«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)
Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная и прикладная физика

Классическая и квантовая накачка двухуровневой системы в волноводе.

(бакалаврская работа)

Студент:
Артамонов Даниил Антонович

Научный руководитель:
Константин Сергеевич Тихонов,
Кандидат физ.-мат. наук

Долгопрудный, 2022

Аннотация

В этом отчете исследуется рассеяние фотонов, на двухуровневой системе, находящейся в волноводе. Мы рассматриваем два случая: 1) квантовый источник (когда поле производится другой двухуровневой системой в результате диссипации) и 2) классический источник, когда поле подготовлено в когерентном состоянии. Будут найдены аналитические выражения для состояния двухуровневой системы при учете внешнего поля (классического или квантового) и излучения системы в резервуар (волновод). Мы сравниваем теоретические результаты с предварительными экспериментальными данными лаборатории О. Астафьева (неопубликованными).

Оглавление

Глава 1

Введение

В последнее время появилась возможность экспериментально изучать когерентную динамику сверхпроводящих кубитов, подверженных действию внешнего излучения. Особенно интересен для изучения случай когда источник излучения квантовый (к тому же этот случай на данное время не так хорошо изучен). В этом отчете мы рассчитываем рассеяние квантового и классического импульсов с похожими профилями на двухуровневой системе, а также описываем основные различия этих случаев.

Глава 2

Квантовый источник

Квантовый случай можно описать системой, изображенной на рисунке 2.1, взятом из статьи [3]. Внешнее поле возбуждает двухуровневую систему слева. Эта система излучает поле, с которым в свою очередь взаимодействует вторая двухуровневая система.

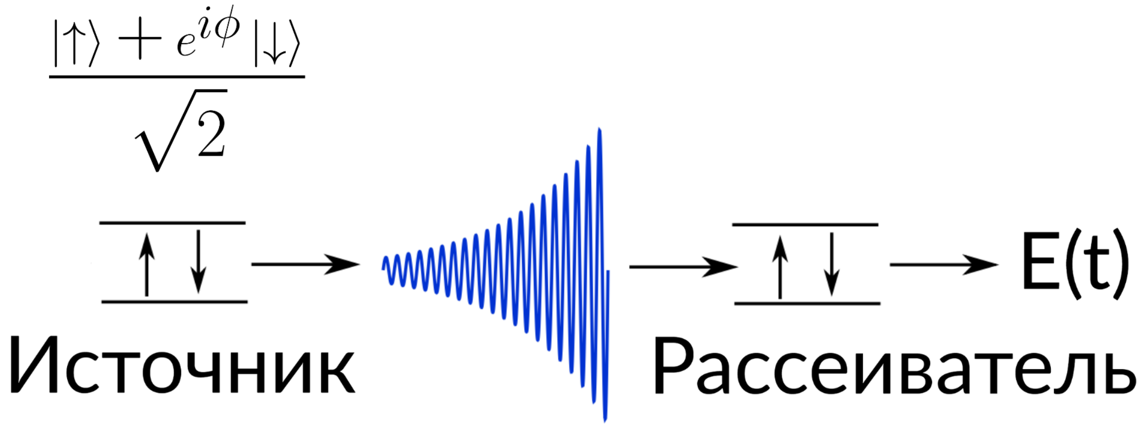

Рис. 2.1: Двухуровневая система рассеивает излучение квантового источника.

Мы решим уравнение Шредингера для связанного чистого состояния двухуровневой системы и бани в Марковском приближении, следуя подходу, изложенному в [1]. Система описывается следующим гамильтонианом:

$$H = H_{TLS} + H_B + H_{I1} + H_{I2}, \tag{2.1}$$

где двухуровневые системы обладают разными разницами энергий между уровнями:

$$H_{TLS} = \epsilon_1 \hat{\sigma}_{1+} \hat{\sigma}_1 + \epsilon_2 \hat{\sigma}_{2+} \hat{\sigma}_2, \tag{2.2}$$

Бозонная баня состоит из мод движущихся налево и направо:

$$H_B = \int_{k>0} (dk) \omega(k) \hat{a}_R^\dagger(k) \hat{a}_R(k) + \int_{k<0} (dk) \omega(k) \hat{a}_L^\dagger(k) \hat{a}_L(k), \tag{2.3}$$

Предполагается, что Гамильтониан взаимодействия двухуровневой системы с полем имеет вид:

$$H = -\bar{A} \cdot \bar{E} \tag{2.4}$$

$$\bar{A} = g \hat{\sigma}_- + g^* \hat{\sigma}_+ \tag{2.5}$$

$$\bar{E} = \int \left(\hat{a}(k) + \hat{a}^\dagger(k) \right) dk \tag{2.6}$$

, где g - некоторая константа. Далее используем приближение вращающейся волны и пренебрежем членами, не сохраняющими суммарное количество возбуждений в системе, то есть членами $\hat{\sigma}_- \hat{a}(k)$ и $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger(k)$.
Первая система взаимодействует только с модами, движущимися направо:

$$H_{I1} = \int_{k>0} (dk) g_1 \Big[\hat{a}_L^\dagger(k) \hat{\sigma}_{1-} + \hat{a}_L(k) \hat{\sigma}_{1+} \Big], \tag{2.7}$$

А вторая система взаимодействует с модами, движущимися в обоих направлениях:

$$H_{I2} = \int_{k>0} (dk) g_2 \Big[e^{-ikr} \hat{a}_R^\dagger(k) \hat{\sigma}_{2-} + e^{ikr} \hat{a}_R(k) \hat{\sigma}_{2+}^\dagger \Big] + \int_{k<0} (dk) g_2 \Big[e^{-ikr} \hat{a}_L^\dagger(k) \hat{\sigma}_{2-} + e^{ikr} \hat{a}_L(k) \hat{\sigma}_{2+}^\dagger \Big] \tag{2.8}$$

,где g_1 и g_2 определяют взаимодействие первой и второй двухуровневых систем соответственно по формуле (5). В момент времени $t = 0$ система подготовлена в состоянии

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|\uparrow\rangle + e^{i\phi} |\downarrow\rangle \Big) |\downarrow\rangle |0\rangle . \tag{2.9}$$

Заметим, что этот случай имеет смысл рассматривать только при $r < 0$ (первая система взаимодействует только с модами, движущимися направо).
Число фотонов никогда не превышает 1 и волновую функцию во все последующие моменты времени можно записать следующим образом:

$$|\Psi\rangle = \zeta(t)\left|\downarrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle|0\rangle + \alpha_1(t)e^{-i\epsilon_1 t}\left|\uparrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle|0\rangle + \alpha_2(t)e^{-i\epsilon_2 t}\left|\downarrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle|0\rangle + \sum_k \beta_k(t)e^{-i\omega_k t}\left|\downarrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle|k\rangle \tag{2.10}$$

и уравнение Шредингера разделяется на уравнения амплитуд двухуровневых систем:

$$\dot{\zeta}(t) = 0, \quad \dot{\alpha}_1 = -ig_1\int_{k<0}(dk)e^{-i(\omega_k-\epsilon_1)t}\beta_k, \quad \dot{\alpha}_2 = -ig_2\int(dk)e^{-i(\omega_k-\epsilon_2)t}e^{ikr}\beta_k \tag{2.11}$$

и уравнение на аплитуды поля:

$$\dot{\beta}_k = -ig_1\Theta(-k)e^{i(\omega_k-\epsilon_1)t}\alpha_1 - ig_2e^{i(\omega_k-\epsilon_2)t}e^{-ikr}\alpha_2. \tag{2.12}$$

Как и ожидалось, амплитуда состояния $\left|\downarrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle|0\rangle$ не изменяется:

$$\zeta(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.13}$$

Амплитуды для электрического поля можно рассчитать по следующей формуле:

$$\beta_k(t) = \int_0^t d\tau\Big[-ig_1\Theta(-k)e^{i(\omega_k-\epsilon_1)\tau}\alpha_1(\tau) - ig_2e^{i(\omega_k-\epsilon_2)\tau}e^{-ikr}\alpha_2(\tau)\Big]. \tag{2.14}$$

Теперь мы можем подставить это выражение в уравнения (2.11), чтобы получить два интегрально-дифференциальных уравнения на амплитуды двухуровневых систем:

$$\dot{\alpha}_1 = -\int_{k<0}(dk)e^{-i(\omega_k-\epsilon_1)t}\int_0^t d\tau\Big[g_1^2\Theta(-k)e^{i(\omega_k-\epsilon_1)\tau}\alpha_1(\tau) + g_1g_2e^{i(\omega_k-\epsilon_2)\tau}e^{-ikr}\alpha_2(\tau)\Big] \tag{2.15}$$

