ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт» (Национальный исследовательский университет)

Институт Теоретической Физики имени Ландау

Кафедра проблем теоретической физики

Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра

Квантовая поправка к проводимости на конечном волновом векторе

Выполнил: Борисов Денис Альбертович
Научный руководитель: д. ф. - м. н. Бурмистров Игорь Сергеевич

г. Москва
2023 год

Содержание

1 Аннотация

Данная работа является продолжением развития одного из сюжетов статьи Островского, Такаямы, Мутталиба и Вёльфле "Scale-dependent correction to the dynamical conductivity of a disordered system at unitary symmetry"(1). В указанной статье было приведено выражение на поправку к проводимости на нулевом импульсе двумерного электронного газа с примесями. В свою очередь, я выражаю квадратичные по импульсу поправки к этому результату. В частности, было показано, что квадратичная поправка по ипмульсу имеет инфракрасную расходимость вида $\log^2 \omega$, что расходится даже быстрее чем уже известный результат поправки на нулевом волновом векторе вида $\delta\sigma(\mathbf{p} = 0) \propto \log \omega$. Замечу, что ряд полученных вычислений легко обобщается на размерности $d \leq 2$ в силу проведенных вычислений в произвольной размерности в указанной области. Особый интерес к квадратичной поправке обусловлен связью второй производной проводимости по импульсу и тензора вязкости в системах с галилеевской инваринтностью. Известно, что в приближении Друде данная связь выполняется, несмотря на наличие стационарных примесей, нарушающих инвариантность системы. Получение же квантовой поправки даст нам возможность понять, сохранится ли интересующее нас соотношение.

2 Введение

В статье 1981 года "Anderson localization in a nonlinear -model"(2) Синобу Хиками по теории вомущений получил выражение на ведущие поправки к проводимости (также навзиависимо были получены П. Горьковым, А. Ларкиным, Д. Е. Хмельницким (2)) выражающиеся через диаграммы, которые были

впоследствии названы Хиками-Боксами. В частности, в ведущую поправку к проводимости входят Хиками-Боксы четвертого ($\mathbf{h}_4$) и шестого (h_6) порядка, соединенные диффузонами - пропогаторами диффузии. Также в статье Островского было указано о необходимости добавления к выражению диаграмм с одним диффузоном h_2. Тем не менее, было указано и то, что эти диаграммы нулевые в приближении, с которым мы будем работать. Потому мы не будем касаться данных однодиффузионных диаграмм, как и причин их происхождения, в работе.
Хиками-Боксы выражаются в терминах запаздывающих и опережающих крестовых функций Грина (функций Грина, усредненных по вмороженному беспорядку) и примесных линий. Ниже будет изображены диаграммы на Хиками-Боксы, с которыми и ведется работа.

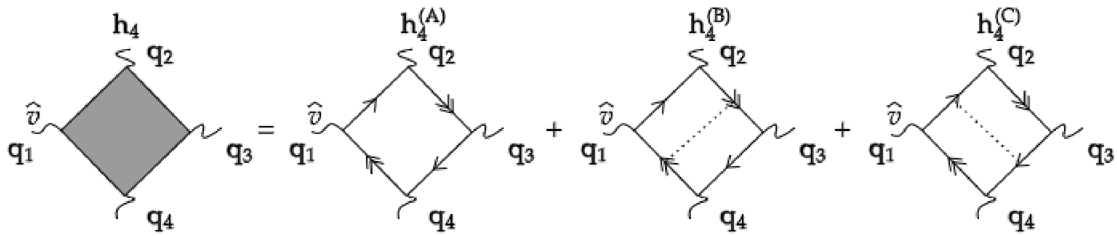

Рис. 1: Диаграммы дающие вклад в в четырех-вершинную векторную диаграмму $\mathbf{h}_4$. Пунктирные линии представляют рассеяние на примесях. Стрелками и двйойными стрелками указаны запаздывающие и опережающие функции Грина соответственно.

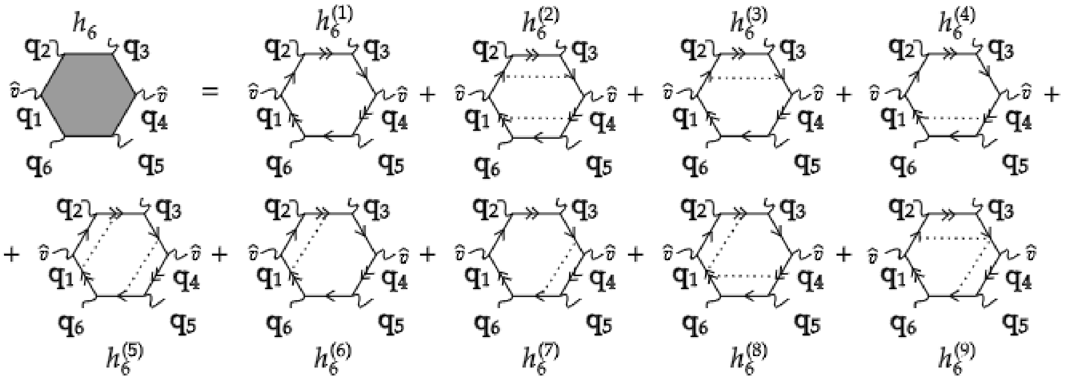

Рис. 2: Диаграммы дающие вклад в в шести-вершинную матричную диагрмму h_6 соответственно.

Участвующие в этом выражении запаздывающие и опережающие функции Грина электрона имеют вид:

$$G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = \left[G^A(\varepsilon, \mathbf{p})^*\right] = \frac{1}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + \frac{i}{2\tau}}, \quad \frac{1}{\tau} = 2\pi\nu_0 n u_0^2, \tag{1}$$

где u_0 - постоянная взаимодействия контактного потенциала примеией, n - концентрация примесей, а τ -время релаксации частицы. В это же время, диаграммы дающие вклад в поправку к проводимости имеют вид:

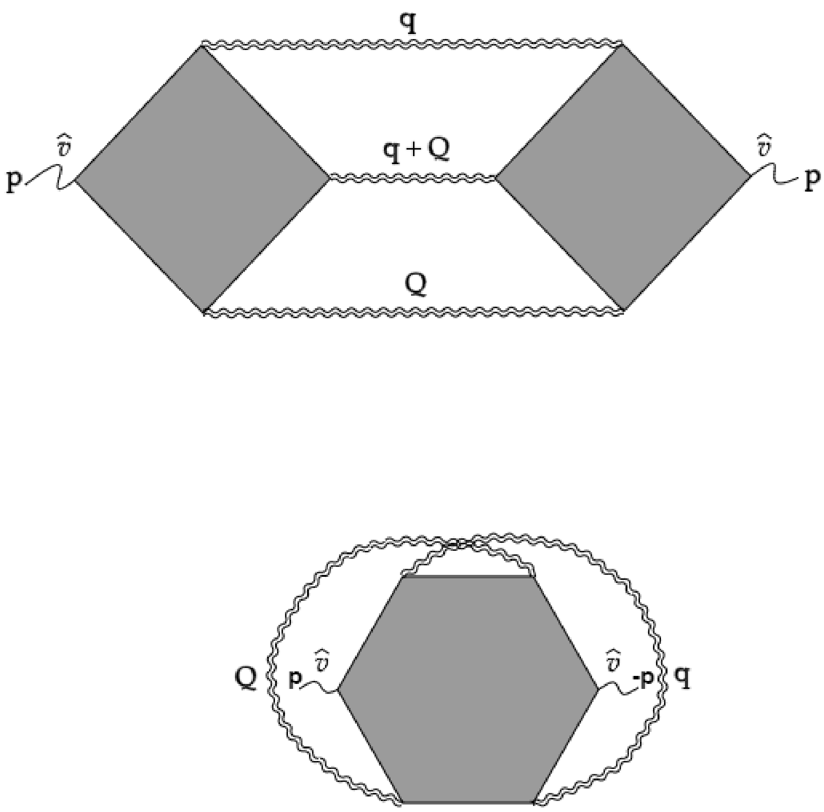

Рис. 3: Диаграммы дающие вклад в поправку к проводимости. Закрашенные квадраты представляют собой $\mathbf{h}_4$ и h_6 соответственно. Волнистая линия представляет собой диффузон D.

В общем случае указанный здесь пропогатор диффузии D может быть получен суммированием лестничных диаграмм и имеет вид:

$$D(\mathbf{q}, \omega) = \frac{nu_0^2}{1 - nu_0^2 \Pi(\mathbf{q}, \omega)}, \tag{2}$$

где

$$\Pi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} G^R_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\left(E_F + i\omega\right) G^A_{\mathbf{k}}\left(E_F\right) \tag{3}$$

Отметим, что в приближении малых импульсов и слабого беспорядка мы можем получить более простое выражение на диффузон:

$$D(\mathbf{q},\omega) = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau^2}\frac{1}{Dq^2+\omega} \tag{4}$$

Таким образом, мы можем записать данное выражение на поправку к проводимости:

$$\mathcal{F}_\omega(\boldsymbol{q},Q,p) = \mathcal{D}_\omega(Q)\left[h_6(\boldsymbol{q},Q,p) + \mathcal{D}_\omega(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{p})h_4(\boldsymbol{q},\mathbf{Q},\mathbf{p})h_4^\dagger(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\right] \tag{5}$$

$$\sigma^{(2)}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2\pi}\int\frac{d^d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^d}\mathcal{D}_\omega(\boldsymbol{q})\int\frac{d^d\boldsymbol{Q}}{(2\pi)^d}\mathcal{F}_\omega(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{p}) \tag{6}$$

Сразу отметим, что мы полагаем, что $\hbar\equiv 1, e\equiv 1$. Для дальнейшей работы с указанными выше формулами требуется получить выражения на Хиками-Боксы, чем мы и займемся в последующем разделе.

3 Получение выражений на Хиками-Боксы.

Начнем с того, что запишем выражения на Хиками-Боксы, предварительно проинтегрировав их по импульсу. Сделать это несложно, если заметить, что интересующие нас низкочастотные эффекты в Ферми-газе, как правило, связаны с возбуждениями вблизи поверхности Ферми - в действительности, интеграл от комбинаций функций Грина в выражении на Хиками-Боксы будет набираться как раз в окрестности поверхности Ферми. Поэтому логично сделать ξ-приближение и проинтегрировать имеющиеся диаграммы по ξ, откуда мы получаем следующие выражения на Хиками-Боксы:

Начнем с выражений на шестивершинные Хиками-Боксы

$$\begin{aligned} h_6^{(1)} = 2\pi\tau^5V_F^2\nu_0\Bigg\langle \mathbf{nn}^T & \frac{6-8i\tau V_F\mathbf{n}\left(\mathbf{q_2}+\mathbf{q}_4+\mathbf{q_6}\right)-\tau^2V_F^2(3\left(\mathbf{nq}_2\right)^2-2\left(\mathbf{nq}_3\right)^2+2\left(\mathbf{nq_4}\right)^2}{\left(1+i\tau V_F\mathbf{nq}_1\right)\left(1-i\tau V_F\mathbf{nq}_2\right)\left(1+i\tau V_F\mathbf{nq_3}\right)\left(1-i\tau V_F\mathbf{nq_4}\right)} \\ & \frac{-3\mathbf{nq}_4\mathbf{nq}_5-2\left(\mathbf{q_5n}\right)^2-\mathbf{nq_2}\cdot\mathbf{n}\left(2\mathbf{q_3}-7\mathbf{q_4}+\mathbf{q_5}-8\mathbf{q}_6\right)+\mathbf{nq}_6\times\left(7\mathbf{q}_4-2\mathbf{q}_5\right)\mathbf{n}}{\left(1+i\tau V_F\mathbf{nq}_5\right)\left(1-i\tau V_F\mathbf{nq}_6\right)\left(1-i\tau V_F\mathbf{n}\left(\mathbf{q_2}+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4\right)\right)} \\ & \frac{+3\left(\mathbf{nq_6}\right)^2-\mathbf{nq}_3\cdot\mathbf{n}\left(3\mathbf{q_4}+2\mathbf{q}_5+\mathbf{q}_6\right))}{\left(1-i\tau V_F\mathbf{n}\left(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_6\right)\right)\left(1-i\tau V_F\mathbf{n}\left(\mathbf{q_4}+\mathbf{q}_5+\mathbf{q}_6\right)\right)}\Bigg\rangle \end{aligned} \tag{7}$$

$$h_6^{(2)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \times \left\langle \mathbf{n}\mathbf{n}^\top \frac{2 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4\right)}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_1\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_4\right))} \times \right.$$
$$\left. \frac{1}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_5 + \mathbf{q}_6\right)\right) t(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5 + \mathbf{q}_6\right)} \right\rangle \cdot \tag{8}$$
$$\cdot \left\langle \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_2} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_3} \right\rangle \left\langle \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_6} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5} \right\rangle$$

