

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Аномальный эффект Холла в
гидродинамическом режиме»
(Дипломная работа бакалавра)

студента Б02-921 группы
Григорян К.К.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., член-корр. РАН Глазов М.М.

МФТИ 2023

Аннотация

Изучен аномальный эффект Холла для двумерных электронов, распространяющихся в узком канале в гидродинамическом режиме, когда частота межэлектронных столкновений значительно превосходит как частоту рассеяния на дефектах и фононах, так и обратное время пролета ширины канала. Методом решения кинетического уравнения в приближении времени релаксации найдены вклады в аномальное холловское поле эффектов асимметричного рассеяния, сдвига волновых пакетов и аномальной скорости. Показано, что в отсутствие процессов рассеяния по импульсу в объеме канала, аномальный эффект Холла за счет электрон-электронных столкновений не возникает.

Содержание

Содержание	2
1 Введение	3
2 Постановка задачи	4
2.1 Вырожденный электронный газ в магнитном поле	5
2.2 Кинетическое уравнение с учетом аномальных вкладов . .	6
2.3 Функция распределения при наличии электрического поля	10
3 Эффект Холла	12
3.1 Кинетическое уравнение	12
3.2 Нормальный и аномальный эффекты Холла в гидродина- мическом режиме	13
4 Заключение	18
5 Список литературы	19

1 Введение

Процессы транспорта спиновых и долинных степеней свободы представляет особый интерес в связи с развитием спиновой физики [1]. Спин-орбитальное взаимодействие приводит к аномальному транспорту, когда поперечный внешнему электрическому полю электрический ток генерируется в спин-поляризованных средах. Это явление носит название аномального эффекта Холла. Большую значимость имеет исследование аномального эффекта Холла и связанных с ним явлений, в частности, спинового и долинного эффектов Холла. Спин-орбитальное взаимодействие приводит к противонаправленному движению частиц с противоположными ориентациями спинов (или находящихся в разных долинах зоны Бриллюэна). Это приводит к накоплению спиновой и долиновой поляризации на краях образца. При наличии внешнего магнитного поля возникает средняя в пространстве поляризация электронов, а спиновый (или долинный ток) конвертируется в электрический. Это и приводит к аномальному эффекту Холла.

Обнаруженный в конце 19ого века [2], аномальный эффект Холла широко исследуется в разных системах теоретически и экспериментально [3, 4]. В последние годы интерес исследователей, занимающихся электронным транспортом, сместился в сторону изучения сверхчистых электронных каналов, где может реализовываться вязкое течение электронного газа – гидродинамический режим [5, 7, 6, 8]. В этом случае частота межэлектронных столкновений значительно превосходит частоту рассеяния электронов на фононах и статических примесях, а если канал, в котром распространяются электроны, является достаточно узким, то реализуется пуазейлевское течение электронов [9, 10]. Нормальный эффект Холла в таких системах был исследован в работах [11, 12]. Несмотря на то, что в ряде работ обсуждался и аномальный эффект Холла в гидродинамических каналах и связанные явления [13, 14, 15, 17], последовательная теория аномального эффекта Холла отсутствует. В работе [18] была построена последовательная теория долинного и спинового эффектов Холла в сверхчистых электронных каналах, в том числе и в гидродинамическом режиме. Наша цель - построить соответствующую теорию аномального эффекта Холла, учитывающую три основных вклада в эффект: вклад аномальной скорости, вклад сдвигов волновых пакетов при рассеянии (side jump) и вклад асимметричного рассеяния (skew scattering).

2 Постановка задачи

Рассматриваются двумерные электроны, находящиеся в канале ширины w , см. рис. 1. Вдоль оси канала y приложено электрическое поле E_0 . Без магнитного поля спин-орбитальное взаимодействие приводит за счет эффектов асимметричного рассеяния, квантовомеханических сдвигов волновых пакетов и эффекта аномальной скорости к возникновению спинового тока вдоль оси x . Это – спиновый эффект Холла. Однако, движение электронов в этом направлении ограничивается стенками канала, поэтому спиновый ток через границы канала течь не может и возникает неоднородное распределение спиновой поляризации. Его вид определяется тем, что диффузионный спиновый ток, вызванный этим распределением, компенсирует вклад от тока, создаваемого спиновым эффектом Холла.

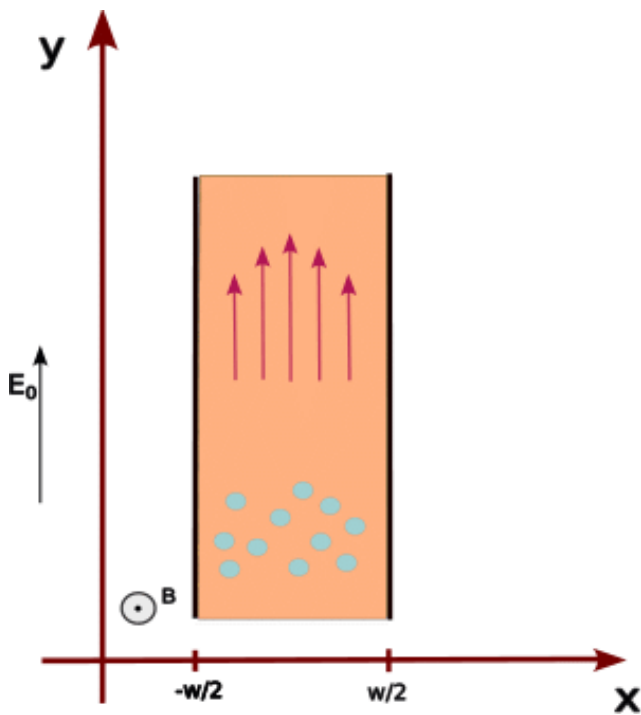


Рис. 1: Схема канала при наличии внешнего электрического поля вдоль оси канала $\mathbf{E} \parallel y$ и магнитного поля, перпендикулярного плоскости канала $\mathbf{B} \parallel z$.