и

$$\dot{\alpha}_2 = -\int(dk)e^{-i(\omega_k-\epsilon_2)t}e^{ikr}\int_0^t d\tau\Big[g_1g_2\Theta(-k)e^{i(\omega_k-\epsilon_1)\tau}\alpha_1(\tau) + g_2^2e^{i(\omega_k-\epsilon_2)\tau}e^{-ikr}\alpha_2(\tau)\Big]. \tag{2.16}$$

Уравнения (15), (16) можно упростить, заменив переменную интегрирования:

$$\int_{k>0}(dk) \to \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{|d\omega/dk|}. \tag{2.17}$$

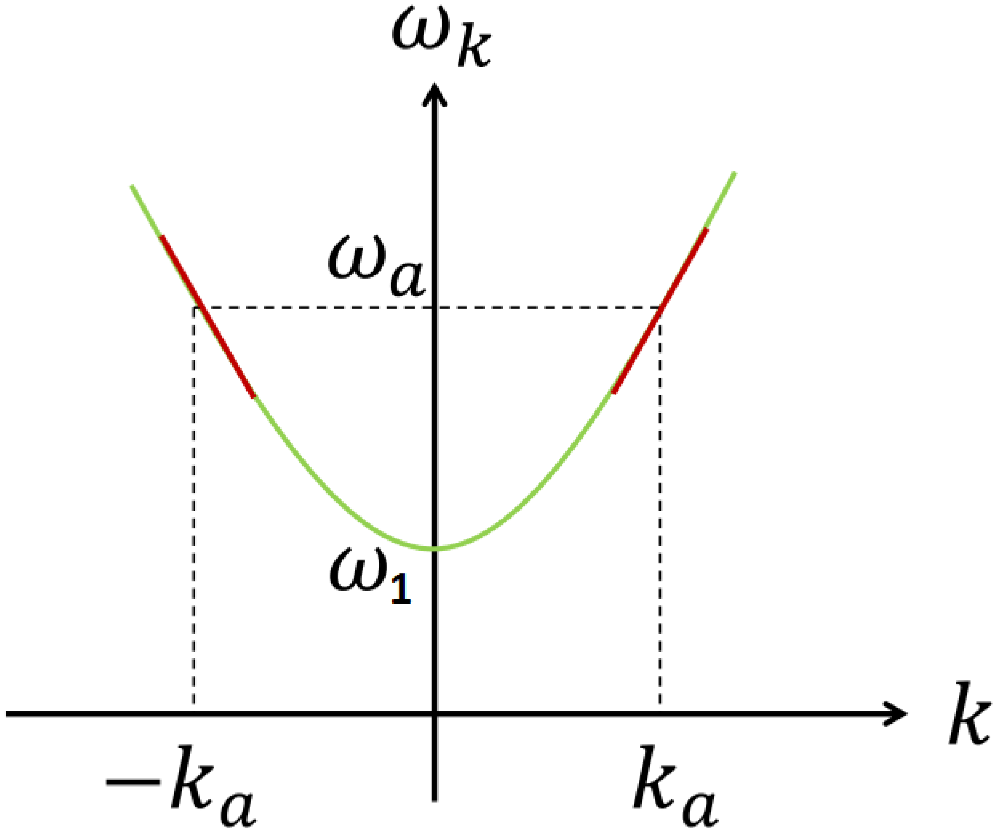

Рис. 2.2: Типичная дисперсия фотонов в волноводе. ω_1 - частота обрезки, ω_a - порядок частоты двухуровневых систем

Типичная дисперсия фотонов в волноводе изображена на рисунке 2.2, взятом из статьи [1]. Предполагая, что частота двухуровневых систем больше частоты обрезки ω_1, пренебрежем зависимостью групповой скорости от импульса: $d\omega/dk \to c$ и продолжим интеграл по частотам до бесконечности. Это позволяет найти локальные по времени уравнения (где $\Gamma_1 = \frac{g_1^2}{c}$, $\Gamma_2 = \frac{2g_2^2}{c}$;
Мы сравниваем теоретические результаты с экспериментальными в конце работы. Частоты двухуровневых систем в эксперименте имеют порядок 1 МГц. Расстояние между двухуровневыми системами - порядка 1 м, значит r/c имеет порядок 10^{-8} сек в то время как период колебаний двухуровневой системы имеет порядок 10^{-6} сек. Поэтому мы пренебрегаем временной задержкой, $r/c \to 0$):

$$\dot{\alpha}_1(t) = -\Gamma_1 \alpha_1(t), \tag{2.18}$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = -\Gamma_2 \alpha_2(t) - \sqrt{\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2}} e^{-i(\epsilon_1 - \epsilon_2)t} \alpha_1(t). \tag{2.19}$$

Эти уравнения легко решаются ($\Delta = \epsilon_1 - \epsilon_2$):

$$\boxed{\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\Gamma_1 t} e^{i\phi}, \quad \alpha_2(t) = \frac{\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{-t(\Gamma_1 + \Gamma_2 + i\Delta)} \left(e^{\Gamma_2 t} - e^{t(\Gamma_1 + i\Delta)} \right)}{2(\Gamma_1 - \Gamma_2 + i\Delta)} e^{i\phi}} \tag{2.20}$$

Электрическое поле выражается следующим образом

$$E(x,t) \propto 2Re\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int dk e^{-i\omega_k t} \beta_k(t) \right] \tag{2.21}$$

,что дает для волны, распространяющейся влево выражение:

$$E(x,\tau) \propto 2Re\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{c} e^{i\phi} \left[g_1 e^{-i\epsilon_1 \tau} \alpha_1(\tau) + g_2 e^{-i\epsilon_2 \tau} \alpha_2(\tau) \right] \right] \tag{2.22}$$

и окончательно:

$$\boxed{E(x,t) = \sin(\epsilon_1 t + \phi) 2\pi \sqrt{\frac{\Gamma_1}{c}} \left[e^{-\Gamma_1 t} + \frac{\Gamma_2}{2} \frac{\left(e^{-\Gamma_1 t} - e^{-\Gamma_2 t + i\Delta t} \right)}{(\Gamma_1 - \Gamma_2 + i\Delta)} \right]} \tag{2.23}$$

Если рассматривать лишь поле от второй двухуровневой системы, то поле равно

$$\boxed{E(x,t) = \sin(\epsilon_1 t + \phi) \pi \Gamma_2 \sqrt{\frac{\Gamma_1}{c}} \frac{\left(e^{-\Gamma_1 t} - e^{-\Gamma_2 t + i\Delta t} \right)}{(\Gamma_1 - \Gamma_2 + i\Delta)}} \tag{2.24}$$

Глава 3

Классический источник

Рассмотрим теперь аналог задачи главы 2 в классической постановке. Теперь двухуровневая система только одна и на нее падает модулированный сигнал. Система изображена на рисунке 3.1, взятом из статьи [3].
Случай когерентного возбуждающего импульса может быть описан (в марковском приближении) с помощью подхода эффективного гамильтониана, изложенного в [2]. Пусть в волноводе есть только одна двухуровневая система с частотой ω_0, на которую падает электрическое поле $f_0 e^{-\Gamma_1 t} e^{-i\omega_0 t} + f_0 e^{-\Gamma_1 t} e^{i\omega_0 t}$. Точный гамильтониан отличается от Гамильтониана (1) отсутствием гамильтониана первой двухуровневой системы и гамильтониана ее взаимодействия с полем.

$$H = H_{TLS1} + H_B + H_{I2}, \tag{3.1}$$

,где

$$H_{TLS1} = \omega_0 \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma} \tag{3.2}$$

$$H_B = \int_{k>0} (dk) \omega(k) \hat{a}_R^\dagger(k) \hat{a}_R(k) + \int_{k<0} (dk) \omega(k) \hat{a}_L^\dagger(k) \hat{a}_L(k) \tag{3.3}$$

$$H_{I2} = \int_{k>0} (dk) g_2 \left[e^{-ikr} \hat{a}_R^\dagger(k) \hat{\sigma}_{2-} + e^{ikr} \hat{a}_R(k) \hat{\sigma}_{2+}^\dagger \right] + \int_{k<0} (dk) g_2 \left[e^{-ikr} \hat{a}_L^\dagger(k) \hat{\sigma}_{2-} + e^{ikr} \hat{a}_L(k) \hat{\sigma}_{2+}^\dagger \right] \tag{3.4}$$

Согласно [2] эффективный гамильтониан этой системы:

$$H_{eff} = (\omega_0 - i\Gamma_2) \sigma^+ \sigma + f_0 e^{-\Gamma_1 t} e^{-i\omega_0 t} \sigma^+ + f_0 e^{-\Gamma_1 t} e^{i\omega_0 t} \sigma \tag{3.5}$$

Эта задача соответствует квантовой задаче (глава 2), где $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \omega_0$. Соответственно $\Delta = 0$.

