

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Влияние неоднородностей на критический ток
в сверхпроводниках»

(Дипломная работа бакалавра)

студента 824 группы
Зуев О.Б.
научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. Скворцов М.А.

Черноголовка 2022

Аннотация

В дипломной работе мы рассматриваем сверхпроводник с неоднородностью, вызванной флуктуацией константы α в теории Гинзбурга-Ландау. В рамках теории возмущений найдена зависимость параметра порядка от вектор-потенциала и найден сдвиг критической температуры. Также найден ток в зависимости от вектор-потенциала, что является основным результатом проделанной работы.

Оглавление

| | |
|---|----|
| Оглавление | 2 |
| 1 Введение | 3 |
| 2 Описание неоднородного сверхпроводника вблизи T_c | 6 |
| 2.1 Уравнения Гинзбурга-Ландау | 6 |
| 2.2 Сверхпроводник «с локально флуктуирующей T_c » | 8 |
| 2.3 Теория возмущений | 10 |
| 2.4 Флуктуационный пропагатор на фоне однородного состояния | 11 |
| 2.5 Сдвиг критической температуры | 12 |
| 2.6 Собственно-энергетическая часть флуктуационного пропагатора | 13 |
| 3 Вычисление среднего тока | 14 |
| 3.1 Зависимость среднего параметра порядка от вектор-потенциала | 14 |
| 3.2 Вызванная неоднородностями поправка к среднему току | 16 |
| 4 Заключение | 19 |
| 5 Приложения | 20 |
| А Вывод собственно-энергетической части методом реплик | 20 |
| 6 Список литературы | 23 |

Глава 1

Введение

Одной из областей практического применения сверхпроводимости, возникшей в последние десятилетия, является детектирование микроволнового излучения [1, 2]. Метод детектирования основан на том, что поглощение фотона с достаточно большой энергией может локально разрушить сверхпроводящее состояние. В результате сверхпроводник приобретет конечное сопротивление, регистрация которого позволяет создать сверхчувствительные детекторы одиночных фотонов.

Для реализации данной идеи берется сверхпроводящий провод, по которому пропускают сверхтекущий ток, близкий к критическому. От близости к критическому току зависит барьер, который нужно преодолеть для разрушения сверхпроводящего состояния, а следовательно, и энергия детектируемого фотона. На качественном уровне, довольно сложная кинетика электронной и фононной подсистем при попадании высокоэнергетичного фотона может быть описана посредством увеличения температуры в области «горячего пятна». Если эта температура становится выше критической температуры при заданном токе, данный участок становится нормальным, вызывая импульс напряжения, что и является измеряемым сигналом. Схематично процесс развития «горячего пятна» изображен на Рис. 1.1. В реальных детекторах после перехода части сверхпроводящего провода в нормальное состояние ток перераспределяется по шунтирующему пути с малым, но конечным сопротивлением, что приводит к быстрому охлаждению провода и возврату к исходному полностью сверхпроводящему состоянию. Таков принцип работы сверхпроводникового фотодетектора.

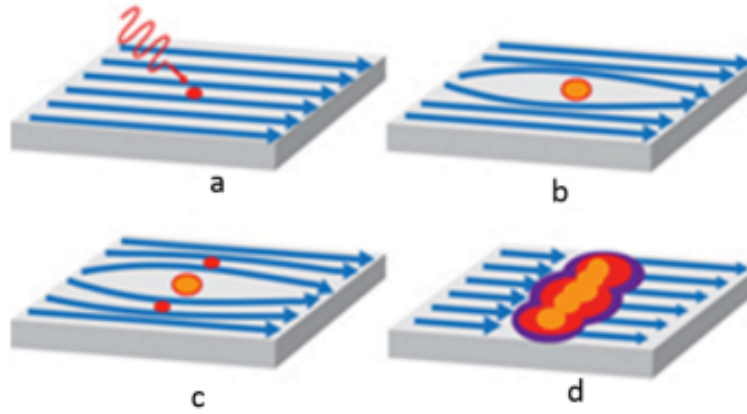


Рис. 1.1: Принцип работы сверхпроводящего детектора: возникновение «горячего пятна» и переход участка провода со сверхтоком в нормальное состояние.

Технологическим требованием к сверхпроводящим материалам для детекторов микроволнового излучения является большая кинетическая индуктивность, т.е. низкая сверхтекучая плотность. Поэтому используемые сверхпроводники являются не просто грязными (параметр $T_c\tau/\hbar \ll 1$), но сильно грязными, находящимися в окрестности порога локализации (параметр $E_F\tau/\hbar$ приближается к 1) [3]. Для таких достаточно сильно неупорядоченных материалов существенным становится неоднородность сверхпроводящего состояния. Так, на Рис. 1.2 цветом показана зависимость энергетической щели в TiN от координаты, измеренная с помощью сканирующего туннельного микроскопа [4].

Спонтанная неоднородность сверхпроводящих свойств приводит к тому, что барьер для локального разрушения сверхтокового состояния оказывается разным в разных точках образца. Как следствие, размывается энергетический порог детектора: фотон с заданной энергией может вызвать отсчет, поглотившись с одной части провода, и не вызвать, поглотившись в другой. Данное обстоятельство ухудшает характеристики прибора.

К размытию барьера детектирования могут приводить и другие процессы, не связанные с неоднородностью материала, такие как флуктуации фактора Фано (доли энергии, оставшейся в электронной подсистеме после первой стадии поглощения фотона) [5], локальные флуктуации температуры [6], краевые эффекты [7].

Попытки описать влияние пространственной неоднородности на работу сверхпроводящих детекторов были предприняты в работе [8], где использовалась простая и довольно

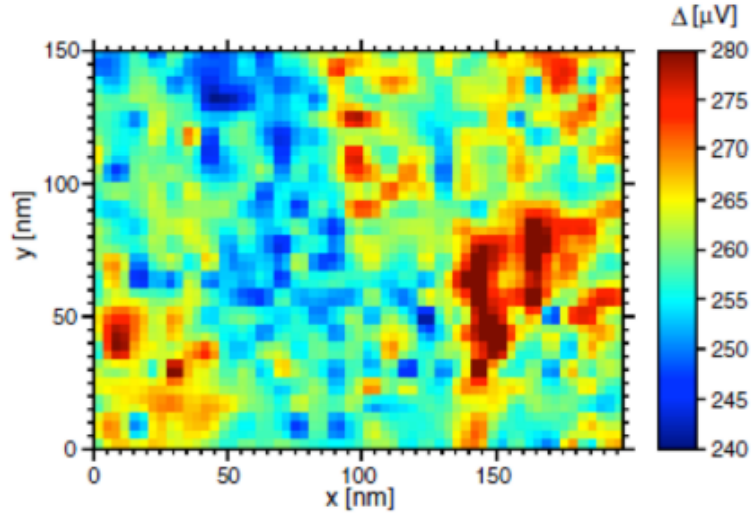


Рис. 1.2: Томография энергетической щели сверхпроводника TiN, измеренная с помощью сканирующего туннельного микроскопа (из работы [4]).