При приложении магнитного поля по оси z возникают два эффекта. Во-первых, за счет силы Лоренца траектории электронов закручиваются, и возникает электрический ток вдоль оси x . Опять же, через границы образца это ток течь не может, поэтому накопление зарядов на границах вызывает электрическое поле – поле Холла – которое блокирует поперечный ток. Это – обычный (нормальный) эффект Холла. Во-вторых, магнитное поле за счет зеемановского расщепления приводит к спиновой поляризации электронов. Поэтому спиновый ток сопровождается электрическим, а значит возникает – аномальный эффект Холла, обусловленный спиновой поляризацией электронов. Абсолютно аналогичная ситуация возникает в двухдолинных полупроводниках, где в качестве спиновой степени свободы может выступать долинная степень свободы. Наша задача состоит в расчете аномального вклада в холловское поле.

2.1 Вырожденный электронный газ в магнитном поле

При наличии магнитного поля электроны с разными спинами приобретают разные энергии, и меняется заполнение электронных уровней, как показано на рисунке 2.

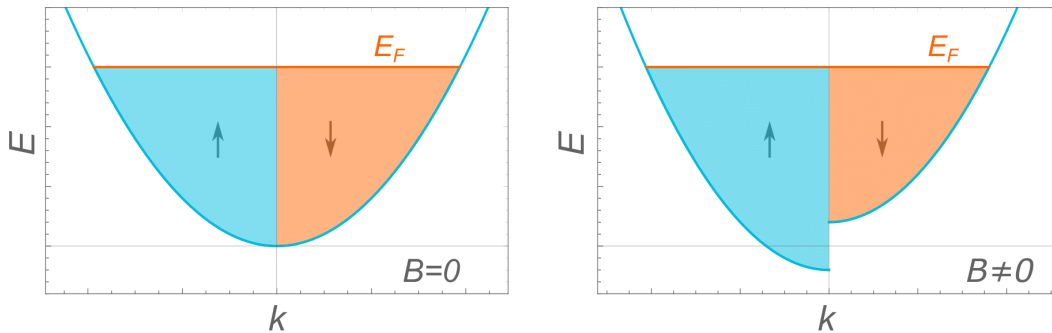


Рис. 2: Спектр электронных состояний: слева без магнитного поля, справа в магнитном поле.

Гамильтониан взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}g\mu_B B, \quad (1)$$

где g - это g -фактор электрона.

После выравнивания химических потенциалов в спиновых подзонах концентрации электронов с разными спинами уже не равны, и их можно найти по формуле

$$N_{\uparrow\downarrow} = \int_{\mp g\mu_B B/2}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}} + 1} \frac{d^2p}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (2)$$

Здесь μ – химический потенциал, T – температура, выраженная в единицах энергии. После небольших вычислений получаются значения концентрации соответственно для электронов со спином вверх \uparrow и со спином вниз \downarrow .

$$N_{\uparrow} = \gamma T \ln \left(1 + e^{\frac{2\mu + g\mu_B B}{2T}} \right), \quad N_{\downarrow} = \gamma T \ln \left(1 + e^{\frac{2\mu - g\mu_B B}{2T}} \right), \quad (3)$$

где $\gamma = m/(2\pi\hbar^2)$ – плотность состояний, и с учетом того что $\mu \approx \epsilon_F \gg T$ в линейном порядке по B получаем:

$$N_{\uparrow} = \gamma \left(\epsilon_F + \frac{g}{2}\mu_B B \right), \quad N_{\downarrow} = \gamma \left(\epsilon_F - \frac{g}{2}\mu_B B \right) \quad (4)$$

Введем также удобное обозначение для среднего спина:

$$S_z = \frac{N_{\uparrow} - N_{\downarrow}}{2} = \gamma \frac{g\mu_B B}{2}. \quad (5)$$

2.2 Кинетическое уравнение с учетом аномальных вкладов

Механизмы аномального эффекта Холла подробно были рассмотрены в статьях [18, 19]. Приведем тут краткое их описание. В нашей работе будем учитывать три основных эффекта: “Аномальная скорость”, “Асимметричное рассеяние на дефектах” и “Сдвиг волновых пакетов при рассеянии”.