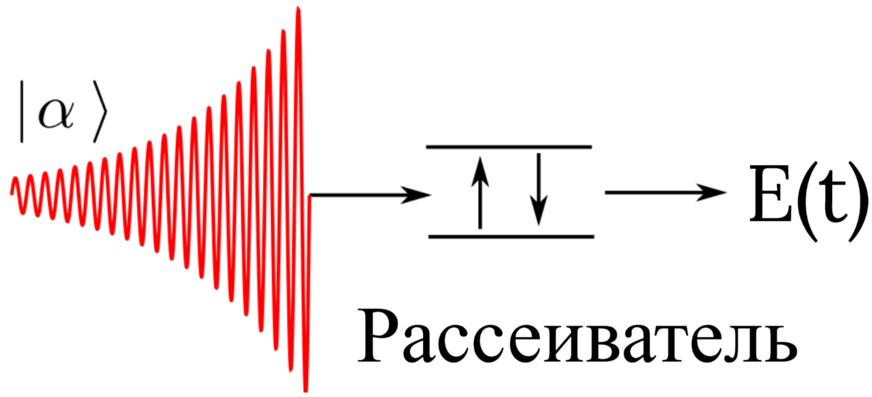

Рис. 3.1: Двухуровневая система рассеивает модулированный сигнал.

3.1 Эффективный пропагатор

Пусть b_ω - оператор уничтожения плоской волны с частотой ω. Нормировка: $[b_\omega, b^\dagger_{\omega'}] = \delta(\omega - \omega')$. Фурье преобразование оператора: $b_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} b_\omega$. Обозначим $|\bar{\tau}^{(m)}\rangle = b^\dagger_{\tau_1}...b^\dagger_{\tau_m}|0_B\rangle$, где $\bar{\tau}^{(m)} = \tau_1, ..., \tau_m$, $\tau_1 < ... < \tau_m$. Вычислим пропагатор: $\langle n, \tau^{(m)}|U_I(t,0)|\psi(t=0)\rangle$. Чтобы вычислить его необходимо найти эволюцию системы.
Волновая функция системы:

$$|\psi\rangle(t) = \psi_1(t)|1\rangle + \psi_2(t)|0\rangle \tag{3.6}$$

Где $|1\rangle$ это возбужденное состояние, а $|0\rangle$ основное состояние. Запишем уравнение Шредингера для Гамильтониана (24). Пусть $\psi'_1 = \psi_1 e^{i(\omega_0 - i\Gamma_2)t}$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\psi'_1 = -if_0 e^{(-\Gamma_1+\Gamma_2)t}\psi_2 \\ \dfrac{d}{dt}\psi_2 = -if_0 e^{(-\Gamma_1-\Gamma_2)t}\psi'_1 \end{cases} \tag{3.7}$$

Отсюда получаем уравнение на ψ_2

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi_2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2)\frac{d}{dt}\psi_2 + f_0^2 e^{-2\Gamma_1 t}\psi_2 = 0 \tag{3.8}$$

Решение:

$$\psi_2(t) = e^{-\alpha\Gamma_1 t}\left(C_1 J_\alpha\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right) + C_2 Y_\alpha\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right)\right) \tag{3.9}$$

Аналогично,

$$\psi_1'(t) = e^{-\alpha'\Gamma_1 t}\left(C_1' J_{\alpha'}\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right) + C_2' Y_{\alpha'}\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right)\right) \tag{3.10}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)$, $\alpha' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right)$, $x = \frac{f_0}{\Gamma_1}$, а $C1, C2, C1', C2'$ - произвольные константы. Пусть в момент времени $t = 0$ система находилась в основном состоянии: $\psi_1(0) = 0, \psi_2(0) = 1$. Тогда:

$$\frac{d\psi_1}{dt}(0) = -if_0, \frac{d\psi_2}{dt}(0) = 0.$$

$$\psi_2(0) = 1 \Rightarrow J_\alpha(x)C_1 + Y_\alpha(x)C_2 = 1 \tag{3.11}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt}(0) = 0 \Rightarrow xJ_\alpha'(x)C_1 + xY_\alpha'(x)C_2 = -\alpha \tag{3.12}$$

Здесь $J_n(x)$ - функция Бесселя первого рода, $Y_n(x)$ - второго рода.

3.2 Пропагатор для импульса произвольной силы

Здесь мы найдем точное решение для амплитуды состояния с единственным излученным фотоном и возбужденным состояние двухуровневой системы.

$$\psi_1(0) = 0, \frac{d\psi_1}{dt}(0) = -if_0 \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} C_1' J_{\alpha'}(x) + C_2' Y_{\alpha'}(x) = 0 \\ C_1' J_{\alpha'}'(x) + C_2' Y_{\alpha'}'(x) = i \end{cases} \tag{3.14}$$

$$C_1' = \frac{iY_{\alpha'}(x)}{J_{\alpha'}'(x)Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}'(x)} \tag{3.15}$$

$$C_2' = \frac{-iJ_{\alpha'}(x)}{J_{\alpha'}'(x)Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}'(x)} \tag{3.16}$$

$$\psi_1(t) = ie^{-i\omega_0 t}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t/2}\left(\frac{J_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1 t})Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1 t})}{J'_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y'_{\alpha'}(x)}\right) \tag{3.17}$$

$$\psi_2(0) = 1, \frac{d\psi_2}{dt}(0) = 0 \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} J_\alpha(x)C_1 + Y_\alpha(x)C_2 = 1 \\ xJ'_\alpha(x)C_1 + xY'_\alpha(x)C_2 = -\alpha \end{cases} \tag{3.19}$$

$$C_1 = \frac{xY'(x) + \alpha Y_\alpha(x)}{x(J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x)Y_\alpha(x))} \tag{3.20}$$

$$C_2 = \frac{-xJ'(x) - \alpha J_\alpha(x)}{x(J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x)Y_\alpha(x))} \tag{3.21}$$

$$\psi_2(t) = e^{-\alpha\Gamma_1 t}\frac{\left((xY'(x) + \alpha Y_\alpha(x))J_\alpha\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right) - (xJ'(x) + \alpha J_\alpha(x))Y_\alpha\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right)\right)}{x(J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x)Y_\alpha(x))} \tag{3.22}$$

3.3 Пропагатор для слабого импульса

Пусть внешнее влияние очень мало. То есть $f_0 \ll \Gamma_1$, $x \ll 1$

$$J_\alpha(x) \sim x^\alpha, Y_\alpha(x) \sim x^{-\alpha} \tag{3.23}$$

Это значит что $xJ'_\alpha(x) = \alpha J_\alpha(x)$, $xY'_\alpha(x) = -\alpha Y_\alpha(x)$

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= ie^{-i\omega_0 t}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t/2}\left(\frac{J_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1 t})Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1 t})}{J'_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y'_{\alpha'}(x)}\right) \approx \\ &\approx ie^{-i\omega_0 t}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t/2}\left(\frac{J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(x)e^{-\alpha'\Gamma_1 t} - J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(x)e^{\alpha'\Gamma_1 t}}{\frac{\alpha}{x}J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(x) + \frac{\alpha}{x}J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(x)}\right) = \\ &= \frac{if_0}{(\Gamma_1 - \Gamma_2)}(e^{-\Gamma_2 t} - e^{-\Gamma_1 t})e^{i\omega_0 t} \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\psi_2(t) = e^{-\alpha\Gamma_1 t}\frac{\left((xY'(x)+\alpha Y_\alpha(x))J_\alpha\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right) - (xJ'(x)+\alpha J_\alpha(x))Y_\alpha\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right)\right)}{x(J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x)Y_\alpha(x))} \approx$$
$$\approx e^{-\alpha\Gamma_1 t}\frac{\left((-\alpha Y(x)+\alpha Y_\alpha(x))J_\alpha(x)e^{-\alpha\Gamma_1 t} - (\alpha J(x)+\alpha J_\alpha(x))Y_\alpha(x)e^{\alpha\Gamma_1 t}\right)}{-\alpha J_\alpha(x)Y_\alpha(x) - \alpha J_\alpha(x)Y_\alpha(x))} \approx 1 \tag{3.25}$$

Возьмем формулу (116) из статьи по ссылке [2]:

$$\langle n, \tau^{(m)}|U_I(t,0)|\psi(t=0)\rangle = \langle n|U_{eff}(t,\tau_m)\prod_{q=1}^{m}\sqrt{\gamma}aU_{eff}(\tau_q,\tau_{q-1})|\psi_S(0)\rangle \tag{3.26}$$

Здесь $\gamma = 2\Gamma_2$.