искусственная модель неоднородности. Микроскопического подхода к данной задаче нам не известно.

В данной работе мы преследуем цель описать влияние неоднородности на протекание сверхтекучего тока. Мы будем работать вблизи критической температуры T_c и использовать функционал Гинзбурга-Ландау. Неоднородность вводится как замороженные гауссовы флуктуации локальной температуры перехода (коэффициент α , обращающийся в нуль при критической температуре). К этой модели сводятся разные полупеноменологические модели неоднородного сверхпроводящего состояния [9]. Для случая мезоскопических флуктуаций она была выведена микроскопически в работе [10].

Глава 2

Описание неоднородного сверхпроводника вблизи T_c

2.1 Уравнения Гинзбурга-Ландау

Параметр порядка в сверхпроводниках вблизи критической температуры T_c описывается теорией Гинзбурга-Ландау. Свободная энергия сверхпроводника записывается следующим образом:

$$F = \int d\mathbf{r} \left(\alpha |\Delta|^2 + \frac{\beta}{2} |\Delta|^4 + \gamma \left| \left(\nabla - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta \right|^2 \right) \quad (2.1)$$

Значения коэффициентов α , β , γ определяются степенью беспорядка, характеризуемой параметром $T_c \tau / \hbar$. Нас будет интересовать грязный предел $T_c \tau / \hbar \ll 1$, когда на масштабе длины когерентности движение электронов в сверхпроводнике имеет диффузионный характер за счёт рассеяния на примесях. В этом пределе известны значения констант Гинзбурга-Ландау [11]: $\alpha = \nu(T_c - T)/T_c$, $\beta = \nu 7 \zeta(3) / 8 T_c^2 \pi^2$, $\gamma = \nu \pi D \hbar / 8 T_c$, где D — коэффициент диффузии. Сравнение квадратичных членов даёт выражение для корреляционной длины сверхпроводника: $\xi = \sqrt{\gamma / \alpha} = \sqrt{\pi D \hbar / (T_c - T)}$.

Плотность сверхтекущего тока вычисляется, как вариационная производная свободной энергии по вектор-потенциалу:

$$\mathbf{j} = \gamma \frac{4e}{\hbar} \left(\frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} |\Delta|^2 - \frac{\Delta \nabla \Delta^* - \Delta^* \nabla \Delta}{2i} \right) \quad (2.2)$$

Подставляя $\Delta = |\Delta|e^{i\phi}$ в формулу (2.2), получаем явное выражение через модуль и фазу параметра порядка:

$$\mathbf{j} = \gamma \frac{4e}{\hbar} |\Delta|^2 \left(\frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} - \nabla \phi \right) \quad (2.3)$$

Векторный-потенциал в свободной энергии (2.1) связан с магнитным полем посредством $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Ниже мы предполагаем, что внешнего магнитного поля нет. А также мы пренебрегаем индуцированным полем сверхпроводника, так как мы имеем дело с не очень толстыми плёнками, а как известно, индуцированное поле сверхпроводника прямо пропорционально толщине плёнки. В таких условиях роль \mathbf{A} сводится к чистой калибровке.

Для начала, рассмотрим сверхпроводник *с не зависящими от координат параметрами* α, β, γ и опишем состояние с однородной плотностью тока. Тогда модуль параметра порядка постоянен, лишь есть зависимость фазы параметра от координат. Скорость накрутки фазы определяется калибровкой. Есть два основных варианта выбора калибровки. Первый вариант — линейная накрутка фазы: $\phi(x) = \Phi x/L$, где $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ — разность фаз на краях сверхпроводника, при этом вектор-потенциал мы кладём равным нулю. Второй вариант — разность фаз на краях сверхпроводника положим константой (для простоты нулём), а накрутка фазы будет определяться вектор-потенциалом: $\Delta \rightarrow \Delta e^{i\mathbf{A}\mathbf{r}}$. В соответствии с формулой (2.3) две эти калибровки эквивалентны, и в данной работе мы выбираем вторую с вектор-потенциалом.

В этой работе примем $\frac{2e}{\hbar c} = 1$ для простоты формул. Кроме того, чтобы не писать каждый раз лишний множитель, будем измерять ток в единицах $2c\gamma$.

С учётом сказанного уравнения Гинзбурга-Ландау запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} -\gamma(\nabla + i\mathbf{A})^2 \Delta - \alpha\Delta + \beta|\Delta|^2 \Delta = 0 \\ -\gamma(\nabla - i\mathbf{A})^2 \Delta^* - \alpha\Delta^* + \beta|\Delta|^2 \Delta^* = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Из уравнений (2.4) сразу отметим, что в рассматриваемом однородном случае значение параметра порядка при $\mathbf{A} = 0$ будет

$$\Delta_0^2 = \alpha/\beta \quad (2.5)$$

а при $\mathbf{A} \neq 0$ будет

$$\Delta_0^2(\mathbf{A}) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{A}^2 = \Delta_0^2 \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} \mathbf{A}^2 \right) \quad (2.6)$$

Отметим, что формула (2.6) демонстрирует подавление сверхпроводимости протекающим током.

Таким образом, в отсутствие каких-либо неоднородностей плотность тока будет $\mathbf{j}_0 = \mathbf{A}\Delta_0^2$ (напомним, что сверхтекучая плотность тока уже перенормирована с множителем $1/2c\gamma$). Обезразмерим вектор-потенциал (обезразмеривание очень сильно упростит формулы в следующей главе, но полезно нам уже здесь):

$$a = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} A \quad (2.7)$$

Тогда ток запишется в виде [12]:

$$j(a) = j_0 a (1 - a^2), \quad (2.8)$$

где $j_0 = \alpha^{3/2}/\beta\gamma^{1/2}$.

