

---

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра проблем теоретической физики

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика

**Направленность (профиль) подготовки:** Общая и прикладная физика

## **ЗАТУХАНИЕ ИЗГИБНЫХ ФОНОНОВ В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ДВУМЕРНЫХ МЕМБРАНАХ**

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Коковин Артём Дмитриевич

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Бурмистров Игорь Сергеевич,  
д-р физ.-мат. наук, проф.

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2023

---

## Аннотация

В данной работе изучается динамическое поведение изгибных фононов в двумерных кристаллических мембранах в пределе высоких температур. Для исследования времени распада квазичастиц использовалась мацубаровская диаграммная техника. Было получено, что обратное время распада в высокотемпературном режиме не зависит от температуры, в отличие от стандартного времени жизни в трехмерных кристаллах из-за трехфононных процессов. Наш анализ показывает, что этот неожиданный результат объясняется сильным экранированием взаимодействия на малых импульсах  $q < q_*$ , где  $q_* \sim \sqrt{YT}/\varkappa$ . Здесь  $Y$  и  $\varkappa$  обозначают модуль Юнга и изгибную жесткость соответственно. Для статических изгибных деформаций сильное экранирование взаимодействия приводит, как известно, к степенной зависимости модуля Юнга и изгибной жесткости от импульса,  $Y \sim q^{2-2\eta}$  и  $\varkappa \sim q^{-\eta}$ . Этот степенной закон масштабирования модулей упругости сохраняется в динамике.

Было изучено поведение мнимой части собственной энергии изгибных фононов в зависимости от частоты. Мы обнаружили степенное поведение мнимой части собственной энергии  $\text{Im}\Sigma^R(q, \omega) \sim \varkappa q^{4-\eta} \mathcal{A}(\omega/\omega_q)$ , где  $\omega_q = (\varkappa q^{4-\eta} q_*^\eta / \rho)^{1/2}$ , где  $\rho$  - плотность мембраны. Функция  $\mathcal{A}(x)$  имеет следующее асимптотическое поведение при  $x \gg 1$ ,  $\mathcal{A}(x) \sim x^{(2-2\eta)/(2-\eta/2)}$ , и при  $x \ll 1$ ,  $\mathcal{A}(x) \sim x$ .

Наконец, поведение среднеквадратичного смещения,  $\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle$ , было проанализировано в зависимости от времени. На больших временах,  $t \gg \sqrt{\rho/(\varkappa q_*^4)}$ , мы получаем  $\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle \propto t^{1-\eta/(4-\eta)}$ . Последнее подразумевает, что флуктуации ведут себя субдиффузионно, что качественно согласуется с экспериментом.

# Содержание

Аннотация	2
Введение	4
1 Постановка задачи	5
2 Классический предел	6
2.1 $1/d_c$ - разложение и RPA	7
2.2 SCSA	8
3 Динамический случай	9
3.1 Поляризационный оператор	9
3.2 Мнимая часть собственной энергии	11
3.3 Учет статической экранировки	12
3.4 Поляризационный оператор с учетом экранировки	13
3.5 Собственная энергия	15
3.6 Самосогласованное уравнение	15
4 Корреляции флуктуаций изгибных смещений	18
5 Результаты и анализ	19
6 Приложения	19
6.1 Собственная энергетическая часть в отсутствие экранирования	19
6.1.1 $\omega \ll cp^2$	20
6.1.2 $\omega \gg cp^2$	22
6.1.3 $\omega = cp^2$	23
6.2 Мнимая часть поляризационного оператора с учетом экранирования	23
6.2.1 $\omega \ll cq^{2-\eta/2}$ или $z \ll 1$	25
6.2.2 $\omega \gg cq^{2-\eta/2}$ или $z \gg 1$	26
6.3 Действительная часть поляризационного оператора с учетом экранировки	26
6.3.1 $\omega \gg cq^{2-\eta/2}$ или $z \gg 1$	26
6.3.2 $\omega \ll cq^{2-\eta/2}$ или $z \ll 1$	26
6.4 Собственная энергетическая часть с учетом экранирования	26
6.4.1 $\omega \gg cp^{2-\eta/2}$ или $z \gg 1$	28
6.4.2 $\omega \ll cp^{2-\eta/2}$ или $z \ll 1$	29
6.5 Самосогласованный учет мнимой части собственной энергии	29
6.6 Вычисление среднеквадратичных отклонений	30
6.6.1 $t \gg \omega_*^{-1}$	31
6.6.2 $T^{-1} \ll t \ll \omega_*^{-1}$	32
Список литературы	33

# Введение

Двумерные кристаллические мембраны - упорядоченные структуры атомарной толщины, которые нашли широкое применение благодаря своим исключительным упругим свойствам. В таких мембранах возникает фазовый переход второго рода, именуемый в зарубежной литературе "crumpling transition". Температура такого перехода много больше комнатной (для графена  $T_c \sim 10^4 K$  [4]) и разделяет упорядоченную и неупорядоченную фазу.