$$\langle n, \tau^{(1)}|U_I(t,0)|\psi(t=0)\rangle = \sqrt{\gamma}\langle n|U_{eff}(t,\tau_1)aU_{eff}(\tau_1,0)|0\rangle =$$
$$= \sqrt{\gamma}\langle n|U_{eff}(t,\tau_1)a\left(|0\rangle - \frac{if_0}{\Gamma_1-\Gamma_2}\left(1-e^{-(\Gamma_1-\Gamma_2)\tau_1}\right)e^{-i(\omega_0-i\Gamma_2)\tau_1}|1\rangle\right) =$$
$$= -\frac{if_0}{\Gamma_1-\Gamma_2}\left(1-e^{-(\Gamma_1-\Gamma_2)\tau_1}\right)e^{-i(\omega_0-i\Gamma_2)\tau_1}\sqrt{\gamma}\langle n|U_{eff}(t,\tau_1)|0\rangle =$$
$$\frac{-if_0\left(1-e^{-(\Gamma_1-\Gamma_2)\tau_1}\right)}{\Gamma_1-\Gamma_2}e^{-i(\omega_0-i\Gamma_2)\tau_1}\sqrt{\gamma}\langle n|\left(|0\rangle - \frac{if_0}{\Gamma_1-\Gamma_2}\left(1-e^{-(\Gamma_1-\Gamma_2)(t-\tau_1)}\right)e^{-i(\omega_0-i\Gamma_2)(t-\tau_1)}|1\rangle\right) \tag{3.27}$$

Амплитуда состояния с излученным фотоном и двухуровневой системой в основном состоянии равна

$$\langle 0, \tau^{(1)}|U_I(t,0)|\psi(t=0)\rangle = -\frac{if_0}{\Gamma_1-\Gamma_2}\left(1-e^{-(\Gamma_1-\Gamma_2)\tau_1}\right)e^{-i(\omega_0-i\Gamma_2)\tau_1}\sqrt{2\Gamma_2} \tag{3.28}$$

А в случае возбужденного состояния амплитуда равна

$$\langle 1, \tau^{(1)}|U_I(t,0)|\psi(t=0)\rangle = -\left(\frac{if_0}{\Gamma_1-\Gamma_2}\right)^2\left(1-e^{-(\Gamma_1-\Gamma_2)\tau_1}\right)\left(1-e^{-(\Gamma_1-\Gamma_2)(t-\tau_1)}\right)e^{-i(\omega_0-i\Gamma_2)t}\sqrt{2\Gamma_2} \tag{3.29}$$

Согласно методу изложенному в [2] для нахождения картины рассеянного поля необходимо время t устремить к бесконечности, то есть рассмотреть волновую функцию системы через большое время после начала рассеяния. Амплитуда состояния с испущенным фотоном и возбужденной двухуровневой системой на бесконечности стремится к нулю. Найдем условие, при котором вероятность испускания одного фотона (обозначим как P_1) мала.

$$P_1 = \langle\phi_1 \mid \phi_1\rangle \ll 1 \tag{3.30}$$

, где ϕ_1 - однофотонная часть волновой функции.

$$| \phi_1\rangle = \int_0^{+\infty} d\tau_1 \langle 0, \tau^{(1)} \mid \psi(t \to +\infty)\rangle = \int_0^{+\infty} d\tau_1 \langle 0, \tau^{(1)} | U_I(t \to +\infty, 0) | \psi(t = 0)\rangle \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{+\infty} \mid \langle 0, \tau^{(1)} | U_I(t \to +\infty, 0) | \psi(t = 0)\rangle \mid^2 d\tau_1 = \\ &= \frac{2f_0^2 \Gamma_2}{(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2} \int_0^{+\infty} (e^{-\Gamma_2 \tau_1} - e^{-\Gamma_1 \tau_1})^2 d\tau_1 = \frac{f_0^2}{\Gamma_1(\Gamma_1 + \Gamma_2)} \end{aligned} \tag{3.32}$$

$P_1 \ll 1$, значит $\frac{f_0^2}{\Gamma_1(\Gamma_1+\Gamma_2)} \ll 1$. Условие будет выполняться, например в случае $\frac{f_0}{\Gamma_1} \ll 1$.

3.4 Сравнение точного пропагатора с приближенным

Сравним точную и приближенную зависимость волновой функции двухуровневой системы от времени. На рисунках 3.2-3.5 синим обозначено точное решение, а оранжевым приближенное. Точное решение для ψ_1:

$$\psi_{1,p}(t) = ie^{-i\omega_0 t} e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t/2} \left(\frac{J_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1 t}) Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x) Y_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1 t})}{J'_{\alpha'}(x) Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x) Y'_{\alpha'}(x)} \right) \tag{3.33}$$

Приближенное решение:

$$\psi_{1,a}(t) = -\frac{if_0}{\Gamma_1 - \Gamma_2}(e^{-\Gamma_2 t} - e^{-\Gamma_1 t}) e^{-i\omega_0 t} \tag{3.34}$$

Точное решение для ψ_2:

$$\psi_{2,p} = e^{-\alpha\Gamma_1 t} \frac{\left((xY'(x) + \alpha Y_\alpha(x)) J_\alpha \left(xe^{-\Gamma_1 t}\right) - (xJ'(x) + \alpha J_\alpha(x)) Y_\alpha \left(xe^{-\Gamma_1 t}\right)\right)}{x(J_\alpha(x) Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x) Y_\alpha(x))} \tag{3.35}$$

Приближенное решение:

$$\psi_{2,a}(t) = 1 \tag{3.36}$$

3.5 Оценка поля в резонаторе

В этом разделе мы найдем электрическое поле от единичных фотонов

$$\hat{E}(x) = \int (\hat{a} + \hat{a}^+) e^{ikx} dk \tag{3.37}$$

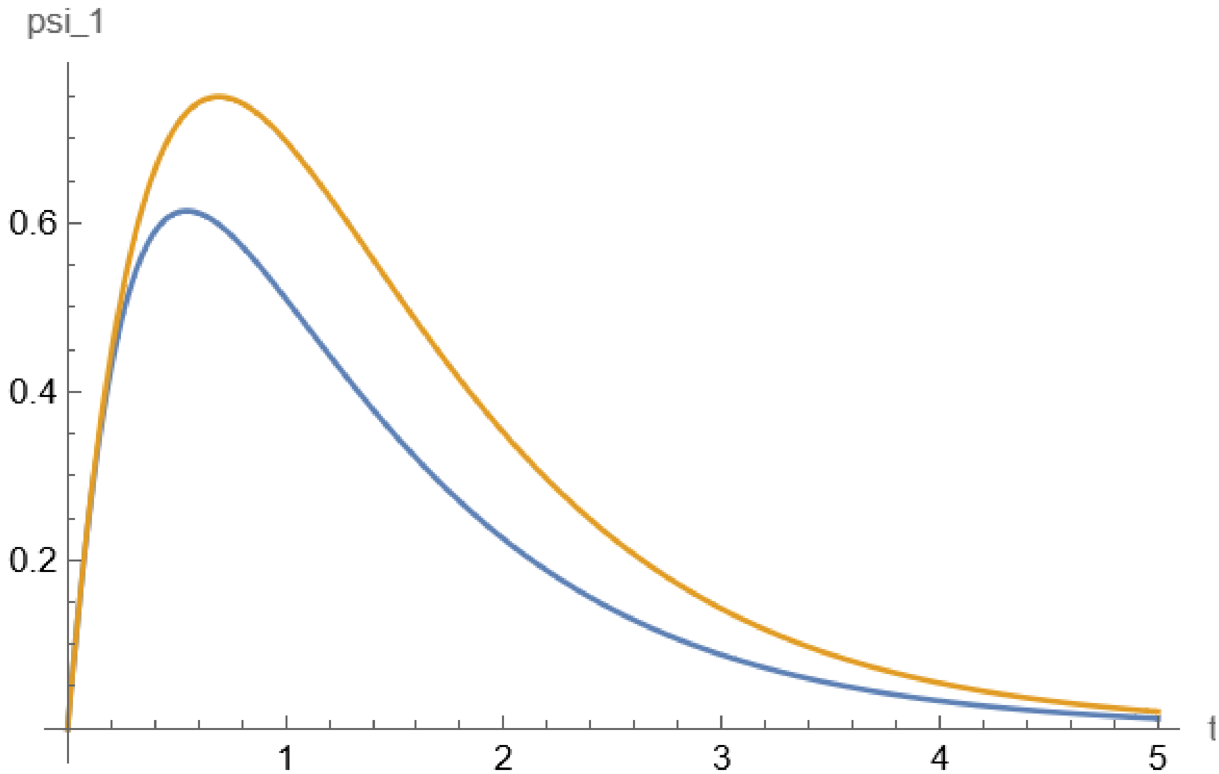

Рис. 3.2: $\psi_1(t).\Gamma_1 = 2, \Gamma_2 = 1, f_0 = 3.$

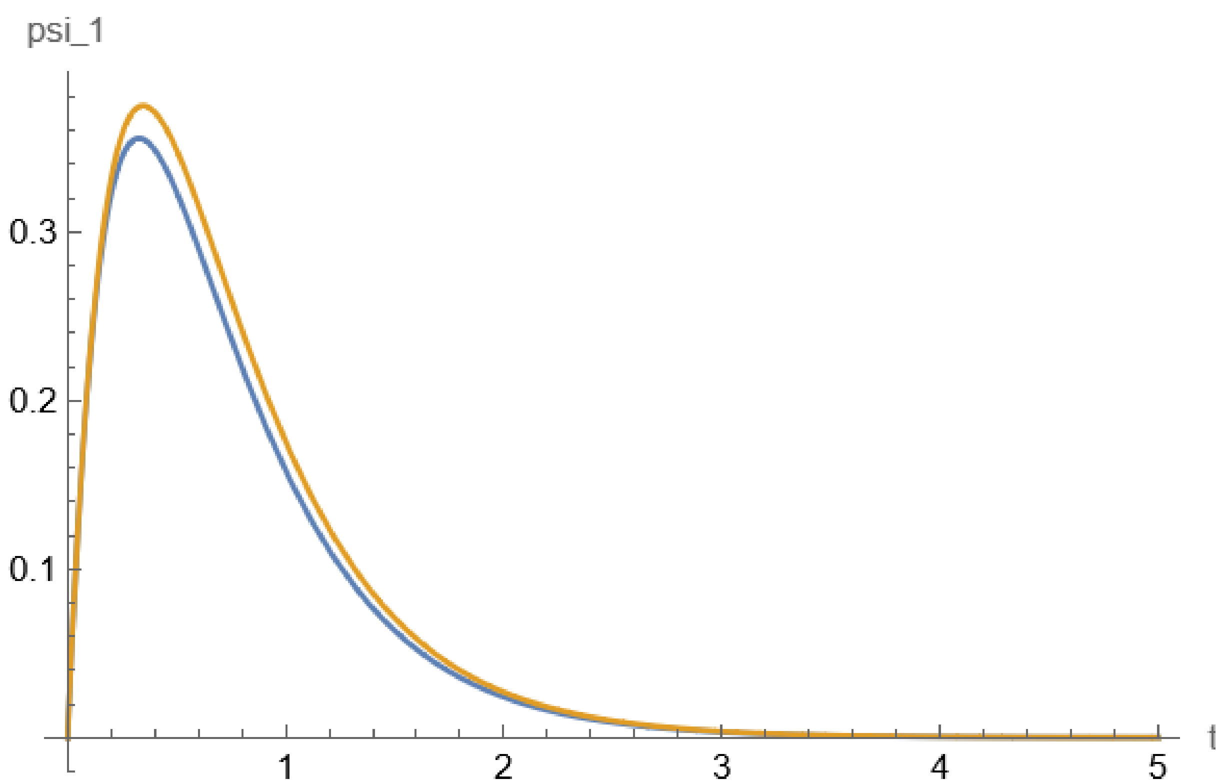

Рис. 3.3: $\psi_1(t).\Gamma_1 = 4, \Gamma_2 = 2, f_0 = 3.$

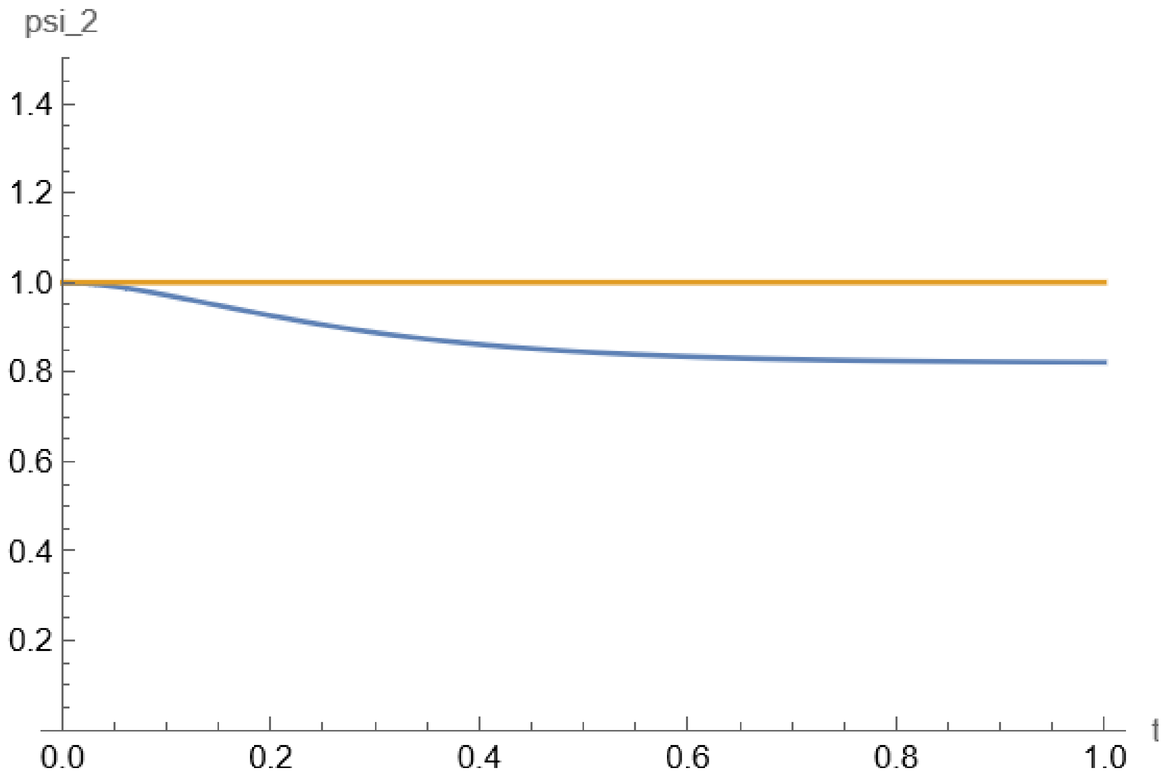

Рис. 3.4: $\psi_2(t).\Gamma_1 = 4, \Gamma_2 = 4, f_0 = 3.$

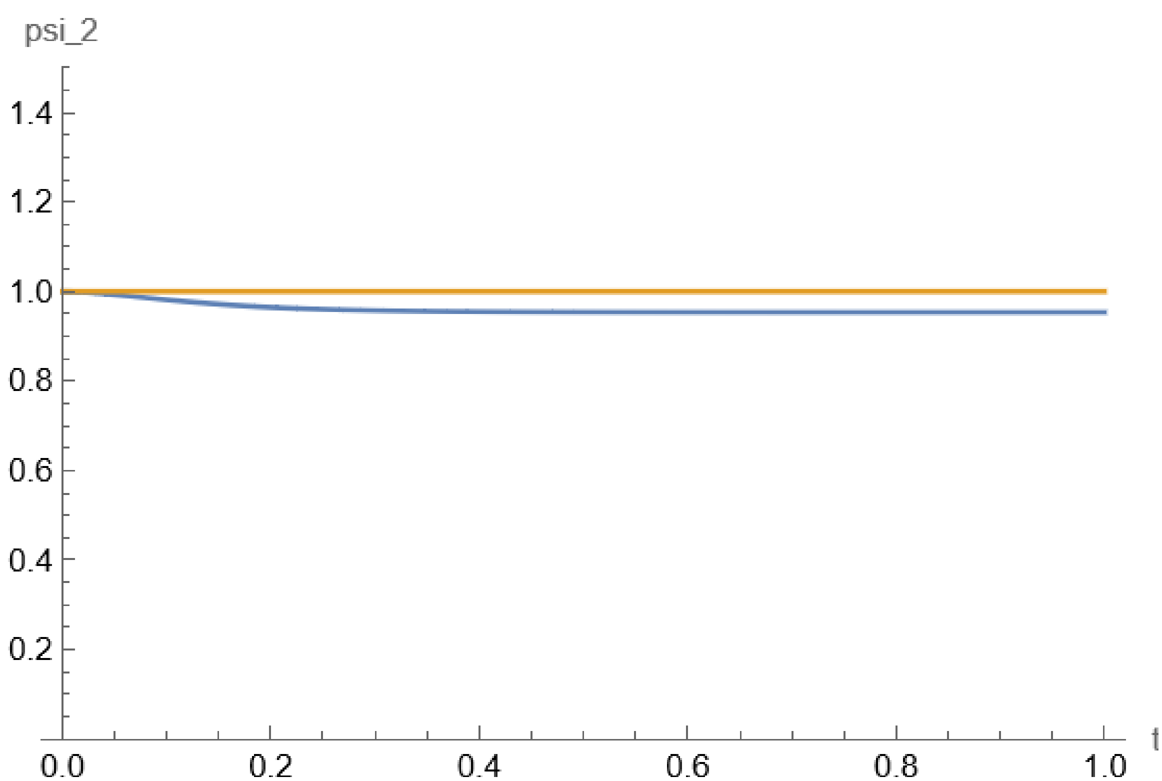

Рис. 3.5: $\psi_2(t).\Gamma_1 = 8, \Gamma_2 = 4, f_0 = 3.$

$$\hat{E}(x=0)=\int(\hat{a}+\hat{a}^{+})dk \tag{3.38}$$

Здесь в волновой функции мы учитываем только единичные фотоны.