Максимальное значение тока равно $(2/3\sqrt{3})j_0$ и достигается при

$$a_c = 1/\sqrt{3}. \quad (2.9)$$

2.2 Сверхпроводник «с локально флуктуирующей T_c »

Теперь введём в уравнения Гинзбурга-Ландау *неоднородность* — флуктуацию коэффициента α , выраженную в виде добавки $\alpha_1(\mathbf{r})$:

$$\begin{cases} -\gamma(\nabla + i\mathbf{A})^2\Delta - (\alpha + \alpha_1(\mathbf{r}))\Delta + \beta|\Delta|^2\Delta = 0 \\ -\gamma(\nabla - i\mathbf{A})^2\Delta^* - (\alpha + \alpha_1(\mathbf{r}))\Delta^* + \beta|\Delta|^2\Delta^* = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

На самом деле, флуктуировать могут все три коэффициента α, β, γ , однако именно константа α , как это всегда положено согласно теории фазовых переходов Ландау, проходит через ноль в точке перехода, и поэтому влияние неоднородности на коэффициент α гораздо важнее, чем на два других. Поэтому изменением двух других коэффициентов мы пренебрегаем. Функция $\alpha_1(\mathbf{r})$ интерпретируется, как флуктуация критической температуры $\delta T_c(\mathbf{r})$: $\alpha_1(\mathbf{r}) = \alpha\delta T_c/T_c$.

Случайное поле $\alpha_1(\mathbf{r})$ будет предполагаться гауссовым с коррелятором

$$\langle \alpha_1(\mathbf{r})\alpha_1(\mathbf{r}') \rangle = f_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.11)$$

В импульсном пространстве коррелятор имеет вид

$$\langle \alpha_1(\mathbf{q})\alpha_1(\mathbf{k}) \rangle = (2\pi)^3 f_\alpha(\mathbf{q})\delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \quad (2.12)$$

Функция $f_\alpha(\mathbf{r})$ — размытая дельта-функция, масштаб, на котором она отлична от нуля, порядка r_c , и он мал, как обсуждается немного ниже. Её фурье-образ $f_\alpha(\mathbf{q})$ — практически константа на масштабе $|\mathbf{q}| < 1/r_c = k_{max}$ и быстро затухает на масштабе $|\mathbf{q}| > 1/r_c = k_{max}$. Второй порядок теории возмущений по α_1 даёт первый порядок по f_α . Функция $f_\alpha(\mathbf{q})$ размерная. Настоящим безразмерным параметром задачи является величина

$$\lambda = \frac{f_\alpha(0)}{\alpha^2 \xi^3} \quad (2.13)$$

В нашей задаче есть три типичных масштаба: r_c — масштаб корреляционной функции $\alpha_1(\mathbf{r})$, ξ — корреляционная длина сверхпроводника и d — толщина сверхпроводника (или сверхпроводящей плёнки, если имеется в виду двумерный случай). Конкретное значение r_c зависит от модели. Например, в работе [10] величина $r_c \sim \xi_0$, где ξ_0 — корреляционная длина при нулевой температуре. В силу теории Гинзбурга-Ландау $\xi \sim \xi_0/\sqrt{T_c - T}$, поэтому $r_c \ll \xi$. Трёхмерном случаю соответствует $d \gg \xi$. Везде в данной работе подразумевается именно трёхмерный случай. Двумерный случай может стать объектом дальнейшего исследования.

В присутствии неоднородности в сверхпроводнике установится случайное и довольно сложное распределение токов. Поэтому можно говорить лишь о нахождении среднего тока $\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle$ и корреляционной функции отклонения токов от среднего: $\langle \delta \mathbf{j}(\mathbf{r}) \delta \mathbf{j}(\mathbf{r}') \rangle$. Корреляторы токов (правда в двумерном пространстве) были найдены в магистерской работе Д. Фазлижановой [13], мы же сосредоточимся на вычислении среднего тока. Мы будем проводить вычисления и считать все необходимые корреляционные функции по теории возмущений по α_1 (или f_α), но по несколько усовершенствованному варианту теории возмущений, позволяющему учесть непертурбативную поправку, связанную со сдвигом критической температуры T_c , и в результате найдём $\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle$. После нахождения среднего тока $\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle$ мы сможем найти критический ток (максимально возможный ток, который может протекать через сверхпроводник) и сравнить его с критическим током, протекающим в отсутствие неоднородности.

2.3 Теория возмущений

Помимо возникновения неоднородного распределения $\Delta(\mathbf{r})$, беспорядок в константе $\alpha_1(\mathbf{r})$ приводит к сдвигу критической температуры T_c . Данный сдвиг критической температуры непетртурбативен и требует суммирования бесконечной последовательности диаграмм.

Наиболее простой вариант теории возмущений для параметра порядка основан на его представлении в виде ряда: $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots$, где $\Delta_n \propto \alpha_1^n$, однако этим способом мы пользоваться не будем по следующей причине. Поскольку мы имеем дело с фазовым переходом второго рода, простая петртурбативная теория не даёт нужного результата, ведь сдвиг T_c не найти таким образом.

Мы поступим чуть по-другому и обозначим за $\bar{\Delta}$ сумму всех чётных степеней по α_1 , а за Δ_1 сумму всех нечётных степеней:

$$\Delta = \bar{\Delta} + \Delta_1 \quad (2.14)$$

Такая схема поможет нам отсуммировать целые ряды теории возмущений и получить сдвиг T_c .

Обсудим калибровку. По постановке задачи к краям сверхпроводника приложена разность фаз параметра порядка, и эта разность фаз вызывает сверхтекущий ток. В неоднородном случае после усреднения по неоднородностям градиент фаз откалибруем в вектор-потенциал: $\langle \Delta(\mathbf{r}) \rangle = \bar{\Delta} e^{i\mathbf{A}\mathbf{r}}$, и выбрана именно такая калибровка (такое \mathbf{A}), которая компенсирует средний градиент фазы. Отсюда следует, что $\bar{\Delta}$ вещественна (постоянную начальную фазу кладём равной нулю).