Аномальная скорость:

В системах с ненулевой кривизной Берри он выступает в роли “эффективного магнитного поля” и влияет на движение частиц в потенциальном силовом поле, в нашем случае в приложенном электрическом

поле, о чем можно подробнее прочитать в [19]. Кривизну Берри для электрона в зоне проводимости с проекцией спина $+1/2$ можно записать в виде :

$$\mathcal{F} = 2\Im \left\{ \left\langle \frac{\partial u_{c,\mathbf{k}}}{\partial k_y} \left| \frac{\partial u_{c,\mathbf{k}}}{\partial k_x} \right\rangle \right\} \hat{z} = -2\xi \hat{z}, \quad (6)$$

где \hat{z} - единичный вектор по направлению нормали плоскости, и в рамках двухзонной модели, $\xi = \gamma^2/E_g^2$, E_g - ширина запрещенной зоны, $\gamma = \hbar p_{cv}/m_0$, p_{cv} - междузонный матричный элемент импульса. Последний для удобства выбран вещественным. Соответственно аномальная (дрейфовая) скорость, возникающая из-за кривизны Берри, имеет вид:

$$\mathbf{v}_a = \frac{1}{\hbar} [\mathcal{F} \times \mathbf{F}] = -\frac{2\xi e}{\hbar} [\hat{z} \times \mathbf{E}]. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{E} – приложенное к электронам внешнее электрическое поле, $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$. Для электронов с противоположной проекцией спина, $-1/2$, кривизна Берри имеет противоположный знак, соответственно, аномальная скорость противоположна. Это приводит к возникновению спинового тока за счет аномальной скорости и при наличии поляризации аномального эффекта Холла.

Сдвиг волновых пакетов при рассеянии:

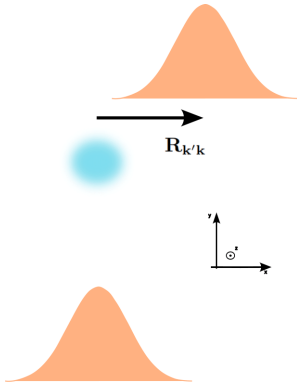


Рис. 3: Сдвиг электронного волнового пакета при рассеянии на примесях.

Аномальная скорость может возникать и под действием сил, возникающих при рассеянии электрона на примесях, что схематически показано

на рисунке 3. Учитывая кривизну Берри и потенциальное взаимодействие с примесью можно написать выражение для сдвига на примесях:

$$\delta \mathbf{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_a(t) dt = \left[\mathcal{F} \times \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{sc}(t) dt \right] = [\mathcal{F} \times (\mathbf{k}' - \mathbf{k})]. \quad (8)$$

Детальный анализ показывает [19], что полный сдвиг электронного волнового пакета при рассеянии принимает вид:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \equiv (X_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}, Y_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}) = \xi \left(1 + \frac{U_v}{U_c} \right) [(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \times \hat{z}]. \quad (9)$$

Здесь U_c и U_v константы взаимодействия электрона с точечным дефектом в зоне проводимости и в валентной зоне. Сдвиги волновых пакетов с противоположными спинами направлены в противоположные стороны, это приводит к возникновению спинового тока, а при наличии магнитного поля и спиновой поляризации – аномального эффекта Холла.

Асимметричное рассеяние:

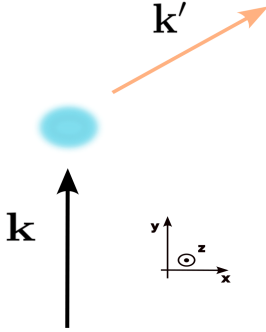


Рис. 4: Асимметричное рассеяние на примесях: \mathbf{k}' , \mathbf{k} начальный и конечный волновые вектора электрона.

Еще один механизм генерации спинового тока связан с асимметрией рассеяния электронов на примесях. Асимметричная часть в вероятности рассеяния электрона на примеси с начальным и конечным волновыми векторами \mathbf{k}' , \mathbf{k} – $W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^{(as,imp)}$ возникает из-за асимметричного вклада в матричный элемент потенциала взаимодействия $M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = U_c + i\xi U_v [\mathbf{k}' \times \mathbf{k}]_z$,

который можно вычислить в третьем порядке по теории возмущений:

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^{(as,imp)} = \frac{2\pi}{\hbar} n_i \delta(\epsilon_k - \epsilon_{k'}) \left| M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} + \sum_p \frac{M_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} M_{\mathbf{p}\mathbf{k}}}{\epsilon_k - \epsilon_p + i0} \right|^2. \quad (10)$$

Из чего получается:

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^{(as,imp)} = \xi S_{imp} [\mathbf{k} \times \mathbf{k}']_z \delta(\epsilon_k - \epsilon_{k'}), \quad S_{imp} = \frac{2\pi U_v}{\tau_{imp}}, \quad (11)$$

где τ_{imp} – время рассеяния на примеси, найденное без учета асимметрии рассеяния.