$$h_6^{(3)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \mathbf{n}\mathbf{n}^\top \frac{-3 + i\tau V_F \left[-\mathbf{n}\mathbf{q}_5 + \mathbf{n}\mathbf{q}_4 \left(2 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5\right) + \mathbf{n}\mathbf{q}_6\right.}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_1\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_4\right)\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_6\right)} \right.$$
$$\left. \frac{\left. + \mathbf{n}\mathbf{q}_1 \left(-2 + i\tau V_F \left(\mathbf{n}\mathbf{q}_4 + \mathbf{n}\mathbf{q}_6\right)\right)\right]}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_5 + \mathbf{q}_6\right)\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5 + \mathbf{q}_6\right)\right)} \right\rangle \times \left\langle \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_2} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_3} \right\rangle \tag{9}$$

$$h_6^{(4)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \mathbf{n}\mathbf{n}^\top \frac{-3 + i\tau V_F \left[-\mathbf{n}\mathbf{q}_3 + \mathbf{n}\mathbf{q}_4 \left(2 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_3\right) + \mathbf{n}\mathbf{q}_2\right.}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_1\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_2\right)\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_3\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_4\right)} \times \right.$$
$$\left. \frac{\left. + \mathbf{n}\mathbf{q}_1 \left(-2 + i\tau V_F \left(\mathbf{n}\mathbf{q}_4 + \mathbf{n}\mathbf{q}_2\right)\right)\right]}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\right)\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4\right)\right)} \right\rangle \times \left\langle \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_6} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5} \right\rangle \tag{10}$$

$$h_6^{(5)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \times \left\langle \frac{2 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_6\right)}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_3\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_6\right)\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\right)\right)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_6 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\right)\right)} \right\rangle \left\langle \mathbf{n} \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_2} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_1} \right\rangle \left\langle \mathbf{n}^\top \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_4} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5} \right\rangle \tag{11}$$

$$h_6^{(6)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \mathbf{n} \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_2} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_1} \right\rangle \left\langle \mathbf{n}^\top \frac{-3 + i\tau V_F \left[-\mathbf{n}\mathbf{q}_5 + \mathbf{n}\mathbf{q}_6 \left(2 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5\right)\right.}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_3\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_4\right)} \right.$$
$$\left. \frac{\left. + \mathbf{n}\mathbf{q}_4 + \mathbf{n}\mathbf{q}_3 \left(-2 + i\tau V_F \left(\mathbf{n}\mathbf{q}_4 + \mathbf{n}\mathbf{q}_6\right)\right)\right]}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_6\right)\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5\right)\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5 + \mathbf{q}_6\right)\right)} \right\rangle \tag{12}$$

$$h_6^{(7)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \mathbf{n} \frac{-3 + i\tau V_F \left[-\mathbf{n}\mathbf{q}_1 + \mathbf{n}\mathbf{q}_6 \left(2 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_1\right) + \mathbf{n}\mathbf{q}_2\right.}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_3\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_6\right)\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_1\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_2\right)} \right.$$
$$\left. \frac{\left. + \mathbf{n}\mathbf{q}_3 \left(-2 + i\tau V_F \left(\mathbf{n}\mathbf{q}_2 + \mathbf{n}\mathbf{q}_6\right)\right)\right]}{\left(1 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\right)\right)\left(1 - i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_6 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\right)\right)} \right\rangle \times \left\langle \mathbf{n}^\top \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_4} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5} \right\rangle \tag{13}$$

$$h_6^{(8)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5} \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_6} \right\rangle \left\langle \mathbf{n} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_1} \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_2} \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle \mathbf{n}^\top \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_3} \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_4} \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5 + \mathbf{q}_6\right)} \right\rangle \tag{14}$$

$$h_6^{(9)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_3} \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_2} \right\rangle \left\langle \mathbf{n} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_1} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_6} \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\right)} \right\rangle \left\langle \mathbf{n}^\top \frac{1}{1 + i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_5} \frac{1}{1 - i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}_4} \right\rangle \tag{15}$$

Где $\langle\dots\rangle$ - подразумевает усреднение по положениям вектора $\mathbf{n}$ на сфере. Аналогично мы можем записатm и выражения на четырехвершинную диаграмму:

$$\mathbf{h}_4^{(A)} = -2\pi i\tau^3\nu_0 V_F \left\langle \mathbf{n}\frac{2i+\tau V_F\mathbf{n}\left(\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_4\right)}{\left(1+i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_1\right)\left(1-i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_2\right)\left(1+i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_3\right)\left(1-i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_4\right)}\right\rangle \tag{16}$$

$$\mathbf{h}_4^{(B)} = -4\pi^2\nu_0^2\tau^4 V_F \left\langle \mathbf{n}\frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_1}\frac{1}{1-i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_2}\right\rangle \left\langle \frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_3}\frac{1}{1-i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_4}\right\rangle \tag{17}$$

$$\mathbf{h}_4^{(C)} = -4\pi^2\nu_0^2\tau^4 V_F\ \mathbf{n}\langle \frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_1}\frac{1}{1-i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_4}\right\rangle \left\langle \frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_3}\frac{1}{1-i\tau V_F\mathbf{n}\mathbf{q}_2}\right\rangle \tag{18}$$

Отсюда, в ведущих порядках по малости входящих в Хиками-Боксы импульсах мы можем получить следующие выражения:

$$h_6 = 4\pi\nu_0\tau^4 D, \quad \mathbf{h}_4^2 = -16\pi^2\nu_0^2 D^2\tau^6\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^\dagger \tag{19}$$