Подставляем (2.14) в (2.10) и усредняем полученное уравнение по реализациям неоднородности. При усреднении все нечётные степени уходят. Получается уравнение на $\bar{\Delta}$, и это уравнение одно в силу вещественности $\bar{\Delta}$:

$$\gamma \mathbf{A}^2 \bar{\Delta} - \alpha \bar{\Delta} - \langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle + \beta \bar{\Delta}^3 + \beta \bar{\Delta} (\langle \Delta_1^2 \rangle + 2\langle \Delta_1^* \Delta_1 \rangle) = 0 \quad (2.15)$$

Уравнение на флуктуирующую часть параметра порядка записывается следующим образом:

$$\begin{cases} -\gamma(\nabla + i\mathbf{A})^2 \Delta_1 - \alpha \Delta_1 - \alpha \bar{\Delta} - (\alpha_1 \Delta_1 - \langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle) + \beta \bar{\Delta}^2 (2\Delta_1 + \Delta_1^*) + \beta \Delta_1^* \Delta_1^2 = 0 \\ -\gamma(\nabla - i\mathbf{A})^2 \Delta_1^* - \alpha \Delta_1^* - \alpha \bar{\Delta} - (\alpha_1 \Delta_1^* - \langle \alpha_1 \Delta_1^* \rangle) + \beta \bar{\Delta}^2 (2\Delta_1^* + \Delta_1) + \beta \Delta_1 \Delta_1^{*2} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

где мы пренебрегаем слагаемым $\beta\bar{\Delta}(\Delta_1^2 + 2\Delta_1^*\Delta_1 - \langle\Delta_1^2\rangle - 2\langle\Delta_1^*\Delta_1\rangle)$ в первом уравнении и аналогичным слагаемым во втором, так как эта разность даёт следующий порядок малости по f_α .

Выделяем линейные по Δ_1 и Δ_1^* и не зависящие от неоднородности слагаемые в обратный флуктуационный пропагатор на фоне однородного состояния и получаем уравнение:

$$L_0^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_1\Delta_1 + \beta\Delta_1^*\Delta_1^2 \\ -\alpha_1\Delta_1^* + \beta\Delta_1\Delta_1^{*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\bar{\Delta} - \langle\alpha_1\Delta_1\rangle \\ \alpha_1\bar{\Delta} - \langle\alpha_1\Delta_1^*\rangle \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

где обратный флуктуационный пропагатор $L_0^{-1}(\mathbf{r})$ даётся выражением:

$$L_0^{-1}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\gamma(\nabla + i\mathbf{A})^2 - \alpha + 2\beta\bar{\Delta}^2 & \beta\bar{\Delta}^2 \\ \beta\bar{\Delta}^2 & -\gamma(\nabla - i\mathbf{A})^2 - \alpha + 2\beta\bar{\Delta}^2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Получилась нелинейная система уравнений (2.17) на Δ_1, Δ_1^* , и мы будем решать её методом итераций.

2.4 Флуктуационный пропагатор на фоне однородного состояния

В импульсном пространстве обратный пропагатор записывается, как:

$$L_0^{-1}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{q} + \mathbf{A})^2 - \alpha + 2\beta\bar{\Delta}^2 & \beta\bar{\Delta}^2 \\ \beta\bar{\Delta}^2 & \gamma(\mathbf{q} - \mathbf{A})^2 - \alpha + 2\beta\bar{\Delta}^2 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Обращая матрицу, находим флуктуационный пропагатор:

$$L_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{\det L_0^{-1}(\mathbf{q})} \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{q} - \mathbf{A})^2 - \alpha + 2\beta\bar{\Delta}^2 & -\beta\bar{\Delta}^2 \\ -\beta\bar{\Delta}^2 & \gamma(\mathbf{q} + \mathbf{A})^2 - \alpha + 2\beta\bar{\Delta}^2 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Здесь

$$\det L_0^{-1}(\mathbf{q}) = \gamma^2 ((\mathbf{q}^2 + \mathbf{A}^2)^2 - 4(\mathbf{A}\mathbf{q})^2) + 2\gamma(-\alpha + 2\beta\bar{\Delta}^2)(\mathbf{q}^2 + \mathbf{A}^2) + \alpha^2 - 4\alpha\beta\bar{\Delta}^2 + 3\beta^2\bar{\Delta}^4 \quad (2.21)$$

Формула (2.21) выглядит громоздко, но при $\mathbf{A} = 0$ (в отсутствие свехтекучего тока) у неё есть интересное и полезное свойство факторизации:

$$\det L_0^{-1}(\mathbf{q}) = (\gamma\mathbf{q}^2 - \alpha + 3\beta\bar{\Delta}^2)(\gamma\mathbf{q}^2 - \alpha + \beta\bar{\Delta}^2) \quad (2.22)$$

Если подставить сюда выражение для $\bar{\Delta}$ из формулы (2.5), то получим:

$$\det L_0^{-1}(\mathbf{q}) = (\gamma\mathbf{q}^2 + 2\alpha)\gamma\mathbf{q}^2 \quad (2.23)$$

Массивный множитель $\gamma\mathbf{q}^2 + 2\alpha$ соответствует флуктуации модуля параметра порядка, а безмассовый $\gamma\mathbf{q}^2$ — фазы параметра порядка, поэтому при $\mathbf{q} = 0$ этот множитель равен нулю (мягкая Голдстоуновская мода).

При $\mathbf{A} \neq 0$ происходит определитель не распадается на произведение двух множителей, что означает, что в присутствие свехтекучего тока происходит зацепление двух мод.