Расчет спинового тока и аномального эффекта Холла будет выполняться в рамках кинетического уравнения Больцмана, в котором учтены вклады аномальной скорости и сдвиговые вклады. Кинетическое уравнение на электронную функцию распределения $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ [спиновый/долинный индекс у функции распределения опущен для сокращения записи] в электрическом поле имеет вид:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\hbar} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = Q_{imp} \{f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\} + Q_{ee} \{f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\}, \quad (12)$$

где $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{B}]$ – сила, действующая на электроны и включающая в себя как силу от электрического поля, так и силу Лоренца от магнитного поля, $Q_{imp} \{f_{\mathbf{p}}\}$ электрон-примесный интеграл столкновений, $Q_{ee} \{f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\}$ – интеграл электрон-электронных столкновений. Скорость электрона $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ содержит как стандартный вклад $\hbar\mathbf{p}/m$, так и аномальные вклады, обсуждавшиеся выше. Электрон-примесный интеграл столкновения содержит симметричную часть, отвечающую за релаксацию функции распределения к равновесной, и асимметричную, отвечающую за асимметричное рассеяние частиц.

$$Q_{imp} \{f_{\mathbf{p}}\} = Q_{imp}^s \{f_{\mathbf{p}}\} + Q_{imp}^{as} \{f_{\mathbf{p}}\}. \quad (13)$$

Кинетическое уравнение (12) имеет простой физический смысл: функция распределения электронов меняется в \mathbf{r} -пространстве за счет движения электронов со скоростью $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ и в \mathbf{p} -пространстве за счет действия силы \mathbf{F} и столкновений, описываемых интегралами столкновений. Кинетическое уравнение применимо, если масштабы пространственного изменения функции распределения значительно превосходят длину волны

электрона, а характерная кинетическая энергия электронов превосходит столкновительное уширение уровней (обратное время жизни квазичастиц).

В гидродинамическом режиме межэлектронные столкновения доминируют над всеми остальными процессами релаксации. Определим, какие из перечисленных выше вкладов остаются, если в системе присутствуют только столкновения электронов друг с другом. *Аномальная скорость*, очевидно, не зависит от процессов рассеяния и соответствующий вклад должен быть и в гидродинамическом режиме. Вклад от *асимметричного рассеяния* в спиновый и долинный эффект Холла подавлен (он возникает в следующих за T^2 , где T -температура, порядках, в то время как частота электрон-электронных столкновений ведет себя как T^2 , см. [18, 20]). Более того, межэлектронные столкновения сохраняют полный импульс пары и не приводят к току частиц (но могут приводить к спиновому или долинному току [18]). Что касается сдвиговых вкладов при межчастичных взаимодействиях, то опять же в силу закона сохранения импульса направленных сдвигов пары электронов не возникает в системах с параболической дисперсией, см. обсуждение в [18] и работу [21]. Таким образом остается лишь вклад от аномальной скорости.

2.3 Функция распределения при наличии электрического поля

Перейдем теперь к решению кинетического уравнения. Для дальнейшего удобно сначала найти функцию распределения электронов во внешнем электрическом поле без учета и силы Лоренца, и аномальных вкладов. Нормальный и аномальный эффект Холла будут найдены в следующем разделе. Мы рассматриваем канал с диффузным рассеянием на границе. Диффузное граничное условие для электронной функции распределения на границах канала (см. рис. 1):

$$f_{\mathbf{p}}\left(\pm\frac{w}{2}\right) = \begin{cases} const, & p_x > 0, & x = -\frac{w}{2} \\ const, & p_x < 0, & x = \frac{w}{2} \end{cases} \quad (14)$$

В присутствии внешнего статического электрического поля $\mathbf{E}_0 \parallel y$ кинетическое уравнение принимает вид:

$$v_x \frac{\partial \delta f_{\mathbf{p}}(x)}{\partial x} + \frac{\delta f_{\mathbf{p}}(x)}{\tau} + eE_0 v_y f'_0 = Q_{ee} \{ \delta f_{\mathbf{p}} \}, \quad (15)$$

где f_0 - равновесное распределение Ферми-Дирака, его f'_0 - производная по энергии и $\delta f_{\mathbf{p}}$ - наведенная электрическим полем поправка к функции распределения. В гидродинамическом режиме, когда электрон-электронное рассеяние оказывается главным, достаточно учесть межчастичные столкновения в приближении времени релаксации.¹ Поскольку столкновения электронов друг с другом сохраняют импульс пары, $Q_{ee} \{ \delta f_{\mathbf{p}} \}$ не действует на первую угловую гармонику функции распределения (описывающую наличие у электронного газа среднего импульса), но приводит к релаксации более высоких гармоник. Релаксацию второй гармоники функции распределения будем описывать временем релаксации τ_{ee} (более высокие гармоники роли не играют). Решаем задачу с помощью разложения на угловые гармоники $\delta f_{\mathbf{p}}(x) = \sin \varphi_{\mathbf{p}} F_1(x) + \sin 2\varphi_{\mathbf{p}} F_2(x)$ и из уравнения (15) получим систему уравнений на соответствующие гармоники функции распределения:

$$\frac{l}{2} \frac{\partial F_2}{\partial x} + F_1 = -eE_0 l f'_0, \quad \frac{l_{ee}}{2} \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_2 = 0. \quad (16)$$

Здесь $l = v_F \tau$ - длина свободного пробега по отношению к электрон-примесному рассеянию, $l_{ee} = v_F \tau_{ee}$ - длина свободного пробега по отношению к электрон-электронным столкновениям, причем $l_{ee} \ll l$, v_F - фермиевская скорость электронов. Мы предполагаем температуру T достаточно низкой, так чтобы электронный газ можно было бы считать вырожденным, но $\tau_{ee} \propto T^{-2} \ll \tau$. Решая их, получаем окончательно:

$$\delta f_{\mathbf{p}}(x) = -\frac{eE_0 v_y f'_0}{2\eta} \left\{ \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right] + \frac{2l_{ee} v_x}{v} x \right\}, \quad (17)$$

где $\eta = vl_{ee}/4$ - вязкость двумерного электронного газа. Подробнее об этом можно посмотреть в [18]

¹Баллистический режим рассмотрен в ВКР Д.С. Зограбяна [22].

