

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра проблем теоретической физики

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика  
**Направленность (профиль) подготовки:** Общая и прикладная физика

## **КОРРЕЛЯЦИИ В КОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ, РАССЕЯННОМ НА ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ**

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Маснев Николай Геннадиевич

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Тихонов Константин Сергеевич,  
канд. физ.-мат. наук

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2021

## Содержание

<b>1</b>	<b>Аннотация</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
2.1	Перенос фотонов в одномерном волноводе . . . . .	3
2.2	Рассеяние света на кубите в одномерном волноводе . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Теоретические Результаты</b>	<b>9</b>
3.1	Расчёт электромагнитного поля системы из двух кубитов . . . . .	9
3.2	Расчёт корреляторов электромагнитного поля для двухуровневой системы	15
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Литература</b>	<b>20</b>

## 1 Аннотация

Задачи, связанные с рассеянием света на атомах являются классическими проблемами для квантовой оптики, однако совсем недавно стало популярно исследование рассеянного света на кубите с сильной связью. Эксперименты, связанные с этим явлением проходят непосредственно в стенах МФТИ, в лаборатории искусственных квантовых систем. В данной дипломной работе проведены вычисления основных характеристик рассеянного на одно и двух кубитных системах с целью понять отличие в статистических свойствах налетающего и прошедшего света. В частности, для задачи рассеяния света на одном кубите в одномерном волноводе проведён расчёт корреляционной функции  $G^{(1)}$ , известной как степень декогеренции света, для того, чтобы понять, как зависит от времени когерентность налетающего и прошедшего света. Также был проведён расчёт электромагнитного поля прошедшей волны для двух кубитовой системы, эксперименты по расчёту которого уже были проведены в лаборатории, поэтому есть возможность сравнить экспериментальные и аналитические выводы.

## 2 Введение

### 2.1 Перенос фотонов в одномерном волноводе

З. Лиао, Х. Зенг, Х. На и С. Зубайри в своей статье [2] рассмотрели методы вычисления характеристик фотонов, взаимодействующих с квантовыми излучателями, которыми служат системы кубитов. В данной статье были рассмотрены несколько случаев рассеяния набора фотонов на квантовой системе (рис. 1)

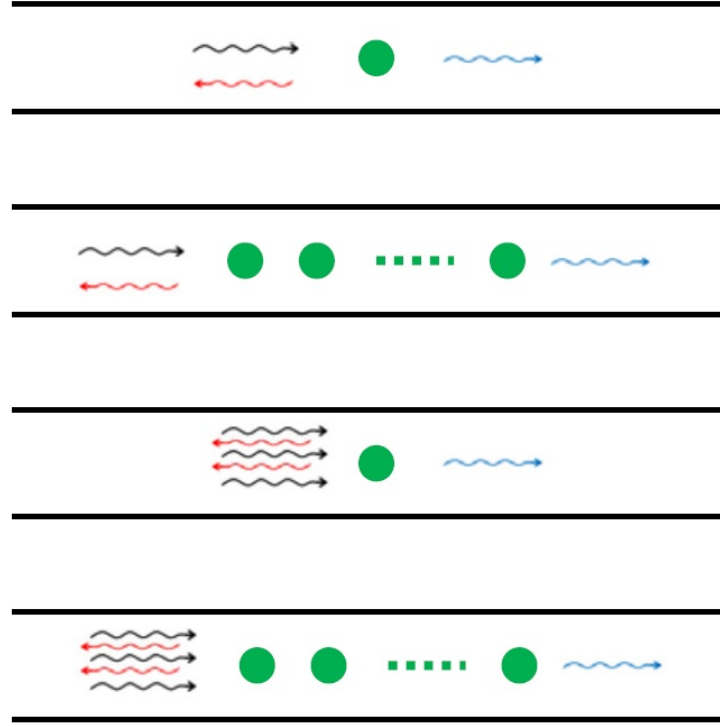


Рис. 1: Одно и многофотонный транспорт

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-8949/91/6/063004>

В приближении линейного спектра были получены вероятности возбуждения атомов в системе и коэффициенты отражения и прохождения. В частности, используемая в дипломной работе техника решения уравнения Шредингера была заимствована из более простого случая, рассмотренного в данной статье. В работе З. Лиао и др. решена задача для рассеяния фотона на одном кубите, смысл техники состоит в следующем:

Для гамильтониана

$$H = \frac{\omega_a}{2} \sigma^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k (g_k a_k \sigma_+ + g_k^* a_k^* \sigma_-) \quad (1)$$

решим уравнение Шредингера, подобрав решение в виде:

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha_1(t) e^{-i\omega_a t} |e, 0\rangle + \sum_k \beta_k(t) e^{-i\omega_k t} |g, 1_k\rangle \quad (2)$$

Проинтегрировав уравнение Шредингера на коэффициент  $\beta_k$

$$\dot{\beta}_k(t) = -ig^* e^{-ikr_1} \alpha_1(t) e^{i(k-k_a)v_g t} \quad (3)$$

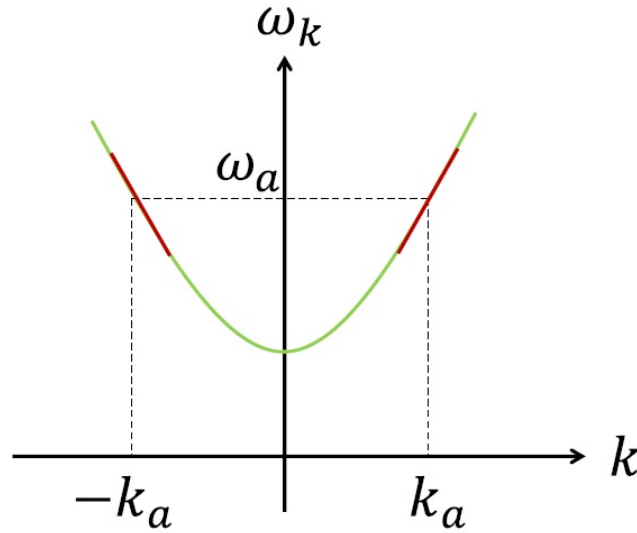


Рис. 2: Линейное приближение около атомной частоты дисперсии фотона  
<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-8949/91/6/063004>

$$\beta_k(t) = \beta_k(0) - ig^* e^{-ikr_1} \int_0^t \alpha_1(t') e^{i(k-k_a)v_g t'} dt' \quad (4)$$

$$\dot{\alpha}_1(t) = -ig \sum_k g_k e^{ikr_1} \beta_k(t) e^{-i\delta\omega_k t} \quad (5)$$

$$\dot{\alpha}_1(t) = -ig \sum_k g_k e^{ikr_1} e^{-i\delta\omega_k t} \left( \beta_k(0) - ig^* e^{-ikr_1} \int_0^t \alpha_1(t') e^{i(k-k_a)v_g t'} dt' \right) \quad (6)$$

$$\alpha_1(t) = -iS \left[ \operatorname{erf}(C + \sqrt{B}t_0) - \operatorname{erf}(C) \right] e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad (7)$$

Где  $C = (A - 2Bt_0)/2\sqrt{B}$ ,  $t_0 = r_1/v_g$ ,  $A = \frac{\Gamma}{2}$ ,  $B = \Delta^2 v_g^2/4$ ,  
 $S = (\pi/8)^{1/4} \sqrt{\Gamma/\Delta} v_g e^{-At_0 + A^2/4B} e^{ik_a r_1}$

И подставив его в уравнение на  $\alpha_1$  получим формальное решение для вероятности возбуждения двухуровневой системы для Гауссового (красный пунктир) и для обратного пульса (чёрная линия) (рис.3)

