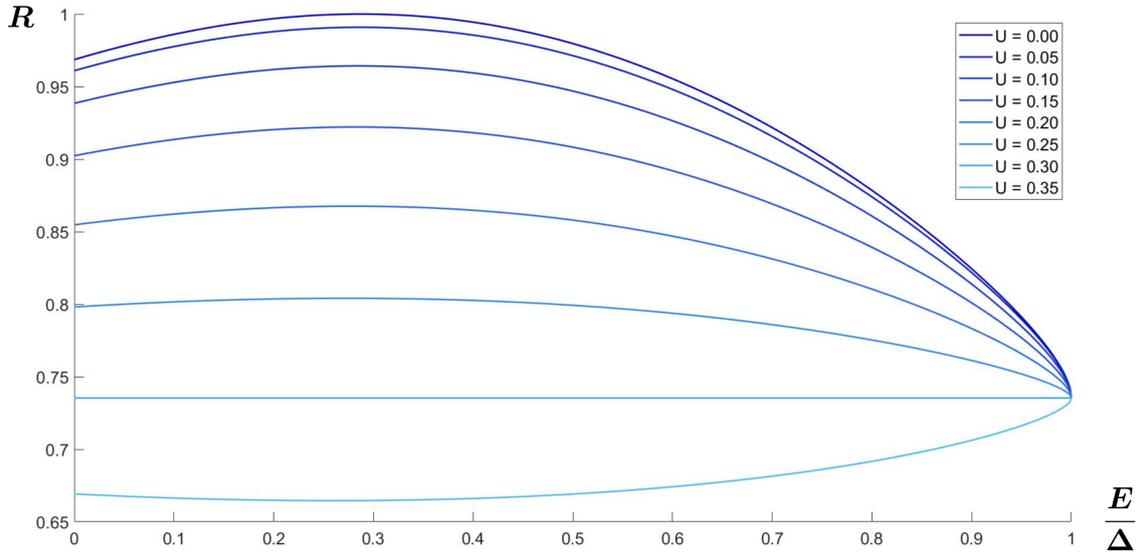


Рис. 4: Зависимость коэффициента андреевского отражения R от энергии электрона E при фиксированных $J = 0.3$, $H = 0$ и меняющемся от 0 до $0.35 U$.

У полученного в коротком контакте выражения для R есть экстремум, который достигается при $\varepsilon_m^4 = e^{4i \arccos \frac{E_m}{\Delta}} = \frac{(U+H)^2 - J^2 + 1 - 2iJ}{(U+H)^2 - J^2 + 1 + 2iJ}$. Эта энергия не совпадает с уровнем E_{YSR} , причём $e^{4i \arccos \frac{E_m}{\Delta}} = e^{2i \arccos \frac{E_{YSR}}{\Delta}}$. Можно показать аналитически, что этот экстремум является максимумом при $J^2 > (H + U)^2$ и минимумом при $J^2 < (H + U)^2$. При $J^2 = (H + U)^2$ график вырождается в прямую. Эволюция $R(E)$ при разных параметрах наглядно видна на графике Рис. 4

Также можно заметить, что $R(E)$ достигает значения 1 только в точке максимума при $H = U = 0$.

4.3. NS-контакт в “грязном” пределе

Рассмотрим одномерный NS-контакт с границей в точке $x = 0$ и магнитной примесью в точке $x = -b$. Энергия $E < \Delta$. Уравнение Узаделя для этой системы запишется следующим образом:

$$\begin{cases} (x < 0) & \frac{D_n}{2} \nabla^2 \theta_n + iE \sin \theta_n = \frac{1}{\pi \nu_n} \cdot \frac{\alpha \sin(2\theta_n)}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\theta_n)} \cdot \delta(x + b) \\ (x > 0) & \frac{D_s}{2} \nabla^2 \theta_s + iE \sin \theta_s + \Delta \cos \theta_s = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\theta_n(-0) = \theta_s(+0), \quad \sigma_n \frac{d\theta_n}{dx}(-0) = \sigma_s \frac{d\theta_s}{dx}(+0) \quad (26)$$

$$\rho(E, x) = \begin{cases} 2\nu_s \operatorname{Re} \cos \theta_s, & x > 0 \\ 2\nu_n \operatorname{Re} \cos \theta_n, & x < 0 \end{cases} \quad (27)$$