Заметим, что при дальнейшей работе мы имеем следующие соотношения на импульсы, в которых наши выражения на Боксы заметно упростятся Для h_6 имеем: $\mathbf{q}_1=\mathbf{p},\mathbf{q}_2=-\mathbf{q},\mathbf{q}_3=-\mathbf{Q},\mathbf{q}_4=-\mathbf{p},\mathbf{q}_5=\mathbf{q},\mathbf{q}_6=\mathbf{Q}$ Тогда полученные нами выражения можно переписать таким образом:

$$H_6^{(1)} = 2\pi\tau^5 V_F^2\nu_0 \left\langle \mathbf{n}\mathbf{n}^\top \frac{6+2i\tau V_F\mathbf{n}(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{Q})}{(1+iV_F\tau\mathbf{n}\mathbf{p})(1+iV_F\tau\mathbf{n}\mathbf{q})(1-iV_F\tau\mathbf{n}\mathbf{Q})(1+iV_F\tau\mathbf{n}(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{Q}))} \right. \\ \left. \overline{(1-iV_F\tau\mathbf{n}(\mathbf{p}+\mathbf{Q}-\mathbf{q}))(1-iV_F\tau\mathbf{n}(\mathbf{q}+\mathbf{Q}-\mathbf{p}))}\right\rangle \tag{20}$$

$$H_6^{(2)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \mathbf{n}\mathbf{n}^\top \frac{2}{(1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{p})\,(1+i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{q}+\mathbf{Q}+\mathbf{p}))\,(1-i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{q}+\mathbf{Q}-\mathbf{p}))} \right\rangle$$
$$\left\langle \frac{1}{1-i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{Q}} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}} \right\rangle^2 \tag{21}$$

$$H_6^{(3)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \mathbf{n}\mathbf{n}^\top \frac{-3+i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{Q}-\mathbf{q}-\mathbf{p})}{(1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{p})\,(1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q})\,(1-i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{Q})\,(1+i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{q}+\mathbf{p}+\mathbf{Q}))} \times \right.$$
$$\left. \times \; \frac{1}{(1-i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{q}+\mathbf{Q}-\mathbf{p}))} \right\rangle \times \left\langle \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}} \frac{1}{1-i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{Q}} \right\rangle \tag{22}$$

$$H_6^{(4)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \mathbf{n}\mathbf{n}^\top \frac{-3+i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{Q}-\mathbf{q}-\mathbf{p})}{(1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{p})\,(1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q})\,(1-i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{Q})\,(1+i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{q}+\mathbf{p}+\mathbf{Q}))} \times \right.$$
$$\left. \times \; \frac{1}{(1-i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{q}+\mathbf{Q}-\mathbf{p}))} \right\rangle \times \left\langle \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}} \frac{1}{1-i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{Q}} \right\rangle \tag{23}$$

Откуда сразу видим, что $H_6^{(3)} = H_6^{(4)}$. Продолжая далее:

$$H_6^{(5)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \frac{2}{(1-i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{Q})\,(1-i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{q}+\mathbf{Q}-\mathbf{p}))\,(1-i\tau V_F \mathbf{n}\,(\mathbf{p}+\mathbf{Q}-\mathbf{q}))} \right\rangle$$
$$\left\langle \mathbf{n} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{p}} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}} \right\rangle \left\langle \mathbf{n}^\top \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{p}} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{n}\mathbf{q}} \right\rangle \tag{24}$$

$$H_6^{(6)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \mathbf{n} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{nq}} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{np}} \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle \mathbf{n}^\top \frac{-3 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{Q}-\mathbf{q}-\mathbf{p}\right)}{\left(1+i\tau V_F \mathbf{np}\right)\left(1+i\tau V_F \mathbf{nq}\right)\left(1-i\tau V_F \mathbf{nQ}\right)^2 \left(1-i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{p}+\mathbf{Q}-\mathbf{q}\right)\right)} \right.$$
$$\left. \frac{}{\left(1-i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}+\mathbf{Q}-\mathbf{p}\right)\right)} \right\rangle \tag{25}$$

$$H_6^{(7)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \times$$
$$\left\langle \mathbf{n} \frac{-3 + i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{Q}-\mathbf{q}-\mathbf{p}\right)}{\left(1+i\tau V_F \mathbf{np}\right)\left(1+i\tau V_F \mathbf{nq}\right)\left(1-i\tau V_F \mathbf{nQ}\right)\left(1-i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{p}+\mathbf{Q}-\mathbf{q}\right)\right)\left(1-i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}+\mathbf{Q}-\mathbf{p}\right)\right)} \right\rangle \times$$
$$\left\langle \mathbf{n}^\top \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{nq}} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{np}} \right\rangle \tag{26}$$

$$H_6^{(8)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{nq}} \frac{1}{1-i\tau V_F \mathbf{nQ}} \right\rangle \left\langle \mathbf{n} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{np}} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{nq}} \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle \mathbf{n}^\top \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{np}} \frac{1}{1-i\tau V_F \mathbf{nQ}} \frac{1}{1-i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{Q}+\mathbf{q}-\mathbf{p}\right)} \right\rangle \tag{27}$$

$$H_6^{(9)} = 2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left\langle \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{nq}} \frac{1}{1-i\tau V_F \mathbf{nQ}} \right\rangle \left\langle \mathbf{n} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{np}} \frac{1}{1-i\tau V_F \mathbf{nQ}} \frac{1}{1-i\tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{Q}+\mathbf{q}-\mathbf{p}\right)} \right\rangle$$
$$\times \left\langle \mathbf{n}^\top \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{np}} \frac{1}{1+i\tau V_F \mathbf{nq}} \right\rangle \tag{28}$$

Откуда, в частности, получаем, что $H_6^{(8)} = H_6^{(9)\top}$

Тепер, полагая, что $\mathbf{h}_4(\mathbf{q},\mathbf{Q},\mathbf{p})$ это $\mathbf{h}_4$ с $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}, \mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}, \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}+\mathbf{Q}-\mathbf{p}, \mathbf{q}_4 =$

$-\mathbf{Q}$, перепишем четырехвершинные диаграммы для $\mathbf{h}_4$.

$$\mathbf{h}_4^{(A)} = -2\pi i\tau^3\nu_0 V_F \left\langle \mathbf{n}\frac{2i - \tau V_F \mathbf{n}\left(\mathbf{q}+\mathbf{Q}\right)}{\left(1+i\tau V_F\mathbf{np}\right)\left(1+i\tau V_F\mathbf{nq}\right)\left(1+i\tau V_F\mathbf{n}(\mathbf{Q}+\mathbf{q}-\mathbf{p})\right)\left(1+i\tau V_F\mathbf{nQ}\right)}\right\rangle \tag{29}$$

$$\mathbf{h}_4^{(B)} = -2\pi\tau^3\nu_0 V_F \left\langle \mathbf{n}\frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{np}}\frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{nq}}\right\rangle \left\langle \frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{n}(\mathbf{Q}+\mathbf{q}-\mathbf{p})}\frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{nQ}}\right\rangle \tag{30}$$

$$\mathbf{h}_4^{(C)} = -2\pi\tau^3\nu_0 V_F \left\langle \mathbf{n}\frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{np}}\frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{nQ}}\right\rangle \left\langle \frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{n}(\mathbf{Q}+\mathbf{q}-\mathbf{p})}\frac{1}{1+i\tau V_F\mathbf{nq}}\right\rangle \tag{31}$$