Так же из решения уравнения были получены спектр налетающего (I), отраженного (R) и прошедшего (T) фотонов (рис.4)

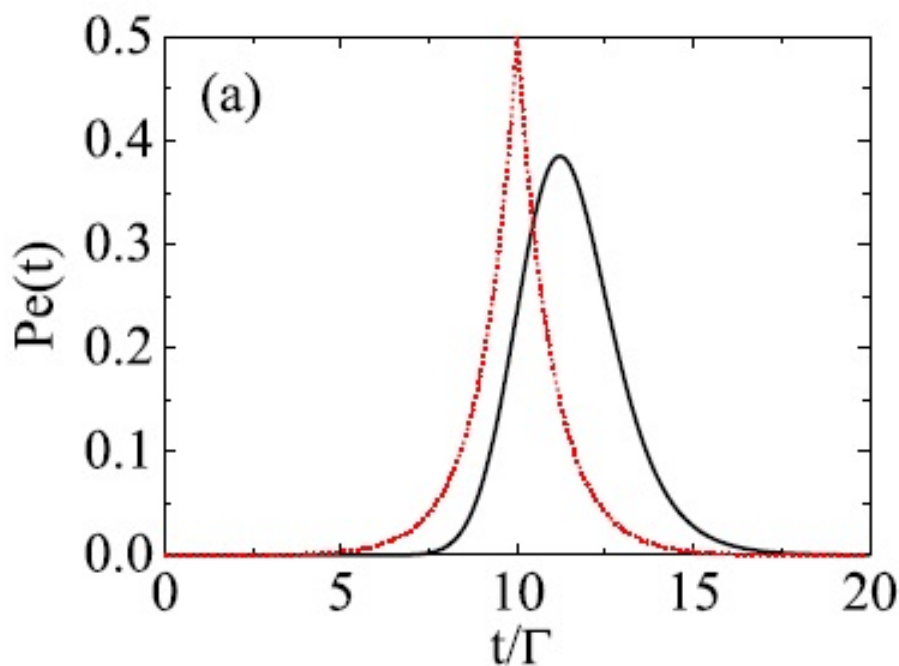


Рис. 3: Вероятность излучения фотона от времени

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-8949/91/6/063004>

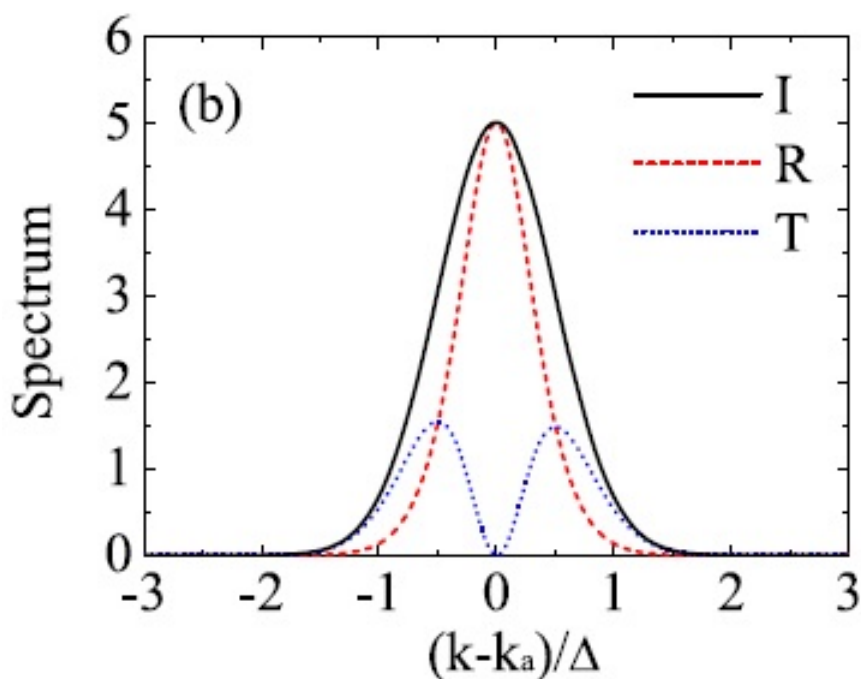


Рис. 4: Спектр рассеянного, отраженного и прошедшего фотонов

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-8949/91/6/063004>

## 2.2 Рассеяние света на кубите в одномерном волноводе

К. Фишер и др. в своей работе [1] провели вычисление корреляторов электромагнитного поля. На основе данной статьи в дипломной работе проведено вычисление корреляционной функции электромагнитного поля  $G^{(1)}$ .

Рассмотрена система двухуровневая система в резервуаре, облучаемая электромагнитным полем в представлении взаимодействия:

$$H_I(t) = H_S(t) + V(t) \quad (8)$$

Где  $H_S$  - часть гамильтониана, связанная с двухуровневой системой, облучение которой происходит в промежутке  $[0, T]$

$$H_S(t) = \begin{cases} H_0(t) + H_1(t) & 0 < t < T \\ H_0(t) & t > T \end{cases} \quad (9)$$

Операторы рождения и уничтожения для резервуара взяты в Фурье-представлении:

$$b_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega\tau} b_\omega$$

$$V(t) = i\sqrt{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} (b_\omega^+ a - b_\omega a^+) = i\sqrt{\gamma} (b_{\tau=0}^+(t) a - b_{\tau=0}(t) a^+) \quad (10)$$

Формально решение можно записать в виде:

$$|\Psi_I(t_1)\rangle = U_I(t_1, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle \quad (11)$$

Дальнейшее исследование рассеяния проводится не с помощью матрицы рассеяния

$$S = \lim_{t_{0,1} \rightarrow \mp\infty} U_I(t_1, t_0) \quad (12)$$

А с помощью волновых операторов Моллера  $S = \Omega_-^+ \Omega_+$

$$\Omega_+ = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U_I(0, t_0) \quad \Omega_- = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} U_I(0, t_1) \quad (13)$$

Вводя дискретное время  $t_k = k\Delta t$ , задачу о взаимодействии кубита с резервуаром можно свести к задаче об эволюции системы с эффективным гамильтонианом. Покажем некоторые результаты этого аналитического вывода:

В.Ф. в дискретном времени эволюционирует:

$$|\Psi_I[k+1]\rangle = U[k+1, k] |\Psi_I[k]\rangle \quad (14)$$

$$U[n, m] = U[n, n-1]U[n-1, n-2] \dots U[m+1, m] = \prod_{k=m}^{n-1} U[k+1, k] \quad (15)$$

Заметим, что при переходе к непрерывному пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} U[[t_1/\Delta t], [t_0/\Delta t]] = U_I(t_1, t_0) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} U(t_{k+1}, t_k) &= U((k+1)\Delta t, k\Delta t) \\ &= 1 - i \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt H_I(t) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt' \mathcal{T} H_I(t) H_I(t') + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Наш оператор отличается от непрерывного случая на ошибку:

$$\begin{aligned} \text{Error} &= \exp \left\{ -i \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt H_I(t) \right\} - \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt H_I(t) \right\} \\ &= \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt \int_t^{(k+1)\Delta t} dt' [H_I(t), H_I(t')] + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

С точностью до  $\mathcal{O}(\Delta t^{3/2})$  матрица  $U$  может быть записана в виде:

$$U[k+1, k] \simeq \exp \left\{ -i \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \Delta t dt H_I(t) \right\} \quad (19)$$