Решения в областях $x < -b$ и $x > 0$ можно выписать сразу, так как известны граничные условия $\rho(E, -\infty) = 2\nu_n \Rightarrow \theta_n(-\infty) = 0$ и $\rho(E, +\infty) = 0 \Rightarrow \theta_s(+\infty) = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{arcsch} \frac{E}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}}$.

$$\begin{cases} (x > 0) & \theta_s(x) = \frac{\pi}{2} + i\psi_{s,\infty} + i4 \operatorname{arcth} \left(e^{-x/\xi_s} \operatorname{th} \frac{\tilde{\psi}_{s,0}}{4} \right) \\ (x < -b) & \theta_n(x) = 4 \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}(x+b)/\xi_n} \operatorname{tg} \frac{\theta_{n,b}}{4} \right) \end{cases} \quad (28)$$

Здесь введены обозначения для длин когерентности $\xi_n^2 = \frac{D_n}{2E}$ и $\xi_s^2 = \frac{D_s}{2\sqrt{\Delta^2 - E^2}}$, а также значений $\theta_s(+\infty) - \frac{\pi}{2} = \psi_{s,\infty}(E) = \operatorname{arcsch} \frac{E}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}}$, $\theta_s(0) - \frac{\pi}{2} - i\psi_{s,\infty} = i\tilde{\psi}_{s,0}$ и $\theta_n(-b) = \theta_{n,b}$.

Теперь, чтобы найти решение в области $-b < x < 0$, проинтегрируем уравнение Узаделя на этом участке (C – константа интегрирования, то есть первый интеграл).

$$\frac{D_n}{2} \partial_x^2 \theta_n + iE \sin \theta_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} [\partial_x \theta_n]^2 - \frac{i}{\xi_n} \cos \theta_n = \frac{C}{\xi_n^2} - \operatorname{const} \quad (29)$$

$$\partial_x \theta_n = \pm \sqrt{\frac{2C}{\xi_n^2} + \frac{2i}{\xi_n^2} \cos \theta_n} \Rightarrow \frac{b}{\xi_n} = \int_{\theta_{n,b}}^{\frac{\pi}{2} + i\psi_{s,\infty} + i\tilde{\psi}_{s,0}} \frac{d\theta}{\sqrt{2C + 2i \cos \theta}} \quad (30)$$

Выбор знака перед корнем осуществляется сравнением с решением задачи без примеси (или, что то же самое, при $\alpha = 0$), которое определяется формулами (28).

Выразим полученное уравнение через эллиптический интеграл $F(\varphi, m)$.

$$\frac{b}{\xi_n} \cdot \sqrt{\frac{i+C}{2}} = F\left(\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\psi_{s,\infty} + \frac{i}{2}\tilde{\psi}_{s,0}, \frac{2}{1-iC}\right) - F\left(\frac{\theta_{n,b}}{2}, \frac{2}{1-iC}\right) \quad (31)$$

$$F(\varphi, m) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} \quad (32)$$

В уравнении (31) три неизвестных: C , $\tilde{\psi}_{s,0}$ и $\theta_{n,b}$. Значит, для замкнутой системы не хватает двух уравнений. Извлечём их из сшивки первого интеграла C с (28) в точках $x = 0$ и $x = -b$ с учётом скачка производной из-за $\delta(x+b)$.