$$\mid\psi\rangle=\mid 0\rangle+\int\mid\tau_1\rangle f(\tau_1)d\tau_1 \tag{3.39}$$

$$\mid\tau_1\rangle=\hat{b}_{\tau_1}\mid 0\rangle=\int\frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega(\tau_1-t)}\mid\omega\rangle \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}&\int\hat{a}_k dk\int\mid\tau_1\rangle f(\tau_1)d\tau_1=\int\hat{a}_k dk\int\int\frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega(\tau_1-t)}\mid\omega\rangle f(\tau_1)d\tau_1=\\&=\frac{\sqrt{2\pi}}{c}\int\int d^{i\omega(\tau_1-t)}f(\tau_1)d\tau_1\mid 0\rangle=\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{c}}f(t)\mid 0\rangle\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\langle\hat{E}\rangle=\langle\psi\mid\hat{E}\mid\psi\rangle=\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{c}}[f(t)+f^{*}(t)] \tag{3.42}$$

, где

$$f(\tau_1)=\langle 0,\tau^{(1)}|U_I(t\to+\infty,0)|\psi(t=0)\rangle=\frac{-if_0\sqrt{2\Gamma_2}}{\Gamma_1-\Gamma_2}(e^{-\Gamma_2 t}-e^{-\Gamma_1 t})e^{-i\omega_0 t} \tag{3.43}$$

$$\langle\hat{E}\rangle=\sin(\omega_0 t+\phi)\frac{8\pi^{3/2}f_0\sqrt{\Gamma_2}}{\sqrt{c}}\frac{(e^{-\Gamma_2 t}-e^{-\Gamma_1 t})}{\Gamma_1-\Gamma_2} \tag{3.44}$$

Глава 4

Сравнение квантового и классического случаев

4.1 Слабое поле

Пусть $f_0/\Gamma_1 \ll 1$, то есть поле слабое. Найдем условия равенства поля в квантовом и классическом случаях. Для этого приравняем формулы (24) и (68).

$$\sin(\epsilon_1 t + \phi)\pi\Gamma_2\sqrt{\frac{\Gamma_1}{c}}\frac{\left(-e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t + i\Delta t}\right)}{(\Gamma_1 - \Gamma_2 + i\Delta)} = \sin(\omega_0 t + \phi)\frac{8\pi^{3/2} f_0\sqrt{\Gamma_2}}{\sqrt{c}}\frac{(e^{-\Gamma_2 t} - e^{-\Gamma_1 t})}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \tag{4.1}$$

Пусть теперь $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \omega_0, \Delta = 0$, тогда

$$f_0 = \frac{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}{8\sqrt{\pi}} \tag{4.2}$$

Поле должно быть слабым, значит

$$\frac{f_0}{\Gamma_1} \ll 1 \Rightarrow \Gamma_1 \gg \Gamma_2 \tag{4.3}$$

Тем не менее это условие избыточно. В следующем разделе будет показано, что квантовое решение очень близко к классическому при более слабом условии: $\Gamma_1 > \Gamma_2$.

4.2 Произвольное поле

Найдем точное поле в классическом случае.

$$\begin{aligned}&\langle n,\tau^{(1)}|U_I(t,0)|\psi(t=0)\rangle = \sqrt{\gamma}\langle n|U_{eff}(t,\tau_1)aU_{eff}(\tau_1,0)|0\rangle = \\&= \sqrt{\gamma}\langle n|U_{eff}(t,\tau_1)a\left(\psi_2(\tau_1)|0\rangle + \psi_1(\tau_1)|1\rangle\right) = \\&= \psi_1(\tau_1)\sqrt{\gamma}\langle n|U_{eff}(t,\tau_1)|0\rangle = \\&= \psi_1(\tau_1)\sqrt{\gamma}\langle n|(\psi_2(t-\tau_1)|0\rangle + \psi_1(t-\tau_1)|1\rangle)\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\langle 1,\tau^{(1)}|U_I(t\to\infty,0)|\psi(t=0)\rangle = 0 \tag{4.5}$$

, так как $\psi_1(t\to\infty)=0$.

$$\langle 0,\tau^{(1)}|U_I(t\to\infty,0)|\psi(t=0)\rangle = \sqrt{\gamma}\psi_1(\tau_1)\psi_2(t\to\infty) \tag{4.6}$$

Перепишем точные значения ψ_1 и ψ_2 из раздела 3.2.

$$\psi_1(t) = ie^{-i\omega_0 t}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t/2}\left(\frac{J_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1 t})Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1 t})}{J'_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y'_{\alpha'}(x)}\right) \tag{4.7}$$

$$\psi_2(t) = e^{-\alpha\Gamma_1 t}\frac{\left((xY'_\alpha(x)+\alpha Y_\alpha(x))J_\alpha\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right) - (xJ'_\alpha(x)+\alpha J_\alpha(x))Y_\alpha\left(xe^{-\Gamma_1 t}\right)\right)}{x(J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x)Y_\alpha(x))} \tag{4.8}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&E = \sin(\omega_0\tau_1)\frac{2(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{c}}\sqrt{2\Gamma_2}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)\tau_1/2}\left(\frac{J_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1\tau_1})Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(xe^{-\Gamma_1\tau_1})}{J'_{\alpha'}(x)Y_{\alpha'}(x) - J_{\alpha'}(x)Y'_{\alpha'}(x)}\right)\cdot\frac{\Gamma(\alpha)2^\alpha}{\pi x^\alpha}\cdot\\&\cdot\frac{xJ'_\alpha(x)+\alpha J_\alpha(x)}{x(J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x)Y_\alpha(x))}\end{aligned} \tag{4.9}$$

, где $\Gamma(x)$ - гамма функция. В то же время из главы 1 известно значение поля в квантовом случае:

$$E(x,t) = \sin(\omega_0 t)\pi\Gamma_2\sqrt{\frac{\Gamma_1}{c}}\frac{\left(e^{-\Gamma_1 t} - e^{-\Gamma_2 t}\right)}{(\Gamma_1-\Gamma_2)} \tag{4.10}$$

Сравним точное решение классического случая с точным решением квантового при условии 3.2 с помощью графиков. На графиках 4.1 и 4.2 $\Gamma_1 = 1.1, \Gamma_2 = 1$

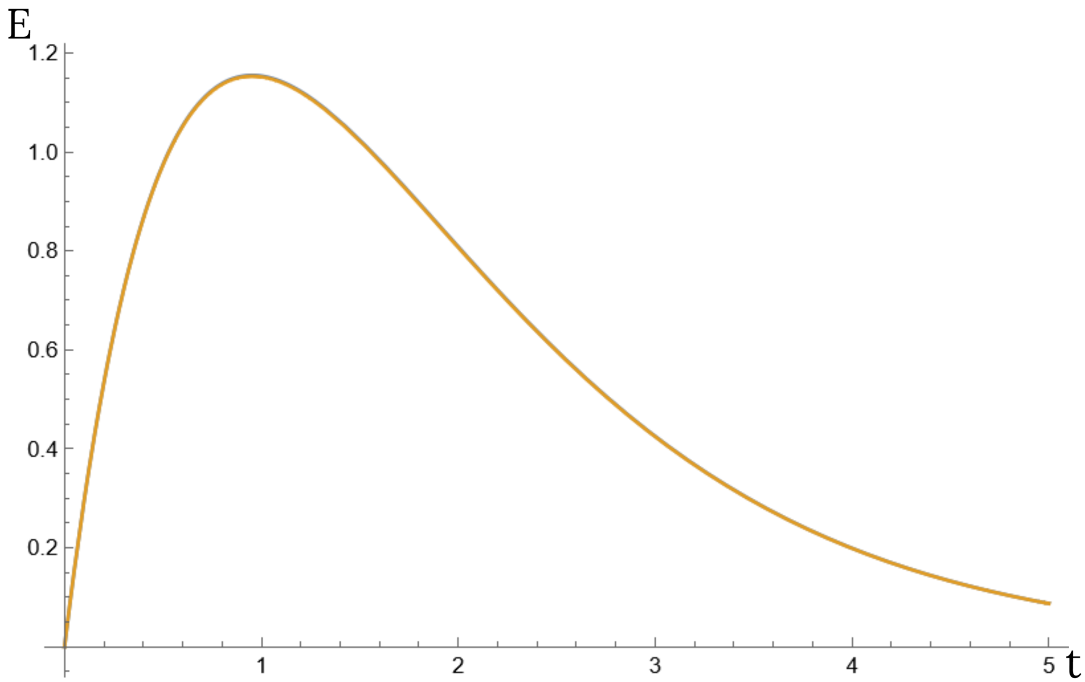

Рис. 4.1: Зависимость $E(t) \cdot \sqrt{c}$ для квантового и классического случаев. Видно, что графики почти неразличимы. $\Gamma_1 = 1.1, \Gamma_2 = 1, f_0 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1.1}{\pi}}$