Вводя эволюционные операторы для кубита и для взаимодействия:

$$U[k+1, k] = U_S[k+1, k] U_{\text{swap}}[k+1, k] \quad (20)$$

$$U_S[k+1, k] = \exp \left\{ -i \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt H_S(t) \right\} \quad (21)$$

$$U_{\text{swap}}[k+1, k] = \exp \left\{ -i \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt V(t) \right\} = \exp \left\{ \sqrt{\gamma \Delta t} \left( \Delta B_0^+[k] a - \Delta B_0[k] a^+ \right) \right\} \quad (22)$$

Где  $\Delta B_0[k] = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt b_0(t)$

Определяя в Шрёдингеровском представлении оператор

$$\Delta B_j = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} d\tau b_\tau \quad (23)$$

Со свойством:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta B_{[\tau/\Delta t]}}{\sqrt{\Delta t}} = b_\tau \quad (24)$$

Теперь введём пространство, где действуют наши дискретизованные операторы:

$$H^{\text{coarse}} = H_S \otimes H_B^{\text{coarse}} \quad (25)$$

С новым оператором числа частиц:

$$N_C = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta B_j^+ \Delta B_j \quad (26)$$

Основное состояние тогда запишется в виде:

$$|\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}_S\rangle \otimes |\mathbf{0}_B\rangle \quad (27)$$

$$|\mathbf{0}_B\rangle = \bigotimes_{n=-\infty}^{\infty} |0_n\rangle$$

И новый ортонормированный базис даётся формулой:



$$\begin{aligned}
|j^{(m)}\rangle &= \Delta B_{j_1}^+ B_{j_2}^+ \dots B_{j_m}^+ |0_B\rangle \\
&= |1_{j_1}\rangle \otimes |1_{j_2}\rangle \otimes \dots \otimes |1_{j_m}\rangle \otimes_{n \neq \{j_1, \dots, j_m\}} |0_n\rangle
\end{aligned} \tag{28}$$

На рисунке ниже схематично показана эволюция системы, которую можно понять так: на каждом  $k$ -м шаге система обменивается с  $k$ -й модой через  $U_{swap}$ , далее, в течение времени  $\Delta t$  система эволюционирует с  $H_S$ , далее индекс увеличивается  $k \rightarrow k + 1$  и т.д.

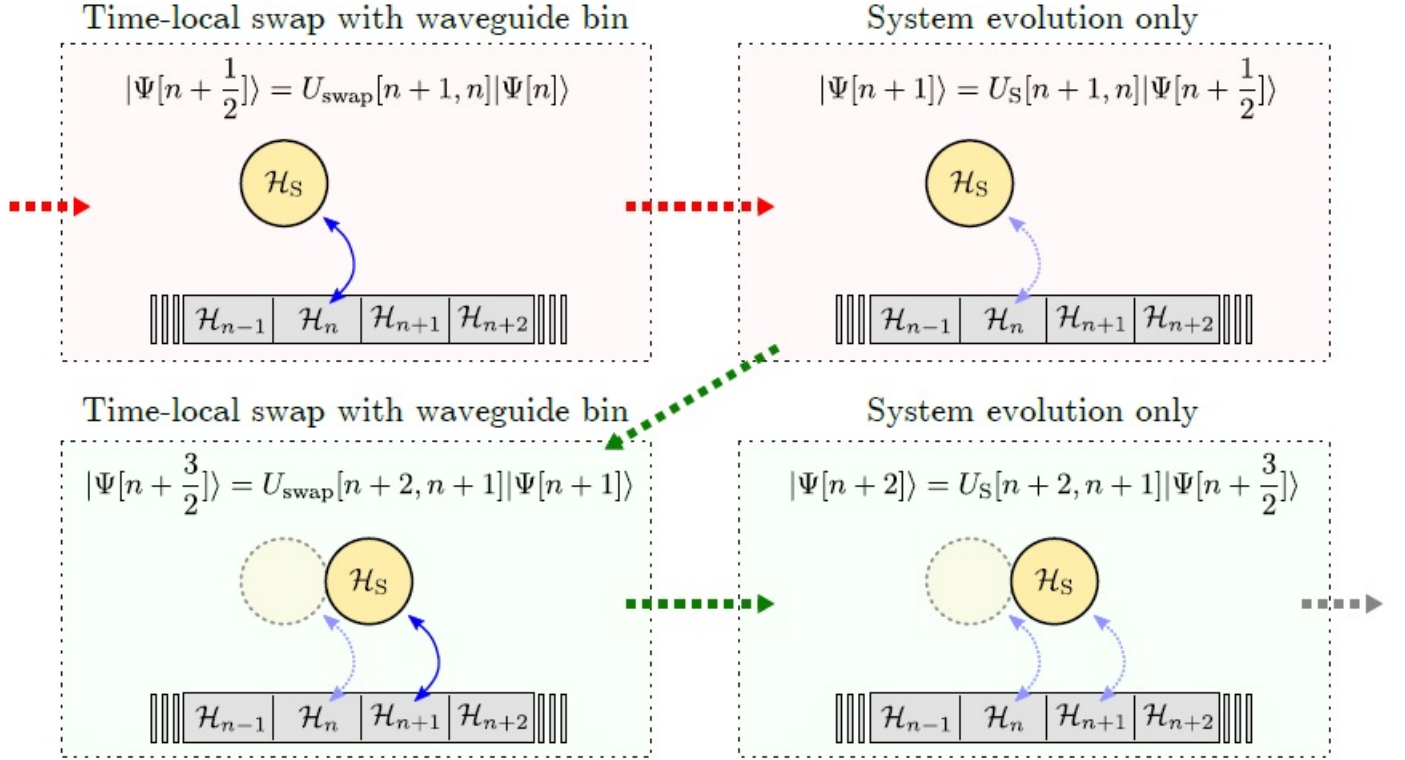


Рис. 5: Интуитивная картина эволюции системы за два шага

<https://quantum-journal.org/papers/q-2018-05-28-69/>

Рассмотрим среднее:

$$\langle 0_k | U[k + 1, k] | 0_k \rangle \approx U_S[k + 1, k] \langle 0_k | U_{swap}[k + 1, k] | 0_k \rangle \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0_k | U_{swap}[k + 1, k] | 0_k \rangle &\approx 1 - \frac{\gamma \Delta t}{2} a^+ a + \mathcal{O}(\Delta t^2) \approx \\
&\approx \exp\left\{-\frac{\gamma}{2} a^+ a \Delta t\right\} + \mathcal{O}(\Delta t^2)
\end{aligned} \tag{30}$$

Значит, мы можем определить эффективный пропагатор:

$$U_{eff}[k + 1, k] = \langle 0_k | U[k + 1, k] | 0_k \rangle \approx \exp\left\{-i \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} dt H_{eff}(t)\right\} \tag{31}$$

Где  $H_{eff} = H_S(t) - i\frac{\gamma}{2} a^+ a$

Переходя к непрерывному пределу, формулы остаются в силе, и мы можем определить волновую функцию на бесконечности:

$$|\psi(t \rightarrow \infty)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \int d\tau^m \langle \Omega_{-}^{+} \rangle_{\tau^m} |\tau^m\rangle \quad (32)$$

Где  $\tau^m$  есть набор  $|\tau_1, \dots, \tau_m\rangle$  чисел заполнения для операторов  $b_{\tau}$

Оператор Моллера же может быть найден по формуле:

$$\langle \Omega_{-}^{+} \rangle_{\tau^m} = \langle 0_S | U_{eff}(\tau_{max}, \tau_m) \prod_{q=1}^m \sqrt{\gamma} a U_{eff}(\tau_q, \tau_{q-1}) | \psi_S(0) \rangle \quad (33)$$