2.5 Сдвиг критической температуры

Для дальнейших вычислений нам потребуется уметь считать корреляторы типа $\langle \Delta_1^* \Delta_1 \rangle$ и другие аналогичные. В низшем порядке теории возмущений по беспорядку в формуле (2.17) кроме слагаемого с L_0^{-1} остаётся только слагаемое $\bar{\Delta}\alpha_1$. Тогда находим неоднородность параметра порядка, вызванную неоднородностью α_1 :

$$\begin{pmatrix} \Delta_1(\mathbf{q}) \\ \Delta_1^*(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \bar{\Delta} L_0(\mathbf{q}) \alpha_1(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Подставляя формулу (2.24) в уравнение на $\bar{\Delta}$ (2.15), получаем, что главный вклад даётся коррелятором $\langle \alpha_1 \Delta_1 \rangle$, в котором имеется ультрафиолетовая расходимость на больших импульсах. Таким образом, можно считать, что происходит ренормировка константы α :

$$\alpha_{ren} = \alpha + \frac{f_\alpha k_{max}}{2\pi^2\gamma} \quad (2.25)$$

В формулах далее нам понадобится именно такая ренормированная константа α . В соответствии с определением α в разделе 2.1, получается сдвиг температуры фазового перехода:

$$T_c = T_{c0} + \frac{f_\alpha k_{max}}{2\pi^2\gamma\nu} T_{c0} \quad (2.26)$$

2.6 Собственно-энергетическая часть флуктуационного пропагатора

Учѐт остальных членов в (2.17), приводит к замене в формуле (2.24) голого флуктуационного пропагатора $L_0(\mathbf{q})$ на одетый $L(\mathbf{q})$:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1(\mathbf{q}) \\ \Delta_1^*(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \bar{\Delta} L(\mathbf{q}) \alpha_1(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Ренормированный $L(\mathbf{q})$ выражается в виде

$$L(\mathbf{q}) = [L_0^{-1}(\mathbf{q}) - \Sigma(\mathbf{q})]^{-1} \quad (2.28)$$

где собственная энергетическая часть находится из второго слагаемого в (2.17), где было произведено усреднение кубического члена по теореме Вика:

$$\Sigma(\mathbf{q}) = \int (d\mathbf{k}) f_\alpha(\mathbf{q} - \mathbf{k}) L(\mathbf{k}) - \beta \bar{\Delta}^2 \int (d\mathbf{k}) f_\alpha(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} 2M_1(\mathbf{k})M_2(-\mathbf{k}) & M_1(\mathbf{k})M_1(-\mathbf{k}) \\ M_2(\mathbf{k})M_2(-\mathbf{k}) & 2M_1(\mathbf{k})M_2(-\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Здесь мы ввели

$$M_i(\mathbf{k}) = L_{i1}(\mathbf{k}) + L_{i2}(\mathbf{k}) \quad (2.30)$$

что в силу (2.20) записывается в виде

$$M_{1,2} = \frac{\gamma(\mathbf{q} \mp \mathbf{A})^2 - \alpha + \beta \bar{\Delta}^2}{\det L_0^{-1}(\mathbf{q})} \quad (2.31)$$

Заметим, что $M_2(-\mathbf{q}) = M_1(\mathbf{q})$.

Глава 3

Вычисление среднего тока

3.1 Зависимость среднего параметра порядка от вектор-потенциала

В этом разделе мы вычислим среднее значение параметра порядка при наличии произвольного вектор-потенциала \mathbf{A} . Перенормировав T_c , как указано в разделе 2.5, остальные вычисления мы будем проводить в первом порядке теории возмущений по f_α .

Выразив в уравнении (2.15) флуктуирующую часть Δ_1 через α_1 посредством соотношения (2.24) и усреднив по неоднородностям, получим замкнутое уравнение на средний параметр порядка $\bar{\Delta}(A)$:

$$\gamma \mathbf{A}^2 - \alpha + \beta \bar{\Delta}^2 - \beta S_A(\bar{\Delta}^2) = 0, \quad (3.1)$$

где

$$S_A(\bar{\Delta}^2) = \frac{1}{\beta} \int (d\mathbf{q}) f_\alpha(\mathbf{q}) \left(M_1(\mathbf{q}) - \beta \bar{\Delta}^2 (M_1(\mathbf{q}) M_1(-\mathbf{q}) + 2M_1^2(\mathbf{q})) \right) \quad (3.2)$$

Отметим, что введенная здесь величина $S_A(\bar{\Delta}^2)$ связана с собственно-энергетической частью $\Sigma(\mathbf{q})$ [см. уравнение (2.29)] соотношением

$$\beta S_A = \Sigma_{11}(0) + \Sigma_{12}(0). \quad (3.3)$$

В силу данной связи S_A и собственно-энергетическая часть флуктуационного пропагатора имеют одинаково расходящуюся на больших импульсах часть, что обеспечивает правиль-

ную перенормировку температуры перехода в знаменателе флуктуационного пропагатора: $\alpha \rightarrow \alpha_{ren}$. Такая ренормировка будет подразумеваться в дальнейшем.

Более формально, определим α_{ren} через решение уравнения (3.1) в отсутствие векторного потенциала: $\alpha_{ren} = \alpha + \beta S_0(\overline{\Delta}^2(0))$. Используя это определение, перепишем уравнение (3.1) при конечном \mathbf{A} в виде

$$\gamma \mathbf{A}^2 - \alpha_{ren} + \beta \overline{\Delta}^2(A) - \beta [S_A(\overline{\Delta}^2(A)) - S_0(\overline{\Delta}^2(0))] = 0 \quad (3.4)$$

Входящая в последний член разность $S_A - S_0$ уже не содержит ультрафиолетовой расходимости и определяется малыми импульсами. Поэтому данный член, пропорциональный f_α , может быть стандартным способом учтен по теории возмущений.

В отсутствие неоднородности, согласно (2.6), $\overline{\Delta}^2(A) = \alpha/\beta - \gamma \mathbf{A}^2/\beta$, где мы, как сказано выше, произвели замену $\alpha \rightarrow \alpha_{ren}$. В терминах безразмерного векторного потенциала a , введенного в уравнении (2.7), $\overline{\Delta}^2(A) = \overline{\Delta}^2(0)(1 - a^2)$. В первом порядке теории возмущений по неоднородности получаем ответ:

$$\frac{\overline{\Delta}^2(\mathbf{A})}{\overline{\Delta}^2(0)} = 1 - a^2 + \delta\sigma(a) \quad (3.5)$$

где

$$\delta\sigma(a) = \frac{S_A[\overline{\Delta}^2(0)(1 - a^2)] - S_0[\overline{\Delta}^2(0)]}{\overline{\Delta}^2(0)} \quad (3.6)$$

В рассматриваемом нами трехмерном случае вычисление интегралов по импульсам в выражении (3.2) приводит к следующему явному выражению:

$$\delta\sigma(a) = \frac{\lambda}{16\sqrt{2}a(1 - 3a^2)\pi} \left[-6a\sqrt{1 - 3a^2} + 14a^3\sqrt{1 - a^2} + 2(1 - 3a^2) \left(7a - 2\sqrt{2}(1 - a^2) \arctan \sqrt{\frac{2a^2}{1 - 3a^2}} \right) \right] \quad (3.7)$$

где малый параметр $\lambda \propto f_\alpha(0)$ определен в уравнении (2.13).