3 Эффект Холла

Перейдем теперь к теории транспортных эффектов для электронов в гидродинамическом режиме при наличии внешнего магнитного поля. Наличие магнитного поля приводит к появлению поперечного к внешнему электрическому полю \mathbf{E} тока электронов, обусловленных как (i) действием силы Лоренца, так и (ii) преобразованием спинового/долинного тока в электрический. Однако, вдоль оси x электрический ток течь не может, так как границы канала непроницаемы, а поток электронов подчиняется уравнению неразрывности. В результате происходит накопление электронов на границах образца, это приводит к дисбалансу зарядов и возникновению электрического поля $\mathbf{E}_H \parallel x$, которое, в свою очередь, индуцирует дрейфовый ток, компенсирующий исходный. Наша цель заключается в определении \mathbf{E}_H и, главным образом, аномальных вкладов в холловское поле.

3.1 Кинетическое уравнение

Кинетическое уравнение при наличии слабого магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости по направлению z принимает вид (ср. с (12)):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}^\pm f_{\mathbf{p}}^\pm + e \left(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_H + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^\pm}{\partial \mathbf{p}} = Q_{imp}^\pm + Q_{ee}^\pm, \quad (18)$$

где \mathbf{B} - внешнее магнитное поле, \mathbf{E}_H - холловское поле, а знаки \pm соответствуют двум проекциям спина или двум долинам. Представим функцию распределения в виде

$$f_{\mathbf{p}}^\pm = f_0 + \delta f_{\mathbf{p}}^\pm + \Delta f_{\mathbf{p}}^\pm, \quad (19)$$

где $\delta f_{\mathbf{p}}^\pm$ - неравновесная поправка, связанная с наличием внешнего электрического поля, а $\Delta f_{\mathbf{p}}^\pm$ - поправка, связанная с эффектом Холла.

Удобно перейти к проинтегрированной по энергии функции распределения, считая, что тепловое размытие функции распределения мало по сравнению с энергией Ферми электронов. Введем обозначения для проинтегрированной по энергии функции распределения

$$\delta F_\varphi^\pm(x) = \gamma \int_0^\infty \delta f_{\mathbf{p}}^\pm(x) d\epsilon_{\mathbf{p}}, \quad \Delta F_\varphi^\pm(x) = \gamma \int_0^\infty \Delta f_{\mathbf{p}}^\pm(x) d\epsilon_{\mathbf{p}}, \quad (20)$$

где, как и выше, $\gamma = m/2\pi\hbar^2$ - плотность состояний, и $\epsilon_p = p^2/2m$. Интегрируя кинетическое уравнение по энергии получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_x^\pm \Delta F_\varphi^\pm(x)) + \omega_c \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta F_\varphi^\pm(x) - v_x^\pm e\gamma E_H = Q_{imp}(\Delta F_\varphi^\pm) + Q_{ee}(\Delta F_\varphi^\pm), \quad (21)$$

Таким образом, кинетическое уравнение значительно упростилось: в нем осталась координатная зависимость и зависимость только от ориентации импульса электронов - угла φ .

В отсутствие аномальных вкладов зависимость от спинового/долинного индекса можно опустить, при этом кинетическое уравнение (21) описывает нормальный эффект Холла. Ниже мы воспроизведем известный результат [11] для холловского поля в гидродинамическом режиме из этого уравнения. Удобно просуммировать уравнения (21) по долинному индексу, чтобы исключить эффект возникновения спиновой/долинной поляризации, исследованный в [18]. Сделаем для этого замены

$$\Delta F_\varphi = (\Delta F_\varphi^+ + \Delta F_\varphi^-)/2, \quad \delta F_\varphi = (\delta F_\varphi^+ + \delta F_\varphi^-)/2, \quad S_z = (N^+ - N^-)/2 = \gamma g \mu_B B/2.$$

С учетом этих замен, и того что $v_a^+ = -v_a^-$, $v_{sj}^+ = -v_{sj}^-$ (см. разд. 2.2), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (v_x \Delta F_\varphi(x) + (v_a^+ + v_{sj}^+) S_z) + \omega_c \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta F(x) - v_x e\gamma E_H = \\ = \frac{Q_{imp}(\Delta F_\varphi^+) + Q_{imp}(\Delta F_\varphi^-)}{2} + Q_{ee}(\Delta F_\varphi). \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) – основное уравнение, которое нам предстоит решить.