$$\begin{cases} C = \frac{\xi_n^2}{2} [\partial_x \theta_n(-0)]^2 - i \cos \theta_n(-0) = \frac{\xi_n^2}{2} \left[\frac{\sigma_s}{\sigma_n} \partial_x \theta_s(+0) \right]^2 - i \cos \theta_s(+0) \\ C = \frac{\xi_n^2}{2} [\partial_x \theta_n(-b+0)]^2 - i \cos \theta_n(-b) = \\ = \frac{\xi_n^2}{2} \left[\partial_x \theta_n(-b-0) + \frac{2}{\pi \nu_n D_n} \cdot \frac{\alpha \sin(2\theta_{n,b})}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\theta_{n,b})} \right]^2 - i \cos \theta_{n,b} \end{cases} \Rightarrow \quad (33)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = -2\gamma^2 \operatorname{sh}^2(\tilde{\psi}_{s,0}/2) - \operatorname{sh}(\psi_{s,\infty} + \tilde{\psi}_{s,0}) \\ C = \frac{2\xi_n}{\pi \nu_n D_n} \cdot \frac{\alpha \sin(2\theta_{n,b})}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\theta_{n,b})} \left[\frac{2(1-i)}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_{n,b}}{2} + \frac{\xi_n}{\pi \nu_n D_n} \cdot \frac{\alpha \sin(2\theta_{n,b})}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\theta_{n,b})} \right] - i \end{cases} \quad (34)$$

Введено обозначение $\gamma = \frac{\xi_n \sigma_s}{\xi_s \sigma_n}$.

В полученной системе первое уравнение можно переписать, выразив $\tilde{\psi}_{s,0}$ как функцию C (знак перед корнем определяется сравнением с задачей без примеси).

$$e^{\tilde{\psi}_{s,0}} = \frac{\gamma^2 - C + \sqrt{C^2 - 2C\gamma^2 - 2\gamma^2 \operatorname{sh} \psi_{s,\infty} + 1}}{\gamma^2 + e^{\psi_{s,\infty}}} \quad (35)$$

Соберём вместе все три найденных уравнения, чтобы выписать систему целиком.

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\tilde{\psi}_{s,0}} = \frac{\gamma^2 - C + \sqrt{C^2 - 2C\gamma^2 - 2\gamma^2 \operatorname{sh} \psi_{s,\infty} + 1}}{\gamma^2 + e^{\psi_{s,\infty}}} \\ C = \frac{2\xi_n}{\pi\nu_n D_n} \cdot \frac{\alpha \sin(2\theta_{n,b})}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\theta_{n,b})} \left[\frac{2(1-i)}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_{n,b}}{2} + \frac{\xi_n}{\pi\nu_n D_n} \cdot \frac{\alpha \sin(2\theta_{n,b})}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\theta_{n,b})} \right] - i \\ \frac{b}{\xi_n} \cdot \sqrt{\frac{i+C}{2}} = F\left(\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\psi_{s,\infty} + \frac{i}{2}\tilde{\psi}_{s,0}, \frac{2}{1-iC}\right) - F\left(\frac{\theta_{n,b}}{2}, \frac{2}{1-iC}\right) \end{array} \right. \quad (36)$$

Заметим, что в полученной системе наличие примеси фигурирует только во втором уравнении. Это значит, что качественно отличающийся от случая без примеси ($\alpha = 0$, $C = -i$) результат может получиться только в том случае, если в этом уравнении слагаемое с α по модулю много больше $-i$. Это достигается при малости знаменателя $1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\theta_{n,b})$.

Если обозначить $\theta_{n,b} = \frac{\pi}{2} + i\psi_{s,\infty} + i\psi$, то $1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\theta_{n,b}) = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \operatorname{ch}(2\psi_{s,\infty} + 2\psi)$. Будем рассматривать энергию вблизи состояния YSR, то есть $E \approx \Delta \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$. Также предположим, что введённое $\psi \approx 0$. Это значит, что $\delta\psi_{s,\infty} = \psi_{s,\infty} - \operatorname{arcsch} \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \approx 0$ и $1 + \alpha^2 - 2\alpha \operatorname{ch}(2\psi_{s,\infty} + 2\psi) \approx -2(1 - \alpha^2) [\delta\psi_{s,\infty} + \psi]$. В конце концов, будем считать, что $\gamma^2 \gg |C|$ (смысл этого предположения будет ясен в конце).