Где  $\tau_{max} = \max(T_P, \tau_m)$ ,  $\tau_0 = 0$

Отсюда было нетрудно получить волновую функцию для расчёта коррелятора  $G^{(1)}$ , поскольку она одно фотонная, поэтому я оставил в сумме лишь член с  $m = 1$

### 3 Теоретические Результаты

#### 3.1 Расчёт электромагнитного поля системы из двух кубитов

Рассмотрим систему, состоящую из двух кубитов и резервуара, через который можно пропускать излучение, которое может распространяться только в направлении одной оси. Система описывается гамильтонианом:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_B + \hat{\mathcal{H}}_{SB} \quad (34)$$

$\hat{\mathcal{H}}_S = \omega_1 \hat{\sigma}_1^{\dagger} \hat{\sigma}_1 + \omega_2 \hat{\sigma}_2^{\dagger} \hat{\sigma}_2$  - член системы

$\omega_i$  - частота кубита

$\hat{\sigma}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{\sigma}_i^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  - понижающий и повышающий операторы для кубита

$\hat{\mathcal{H}}_B = \sum_k \omega(k) \hat{a}_R^{\dagger}(k) \hat{a}_R(k) + \sum_k \omega(k) \hat{a}_L^{\dagger}(k) \hat{a}_L(k)$  - член резервуара

$\omega(k)$  - частота  $k$ -й моды резервуара  $\hat{a}_{R,L}(k)$ ,  $\hat{a}_{R,L}^{\dagger}(k)$  операторы уничтожения и рождения для фотонов, которые распространяются направо и налево

$$\hat{\mathcal{H}}_{SB} = \sum_k g \left[ \hat{a}_L^{\dagger}(k) \hat{\sigma}_1 + \hat{a}_L(k) \hat{\sigma}_1^{\dagger} \right] + \sum_k g \left[ e^{-ikr} \hat{a}_R^{\dagger}(k) \hat{\sigma}_2 + e^{ikr} \hat{a}_R(k) \hat{\sigma}_2^{\dagger} \right] + \sum_k g \left[ e^{-ikr} \hat{a}_L^{\dagger}(k) \hat{\sigma}_2 + e^{ikr} \hat{a}_L(k) \hat{\sigma}_2^{\dagger} \right]$$

- взаимодействие

$g = (\boldsymbol{\mu} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}))$  - константа взаимодействия

Тогда полный гамильтониан:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \omega_1 \hat{\sigma}_1^{\dagger} \hat{\sigma}_1 + \omega_2 \hat{\sigma}_2^{\dagger} \hat{\sigma}_2 + \sum_k \omega(k) \hat{a}_R^{\dagger}(k) \hat{a}_R(k) + \sum_k \omega(k) \hat{a}_L^{\dagger}(k) \hat{a}_L(k) + \\ &+ \sum_k g \left[ \hat{a}_L^{\dagger}(k) \hat{\sigma}_1 + \hat{a}_L(k) \hat{\sigma}_1^{\dagger} \right] + \sum_k g \left[ e^{-ikr} \hat{a}_R^{\dagger}(k) \hat{\sigma}_2 + e^{ikr} \hat{a}_R(k) \hat{\sigma}_2^{\dagger} \right] + \\ &+ \sum_k g \left[ e^{-ikr} \hat{a}_L^{\dagger}(k) \hat{\sigma}_2 + e^{ikr} \hat{a}_L(k) \hat{\sigma}_2^{\dagger} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

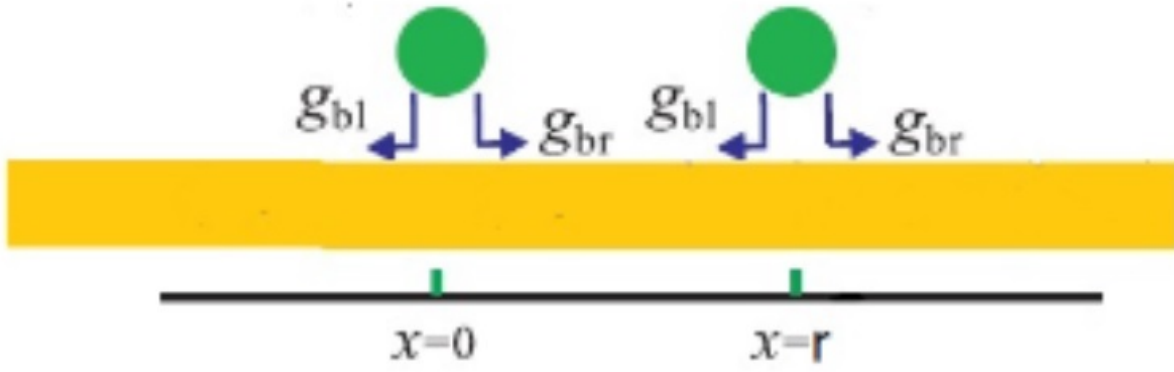


Рис. 6: Схема взаимодействия двух кубитов с резервуаром при наличии киральности  
<https://www.osapublishing.org/oe/fulltext.cfm?uri=oe-24-17-19988id=348949>

Решим уравнение Шредингера и найдём эволюцию волновой функции:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{\mathcal{H}} \Psi \quad (36)$$

Рассмотрим эволюцию системы на промежутке  $t \in [0, \infty]$

Начальное состояние системы:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \right) \otimes |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle \quad (37)$$

Мы будем записывать волновую функцию в базисе  $|\alpha\beta\gamma\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \otimes |\gamma\rangle$ , где первый и второй кет-векторы соответствует волновым функциям первого и второго кубита соответственно, третий же соответствует вектору, состоящему из чисел заполнения резервуара.

Примем во внимание, что для  $k < 0$  операторы рождения и уничтожения  $\hat{a}_L$ , а для  $k > 0$  -  $\hat{a}_R$  Разложим волновую функцию по базисным векторам:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & \zeta(t) |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle + \alpha_1(t) e^{-i\omega_1 t} |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle + \alpha_2(t) e^{-i\omega_2 t} |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle + \\ & + \sum_k \beta_k(t) e^{-i\omega_k t} |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |k\rangle + \alpha_3(t) e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle + \\ & + \sum_k \gamma_k(t) e^{-i(\omega_k+\omega_1)t} |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |k\rangle + \sum_k \delta_k(t) e^{-i(\omega_2+\omega_k)t} |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |k\rangle + \\ & + \sum_k \tau_k(t) e^{-i(\omega_1+\omega_2+\omega_k)t} |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |k\rangle + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

Где за ... обозначены двухфотонные вклады и выше.

Теперь запишем уравнения на коэффициенты:

$$\dot{\zeta}(t) = 0 \quad (39)$$

$$\dot{\alpha}_1 = -i \sum_k g \Theta(-k) e^{-i(\omega_k - \omega_1)t} \beta_k \quad (40)$$

$$\dot{\alpha}_2 = -i \sum_k g e^{-i(\omega_k - \omega_2)t} e^{ikr} \beta_k \quad (41)$$

$$\dot{\beta}_k = -ig\Theta(-k)e^{i(\omega_k - \omega_1)t} \alpha_1 - ig e^{i(\omega_k - \omega_2)t} e^{-ikr} \alpha_2 \quad (42)$$

Оказывается, что начальные условия в таком виде занулят все прочие коэффициенты, поскольку уравнения на них не содержат  $\zeta$  и  $\alpha_1$ , поэтому  $\alpha_3 = \gamma_k = \delta_k = \tau_k = \dots = 0$

Первое уравнение с учётом начальных условий  $\zeta(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ :

$$\zeta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (43)$$

Чтобы решить остальные три уравнения, проинтегрируем уравнение на  $\beta_k$ :

$$\int_0^t \dot{\beta}_k dt = \int_0^t d\tau \left[ -ig\Theta(-k)e^{i(\omega_k - \omega_1)\tau} \alpha_1 - ig e^{i(\omega_k - \omega_2)\tau} e^{-ikr} \alpha_2 \right] \quad (44)$$