Несложно вычислить асимптотику $\delta\sigma(a)$ при малых a и в окрестности критического значения $a_c = 1/\sqrt{3}$:

$$\delta\sigma(a) \approx -\lambda \times \begin{cases} \frac{19a^2}{48\sqrt{2}\pi}, & a \rightarrow 0; \\ \frac{1}{24\pi 3^{1/4} \sqrt{a_c - a}}, & a \rightarrow a_c. \end{cases} \quad (3.8)$$

Расходимость пертурбативной поправки при $a \rightarrow a_c$ означает, что эта формула имеет границы применимости, так как относительная поправка во всяком случае должна быть много меньше единицы, что даёт условие: $a_c - a \gg \lambda^2$.

3.2 Поправка к среднему току

Теперь запишем формулу для среднего сверхтока, усреднив выражение (2.2):

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{A} \langle |\Delta|^2 \rangle - \frac{1}{2i} \langle \Delta_1 \nabla \Delta_1^* - \Delta_1^* \nabla \Delta_1 \rangle \quad (3.9)$$

где

$$\langle |\Delta|^2 \rangle = \bar{\Delta}^2 + \langle \Delta_1 \Delta_1^* \rangle \quad (3.10)$$

Запишем уравнение (3.9) в виде интегралов:

$$\langle \mathbf{j} \rangle(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \left(\bar{\Delta}^2(\mathbf{A}) + f_\alpha \bar{\Delta}^2 \int (d\mathbf{q}) M_1^2(\mathbf{q}) - \frac{f_\alpha \bar{\Delta}^2}{2A} \int (d\mathbf{q}) q_x (-M_1^2(\mathbf{q}) + M_1^2(-\mathbf{q})) \right) \quad (3.11)$$

Вычисляем необходимые интегралы:

$$\bar{\Delta}^2 \int (d\mathbf{q}) M_1^2(\mathbf{q}) = \frac{1 - a^2}{8\sqrt{2}\pi\sqrt{1 - 3a^2}} \quad (3.12)$$

$$- \frac{\bar{\Delta}^2}{2A} \int (d\mathbf{q}) q_x (-M_1^2(\mathbf{q}) + M_1^2(-\mathbf{q})) = \frac{\sqrt{2}a\sqrt{1 - 3a^2} - (1 - a^2) \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{1 - 3a^2}{2a^2}}}{16\pi a^3} \quad (3.13)$$

Обратим внимание на интересный факт, что $\bar{\Delta}$ расходится при $a \rightarrow a_c$, как следует из формул (3.5), (3.8). Однако в формуле (3.10) нет расходимости при $a \rightarrow a_c$ (расходимость (3.8) сокращается с (3.12)).

Складываем вместе (3.7), (3.12), (3.13)

$$\frac{\langle j \rangle(a)}{j_0} = a(1 - a^2) + \frac{\lambda}{32\pi a^3} \left(2\sqrt{2}a(1 - 3a^2)^{3/2} + 14\sqrt{2}a^3 + (2 - a^4) \arctan \sqrt{\frac{1 - 3a^2}{2a^2}} - \pi(1 - a^2)^2 \right) \quad (3.14)$$

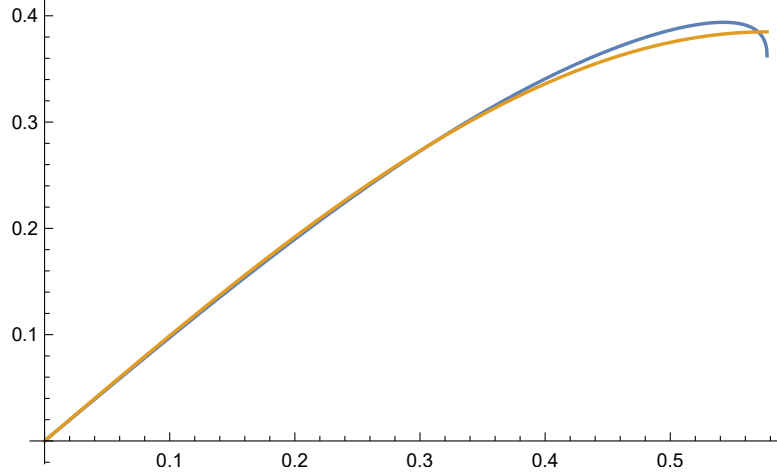


Рис. 3.1: Синяя линия - график зависимости тока от вектор-потенциала (3.14) при $\lambda = 2$, оранжевая линия - график при $\lambda = 0$ в отсутствие неоднородности. Из данного графика видно, что сначала функции в присутствии и в отсутствие неоднородности идут примерно вровень, потом функция с неоднородностью становится больше, а потом она становится меньше

Мы нашли зависимость тока от вектор-потенциала, что составляет основной результат нашей работы. График этой функции для $\lambda = 2$ изображён на рисунке. Отметим что критический (максимальный) ток в зависимости от величина параметра λ может быть как положительным, так и отрицательным. Покажем далее, что критический ток отрицательный при самых малых λ .

Раскладываем в окрестности критического значения вектор-потенциала a_c . Разложение будет содержать константу и корень $\sqrt{a_c - a}$. Запишем полученное выражение для тока в полностью безразмерном виде:

$$\frac{\langle j \rangle(a)}{j_0} = a(1 - a^2) + \lambda \left(-\frac{1}{8} + \frac{7}{8\sqrt{6}\pi} + \frac{3^{3/4}\sqrt{a_c - a}}{4\pi} + O(a_c - a) \right) \quad (3.15)$$

Теперь нам осталось найти максимум этого выражения и точку максимума по оси вектор-потенциала. Беря производную по a и приравнивая нулю, считая $\lambda \ll 1$, получаем:

$$\begin{cases} a_c - a = \left(\frac{3^{3/4}\lambda}{16\pi} \right)^{2/3} \\ \Delta j / j_0 = \lambda \left(-\frac{1}{8} + \frac{7}{8\sqrt{6}\pi} \right) < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