3.2 Нормальный и аномальный эффекты Холла в гидродинамическом режиме

С учетом аномальных эффектов кинетическое уравнение (22) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (v_x \Delta F_\varphi(x) + (v_a^+ + v_{sj}^+) S_z) + \omega_c \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta F(x) - v_x e\gamma E_H = \\ = \frac{G^+ + G^-}{2} - \frac{\Delta F_\varphi - \overline{\Delta F_\varphi}}{\tau_{imp}} - Q_{ee}(\Delta F_\varphi). \end{aligned} \quad (23)$$

Вид интеграла электрон-электронных столкновений будет уточнен ниже. Согласно уравнению (17)

$$\delta F_\varphi = \frac{\delta F_\varphi^+ + \delta F_\varphi^-}{2} = -\frac{eE_0 v_y}{2\eta} \left\{ \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right] + \frac{2l_{ee} v_x}{v} x \right\}, \quad (24)$$

поэтому, как показывает расчет, член с силой Лоренца будет содержать первую и вторую угловую гармоники вектора \mathbf{p} :

$$\omega_c \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta F(x) = \omega_c \left(- \left(\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right) \frac{eE_0 v \cos \varphi}{2\eta} - \frac{eE_0 v l_{ee} \cos 2\varphi}{\eta} x \right). \quad (25)$$

В соответствии с этим, будем искать решение, удерживая в разложении искомой функции распределения ΔF_φ также нулевую и две нетривиальные угловые гармоники

$$\Delta F_\varphi = \Delta F(x) + \cos \varphi \Delta F_1(x) + \cos 2\varphi \Delta F_2(x). \quad (26)$$

Интеграл электрон-электронных столкновений сохраняет первую гармонику (что соответствует сохранению полного импульса электронов при столкновении), поэтому имеет следующий вид (при тех же предположениях, что было получено выше уравнение (17))

$$Q_{ee}(\Delta F_\varphi) = \frac{\cos 2\varphi \Delta F_2(x)}{\tau_{ee}}. \quad (27)$$

Подставляя в таком виде приходим к уравнению вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} v \Delta F_1(x) + (v_a^+ + v_{sj}^+) S_z \right) + v \cos \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta F(x) + \frac{1}{2} \Delta F_2(x) \right) - \right. \\ \left. - \left(\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right) \frac{eE_0 \omega_c}{2\eta} - e\gamma E_H + \frac{\Delta F_1(x)}{l_{imp}} \right) + \\ + \frac{\cos 2\varphi}{2} v \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta F_1(x) - 2 \frac{eE_0 l_{ee} \omega_c}{\eta} x + \frac{2\Delta F_2(x)}{l_{imp}} + \frac{2\Delta F_2(x)}{l_{ee}} \right) = \\ = \frac{G^+ + G^-}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Далее из этого уравнения получаем систему уравнений, решая которые получим интересующие нас результаты.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} v \Delta F_1(x) + (v_a^+ + v_{sj}^+) S_z \right) = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta F(x) + \frac{1}{2} \Delta F_2(x) \right) - \left(\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right) \frac{e E_0 \omega_c}{2\eta} - e\gamma E_H + \frac{\Delta F_1(x)}{l_{imp}} = \\ = \frac{1}{2\pi v} \int \cos \varphi (G_\varphi^+ + G_\varphi^-) d\varphi, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta F_1(x) - 2 \frac{e E_0 l_{ee} \omega_c}{\eta} x + \frac{2 \Delta F_2(x)}{l_{ee}} = 0, \quad (31)$$

где мы воспользовались тем, что $l_{ee} \ll l_{imp}$. Из этой системы уравнений нам необходимо найти как поправки к функции распределения так и поле Холла E_H . Технически, проще всего действовать следующим образом: из первого и последнего уравнений можно найти последовательно $\Delta F_1(x)$ и $\Delta F_2(x)$. Далее из (30) можно получить уравнение, связывающее $\Delta F(x)$ и E_H :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Delta F(x) = \frac{1}{2\pi v} \int_0^{2\pi} (G^+(\varphi) + G^-(\varphi)) \cos \varphi d\varphi - \frac{\omega_c e E_0}{2\eta} l_{ee}^2 + \\ + \frac{l_{ee}}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta F_1(x) + \omega_c \frac{e E_0}{2\eta} \left(\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right) + e\gamma E_H - \frac{\Delta F_1(x)}{l_{imp}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Для нахождения холловского поля воспользуемся известным формальным приемом, связанным с переходом от химического к электрохимическому потенциалу электронов. А именно, введем обозначения

$$E_H = -\partial\Phi/\partial x, \quad \frac{\partial}{\partial x} \Delta F(x) - e\gamma E_H = \frac{\partial}{\partial x} (\Delta F(x) + e\gamma\Phi) = \frac{\partial}{\partial x} \Delta \tilde{F}(x),$$

и примем во внимание то, что вклад в электрический ток от электрического поля, вызванного дисбалансом зарядов, значительно превышает вклад в ток от соответствующего градиента концентрации. Поэтому можно записать, что $\partial \Delta \tilde{F}(x)/\partial x = -e\gamma E_H$ и, соответственно, получить

для холловского поля:

$$-\gamma E_H = \frac{1}{2\pi v e} \int_0^{2\pi} [G^+(\varphi) + G^-(\varphi)] \cos \varphi d\varphi + \omega_c \frac{E_0}{2\eta} \left(\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right) - \frac{\Delta F_1(x)}{e l_{imp}} - \frac{\omega_c E_0}{2\eta} l_{ee}^2 + \frac{l_{ee}}{4e} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta F_1(x). \quad (33)$$

Пренебрегая аномальными вкладами получаем для холловского поля

$$\gamma E_H^0 = 2\omega_c E_0 \tau_{ee} - \omega_c \frac{2E_0}{v l_{ee}} \left(\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right), \quad (34)$$

что согласуется с полученным в [11] ответом.