Откуда, аналогично тому, как мы действовали перчоначально, можно получить, что в ведущих порядках:

$$h_6 = 4\pi\nu_0\tau^4 D, \quad \mathbf{h}_4^2 = -16\pi^2\nu_0^2 D^2\tau^6(\mathbf{q}+\mathbf{Q})(\mathbf{q}+\mathbf{Q})^\dagger \tag{32}$$

4 Поправка к проводимости на $\mathbf{p} = 0$

Теперь сосчитаем поправку к проводимости на нулевом векторе p. Используя формулу выше, мы можем получить:

$$\sigma^{(2)}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathbf{q})}\int_{(\mathbf{Q})}\left(\frac{1}{2\pi\nu\tau^2}\right)^2 \frac{1}{Dq^2+\omega}\frac{1}{DQ^2+\omega}\left[4\pi\nu\tau^4 D - \frac{1}{2\pi\nu\tau^2}\frac{1}{d}\frac{16\pi^2\nu_0^2 D^2\tau^6(\mathbf{q}+\mathbf{Q})^2}{D(\mathbf{Q}+\mathbf{q})^2+\omega}\right] =$$
$$= \frac{D}{2\pi^2\nu}\int_{(\mathbf{q})}\int_{(\mathbf{Q})}\frac{1}{Dq^2+\omega}\frac{1}{DQ^2+\omega}\left[1-\frac{1}{d}\frac{2D(\mathbf{q}+\mathbf{Q})^2}{D(\mathbf{Q}+\mathbf{q})^2+\omega}\right] =$$
$$= \frac{D^{1-d}\omega^{d-2}}{2\pi^2\nu}\int_{\mathbf{x}}\int_{\mathbf{y}}\frac{1}{x^2+1}\frac{1}{y^2+1}\left[1-\frac{1}{d}\frac{2(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2+1}\right] = \frac{D^{1-d}\omega^{d-2}}{2\pi^2\nu}I_d, \tag{33}$$

где

$$I_d = \int_{\mathbf{x}}\int_{\mathbf{y}}\frac{1}{x^2+1}\frac{1}{y^2+1}\left[1-\frac{1}{d}\frac{2(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2+1}\right] = \frac{2}{d}\int_{\mathbf{x}}\int_{\mathbf{y}}\frac{1}{x^2+1}\frac{1}{y^2+1}\left[\frac{d}{2}-1+\frac{1}{(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2+1}\right] =$$
$$= I_d^{(1)} + I_d^{(2)}$$

(34)

Заметим, что I_d сходится при $d < 2$. Однако имеет расходимость при $d \to 2$ Посчитаем этот интегралы в произвольной размерности и получим пространственную расходимость выражения:

$$\iint_{(\mathbf{x})(\mathbf{y})} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2} = \left(\int_{(\mathbf{x})} \frac{1}{1+x^2}\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} dt \int_{(\mathbf{x})} e^{-t\left(1+x^2\right)}\right)^2 =$$
$$= \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-t} \frac{\pi^{d/2}}{t^{d/2}} \frac{1}{(2\pi)^d}\right)^2 = \frac{\Gamma^2\left(1-\frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^d} = /d = 2-\epsilon/ = \frac{\Gamma^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{(4\pi)^d} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \frac{4}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon^2} \tag{35}$$

Тогда, учитывая все числоые коэффициенты, получим, что:

$$I^{(1)}_{d=2-\epsilon} \xrightarrow[\epsilon\to 0+]{} \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{\epsilon}\bigg|_{\epsilon\to 0} \tag{36}$$

Получаем расходящийся член.
Теперь перейдем к вычислению второго интеграла. В начале перепишем его через параметризацию Фейнмана:

$$I_3 = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2} =$$
$$= \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \iint_{\left(\mathbb{R}^{2d}\right)} \frac{2}{\left(a\left(1+x^2\right)+b\left(1+y^2\right)+(1-a-b)\left(1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2\right)\right)^3} =$$
$$= \int_0^1 da \int_0^{1-a} db \int_{\left(\mathbb{R}^{2d}\right)} \frac{2}{\left(1+(1-b)x^2+(1-a)y^2+2(1-a-b)\mathbf{x}\mathbf{y}\right)^3} \tag{37}$$

Далее диагонализуем квадратичную форму в знаменателе подыинтегральной функции линейной сдвижкой переменных:

$$1+(1-b)x^2+(1-a)y^2+2(1-a-b)\mathbf{x}y = 1+\left[(1-b)x^2+2(1-a-b)\mathbf{x}\mathbf{y}+\frac{(1-a-b)^2}{1-b}y^2\right]+$$
$$+\left[(1-a)-\frac{(1-a-b)^2}{1-b}\right]y^2 = 1+\left(\sqrt{1-b}\mathbf{x}+\frac{1-a-b}{\sqrt{y}}\right)^2+\left([1-a]-\frac{(1-a-b)^2}{1-b}\right)y^2,$$
$$\mathbf{z} = \sqrt{1-b}\mathbf{x}+\frac{1-a-b}{\sqrt{1-b}}\mathbf{y}, \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \to (\mathbf{z},\mathbf{y}),\ J = \left|\det\left(\frac{\partial x_i^{\text{old}}}{\partial x_j^{\text{new}}}\right)\right| = \left|\det\left(\frac{\partial(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial(\mathbf{z},\mathbf{y})}\right)\right| = \frac{1}{(1-b)^{d/2}} \tag{38}$$

Тогда сделаем замену:

$$\beta = (1-a) - \frac{(1-a-b)^2}{1-b} \geq 0 \tag{39}$$

И перепишем интеграл:

$$\int_0^1 da \int_0^{1-a} db \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{1}{(1-b)^{d/2}} \frac{2}{\left[1+z^2+\beta y^2\right]^3} \tag{40}$$

Для начала возьмем интеграл по векторам, вводя параметр δ, по которому мы будем дифференцировать выражение, а затем стремить его к 0.