Зафиксируем все введённые предположения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \frac{i\pi}{2} - \psi_{s,\infty} - i\theta_{n,b} \approx 0 \\ E \approx \Delta \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Leftrightarrow \delta\psi_{s,\infty} = \psi_{s,\infty} - \operatorname{arcsch} \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \approx 0 \\ \gamma^2 \gg |C| \end{array} \right. \quad (37)$$

Преобразуем систему (36) в соответствии с рассматриваемым случаем (везде оставляем только главный порядок).

$$C + i \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_n}{\pi\nu_n D_n} \cdot \frac{i\alpha \operatorname{sh} 2\psi_{s,\infty}}{(1 - \alpha^2)(\delta\psi_{s,\infty} + \psi)} \right]^2 \Rightarrow |C| \gg 1 \quad (38)$$

$$\frac{b}{\xi_n} \cdot \sqrt{\frac{i+C}{2}} \approx \{|C| \gg 1\} \approx \frac{i}{2} (\tilde{\psi}_{s,0} - \psi) \quad (39)$$

$$e^{\tilde{\psi}_{s,0}} \approx \frac{\gamma + \sqrt{-2C}}{\gamma} \quad (40)$$

Решим эту приближённую систему.

$$\begin{cases} C + i = \frac{1}{2} \left[\frac{\xi_n}{\pi \nu_n D_n} \cdot \frac{i \alpha \operatorname{sh} 2\psi_{s,\infty}}{(1-\alpha^2)(\delta\psi_{s,\infty} + \psi)} \right]^2 \\ \frac{b}{\xi_n} \cdot \sqrt{\frac{i+C}{2}} = \frac{i}{2} (\tilde{\psi}_{s,0} - \psi) \\ e^{\tilde{\psi}_{s,0}} = \frac{\gamma + \sqrt{-2C}}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \quad (41)$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{2} \left[-\delta\psi_{s,\infty} + \sqrt{\delta\psi_{s,\infty}^2 + \frac{4(\frac{1}{\gamma}\xi_n - b)}{\pi \nu_n D_n} \cdot \frac{\alpha \operatorname{sh} 2\psi_{s,\infty}}{1 - \alpha^2}} \right] \quad (42)$$

Таким образом, при помощи этой формулы для ψ можно вычислить $\theta_{n,b}$, C и $\tilde{\psi}_{s,0}$. Зная эти константы, можно решить неявное уравнение на $\theta_n(x)$, тем самым восстановив функцию на отрезке $[-b, 0]$ и сшив её с решениями (25).

$$\frac{x}{\xi_n} \cdot \sqrt{\frac{i+C}{2}} = F\left(\frac{\theta_n(x)}{2}, \frac{2}{1-iC}\right) - F\left(\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\psi_{s,\infty} + \frac{i}{2}\tilde{\psi}_{s,0}, \frac{2}{1-iC}\right) \quad (43)$$

Построим график с полученным пиком в окрестности энергии YSR на фоне невозмущённой плотности состояний.