Учтём начальное условие  $\beta(0) = 0$ :

$$\beta(t) = \int_0^t d\tau \left[ -ig\Theta(-k)e^{i(\omega_k - \omega_1)\tau} \alpha_1 - ig e^{i(\omega_k - \omega_2)\tau} e^{-ikr} \alpha_2 \right] \quad (45)$$

Теперь подставим  $\beta_k$  в уравнения на  $\alpha_1, \alpha_2$ , заменим суммирование на интегрирование, сделав замену:  $\Gamma = \frac{2Lg^2}{\nu}$  и используя равенство:  $\int_0^\infty e^{-ikx} dx = \pi\delta(k) + \frac{1}{ik}$ :

$$\dot{\alpha}_1(t) = -\frac{\Gamma}{4}\alpha_1(t) - \frac{i\Gamma}{4\pi} \int_0^t \frac{\alpha_1(\tau)e^{i\omega_1(t-\tau)}}{t-\tau} d\tau - \frac{i\Gamma}{4\pi} \int_0^t \frac{e^{i\omega_1 t - i\omega_2 \tau}}{\frac{r}{\nu} + (t-\tau)} \alpha_2(\tau) d\tau \quad (46)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = -\frac{\Gamma}{2}\alpha_2(t) - \frac{e^{i\frac{\omega_2}{\nu} r} \Gamma}{4} \alpha_1\left(t - \frac{r}{\nu}\right) + \frac{i\Gamma}{4\pi} \int_0^t \frac{\alpha_1(\tau)e^{i\omega_2(t-\tau)}}{\frac{r}{\nu} - (t-\tau)} \quad (47)$$

Отсюда получим уравнения в упрощённой форме: ( $\nu$  - групповая скорость)

$$\dot{\alpha}_1(t) = -2\pi g^2 \nu \alpha_1(t) \quad (48)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = -4\pi g^2 \nu \alpha_2(t) - 2\pi g^2 \nu e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t + i\omega_1|r|/c} \alpha_1(t - |r|/c) \quad (49)$$

Решив первое уравнение с учётом начальных условий:

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi g^2 t} \Theta(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Theta(-t) \quad (50)$$

Если  $t \in [0, |r|/c]$ :

$$\dot{\alpha}_2 = -4\pi \nu g^2 \alpha_2(t) - \frac{2\pi \nu g^2}{\sqrt{2}} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i\omega_1|r|/c} \quad (51)$$

$$\alpha_2(t) = e^{-4\pi \nu g^2 t} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\pi \nu g^2}{\sqrt{2}} e^{i\omega_1|r|/c} \frac{e^{4\pi \nu g^2 t - i(\omega_1 - \omega_2)t} - 1}{4\pi \nu g^2 - i(\omega_1 - \omega_2)} \right] \quad (52)$$

Если  $t > |r|/c$ :

$$\alpha_2(t) = e^{-4\pi\nu g^2 t} \left[ \frac{e^{4\pi\nu g^2 |r|/c}}{\sqrt{2}} - \frac{2\pi\nu g^2}{\sqrt{2}} e^{i\omega_1 |r|/c} \frac{e^{2\pi\nu g^2 t - i(\omega_1 - \omega_2)t} - e^{2\pi\nu g^2 |r|/c - i(\omega_1 - \omega_2)|r|/c}}{2\pi\nu g^2 - i(\omega_1 - \omega_2)} \right] \quad (53)$$

В итоге:

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi\nu g^2 t} \Theta(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Theta(-t) \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) = e^{-4\pi\nu g^2 t} & \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\pi\nu g^2}{\sqrt{2}} e^{i\omega_1 |r|/c} \frac{e^{4\pi\nu g^2 t - i(\omega_1 - \omega_2)t} - 1}{4\pi\nu g^2 - i(\omega_1 - \omega_2)} \right] \Theta(|r|/c - t) + \\ & + e^{-4\pi\nu g^2 t} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\pi\nu g^2}{\sqrt{2}} e^{i\omega_1 |r|/c} \frac{e^{4\pi\nu g^2 |r|/c - i(\omega_1 - \omega_2)|r|/c} - 1}{4\pi\nu g^2 - i(\omega_1 - \omega_2)} - \right. \\ & \left. - \frac{2\pi\nu g^2}{\sqrt{2}} e^{i\omega_1 |r|/c} \frac{e^{2\pi\nu g^2 t - i(\omega_1 - \omega_2)t} - e^{2\pi\nu g^2 |r|/c - i(\omega_1 - \omega_2)|r|/c}}{2\pi\nu g^2 - i(\omega_1 - \omega_2)} \right] \Theta(t - |r|/c) \end{aligned} \quad (55)$$

Теперь, раз все коэффициенты для в.ф. нам известны, нам остаётся посчитать коррелятор  $Im\langle\sigma_2(t)\rangle$ :

$$Im\langle\sigma_2(t)\rangle = Im \frac{\alpha_2 e^{-i\omega_2 t}}{\sqrt{2}} \quad (56)$$

При  $t \in [0, |r|/c]$

$$\begin{aligned} Im\langle\sigma_2(t)\rangle = & -\frac{\sin \omega_2 t e^{-4\pi\nu g^2 t}}{2} - \frac{\pi\nu g^2}{(4\pi\nu g^2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} \left[ 4\pi\nu g^2 \sin \omega_1 \left( \frac{|r|}{c} - t \right) + \right. \\ & + (\omega_1 - \omega_2) \cos \omega_1 \left( \frac{|r|}{c} - t \right) - e^{-4\pi\nu g^2 t} 4\pi\nu g^2 \sin \left( \omega_1 \frac{|r|}{c} - \omega_2 t \right) - \\ & \left. - (\omega_1 - \omega_2) e^{-4\pi\nu g^2 t} \cos \left( \omega_1 \frac{|r|}{c} - \omega_2 t \right) \right] \end{aligned} \quad (57)$$

При  $t > \frac{|r|}{c}$ :

$$\begin{aligned} Im\langle\sigma_2(t)\rangle = & -\frac{\sin \omega_2 t e^{-4\pi\nu g^2 t}}{2} - \frac{\pi\nu g^2 e^{-4\pi\nu g^2 t}}{(4\pi\nu g^2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} \left[ 4\pi\nu g^2 \sin \omega_2 \left( \frac{|r|}{c} - t \right) e^{4\pi\nu g^2 \frac{|r|}{c}} + \right. \\ & + (\omega_1 - \omega_2) \cos \omega_2 \left( \frac{|r|}{c} - t \right) e^{4\pi\nu g^2 \frac{|r|}{c}} - 4\pi\nu g^2 \sin \left( \omega_1 \frac{|r|}{c} - \omega_2 t \right) - (\omega_1 - \omega_2) \cos \left( \omega_1 \frac{|r|}{c} - \omega_2 t \right) \left. \right] - \\ & - \frac{\pi\nu g^2 e^{-4\pi\nu g^2 t}}{(2\pi\nu g^2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2} \left[ 2\pi\nu g^2 \sin \omega_1 \left( \frac{|r|}{c} - t \right) e^{2\pi\nu g^2 t} + (\omega_1 - \omega_2) \cos \omega_1 \left( \frac{|r|}{c} - t \right) e^{2\pi\nu g^2 t} - \right. \\ & \left. - 2\pi\nu g^2 \sin \omega_2 \left( \frac{|r|}{c} - t \right) e^{2\pi\nu g^2 \frac{|r|}{c}} - (\omega_1 - \omega_2) \cos \omega_2 \left( \frac{|r|}{c} - t \right) e^{2\pi\nu g^2 \frac{|r|}{c}} \right] \end{aligned} \quad (58)$$