Ниже критической температуры мембрана характеризуется спонтанно нарушенной вращательной симметрией свободной энергии - в плоской фазе существует выделенное направление нормали. По теореме Голдстоуна, существует бозонная бесщелевая мода, которая именуется изгибным фононом. В отличие от обычных внутрислойных фононов  $\omega_{\parallel} \propto q$ , спектр изгибных фононов  $\omega_{\perp} \propto q^2$ .

Для теоретического описания таких систем используется разложение упругой свободной энергии по векторам смещений, которые делятся на два вида: смещения в плоскости мембраны  $\mathbf{u}$  (поле акустических фононов в плоскости мембраны) и смещения вдоль нормали к поверхности  $\mathbf{h}$  (поле изгибных фононов) [1]. Взаимодействие между этими модами приводит ко множеству интересных эффектов. Изгибная жесткость мембраны и модуль Юнга приобретают зависимость от волнового вектора:  $\kappa(q) \propto q^{-\eta}$ ,  $Y(q) \propto q^{\eta_u}$ . Этот эффект стабилизирует двумерный кристалл  $\langle h^2 \rangle \sim L^{2-\eta}$ , делая плоскую фазу устойчивой к термодинамическим флуктуациям. Эти и другие упругие характеристики хорошо изучены в статическом режиме, в то время как динамический режим все еще недостаточно исследован.

Целью данной работы является исследование динамических эффектов ангармонической теории. Обычно, для исследования поведения временных корреляторов используется уравнение Ланжевена ([7], [8]), соответственно, пренебрегается кинетической энергией флуктуирующей мембраны. В этой работе анализ производится при помощи мацубаровской диаграммной техники, которая позволяет учесть динамические флуктуации микроскопически.

# 1 Постановка задачи

Теория упругости для двумерной кристаллической мембраны описывается свободной энергией в квадратичном разложении [2]:

$$\mathcal{F} = \int d^D x \left\{ \frac{\varkappa}{2} (\Delta \mathbf{r})^2 + \frac{\mu}{4} [\partial_\alpha \mathbf{r} \partial_\beta \mathbf{r} - \delta_{\alpha\beta}]^2 + \frac{\lambda}{8} [\partial_\gamma \mathbf{r} \partial_\gamma \mathbf{r} - D]^2 \right\} \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h} \quad (1.2)$$

$D$  - размерность мембраны,  $\varkappa$  - изгибная жесткость,  $\lambda$  и  $\mu$  - коэффициенты Ламе.  $\mathbf{x}$  - радиус-вектор точки недеформированной мембраны,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{h}$  - векторы смещений, касательный и перпендикулярный поверхности недеформированной мембраны соответственно.

Членом  $\frac{\varkappa}{2} (\Delta \mathbf{u})^2$  можно пренебречь ввиду  $\varkappa \gg T$  ([3]). Считая малыми производные ( $\partial_\alpha \mathbf{h}$ ,  $\partial_\alpha \mathbf{u} \ll 1$ ), можно привести свободную энергию к квадратичному виду:

$$\mathcal{F} = \int d^D x \left\{ \frac{\varkappa}{2} (\Delta \mathbf{h})^2 + \frac{\mu}{2} [\partial_\alpha u_\beta \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta \partial_\alpha u_\beta + 2\partial_\alpha u_\beta \partial_\alpha \mathbf{h} \partial_\beta \mathbf{h}] + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2} [\partial_\alpha u_\beta \partial_\alpha u_\beta + \partial_\alpha u_\alpha \partial_\beta \mathbf{h} \partial_\beta \mathbf{h}] \right\} \quad (1.3)$$

Для изучения динамики системы удобно использовать формализм функционального интеграла. Статсумма для такой системы запишется в виде:

$$Z = \int \mathcal{D}(\mathbf{h}(\mathbf{r}, \tau)) \mathcal{D}(\mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)) \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \left( \int d^D x \left( \frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) + \mathcal{F} \right) \right] \quad (1.4)$$

где  $\beta = T^{-1}$ . Так как поля  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{u}$  — бозонные, то для них выполняются условия периодичности:

$$\mathbf{h}(\tau) = \mathbf{h}(\tau + \beta), \quad \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(\tau + \beta) \quad (1.5)$$

В фурье-представлении показатель экспоненты диагональный по полям смещения. Интеграл по  $\mathbf{u}$  гауссов, он берется, воспользовавшись правилом ([4]):

$$\frac{\int \mathcal{D}\mathbf{u} \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{u} \hat{L} \mathbf{u} - \mathbf{f} \mathbf{u} \right)}{\int \mathcal{D}\mathbf{u} \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{u} \hat{L} \mathbf{u} \right)} = \exp \left( \frac{1}{2} \mathbf{f} \hat{L}^{-1} \mathbf{f} \right) \quad (1.6)$$