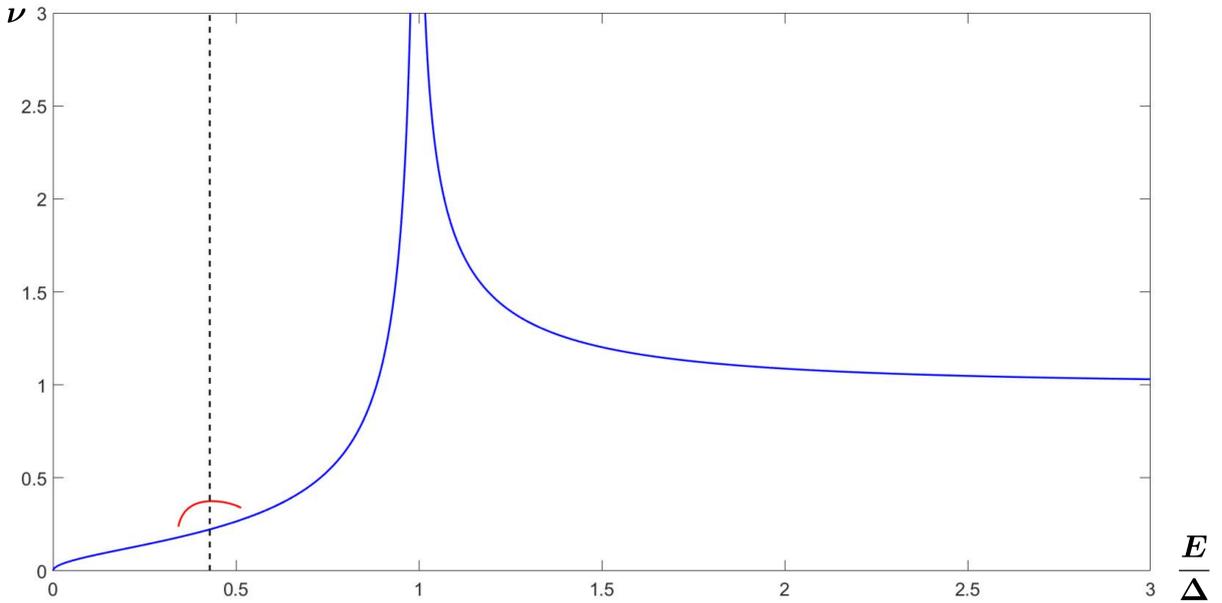


Рис. 5: Полученный пик в плотности состояний как функция энергии E . Пунктирная линия обозначает энергию YSR . Синий график – невозмущённая плотность состояний в нормальном металле вблизи границы, красный – результат влияния примеси.

Исследуем полученный ответ и проверим выполнение (37). Используем равенство $\sigma_n = \nu_n D_n$.

- Нетривиальная плотность состояний получается при ψ с ненулевой мнимой частью. Это значит, что необходимо выполнение условия $\delta\psi_{s,\infty}^2 + \frac{4(\frac{1}{\gamma}\xi_n - b)}{\pi\nu_n D_n} \cdot \frac{\alpha \operatorname{sh} 2\psi_{s,\infty}}{1-\alpha^2} < 0$.

$$\delta\psi_{s,\infty}^2 + \frac{4(\frac{1}{\gamma}\xi_n - b)}{\pi\nu_n D_n} \cdot \frac{\alpha \operatorname{sh} 2\psi_{s,\infty}}{1-\alpha^2} \sim \delta\psi_{s,\infty}^2 + \frac{\frac{1}{\gamma}\xi_n - b}{\sigma_n} < 0 \quad (44)$$

- Теперь проверим выполнение условия $\gamma^2 \gg |C| \gg 1$.

$$\gamma^2 = \frac{\sigma_s^2 \xi_n^2}{\sigma_n^2 \xi_s^2} \gg |C| \sim \left| \frac{\xi_n}{\psi \sigma_n} \right|^2 \sim \frac{\xi_n}{\sigma_n} \cdot \frac{1}{\left| \frac{1}{\gamma} - \frac{b}{\xi_n} \right|} \sim \frac{\xi_n^2}{b\sigma_n} \gg 1 \quad (45)$$

- Выполнение условия $\psi \approx 0$ получилось автоматически.
- При разложении эллиптического интеграла также неявно было использовано условие $\left| \frac{2}{1-iC} \sin^2 \frac{\theta_{n,b}}{2} \right| \ll 1$.

$$\left| \frac{2 \sin^2 \frac{\theta_{n,b}}{2}}{1-iC} \right| \sim \left| \frac{1 + i\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}}{C} \right| \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} |C| \gg 1 \\ |C| \sim \frac{\xi_n^2}{b\sigma_n} \gg \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \end{cases} \quad (46)$$

Полученное условие означает, что результаты наших вычислений подходят только для случая не слишком малых α .