Сделаем несколько замен для удобства в численных расчётах:

$$4\pi\nu g^2 = \Gamma \quad \frac{|r|}{c} = t_0 \quad \omega_1 - \omega_2 = \Delta \quad (59)$$

При  $t \in [0, t_0]$

$$\begin{aligned} \text{Im}\langle\sigma_2(t)\rangle = & -\frac{\sin\omega_2 t e^{-\Gamma t}}{2} - \frac{\Gamma/4}{\Gamma^2 + \Delta^2} \left[ \Gamma \sin\omega_1(t_0 - t) + \Delta \cos\omega_1(t_0 - t) - \right. \\ & \left. - e^{-\Gamma t} \Gamma \sin(\omega_1 t_0 - \omega_2 t) - \Delta e^{-\Gamma t} \cos(\omega_1 t_0 - \omega_2 t) \right] \end{aligned} \quad (60)$$

При  $t > t_0$ :

$$\begin{aligned} \text{Im}\langle\sigma_2(t)\rangle = & -\frac{\sin\omega_2 t e^{-\Gamma t}}{2} - \frac{\Gamma/4 e^{-\Gamma t}}{\Gamma^2 + \Delta^2} \left[ \Gamma \sin\omega_2(t_0 - t) e^{\Gamma t_0} + \Delta \cos\omega_2(t_0 - t) e^{\Gamma t_0} - \right. \\ & \left. - \Gamma \sin(\omega_1 t_0 - \omega_2 t) - \Delta \cos(\omega_1 t_0 - \omega_2 t) \right] - \frac{\Gamma/4 e^{-\Gamma t}}{(\Gamma/2)^2 + \Delta^2} \left[ \Gamma/2 \sin\omega_1(t_0 - t) e^{\Gamma t/2} + \right. \\ & \left. + \Delta \cos\omega_1(t_0 - t) e^{\Gamma t/2} - \Gamma/2 \sin\omega_2(t_0 - t) e^{\Gamma t_0/2} - \Delta \cos\omega_2(t_0 - t) e^{\Gamma t_0/2} \right] \end{aligned} \quad (61)$$

Численно посчитав электрическое поле  $\text{Im}\langle\hat{\sigma}_2(t)\rangle$  при случайно выбранных параметрах, поведение кривой схоже с экспериментальными данными (рис.7)

Красный:  $\Gamma = 1, t_0 = 0.01, \omega_1 = \omega_2 = 1$

Зеленый:  $\Gamma = 1, t_0 = 0.01, \omega_1 = 0.5, \omega_2 = 1$

Синий:  $\Gamma = 1, t_0 = 0.01, \omega_1 = 1, \omega_2 = 1.1$

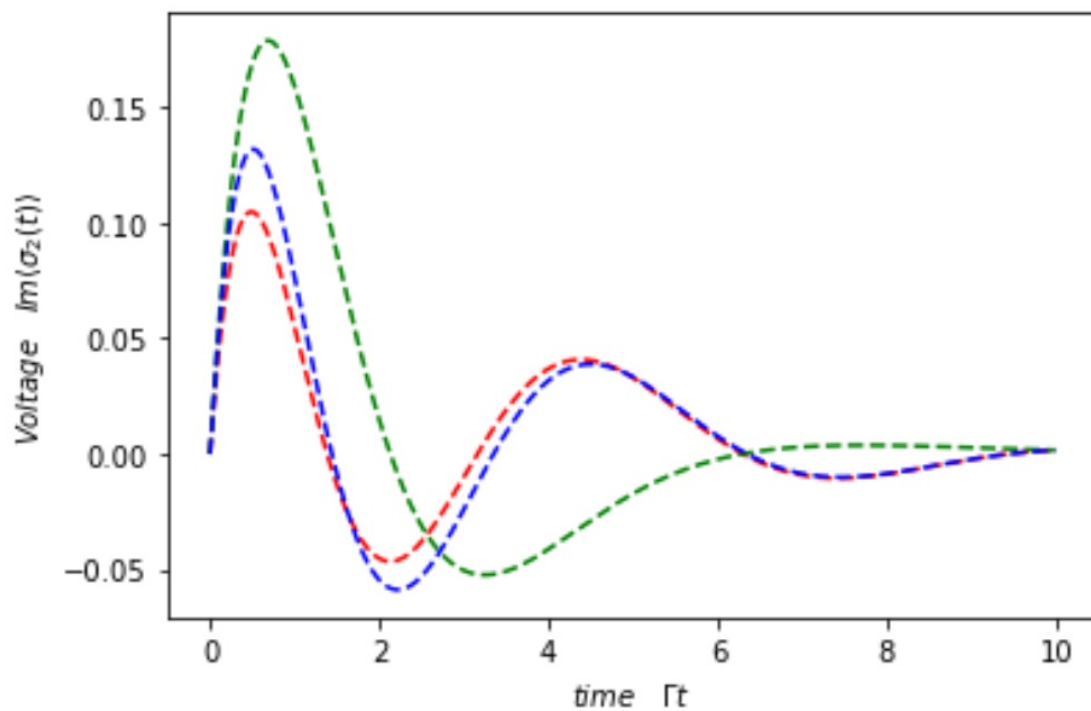


Рис. 7: Численный расчёт поля по аналитическим формулам для произвольных параметров

В задаче о расчёте электромагнитного поля для системы из двух кубитов были проведены численные и экспериментальные расчёты, которые предоставил Гунин Сергей Александрович из Лаборатории искусственных квантовых систем МФТИ(рис.8)

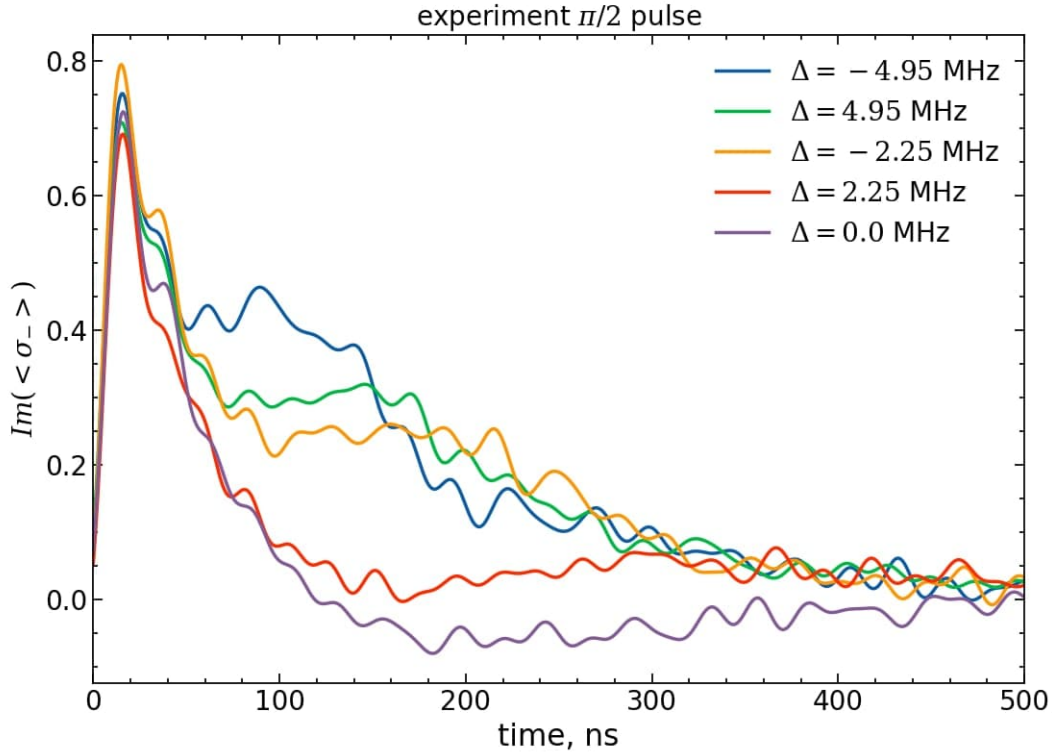


Рис. 8: Экспериментальный результат для поля при разных отстройках частоты  
Гунин Сергей, лаборатория искусственных квантовых систем