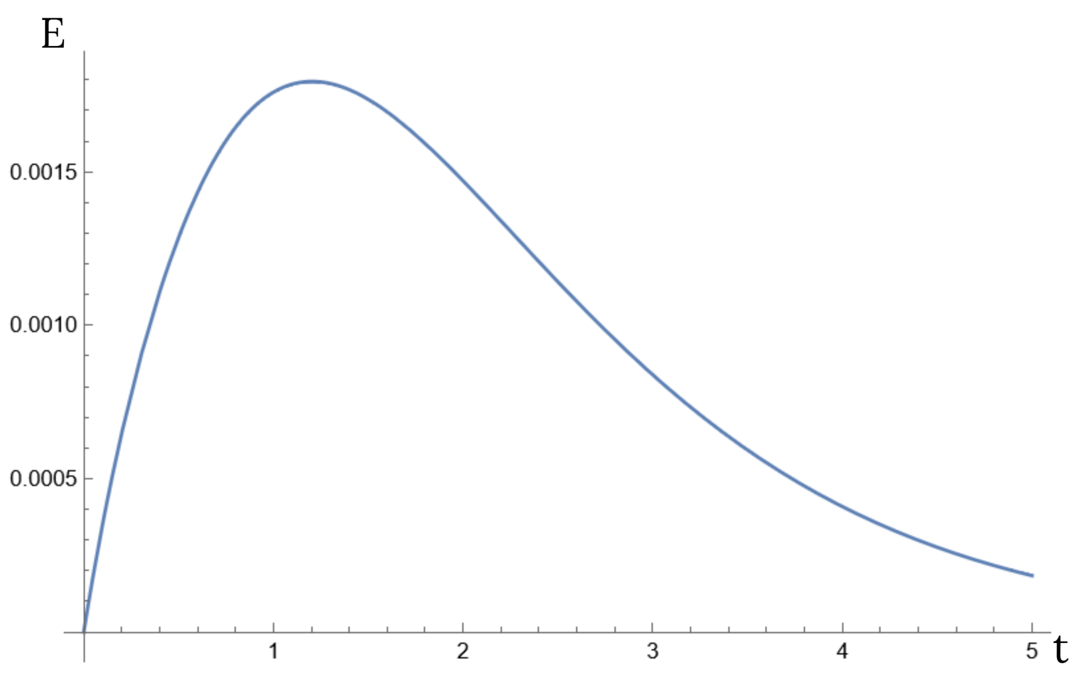

Рис. 4.2: Квантовое решение минус классическое

и соответственно $f_0 = \sqrt{\frac{1.1}{\pi}}\frac{1}{8}, \Gamma_1$ не много больше Γ_2. По графикам видно, что несмотря на то что условие 3.3 не выполняется, классическое и квантовое решения крайне близки. Эти решения почти равны, если $f_0 = \frac{\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}}{8\sqrt{\pi}}$ и функции Бесселя можно заменить на степенные функции согласно асимптотике при малых параметрах $J_\alpha(x) \sim x^\alpha, Y_\alpha(x) \sim x^{-\alpha}$. Если степень функции Бесселя (α) положительна, то параметр этой функции должен быть мал по сравнению с $\sqrt{1+\alpha}$. То есть

$$xe^{-\Gamma_1 t} \ll \sqrt{1 + (1 - \Gamma_2/\Gamma_1)/2} \tag{4.11}$$

Равенство должно выполняться при всех положительных временах, значит должно выполняться условие:

$$\sqrt{\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}} \frac{1}{8\pi} \ll \sqrt{3/2 - \Gamma_2/(2\Gamma_1)} \tag{4.12}$$

Обозначим $y = \sqrt{\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}}$.

$$\frac{y}{8\sqrt{\pi}} \ll \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{y^2}{2}} \tag{4.13}$$

При этом $0 < y < 1$. Как видно из графика 4.3 это условие можно считать выполняющимся всегда. Левая часть уравнения 3.13 меньше правой в $8\sqrt{\pi} \approx 14$ раз в худшем случае.

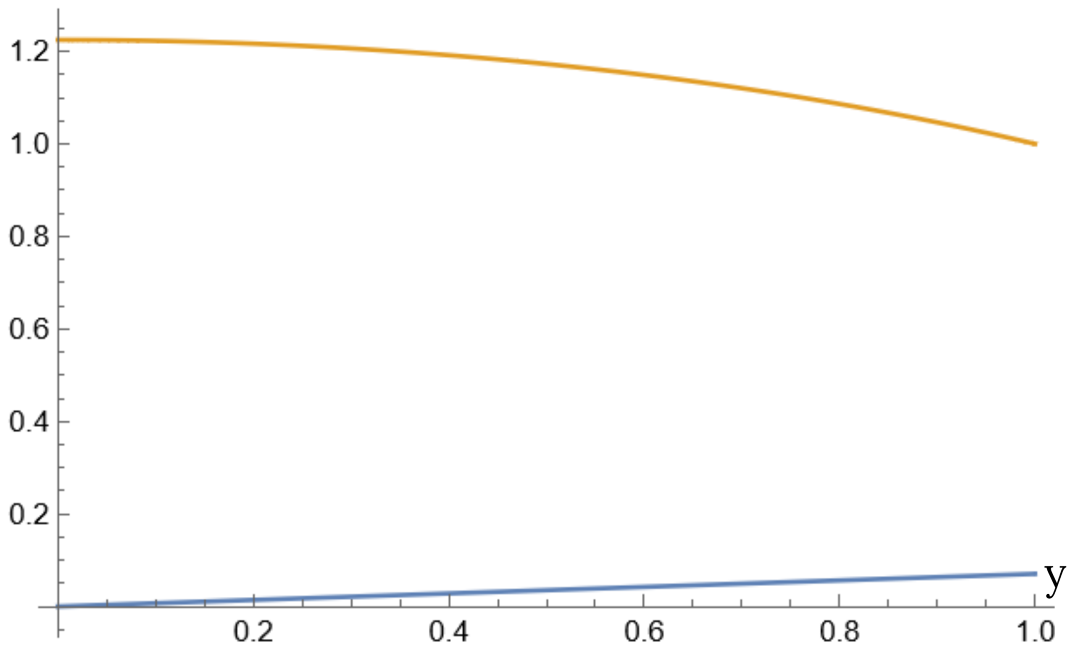

Рис. 4.3: синий график - $y/(8\sqrt{\pi})$, оранжевый график - $\sqrt{3/2 - y^2/2}$

Глава 5

Сравнение с экспериментальными данными

На рисунках 5.1-5.4 изображена временная зависимость измеряемого электрического поля в эксперименте (красные точки) и теоретический результат для поля, производимого при однофотонном рассеянии (черная линия). Время измеряется в наносекундах. При x меньше 0.3 шум сильно портит экспериментальную картину, поэтому на графиках x не берется меньше чем 0.3. Параметры системы определены в другом эксперименте и равны $\Gamma_1 \approx 3.34\mathrm{MHz}$ (показатель затухающей экспоненты у поля) и $\Gamma_2 \approx 1.5\mathrm{MHz}$ (показатель затухающей экспоненты для двухуровневой системы). Два изображения ниже отвечают различным значениям силы импульса, определяемой параметром $x = f_0/\Gamma$ (в эксперименте электрическое поле измеряется в произвольных единицах). Основной вывод этого сравнения заключается в том, что однофотонное приближение (которое также нелинейно по x!) позволяет понять все основные качественные особенности экспериментальных данных. При малых x эксперимент также совпадает количественно. Также важно отметить, что при малых, но конечных x нелинейный однофотонный результат хорошо описывает отклонение формы пика от предельного случая $x \to 0$. Качественное сравнение при $x \gg 1$ требует дальнейшего развития теории (за счет учета многофотонных состояний в волноводе).