Таким образом, полученный ответ можно использовать при выполнении следующих условий на параметры задачи:

$$\begin{cases} \sigma_n \delta\psi_{s,\infty}^2 < b - \frac{\sigma_n \xi_s}{\sigma_s} \\ b \gg \frac{\sigma_n \xi_s^2}{\sigma_s^2} \\ \frac{\xi_n^2}{\sigma_n} \gg b \\ \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \ll \frac{\xi_n^2}{b\sigma_n} \end{cases} \quad (47)$$

Поскольку в сверхпроводнике $\sigma_s \gg \xi_s$, второе условие на самом деле следует из первого.

Второе и третье неравенства вместе дают $\frac{\xi_n}{\sigma_n} \gg \frac{\xi_s}{\sigma_s}$.

5. Результаты и обсуждение

Получена серия результатов, связанных с влиянием магнитной примеси в NS и SNS контактах на энергетические уровни электронов, их коэффициент андреевского отражения и плотность состояний.

- В чистом пределе для SNS контакта была выведена формула (14) и построен график Рис. 2 для модифицированных примесью андреевских уровней. Как и в отсутствие примеси, количество уровней зависит от ширины области нормального металла. Введение упругого отражения от границ сверхпроводника меняет формулу на (19).
- В чистом пределе для NS контакта был получен коэффициент андреевского отражения (24) налетающего из области нормального металла электрона. Его модуль не равен 1, как в классической задаче, и зависит от параметров примеси и границы. Зависимость полученного коэффициента андреевского отражения от энергии при разных параметрах примеси показана на графике Рис. 4. В этой зависимости имеется экстремум, не совпадающий с энергией YSR.
- В грязном пределе для NS контакта был получен небольшой примесный пик в плотности состояний вблизи энергии YSR (Рис. 5).

Неожиданным результатом является положение максимума для коэффициента андреевского отражения электрона от NS границы в чистом пределе. Оно не равно энергии YSR, хотя и связано с ней. Это может означать, что главный пик плотности состояний в грязном пределе для NS контакта следует искать вблизи этого нового максимума, а не в окрестности YSR, как это предполагалось во время выполнения работы. Таким образом, вопрос о положении этого пика остаётся открытым и требует дальнейшего исследования.

Список литературы

- [1] Benjamin W. Heinrich, Jose I. Pascual, and Katharina J. Franke (2017)
arXiv: [1705.03672v2](https://arxiv.org/abs/1705.03672v2) [cond-mat.mes-hall]
- [2] L. Yu, Acta Physica Sinica 21, 75 (1965)
DOI: [10.7498/aps.21.75](https://doi.org/10.7498/aps.21.75)
- [3] H. Shiba, Progress of Theoretical Physics 40, 435 (1968)
DOI: [10.1143/PTP.40.435](https://doi.org/10.1143/PTP.40.435)
- [4] А. И. Русинов, ЖЭТФ 29, 1101 (1969)
- [5] A. A. Bernalov, Phys. Rev. B 97, 134504 (2018)
DOI: [10.1103/PhysRevB.97.134504](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.134504)
- [6] A. A. Bernalov, Phys. Rev. B 100, 094507 (2019)
DOI: [10.1103/PhysRevB.100.094507](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.094507)
- [7] A. V. Balatsky, I. Vekhter, and Jian-Xin Zhu, Rev. Mod. Phys. 78, 373 (2006)
DOI: [10.1103/RevModPhys.78.373](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.373)
- [8] В. В. Шмидт, “Введение в физику сверхпроводников” (2000)
- [9] K. D. Usadel, Phys. Rev. Lett. 25, 507 (1970)
DOI: [10.1103/PhysRevLett.25.507](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.25.507)
- [10] G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B 25, 4515 (1982)
DOI: [10.1103/PhysRevB.25.4515](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.25.4515)
- [11] P. G. de Gennes, “Superconductivity of Metals and Alloys”, Addison-Wesley, New York (1989)