При достаточно малых импульсах (меньших ультрафиолетовой обрезки), кинетическим членом для поля  $\mathbf{h}$  можно пренебречь ([5]). Эффективный Лагранжиан для поля  $\mathbf{h}$  в фурье-представлении записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega)\} = & \frac{1}{2} (\varkappa k^4 + \rho \omega^2) |\mathbf{h}_{\mathbf{k}, \omega}|^2 + \frac{T^2}{8} \sum_{\omega', \Omega} \int (dk') (dq) R_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \times \\ & \times (\mathbf{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \omega+\Omega} \mathbf{h}_{-\mathbf{k}, -\omega}) (\mathbf{h}_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}, -\omega'-\Omega} \mathbf{h}_{\mathbf{k}', \omega'}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$R_{\mathbf{q}}^{D=2}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = Y \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^2 [\mathbf{k}' \times \mathbf{q}]^2}{q^2 q^2} \quad (1.8)$$

$Y = \frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}$  — модуль Юнга. Этот результат верен только при  $D = 2$  ([6]). Стоит отметить, что в отсутствии кинетических членов ангармонизм для поля  $\mathbf{h}$  выглядит точно так же ([4]). Результаты для классического предела (статические поля) будет полезным, поэтому кратко приведем их в следующем разделе.

## 2 Классический предел

Статсумма для статических полей записывается в виде:

$$Z = \int \mathcal{D}(\mathbf{h}(\mathbf{k})) \exp \left[ -\beta \int (dk) \mathcal{F}(\{\mathbf{h}(\mathbf{k})\}) \right] \quad (2.1)$$

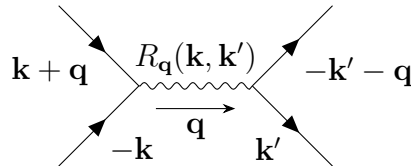
где

$$\mathcal{F}(\{\mathbf{h}(\mathbf{k})\}) = \frac{1}{2} \varkappa k^4 |\mathbf{h}_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{1}{8} \int (dk') (dq) R_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (\mathbf{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}) (\mathbf{h}_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}} \mathbf{h}_{\mathbf{k}'}) \quad (2.2)$$

Затравочная функция Грина изгибных фононов дается:

$$\langle h_i(\mathbf{k}) h_j(-\mathbf{k}) \rangle = \delta_{ij} G(\mathbf{k}) (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad G^0(\mathbf{k}) = \frac{T}{\varkappa k^4} \quad (2.3)$$

Для рассмотрения эффектов, возникающих из-за ангармонического взаимодействия изгибных фононов, используется диаграммная техника. Член взаимодействия дается такой диаграммой:



Здесь и далее прямыми линиями обозначаются затравочные функции Грина изгибных фононов, волнистой — взаимодействие.

Рассмотрим диаграмму для собственной энергии в первом порядке по взаимодействию:

$$\Sigma(\mathbf{k}) = \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \\ \text{wavy line with arrow } \mathbf{q} \text{ and label } R_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \end{array} \quad (2.4)$$

Диаграмма вида "lollipop" не вносит вклада в собственную энергию, так как в (2.2) суммирование по импульсам в члене взаимодействия проходит только по ненулевым импульсам ([6]). Определим перенормировку изгибной жесткости таким образом ([6]):

$$G(\mathbf{k}) = \frac{T}{\varkappa(\mathbf{k})k^4} = \frac{T}{\varkappa k^4 + \Sigma(\mathbf{k})} \quad (2.5)$$

Тогда поправка в изгибной жесткости засчёт собственной энергии в первом порядке теории возмущений дается выражением ([4]):

$$\delta\varkappa(\mathbf{k}) = \frac{3TY}{8\pi\varkappa k^2} \quad (2.6)$$

Видно, что для импульсов, меньших  $q_* = \sqrt{\frac{3TY}{8\pi\varkappa^2}}$ , теория возмущений неприменима, так как в этой области  $\delta\varkappa(\mathbf{k}) \gg \varkappa$ .