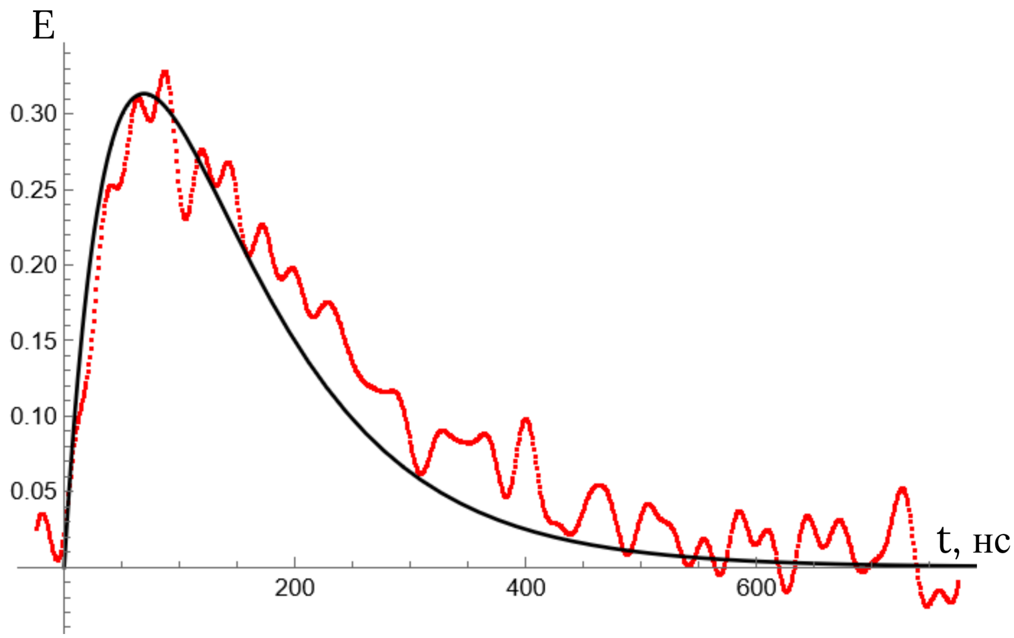

Рис. 5.1: Однофотонная теория (черный цвет) и эксперимент (красный цвет) при x=0.30

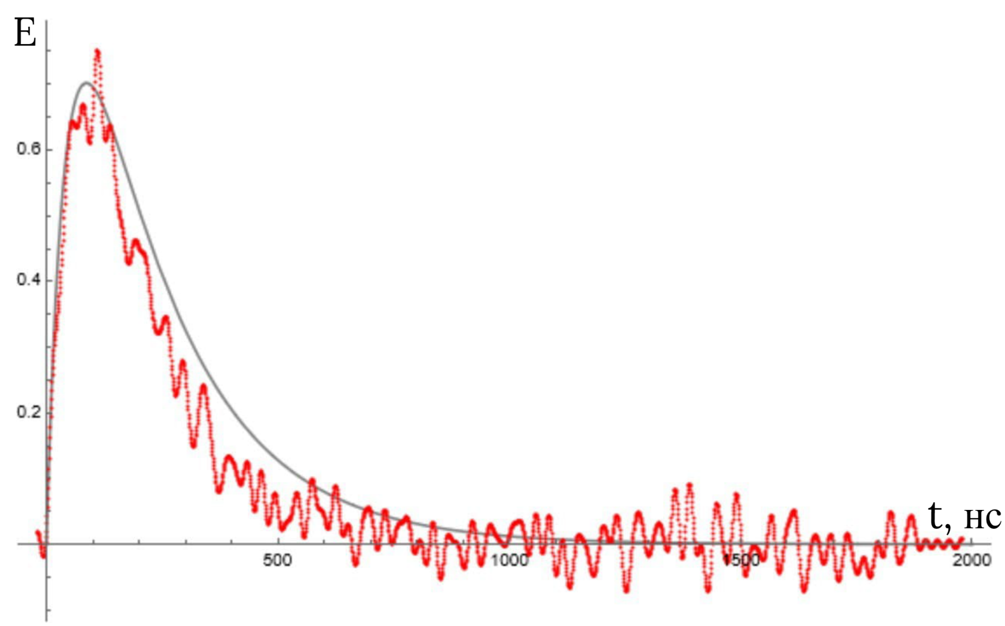

Рис. 5.2: Однофотонная теория (черный цвет) и эксперимент (красный цвет) при x=0.72

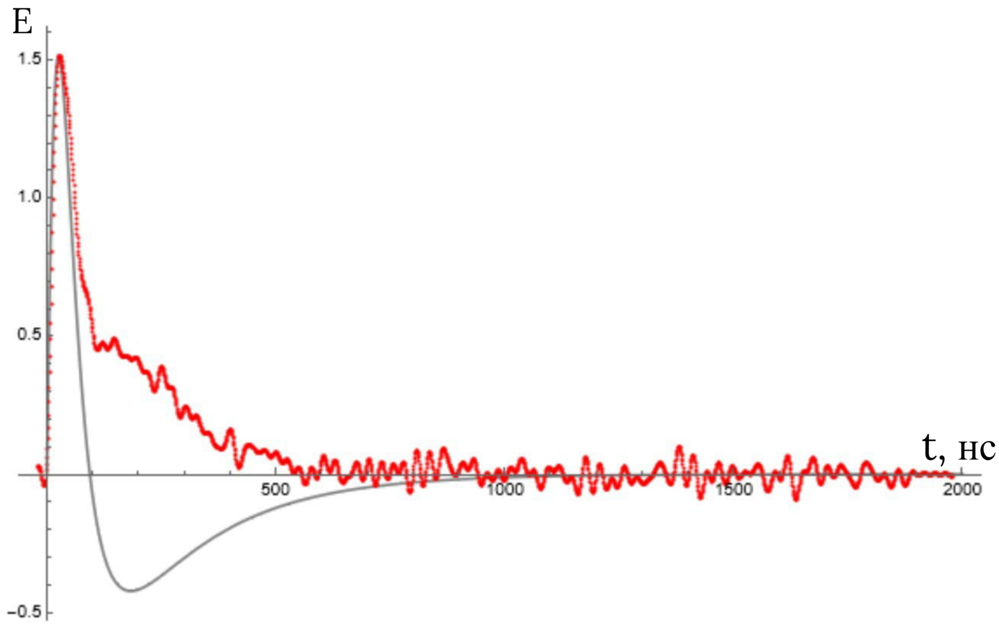

Рис. 5.3: Однофотонная теория (черный цвет) и эксперимент (красный цвет) при x=3.6

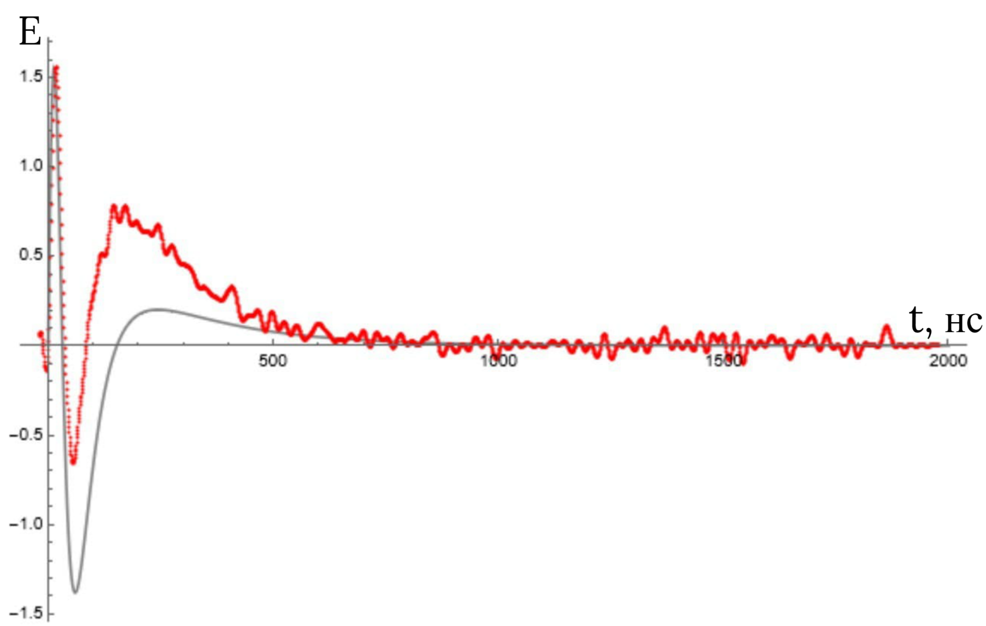

Рис. 5.4: Однофотонная теория (черный цвет) и эксперимент (красный цвет) при x=6.5

Глава 6

Заключение

В этой работе мы рассчитали рассеяние электромагнитного импульса на двухуровневой системе, находяшейся в волноводе. Было рассмотрено два случая: квантовый и классический. В первом случае было найдено однофотонное рассеяние. Во втором случае было найдено точное и приближенное рассеяния, а также проведено их сравнение. Далее мы сравнили оба случая и нашли условия, при которых картины рассеяний можно считать одинаковыми. В конце работы было проведено сравнение с неопубликованным результатами лаборатории О. Астафьева. Теоретический результат схож с экспериментальным, но, к сожалению, точность экспериментальных данных не позволяет провести полноценное сравнение.

Глава 7

Список литературы

[1] Z. Liao, X. Zeng, H. Nha and M. S. Zubairy, Physica Scripta 91, 063004 (2016)
[2] K. A. Fisher, R. Trivedi, V. Ramasesh, I. Siddiqi and J. Vučković, Quantum 2, 69 (2018)
[3] S. Gunin, A. Vasenin, A. Dmitriev, K. Tikhonov, G. Fedorov and O. Astafiev, 'Scaterring of the coherent and single-photon fields onto a single artificial atom', unpublished