$$\begin{gathered}
\iint_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{2}{\left[1+z^2+\beta y^2\right]^3} = \partial_\delta^2 \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{1}{1+z^2+\beta y^2+\delta}\bigg|_{\delta\to 0} = \\
= \partial_\delta^2 \int_0^{+\infty} dt \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \exp\left[-t\left(1+z^2+\beta y^2+\delta\right)\right] = \partial_\delta^2 \int_0^{+\infty} dt \frac{1}{\beta^{d/2}} \frac{\pi^d}{t^d} e^{-t(1+\delta)}\bigg|_{\delta\to 0} = \\
= \frac{\pi^d}{\beta^{d/2}} \int_0^{+\infty} t^{-d+2} e^{-t} dt = \frac{\pi^d}{\beta^{d/2}} \Gamma(3-d)
\end{gathered} \tag{41}$$

Итого имеем двумерный интеграл:

$$\int_0^1 da \int_0^{1-a} db \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \pi^d \Gamma(3-d) \frac{1}{\left[(1-b)(a+b)-a^2\right]^{d/2}} \tag{42}$$

Взять его весьма трудная задача, потому попробуем свести к одномерному. Заметим, что так как интеграл симметричен относительно перестановки a, b, весьма логично сделать замену координат:

$$\left\{\begin{array}{l} u = a+b \\ v = a-b \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{u-v}{2} \end{array}\right. \Rightarrow J = \left|\det\left(\frac{\partial(a,b)}{\partial(u,v)}\right)\right| = \frac{1}{2} \tag{43}$$

Тогда получаем:

$$\begin{gathered}
\frac{\Gamma(3-d)}{(4\pi)^d} \frac{1}{2} \int_0^1 du \int_{-u}^{u} dv \frac{1}{\left[\left(u-u^2+\frac{u^2}{4}\right)-\frac{v^2}{4}\right]^{d/2}} = \\
= \frac{\Gamma(3-d)}{(4\pi)^d} \int_0^1 du u \left(u-u^2+\frac{u^2}{4}\right)^{-d/2} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{d}{2}, \frac{3}{2}; \frac{u^2}{4\left(u-u^2\right)+u^2}\right]
\end{gathered} \tag{44}$$

Итого мы свели интеграл к одномерному, его можно взять в интересующей нас размерности 2 и получить конечные результат, который не интересует нас в заданной размерности. Тем не менее, этот интеграл прекрасно подходит для использования при вычислении поправки в размерностях $d < 2$.

Итого, учитывая размерные коэффициенты в предел $d \to 2 - 0$, а также пренебрегая расходящимися членами, мы можем провести размерную регуляризацию и получить:

$$-\frac{1}{16\pi^4 D\nu}\left(\frac{\omega^{-\epsilon}}{\epsilon}\right) \to \frac{1}{16\pi^4 D\nu}\log\omega \tag{45}$$

Далее, дабы обезразмерить выражение под логарифмом, домножим его на $((l^2/D)^{-\epsilon})$. Этот множитель является размерной поправкой, что не меняет значения выражения в заданном пределе. Притом входящее в итогове выражение соотношение является отношением длины свободного пробега $l = v_F\tau$ и характеристической диффузионной длины L_C. В итоге имеем:

$$\frac{1}{8\pi^4 D\nu}\log\gamma,\ \gamma = \frac{l}{L_\text{c}}; L_c = \sqrt{D/\omega} \tag{46}$$

Таким образом, получаем:

$$\sigma^{(d\to 2-0)} = \frac{1}{8\pi^4 D\nu}\log\gamma \tag{47}$$

5 Поправка к проводимости на конечном p

Так как в данной работе нас интересует интересует квадратичная по **p** коррекция к поправке к проводимости, разложим указанные выше выражения на Хиками-Боксы до нужного нам порядка, выделяя только расходящиеся члены, а далее усредним полученные выражения по углам, пользуясь данными выражениями для усреднений по положению на сфере вектора **n**:

$$\langle n_i n_j\rangle = \frac{1}{d}\delta_{ij}, \quad \langle n_i n_j n_k n_l\rangle = \frac{1}{d(d+2)}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta jl + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{48}$$

Начнем с разложения h_6.

$$\sigma_6 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{q}}\int_{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{2\pi\nu\tau^2}\right)^2 \frac{1}{Dq^2+\omega}\frac{1}{DQ^2+\omega}h_6(\boldsymbol{q},\mathbf{Q},\mathbf{p}) \tag{49}$$

Запишем выражения на соотвествующие диаграммы на Рисунке 2, предварительно вынося общий множитель $2\pi\tau^5 V_F^2\nu_0$. Причем заметим, что для h_6

мы можем положить бегущие по диффузонам импульсы нулевыми, так как именно в этой области будет набираться интеграл при последующем интегрировании h_6. Таким образом, получим:

1. Для h_6^1 мы имеем выражение:

$$\frac{6}{d}\delta_{ij} - \frac{20l^2}{d(d+2)}(p^2\delta_{ij} + 2p_ip_j) \tag{50}$$

2. Для h_6^2 мы имеем выражение:

$$\frac{2}{d}\delta_{ij} - \frac{12l^2}{d(d+2)}(p^2\delta_{ij} + 2p_ip_j) \tag{51}$$

3. Для h_6^3 мы имеем выражение:

$$-\frac{3}{d}\delta_{ij} + \frac{15l^2}{d(d+2)}(p^2\delta_{ij} + 2p_ip_j) \tag{52}$$

4. Для h_6^4 мы имеем выражение:

$$-\frac{3}{d}\delta_{ij} + \frac{15l^2}{d(d+2)}(p^2\delta_{ij} + 2p_ip_j) \tag{53}$$

5. Для h_6^5 мы имеем выражение:

$$-\frac{2l^2p_ip_j}{d^2} \tag{54}$$

6. Для h_6^6 мы имеем выражение:

$$\frac{2l^2p_ip_j}{d^2} \tag{55}$$

7. Для h_6^7 мы имеем выражение:

$$\frac{2l^2p_ip_j}{d^2} \tag{56}$$

8. Для h_6^8 мы имеем выражение:

$$-\frac{2l^2p_ip_j}{d^2} \tag{57}$$

9. Для h_6^9 мы имеем выражение:

$$-\frac{2l^2 p_i p_j}{d^2} \tag{58}$$

Итоговое выражение на разложение h_6 при $\mathbf{q}, \mathbf{Q} = 0$ будет иметь вид:

$$2\pi\tau^5 V_F^2 \nu_0 \left(\frac{2}{d} - \frac{l^2\left(2dp^2\delta_{ij} + 2(2+3d)p_i p_j\right)}{d^2(2+d)}\right) \tag{59}$$

Сразу отметим, что полученно выражение согласуется с посчитанным ранее выражением на $\mathbf{p} = 0$.