Перейдем теперь к нашим основным результатам и получим вклад от аномальной скорости и сдвига волновых пакетов. Для этого мы учтем полученные в разделе 2.2 выражения для соответствующих вкладов:

$$\begin{aligned} v_{sj}^+ &= \frac{1}{\tau_{imp}} \frac{e E_0}{2\eta \hbar} \xi \left(\frac{U_v}{U_c} + 1 \right) \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right], \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{sj}^+ &= -\frac{1}{\tau_{imp}} \frac{e E_0}{\eta \hbar} \xi \left(\frac{U_v}{U_c} + 1 \right), \\ \Delta F_1(x) &= -2 \frac{(v_a^+ + v_{sj}^+) S_z}{v}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta F_1(x) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{v_{sj}^+ S_z}{v}. \end{aligned} \quad (35)$$

В пределе, когда есть только электрон-электронные столкновения, $v_{sj}^\pm \equiv 0$, $G^\pm = 0$, и следует учесть только вклад аномальной скорости. При этом

$$\Delta F_1 = -\frac{2v_a^+ S_z}{v}, \quad (36)$$

и не зависит от координаты. Из (33) следует, что при $l_{imp} \rightarrow \infty$ холловское поле $E_H \equiv 0$. Физически, этот результат несложно понять: закон сохранения импульса при межэлектронных столкновениях запрещает генерацию электрического тока, а значит, не будет возникать заряд на краях канала и поле Холла будет равно нулю.

Поэтому для получения ненулевого ответа требуется учесть поправки, связанные с рассеянием электронов по импульсу. Подстановка выра-

жений (35) в (33) с учетом конечной l_{imp} дает

$$E_H^a = -\frac{1}{\gamma} \frac{4\xi E_0 S_z}{\hbar l_{imp} v}, \quad (37)$$

$$E_H^{sj} = -\frac{1}{\gamma} \frac{S_z}{v} \frac{1}{\tau_{imp}} \frac{E_0}{\eta \hbar} \xi \left(\frac{U_v}{U_c} + 1 \right) \left(\frac{1}{l_{imp}} \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right] + \frac{l_{ee}}{2} \right). \quad (38)$$

Посчитаем теперь вклад в холловское поле связанное с механизмом асимметричного рассеяния. Интеграл столкновений примет вид

$$\begin{aligned} G_{sk}^\pm(x, \varphi) &= \pm S_{imp} \gamma \tau \frac{\epsilon_F}{\hbar} \frac{\xi e}{v \hbar} E_0 N^\pm \frac{4}{l_{imp} l_{ee}} \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right] \cos \varphi = \\ &= \pm S_{imp} \frac{\tau \xi e}{\hbar v \hbar} E_0 (N^\pm)^2 \frac{4}{l_{imp} l_{ee}} \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right] \cos \varphi. \end{aligned} \quad (39)$$

Считаем далее $(G_{sk}^+ + G_{sk}^-)/2$, и вклад в холловское поле от асимметричного рассеяния

$$\frac{G_{sk}^+ + G_{sk}^-}{2} = S_{imp} \frac{\tau e \xi}{\hbar^2 v} E_0 N_1 S_z \frac{8}{l_{imp} l_{ee}} \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right] \cos \varphi, \quad (40)$$

$$E_H^{sk} = -S_{imp} \frac{1}{\gamma} \frac{\tau \xi}{\hbar^2 v^2} E_0 N_1 S_z \frac{8}{l_{imp} l_{ee}} \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right], \quad (41)$$

где $N_1 = (N^+ + N^-)/2 = \gamma \epsilon_F$. Рассмотрим еще вклад от аномального распределения с учетом электрон-примесных столкновений G_{adist}

$$G_{adist}^\pm = \mp \left(1 + \frac{U_v}{U_c} \right) \frac{2\xi e}{l_{imp} \hbar} E_0 N^\pm \cos \varphi \quad (42)$$

$$\frac{G_{adist}^+ + G_{adist}^-}{2} = - \left(1 + \frac{U_v}{U_c} \right) \frac{2\xi e}{l_{imp} \hbar} E_0 S_z \cos \varphi \quad (43)$$

$$E_H^{adist} = \left(1 + \frac{U_v}{U_c} \right) \frac{1}{\gamma} \frac{2\xi}{v l_{imp} \hbar} E_0 S_z. \quad (44)$$

Полученные выражения являются основным оригинальным результатом данной работы. Подчеркнем, что при $l_{imp} \rightarrow \infty$ аномального эффекта Холла в гидродинамическом режиме нет. Видно, что вклады аномальной скорости и аномального распределения приводят к постоянному холловскому полю, а сдвиговой вклад к нетривиальной зависимости поля Холла от координаты. Как и для спинового/долинного эффектов Холла [18] вклад аномального распределения и вклад аномальной скорости частично компенсируют друг друга.

4 Заключение

В данной работе решена задача об аномальном эффекте Холла в электронном канале в гидродинамическом режиме транспорта. В этом режиме частота межэлектронных столкновений значительно превышает частоты рассеяния электронов по импульсу. Во внешнем электрическом поле, направленном вдоль канала, и при диффузном рассеянии носителей заряда на границах канала устанавливается течение Пуазейля.