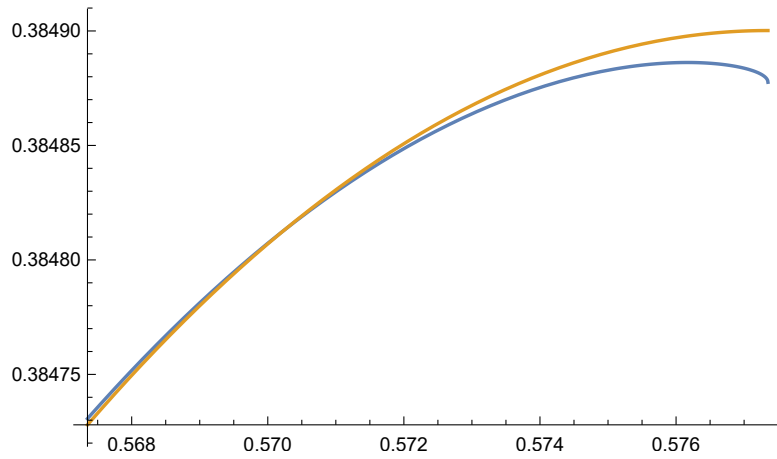


Рис. 3.2: Синяя линия - график зависимости тока от вектор-потенциала (3.14) при $\lambda = 0.002$, оранжевая линия - график при $\lambda = 0$ в отсутствие неоднородности

При малых λ сдвиг тока получается отрицательным, что видно также на графике (3.2). Также видно, что поправка к току линейно зависит от величины неоднородности.

Глава 4

Заключение

В нашей работе мы исследовали сверхпроводящие плёнки с неоднородностью. Исходя из стандартных уравнений Гинзбурга-Ландау и действуя по теории возмущений, мы нашли флуктуационный пропагатор, а также его собственно-энергетическую часть. В трёхмерном случае найден сдвиг температуры фазового перехода, вызванный неоднородностью, приводящий к ренормировке константы α Гинзбурга-Ландау. После этого, мы, используя метод итераций, нашли зависимость параметра порядка от прикладываемого к плёнке вектор-потенциала. В результате, удалось получить зависимость тока от вектор-потенциала и сдвиг критического тока, вызванного неоднородностью. Эти результаты являются главными в нашем исследовании.

Глава 5

Приложения

А Вывод собственно-энергетической части методом реплик

В этом параграфе подразумеваем $\mathbf{A} = 0$, но это глобально ничего не меняет.

Формулу (2.29) для собственной энергетической части можно получить другим более интересным способом.

Согласно теории Теории Гинзбурга-Ландау свободная энергия даётся выражением:

$$F = \int d\mathbf{r} \left(\gamma |\nabla \Delta|^2 - \alpha |\Delta|^2 + \frac{\beta}{2} |\Delta|^4 \right) \quad (\text{A.1})$$

Тогда действие в методе реплик будет записываться как:

$$S = \frac{1}{T} \int d\mathbf{r} \sum_a \left(\gamma |\nabla \Delta_a|^2 - \alpha |\Delta_a|^2 + \frac{\beta}{2} |\Delta_a|^2 \right) \quad (\text{A.2})$$

где индекс a отвечает за номер реплики.

Добавляем беспорядок $\alpha \rightarrow \alpha + \alpha_1(\mathbf{r})$ и усредняем по беспорядку, используя теорему Вика:

$$S = \frac{1}{T} \int d\mathbf{r} \sum_a \left(\gamma |\nabla \Delta_a|^2 - \alpha |\Delta_a|^2 + \frac{\beta}{2} |\Delta_a|^2 \right) + S_{int} \quad (\text{A.3})$$

где добавка отвечает взаимодействию реплик:

$$S_{int} = -\frac{1}{2T^2} \left\langle \left[\int d\mathbf{r} \sum_a \alpha_1(\mathbf{r}) |\Delta_a|^2 \right]^2 \right\rangle = -\frac{1}{2T^2} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{ab} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Delta_a(\mathbf{r})|^2 |\Delta_b(\mathbf{r}')|^2 \quad (\text{A.4})$$

Делаем разложение, аналогичное предыдущим вычислениям:

$$\begin{cases} \Delta_a(\mathbf{r}) = \bar{\Delta} + \Delta_{1a}(\mathbf{r}) \\ \Delta_a^*(\mathbf{r}) = \bar{\Delta} + \Delta_{1a}^*(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Тогда квадратичная часть действия будет записываться как:

$$S^{(2)} = \frac{1}{T} \int d\mathbf{r} \sum_a \left[\gamma \nabla \Delta_{1a}^* \nabla \Delta_{1a} - \alpha \Delta_{1a}^* \Delta_{1a} + \frac{\beta}{2} \bar{\Delta}^{-2} (4\Delta_{1a}^* \Delta_{1a} + \Delta_{1a} \Delta_{1a} + \Delta_{1a}^* \Delta_{1a}^*) \right] - \frac{\bar{\Delta}^2}{2T^2} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{ab} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\Delta_{1a}(\mathbf{r}) + \Delta_{1a}^*(\mathbf{r})] [\Delta_{1a}(\mathbf{r}') + \Delta_{1a}^*(\mathbf{r}')] \quad (\text{A.6})$$

Введём новое обозначение:

$$\hat{\Delta}_a = \begin{pmatrix} \Delta_{1a} \\ \Delta_{1a}^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Тогда, переходя к импульсному пространству, получается квадратичная форма такого вида:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2T} \int (d\mathbf{q}) \sum_{ab} \hat{\Delta}_a^\dagger(-\mathbf{q}) \mathcal{L}_{ab}^{-1}(\mathbf{q}) \hat{\Delta}_b(\mathbf{q}) \quad (\text{A.8})$$

где:

$$\mathcal{L}^{-1} = L^{-1}(\mathbf{q}) \mathbb{1} - \frac{\bar{\Delta}^2}{T} f(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Xi \quad (\text{A.9})$$