Теперь перейдем к аналогичному вычислению для второй диаграммы, где мы аналогичным образом будем проводить вычисления за одним исключением - в данном случае положить нулевыми импульсы, бегущие по диффузонам, мы уже не можем.

$$\sigma_4^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{q}}\int_{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{2\pi\nu\tau^2}\right)^3 \frac{1}{Dq^2+\omega}\frac{1}{DQ^2+\omega}\frac{1}{D(\mathbf{Q}+\mathbf{q})^2+\omega} h_4(\boldsymbol{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{p}) h_4^\dagger(-\boldsymbol{Q}, -\boldsymbol{q}, -\mathbf{p}) \tag{60}$$

В начале посчитаем полный вектор $\mathbf{h}_4$, а потом получим произведение векторов. Запишем выражение на составляющие вектора (с точностью до множителя вида $2\pi\tau^3\nu_0 V_F$):

$$h_4^{(A)}{}_i = -i\Bigg(l\left(q_i + Q_i\right)3/d + \frac{5l^3}{d(d+2)}\left(p_i(\mathbf{q}+\mathbf{Q})(-\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{Q}) + \left(q_i+Q_i\right)\mathbf{p}(-\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{Q}) + \right.$$
$$\left. + \left(-p_i + q_i + Q_i\right)\mathbf{p}(\mathbf{q}+\mathbf{Q})\right) \tag{61}$$

$$h_4^{(B)}{}_i = il\frac{(p_i+q_i)}{d} - \frac{1}{d^2(2+d)}(il^3\left(p_i\left(2(1+d)q^2 + 3(2+d)\mathbf{q}\ \mathbf{Q} + 3(2+d)Q^2\right) + \right.$$
$$\left. - \mathbf{p}(4\mathbf{q} + 3(2+d)\mathbf{Q})(p_i+q_i)d^2(2+d)\right) \tag{62}$$

$$h_4^{(C)}{}_i = il\frac{(p_i+Q_i)}{d} - \frac{1}{d^2(2+d)}\left(il^3\left(p_i\left(2(1+d)Q^2 + 3(2+d)\mathbf{q}\ \mathbf{Q} + 3(2+d)q^2\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2(1+d)p^2 Q_i - \mathbf{p}(4\mathbf{Q} + 3(2+d)\ \mathbf{q})(p_i+Q_i)\right)\right) \tag{63}$$

Если мы сложим эти векторы и посчитаем $h_4^i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, p)h_4^j(-\mathbf{Q}, -\mathbf{q}, -\mathbf{p})$, то получим:

$$4\ \pi^2\tau^6\nu_0^2V_F^2\ \Big(-\tfrac{4l^2(p_i-q_i-Q_i)(p_j-q_j-Q_j)}{d^2}+$$
$$+\ \frac{1}{d^3(2+d)}2l^4(\mathbf{p}(((6+23d)\mathbf{q}+4(\mathbf{Q}+5d\mathbf{Q}))q_ip_j+(4(1+5d)\mathbf{q}+(6+23d)\mathbf{Q})Q_ip_j+$$
$$+\ 2(-2+3d)\mathbf{p}(q_i+Q_i)(q_j+Q_j))+p_i\left(4p_j\left((4+5d)q^2+2(3+4d)\mathbf{q}\ \mathbf{Q}+(4+5d)Q^2\right)+\right.$$
$$+\ \mathbf{p}((6+23d)\mathbf{q}q_j+4(1+5d)\mathbf{Q}q_j+(6+23d)\mathbf{Q}Q_j+4\mathbf{q}(Q_j+5dQ_j))))$$
$$(64)$$

Опять же, можно заметить, что при $\mathbf{p}=0$ мы получаем указанное выше выражение на диаграмму.

Теперь мы готовы интегрировать выражение по имульсам в диффузонах. Сразу отмечу, что в последующих вычислениях я буду работать только с еще непосчитанными выражениями, то есть теми, что зануляются при $\mathbf{p}=0$.
Для начала, опять же, поработаем с диаграммой с h_6. Для получения поправки из данной диаграммы мы можем заметить, что нам необходимо взять лишь один четырехмерный интеграл, а именно:

$$\iint_{(Q)(\mathbf{q})}\frac{1}{Dq^2+\omega}\frac{1}{DQ^2+\omega} \tag{65}$$

Формально, мы уже работали с похожим интегралом с помощью размерной регуляризации. Однако сейчас мы будем работать с ним другим спопосбом, используя логарифмическую обрезку на $q=l^{-1}$:

$$\iint_{(Q)(\mathbf{q})}\frac{1}{Dq^2+\omega}\frac{1}{DQ^2+\omega}=\left(\int_{(\mathbf{q})}\frac{1}{Dq^2+\omega}\right)^2=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{t^{-1}}\frac{qdq}{\partial q^2+\omega}\right)^2=\frac{1}{D^2}\frac{1}{4\pi^2}\log^2\gamma \tag{66}$$

Соответвественно, данная диаграмма несет квадратичную поправку по $\mathbf{p}$ вида:

$$-\frac{l^2\log^2\omega}{128\pi^4D\nu_0}\left(p^2\delta_{ij}+4p_ip_j\right) \tag{67}$$

Или же, сводя ответ к безразмерному параметру γ, можем получить:

$$-\frac{l^2\log^2\gamma}{32\pi^4D\nu_0}\left(p^2\delta_{ij}+4p_ip_j\right) \tag{68}$$

Теперь перейдем к вычислению верхней диаграммы Рисунка 3. Можно заметить, что вычисление интегралов по импульсам после обезразмерирования сводится к вычислению следующих интегралов:

1.
$$I_1 = \iint_{(\mathbf{x})(\mathbf{y})} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2} \tag{69}$$

Данный интеграл был посчитан выше.

2.
$$I_2 = \int_{(\mathbf{x})(\mathbf{y})} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2} = I_1 \tag{70}$$

Данный интеграл несложно берется, но еще легче заметить, что заменой $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ данный интеграл сводится к I_1

3.
$$I_3 = \int_{(\mathbf{x})}\int_{(\mathbf{y})} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2} \ll I_1 \tag{71}$$

Данный интеграл был нами посчитан ранее, и, как мы помним, давал конечное значение при $d = 2 - 0$, потому не интересует нас в задаче.