Наличие магнитного поля, приложенного по нормали к плоскости канала, приводит как к нормальному эффекту Холла, так и к аномальному вкладу. Последний обусловлен конверсией спинового/долинного тока в электрический, возникающей за счет спиновой/долинной поляризации электронов.

В методе кинетического уравнения развита последовательная теория эффекта Холла, позволяющая найти как нормальный, так и аномальный вклады. Показано, что при наличии только межчастичных столкновений аномального эффекта Холла не возникает, так как столкновения электронов друг с другом не могут привести к генерации тока. Найдены основные вклады в эффект в низшем порядке по рассеянию электронов на примесях.

5 Список литературы

- [1] M. I. Dyakonov, editor. *Spin physics in semiconductors*. Springer Series in Solid-State Sciences 157. Springer International Publishing, 2nd ed. edition, 2017.
- [2] E. H. Hall. XXXVIII. On the new action of magnetism on a permanent electric current. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5:157, 1881.
- [3] N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong. Anomalous Hall effect. *Rev. Mod. Phys.*, 82(2):1539–1592, May 2010.
- [4] A. Keser, R. Raimondi, and D. Culcer. Sign change in the anomalous Hall effect and strong transport effects in a 2D massive Dirac metal due to spin-charge correlated disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 123:126603, Sep 2019.
- [5] D. A. Bandurin, I. Torre, R. K. Kumar, M. Ben Shalom, A. Tomadin, A. Principi, G. H. Auton, E. Khestanova, K. S. Novoselov, I. V. Grigorieva, L. A. Ponomarenko, A. K. Geim, and M. Polini. Negative local resistance caused by viscous electron backflow in graphene. *Science*, 351(6277):1055–1058, 2016.
- [6] J. Crossno, J. K. Shi, K. Wang, X. Liu, A. Harzheim, A. Lucas, S. Sachdev, P. Kim, T. Taniguchi, K. Watanabe, T. A. Ohki, and K. C. Fong. Observation of the dirac fluid and the breakdown of the wiedemann-franz law in graphene. *Science*, 351(6277):1058–1061, 2016.
- [7] P. J. W. Moll, P. Kushwaha, N. Nandi, B. Schmidt, and A. P. Mackenzie. Evidence for hydrodynamic electron flow in PdCoO₂. *Science*, 351(6277):1061–1064, 2016.
- [8] G. M. Gusev, A. S. Jaroshevich, A. D. Levin, Z. D. Kvon, and A. K. Bakarov. Stokes flow around an obstacle in viscous two-dimensional electron liquid. *Scientific Reports*, 10(1):7860, 2020.
- [9] Р. Н. Гуржи. Гидродинамические эффекты в твердых телах при низких температурах. *Усп. физ. наук*, 94(4):689–718, 1968.

- [10] P. S. Alekseev. Negative magnetoresistance in viscous flow of two-dimensional electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 117:166601, Oct 2016.
- [11] A. N. Afanasiev, P. S. Alekseev, A. A. Danilenko, A. P. Dmitriev, A. A. Greshnov, and M. A. Semina. Hall effect in poiseuille flow of two-dimensional electron fluid. *Phys. Rev. B*, 106:245415, Dec 2022.
- [12] T. Scaffidi, N. Nandi, B. Schmidt, A. P. Mackenzie, and J. E. Moore. Hydrodynamic electron flow and hall viscosity. *Phys. Rev. Lett.*, 118:226601, Jun 2017.
- [13] H. Funaki, R. Toshio, and G. Tatara. Vorticity-induced anomalous hall effect in electron fluid, 2021.
- [14] E. H. Hasdeo, J. Ekström, E. G. Idrisov, and T. L. Schmidt. Electron hydrodynamics of two-dimensional anomalous Hall materials. *Phys. Rev. B*, 103:125106, Mar 2021.
- [15] A. N. Afanasiev, P. S. Alekseev, A. A. Danilenko, A. A. Greshnov, and M. A. Semina. Rotational viscosity in spin resonance of hydrodynamic electrons. *Phys. Rev. B*, 106:L041407, Jul 2022.
- [16] R. J. Doornenbal, M. Polini, and R. A. Duine. Spin–vorticity coupling in viscous electron fluids. *Journal of Physics: Materials*, 2(1):015006, jan 2019.
- [17] J. Fujimoto, W. Koshibae, and S. Maekawa. Electron hydrodynamics by spin hall effect, 2023.
- [18] M. M. Glazov. Valley and spin accumulation in ballistic and hydrodynamic channels. *2D Materials*, 9(1):015027, dec 2021.
- [19] M. M. Glazov, L. E. Golub. Valley Hall effect caused by the phonon and photon drag. *Phys. Rev. B*, 102 155302
- [20] M. M. Glazov and L. E. Golub. Spin and valley hall effects induced by asymmetric interparticle scattering. *Phys. Rev. B*, 106:235305, Dec 2022.
- [21] D. A. Pesin. Two-Particle Collisional Coordinate Shifts and Hydrodynamic Anomalous Hall Effect in Systems without Lorentz Invariance. *Phys. Rev. Lett.*, 121:226601, Nov 2018.

- [22] Д.С. Зограбян, *Аномальный эффект Холла в сверхчистых баллистических электронных каналах*, Выпускная квалификационная работа бакалавра, МФТИ (2023).