### 3.2 Расчёт корреляторов электромагнитного поля для двухуровневой системы

Запишем Гамильтониан системы, описывающий взаимодействие кубита с излучением:

Гамильтониан системы:

$$\hat{H} = \hat{H}_{0S} + \hat{H}_{1S} + \hat{V} + \hat{H}_B \quad (62)$$

Где члены гамильтониана соответственно:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + \Omega(t) \left[ i e^{-i\omega_0 t} \hat{\sigma}_+ - i e^{i\omega_0 t} \hat{\sigma}_- \right] + i\kappa \int d\omega (\hat{b}_\omega^\dagger \hat{\sigma}_- - \hat{b}_\omega \hat{\sigma}_+) + \int d\omega \omega \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega \quad (63)$$

$$G^{(1)}(t_1, t_2) = \langle \psi_{B,I}(\infty) | \hat{b}_0^\dagger(t_1) \hat{b}_0(t_2) | \psi_{B,I}(\infty) \rangle \quad (64)$$

Однофотонная в.ф. :

$$\begin{aligned} |\psi_{B,I}(\infty)\rangle &\approx \sqrt{\gamma} e^{-\gamma T_P/4} \int_0^{T_P} d\tau_1 e^{-i\omega_0 \tau_1} \cos\left(\frac{A_R}{2T_P}(T_P - \tau_1)\right) \sin\left(\frac{A_R}{2T_P}\tau_1\right) |\tau_1\rangle + \\ &+ \sqrt{\gamma} e^{-\gamma T_P/4} \sin\left(A_R/2\right) \int_{T_P}^{\infty} d\tau_1 e^{-i\omega_0 \tau_1} e^{-\gamma(\tau_1 - T_P)/2} |\tau_1\rangle \end{aligned} \quad (65)$$

Подействуем в корреляторе (1) оператором  $\hat{b}_0(t_2) = \hat{b}_{t_2}$  на кет вектор:



$$\begin{aligned} \hat{b}_0(t_2) |\psi_{B,I}(\infty)\rangle &= \sqrt{\gamma} e^{-\gamma T_P/4} e^{-i\omega_0 t_2} \cos\left(\frac{A_R}{2T_P}(T_P - t_2)\right) \sin\left(\frac{A_R}{2T_P} t_2\right) \Theta(0 < t_2 < T_P) |0\rangle + \\ &+ \sqrt{\gamma} e^{-\gamma T_P/4} \sin\left(A_R/2\right) e^{-i\omega_0 t_2} e^{-\gamma(t_2 - T_P)/2} \Theta(t_2 > T_P) |0\rangle \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{B,I}(\infty) | \hat{b}_0^\dagger(t_1) &= \sqrt{\gamma} e^{-\gamma T_P/4} e^{i\omega_0 t_1} \cos\left(\frac{A_R}{2T_P}(T_P - t_1)\right) \sin\left(\frac{A_R}{2T_P} t_1\right) \Theta(0 < t_1 < T_P) \langle 0 | + \\ &+ \sqrt{\gamma} e^{-\gamma T_P/4} \sin\left(A_R/2\right) e^{i\omega_0 t_1} e^{-\gamma(t_1 - T_P)/2} \Theta(t_1 > T_P) \langle 0 | \end{aligned} \quad (67)$$

Отсюда коррелятор  $G^{(1)}(t_1, t_2)$  на разных временных интервалах:

1.  $t_1, t_2 < T_P$

$$\begin{aligned} G^{(1)}(t_1, t_2) &= \gamma e^{-\gamma T_P/2} e^{i\omega_0(t_1 - t_2)} \cos\left(\frac{A_R}{2T_P}(T_P - t_1)\right) \cos\left(\frac{A_R}{2T_P}(T_P - t_2)\right) \times \\ &\times \sin\left(\frac{A_R}{2T_P} t_1\right) \sin\left(\frac{A_R}{2T_P} t_2\right) \end{aligned} \quad (68)$$

2.  $t_1 < T_P < t_2$

$$\begin{aligned} G^{(1)}(t_1, t_2) &= \gamma e^{-\gamma T_P/2} e^{i\omega_0(t_1 - t_2)} \cos\left(\frac{A_R}{2T_P}(T_P - t_1)\right) \cos\left(\frac{A_R}{2T_P}(T_P - t_2)\right) \sin\left(\frac{A_R}{2T_P} t_1\right) \times \\ &\sin\left(\frac{A_R}{2T_P} t_2\right) \Theta(0 < t_1, t_2 < T_P) + \gamma e^{-\gamma T_P/2} e^{i\omega_0(t_1 - t_2)} e^{-\gamma(t_1 - T_P)/2} \sin\left(A_R/2\right) \cos\left(\frac{A_R}{2T_P}(T_P - t_2)\right) \\ &+ \gamma e^{-\gamma T_P/2} e^{i\omega_0(t_1 - t_2)} e^{-\gamma(t_2 - T_P)/2} \sin\left(A_R/2\right) \cos\left(\frac{A_R}{2T_P}(T_P - t_1)\right) \sin\left(\frac{A_R}{2T_P} t_1\right) \Theta(0 < t_1 < T_P < t_2) \\ &+ \gamma e^{-\gamma T_P/2} e^{i\omega_0(t_1 - t_2)} e^{-\gamma(t_1 + t_2 - 2T_P)/2} \sin^2\left(A_R/2\right) \Theta(T_P < t_1, t_2) \end{aligned} \quad (69)$$

$$\hat{b}_\omega(t) = e^{-i\omega t} \hat{b}_\omega(0) + \kappa \int_0^t d\tau e^{-i\omega(t-\tau)} \hat{\sigma}_-(\tau) \quad (70)$$

Проинтегрируем это уравнение по частоте:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}_\omega(t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \hat{b}_\omega(0) d\omega + \pi \kappa \hat{\sigma}_-(t) \quad (71)$$

Определив  $\hat{b}_{out}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}_\omega(t) d\omega$   $\hat{b}_{in}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}_\omega(t) d\omega$

$$\hat{b}_{out}(t) = \hat{b}_{in}(t) + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \hat{\sigma}_-(t) \quad (72)$$

Отсюда коррелятор (рис.9)