4.
$$I_4 = \int_{(\mathbf{x})(5)}\int_{(5)} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2}x^2 = I_1 \tag{72}$$

Легко заметить, что данный интеграл сводится к I_2 и I_3, а именно $I_4 = I_2 - I_3 = I_2 = I_1$, где последний переход получен в силу параметрической малости I_3 по отношению к I_2.

5.
$$I_5 = \int_{(\mathbf{x})}\int_{(\mathbf{y})} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -\frac{1}{2}I_1 \tag{73}$$

Проведем преобразования, аналогичные приведенным с предыдущим интегралом: $I_5 = \frac{1}{2}(I_1 - I_3 - 2I_2) = \frac{1}{2}(I_3 - I_1) = -\frac{1}{2}I_1$.

6.
$$I_6 = \int_{(\mathbf{x})(\mathbf{y})}\int_{1} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2}\mathbf{x}\mathbf{x}^\top = \frac{\hat{1}}{d}I_1 \tag{74}$$

Покажем это проведя чуть более хитрое рассуждение: интеграл I_6 является матрицей, след которой легко посчитать - интегрирование и взятие следа коммутируют как линейные операторы, потому:

$$\begin{aligned} \mathrm{Trace}\,(I_6) &= \mathrm{Trace}\left(\int_{(\mathbf{x})(\mathbf{y})}\int_1 \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2}\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\right) = \\ &= \mathrm{Trace}\,(I_6) = \int_{(\mathbf{x})(\mathbf{y})}\int_1 \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2}\,\mathrm{Trace}(\mathbf{x}\mathbf{x}^\top) = I_4 \end{aligned} \tag{75}$$

Притом обратим внимание на тот факт, что I_6 является симметричным тензором и притом не зависит ни от каких тензорных параметров. Следовательно, он должен выражаться через инвариантный симметричный тензор евклидова пространства второго ранга - то есть через тензор Кронекера δ_{ij}. Таким образом, при интегрировании все недиагональные компоненты подыинтегрального выражения I_6 зануляются. Потому, в силу полученного свойства следа I_6 и его пропорциональности δ_{ij}, мы можем получить, что $I_6 = \frac{\hat{1}}{d}I_1$

7.
$$I_7 = \int_{(\mathbf{x})}\int_{(\mathbf{y})} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2}\mathbf{x}\mathbf{y}^\top = -\frac{\hat{1}}{2d}I_1 \tag{76}$$

Проводя абсолютно аналогичные вышесказанным рассуждения, мы можем получить указанно соотношение.

8.
$$I_8 = \int_{(\mathbf{x})}\int_{(\mathbf{y})} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 0 \tag{77}$$

Аналогично пункту 6 наш интеграл должен быть пропорционален инвариантному вектору евклидова пространства, то есть 0.

Данные утверждения позвояют свести задачу к вычислению всего одного интеграла и выражению диаграммы через сумму линейных слагаемых с коэффициентами, получаемых через свойства интегралов, указанные выше.Таким образом, можем получить:

$$\frac{l^2\log^2\omega}{64\pi^4 D\nu_0}\left(p^2\delta_{ij}+32p_ip_j\right) \sim \frac{l^2\log^2\gamma}{16\pi^4 D\nu_0}\left(p^2\delta_{ij}+32p_ip_j\right) \tag{78}$$

Откуда получаем суммарную квадратичную по p поправку:

$$\frac{l^2\log^2\omega}{128\pi^4 D\nu_0}\left(p^2\delta_{ij}+60p_ip_j\right) \sim \frac{l^2\log^2\gamma}{32\pi^4 D\nu_0}\left(p^2\delta_{ij}+60p_ip_j\right) \tag{79}$$

6 Итоговые результаты и вывод:

$$\delta\sigma^{(2)}_{ij} = \frac{1}{8\pi^4 D\nu_0}\log\gamma\delta_{ij} + \frac{l^2\log^2\gamma}{32\pi^4 D\nu_0}\left(p^2\delta_{ij} + 60p_ip_j\right) + o(p^2), \quad \gamma = \frac{l}{L_c}, \quad L_c = \sqrt{\frac{D}{\omega}} \tag{80}$$

Таким образом нами была посчитана квадратичная по **p** коррекция к уже известной поправке к расходимости. Данный результат можно рассматривать как поправку к известной формуле Друде и коррекцию к главной квантовой поправке к проводимости, которая имеет вид:

$$\delta\sigma_{0\,ij} = -\frac{1}{2\pi^2}\log\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)\delta_{ij} \sim \frac{1}{\pi^2}\log(\gamma)\delta_{ij} \tag{81}$$

Данное явление известно как явление слабой локализации (впервые было рассмотрено в (3)), что сообщает нам о локализации электронных состояний при $T = 0$, а также о неприменимости применения теории кинетического уравенения при $t \geq \tau\exp(p_F l)$.
Заметим, что полученная в данной работе поправка к проводимости на $p = 0$ много меньше главной поправки к проводимости примерно в $E_F\tau$ раз, в то время как суммарная поправка на нулевом p будет иметь общий расходящийся префактор вида $\log(\gamma)$. В это же время квадратичный по **p** член имеет большую расходимость по ω вида $\log^2(\omega)$. Формально это означает то, что у нас появляется критерий применимости нашей теории для возможных значений ипульса вида: $p \leq \sqrt{\frac{p_F}{\log(\gamma)l}}$, так как при $p \approx \sqrt{\frac{p_F}{\log(\gamma)l}}$ ведущая квантовая поправка сравнивается с квадратично по ипульсу, полученной в этой работе.

Список литературы

[1] Ostrovsky, Pavel Nakayama, Tomoyuki Muttalib, Khandker Woelfle, Peter.. Scale-dependent correction to the dynamical conductivity of a disordered system at unitary symmetry. New Journal of Physics. **15**, 5 (2012).

[2] S. Hikami, in Anderson Localization, Eds. H. Nagaoka and H. Fukuyama, Springer, Berlin (1982); Phys. Rev. B **24**, 2671 (1981).

[3] P. Gor'kov, A. Larkin, D. E. Khmel'nitskii. Particle Conductivity in a Two-Dimensional Random Potential. JETP Lett. **30**, 228 (1979)