где имеется в виду $\mathbb{1}_{ab} = \delta_{ab}$, $\Xi_{ab} = 1$ и пропагатор:

$$L^{-1}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{q}^2 - \alpha + 2\beta \bar{\Delta}^2 & \beta \bar{\Delta}^2 \\ \beta \bar{\Delta}^2 & \gamma \mathbf{q}^2 - \alpha + 2\beta \bar{\Delta}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$L(\mathbf{q}) = \frac{1}{(\gamma \mathbf{q}^2 - \alpha + 3\beta \bar{\Delta}^2)(\gamma \mathbf{q}^2 - \alpha + \beta \bar{\Delta}^2)} \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{q}^2 - \alpha + 2\beta \bar{\Delta}^2 & -\beta \bar{\Delta}^2 \\ -\beta \bar{\Delta}^2 & \gamma \mathbf{q}^2 - \alpha + 2\beta \bar{\Delta}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Пренебрегая беспорядком квадратичное действие имеет коррелятор:

$$\langle \hat{\Delta}_i(\mathbf{q}) \hat{\Delta}_j^*(-\mathbf{q}) \rangle = TL_{ij}(\mathbf{q}) \quad (\text{A.12})$$

Функциональный Гауссов интеграл даёт нам флуктуационный детерминант:

$$S_{fluct} = \frac{1}{2} Tr \ln \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2} Tr \ln L^{-1} + \frac{1}{2} Tr \ln \left(1 - \frac{\bar{\Delta}^2}{T} f(\mathbf{q}) L(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Xi \right) \quad (\text{A.13})$$

Первое слагаемое отвечает тепловым флуктуациям, которыми мы сейчас не интересуемся. Второе слагаемое по малости $f(\mathbf{q})$ и используя тождество $\Xi^k = n^{k-1} \Xi$ получаем:

$$\frac{S_{fluct}^{dis}}{V} = -\frac{n \bar{\Delta}^2}{2 T} \int (d\mathbf{q}) f(\mathbf{q}) tr L(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -n \frac{\bar{\Delta}^2}{T} \int (d\mathbf{q}) \frac{f(\mathbf{q})}{\gamma \mathbf{q}^2 - \alpha + 3\beta \bar{\Delta}^2} \quad (\text{A.14})$$

Соответственно это слагаемое является добавкой к константе $\alpha \rightarrow \alpha + \Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = \int (d\mathbf{q}) \frac{f(\mathbf{q})}{\gamma \mathbf{q}^2 - \alpha + 3\beta \bar{\Delta}^2} \quad (\text{A.15})$$

В формуле (A.3) обозначим за S_0 первое слагаемое, то есть в этой формуле $S = S_0 + S_{int}$. Причём обе эти части имеют как квадратичную, так и четверичную часть. Обозначим их соответственно $S_0^{(2)}$, $S_0^{(4)}$, $S_{int}^{(2)}$, $S_{int}^{(4)}$. Тогда запишем через функциональный интеграл коррелятор: $\langle \hat{\Delta}_i(\mathbf{q}) \hat{\Delta}_j^*(-\mathbf{q}) \rangle$:

$$\langle \hat{\Delta}_i(\mathbf{q}) \hat{\Delta}_j^*(-\mathbf{q}) \rangle = \int D\hat{\Delta} e^{-S} \hat{\Delta}_i(\mathbf{q}) \hat{\Delta}_j^*(-\mathbf{q}) \quad (\text{A.16})$$

В репличном пределе $n \rightarrow 0$ не исчезают только 2 вклада помимо тривиального:

$$\langle \hat{\Delta}_i(\mathbf{q}) \hat{\Delta}_j^*(-\mathbf{q}) \rangle = \int D\hat{\Delta} e^{-S_0^{(2)}} (1 - S_{int}^{(4)} - S_0^{(4)} S_{int}^{(2)}) \hat{\Delta}_i(\mathbf{q}) \hat{\Delta}_j^*(-\mathbf{q}) \quad (\text{A.17})$$

Эти выражение верно воспроизводят формулу для собственной энергетической части (2.29), где первому слагаемому из (2.29) соответствует вклад с $S_{int}^{(4)}$, а второму — вклад с $S_0^{(4)} S_{int}^{(2)}$.

Глава 6

Список литературы

- [1] A. D. Semenov, G. N. Gol'tsman, and A. A. Korneev, Quantum detection by current carrying superconducting film, *Physica C: Superconductivity* **351**, 349 (2001). 1
- [2] A. E. Dane, Superconducting Photodetectors, Nanowires, and Resonators, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology (2019). 1
- [3] B. Sacépé, M. Feigel'man, T. M. Klapwijk, Quantum breakdown of superconductivity in low-dimensional materials, *Nature Physics* **16**, 734 (2020). 1
- [4] B. Sacépé, C. Chapelier, T. I. Baturina, V. M. Vinokur, M. R. Baklanov, and M. Sanquer, Disorder-Induced Inhomogeneities of the Superconducting State Close to the Superconductor-Insulator Transition, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 157006 (2008). 1, 1.2
- [5] A. G. Kozorezov, C. Lambert, F. Marsili, M. J. Stevens, V. B. Verma, J. P. Allmaras, M. D. Shaw, R. P. Mirin, and S. W. Nam, Fano fluctuations in superconducting-nanowire single-photon detectors, *Phys. Rev. B* **96**, 054507 (2017). 1
- [6] A. D. Semenov and M. Sidorova, M. A. Skvortsov, A. Kuzmin, K. Ilin, and M. Siegel, Local thermal fluctuations in current-carrying superconducting nanowires, *Physical Review B* **102**, 184508 (2020) 1
- [7] A. N. Zotova and D. Y. Vodolazov, Intrinsic detection efficiency of superconducting nanowire single photon detector in the modified hot spot model, *Supercond. Sci. Technol.* **27**, 125001 (2014). 1

- [8] Y. Cheng, C. Gu and X. Hu, Inhomogeneity-induced timing jitter of superconducting nanowire single-photon detectors, *Appl. Phys. Lett.* **111**, 062604 (2017) 1
- [9] L. B. Ioffe and A. I. Larkin, Properties of superconductors with a smeared transition temperature, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **81**, 707 (1981) 1
- [10] M. A. Skvortsov and M. V. Feigel'man, Superconductivity in Disordered Thin Films: Giant Mesoscopic Fluctuations, *Physical Review Letters* **95**, 057002 (2005) 1, 2.2
- [11] L. P. Gor'kov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **37**, 1407 (1959) [*Sov. Phys. JETP* **10**, 998 (1960)] 2.1
- [12] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity* 2.1
- [13] D. Fazlizhanova, Inhomogeneous current distribution in superconductors, Master's thesis, Skolkovo Institute of Science and Technology, 2021 2.2