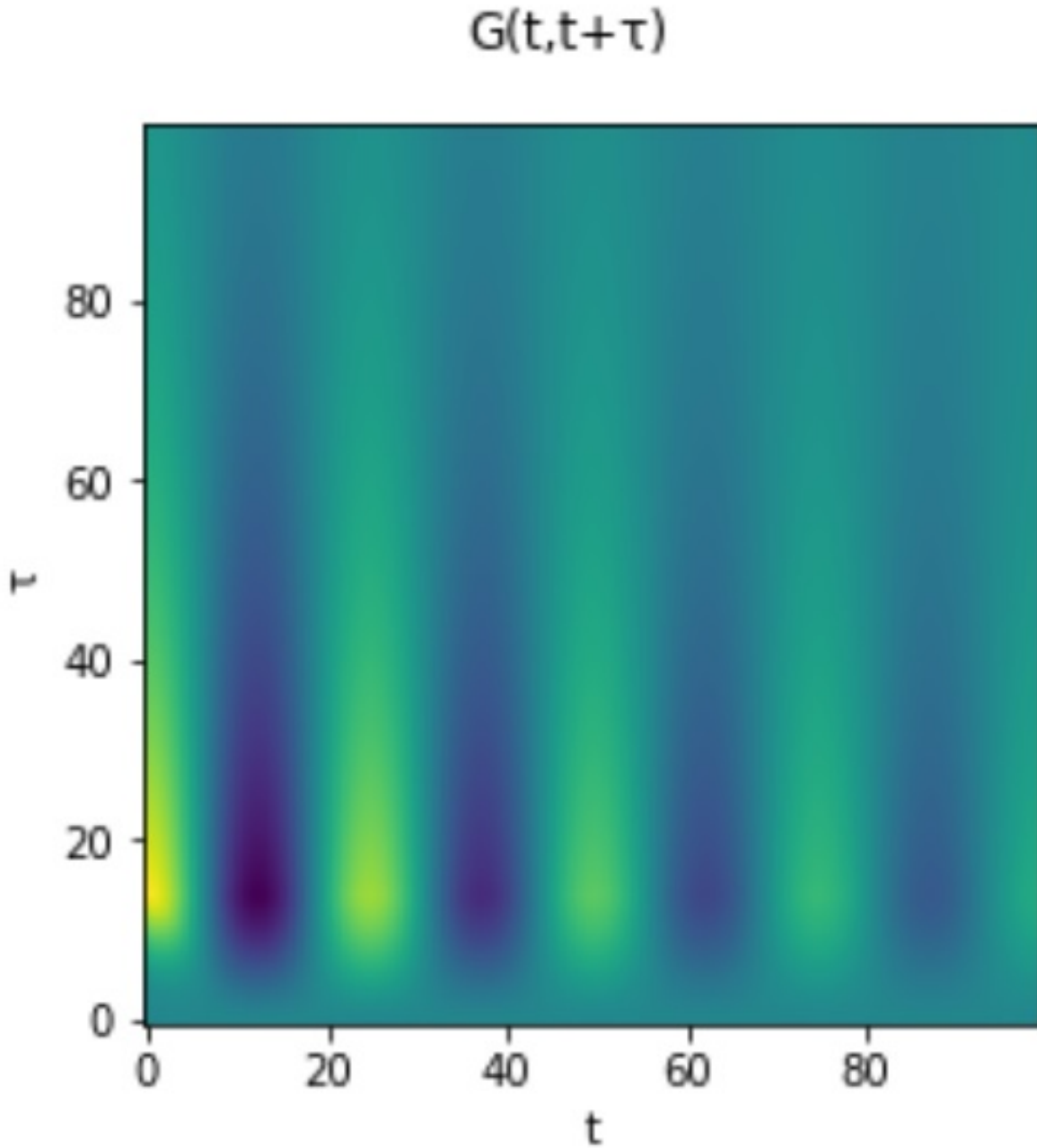


Рис. 9: Коррелятор поля для кубита в одномерном волноводе, численный расчёт

$$\langle \hat{b}_{out}^\dagger(t) \hat{b}_{out}(t') \rangle = \langle \hat{b}_{in}^\dagger(t) \hat{b}_{in}(t') \rangle + \frac{\gamma}{2} \langle \hat{\sigma}_+(t) \hat{\sigma}_-(t') \rangle + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \left( \langle \hat{b}_{in}^\dagger(t) \hat{\sigma}_-(t') \rangle + \langle \hat{b}_{in}(t') \hat{\sigma}_+(t) \rangle \right) \quad (73)$$

$$g^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \hat{\sigma}_+(t+\tau) \hat{\sigma}_-(t) \rangle \sim \int_{-\infty}^{\infty} dt G^{(1)}(t+\tau, t) \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
g^{(1)}/(\gamma e^{-\gamma T_P/2+i\omega\tau}) &\sim \frac{1}{4} \left[ \frac{T_P - \tau}{2} \cos\left(\frac{A_R}{T_P}\tau\right) + \frac{T_P}{2A_R} \sin\left(\frac{A_R}{T_P}(T_P - \tau)\right) + (T_P - \tau) \sin^2 \frac{A_R}{2} \right] \Theta(T_P - \tau) + \\
&+ \frac{e^{-\gamma(\tau-T_P)/2} e^{i\omega\tau} \sin \frac{A_R}{2}}{2} \left[ \frac{2 \sin \frac{A_R}{2} (1 - e^{-\gamma T_P/2})}{\gamma} - \frac{e^{-\gamma T_P/2} \left( \gamma \sin \frac{A_R}{2} + \frac{2A_R}{T_P} \cos \frac{A_R}{2} \right)}{2 \left( \frac{\gamma^2}{4} + \frac{A_R^2}{T_P^2} \right)} - \frac{\gamma \cos \frac{A_R}{2} + \frac{2A_R}{T_P} \sin \frac{A_R}{2}}{2i \left( \frac{\gamma^2}{4} + \frac{A_R^2}{T_P^2} \right)} \right] \Theta(\tau - T_P) + \\
&+ \frac{e^{-\gamma(\tau-T_P)/2} e^{i\omega\tau} \sin \frac{A_R}{2}}{2} \left[ \frac{2 \sin \frac{A_R}{2} (1 - e^{-\gamma T_P/2})}{\gamma} - \frac{e^{-\gamma T_P/2} \left( \gamma \sin \frac{A_R}{2} + \frac{2A_R}{T_P} \cos \frac{A_R}{2} \right)}{2 \left( \frac{\gamma^2}{4} + \frac{A_R^2}{T_P^2} \right)} + \right. \\
&+ \left. \frac{e^{iA_R/2} e^{\left(-\gamma/2 - iA_R/T_P\right)(T_P - \tau)} \left(-\gamma/2 + iA_R/T_P\right) - e^{-iA_R/2} e^{\left(-\gamma/2 + iA_R/T_P\right)(T_P - \tau)} \left(\gamma/2 + iA_R/T_P\right)}{2i \left( \frac{\gamma^2}{4} + \frac{A_R^2}{T_P^2} \right)} \right] \Theta(T_P - \tau) + \\
&+ \frac{e^{-\gamma(\tau-2T_P)/2} \sin^2 A_R/2}{\gamma}
\end{aligned} \tag{75}$$

## 4 Заключение

Расчёт электромагнитного поля системы двух кубитов показывает, что функциональная зависимость теоретического и экспериментального результатов совпадает, что говорит о правильности выбранной физической модели. Дальнейшим шагом в последующих работах будет расчёт электромагнитного поля для когерентного света, поскольку это важно для исследования возможности понять, как можно из рассеянного на двух кубитовой системе света вычислить статистику падающего света, если это возможно. Также были проведены расчёты коррелятор  $G^{(1)}$  для одно кубитовой системы, что позволяет в дальнейшем проверить, насколько это предсказание оправдывает себя в будущем эксперименте.

## 5 Литература

1. Kevin A. Fischer, Rahul Trivedi, Vinay Ramasesh, Irfan Siddiqi, and Jelena Vuckovic. Scattering into one-dimensional waveguides from a coherently-driven quantum-optical system. Quantum Journal May 22, 2018
2. Zeyang Liao, Xiaodong Zeng, Hyunchul Nha and M Suhail Zubairy. Photon transport in a one-dimensional nanophotonic waveguide QED system. IOP Publishing. 9 May 2016