## 2.1 $1/d_c$ - разложение и RPA

Для графена — примера двумерной кристаллической мембраны,  $\varkappa \simeq 1\text{eV}$ ,  $Y \simeq 4.36\text{eV} \cdot \text{\AA}^{-2}$ . Размерный параметр  $Y$  не может быть малым параметром задачи. Поэтому, для формального использования теории возмущений вводят параметр  $1/d_c$ , где  $d_c = d - D$  — размерность вектора  $h$  ( $d$  - размерность объемливающего пространства), и полагается  $d_c \gg 1$  ([6]). При такой постановке задачи меняют определение коэффициентов Ламе:

Построенная таким образом теория возмущений довольно специфична. Например, в первом порядке по параметру  $1/d_c$  вклад в собственную энергию дается суммой таких диаграмм ([6]):

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \\ \text{wavy line} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \\ \text{wavy line} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \\ \text{wavy line with loop} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \xrightarrow{\mathbf{k}} \text{---} \\ \text{wavy line with two loops} \end{array} + \dots \quad (2.1.1)$$

Объяснить этот факт довольно просто: в каждой такой диаграмме поляризационный оператор ввиду (2.3) дает множитель  $d_c$ . Беря в каждом порядке по взаимодействию диаграмму в максимальном порядке по  $d_c$ , получаем (2.1.1). Такое приближение напоминает приближение случайных фаз (RPA) в теории ферми-жидкости (так получается экранировка Кулоновского потенциала). Ужирненной волнистой линией здесь и далее будем обозначать экранированный потенциал.

Экранированное взаимодействие можно найти, просуммировав ряд:

$$\tilde{Y}(\mathbf{k}) = \frac{Y}{1 + 3Y\Pi(\mathbf{k})/T} \quad (2.1.2)$$

где

$$\Pi(\mathbf{k}) = \frac{d_c}{3} \int (dq) \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4}{k^4} G^0(\mathbf{k}) G^0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) = \frac{T^2}{16\pi} \frac{1}{\varkappa^2 q^2} \quad (2.1.3)$$

Множитель 3 выбран в соответствии с [6],[5],[3]. Можно заметить, что при  $k \ll q_*$ :

$$\tilde{Y}(\mathbf{k}) \simeq \frac{T^{-1}}{3\Pi(\mathbf{k})} \quad (2.1.4)$$

Тогда поправка к изгибной жесткости дается логарифмически расходящимся интегралом ([3]):

$$\delta\varkappa(\mathbf{k}) \simeq \eta\varkappa \ln\left(\frac{q_*}{k}\right), \quad \eta = 2/d_c \quad (2.1.5)$$

Для интерпретации данного результата нужно воспользоваться SCSA.

## 2.2 SCSA

В работе [6] было предложено самосогласованное приближение экранировки (SCSA). Теория из себя представляет систему из двух интегральных уравнений, которая на языке диаграмм записывается в таком виде:

$$\text{wavy line} = \text{wavy line} - \text{wavy line} \circlearrowleft \text{wavy line} \quad (2.2.1)$$

$$\Sigma(\mathbf{q}) = \text{double line} \text{ with wavy loop} \quad (2.2.2)$$

Двойной прямой линией обозначается функция Грина изгибного фонона:

$$G(\mathbf{k}) = \frac{T}{\varkappa(\mathbf{k})k^4} = \frac{T}{\varkappa k^4 + \Sigma(\mathbf{k})} \quad (2.2.3)$$

В соответствии с логарифмической поправкой к собственной энергии, авторы делают предположение о степенной экранировке:

$$\varkappa(\mathbf{k}) \propto k^{-\eta} \quad Y(\mathbf{k}) \propto k^{\eta_u} \quad (2.2.4)$$

Вращательная симметрия в объемлющем пространстве накладывает условие на показатели [10]:

$$\eta_u = 2 - 2\eta \quad (2.2.5)$$



Уравнения (2.2.1) и (2.2.2) сохраняют эти соотношения. Для показателя  $\eta$  авторы получают:

$$\eta(d_c) = \frac{4}{d_c + \sqrt{16 - 2d_c + d_c^2}} \quad (2.2.6)$$

Таким образом, на малых импульсах перенормируются изгибная жесткость и модуль Юнга, что подтверждается численным моделированием. Стоит отметить, что данный результат верен только в первом порядке  $1/d_c$  во втором порядке есть диаграммы, не учитываемые в (2.2.2).

### 3 Динамический случай

Интерес представляет, как быстро затухают колебания в кристаллических мембранах. В некоторых статьях ([7]) предлагается исследовать динамику уравнением Ланжевена. Получаемый результат для среднеквадратичных термодинамических флуктуаций демонстрирует диффузионное поведение изгибных фононов  $\langle (\mathbf{h}(x, t) - \mathbf{h}(x, 0))^2 \rangle \propto t$  на больших временах. Полученный мной результат методами диаграммной техники субдиффузионное поведение  $\langle (\mathbf{h}(x, t) - \mathbf{h}(x, 0))^2 \rangle \propto t^{1-\beta}$ ,  $1 > \beta > 0$  на больших временах. Мнимая часть собственной энергии будет отвечать обратному времени жизни изгибных фононов. Для ее вычисления нам понадобится вычислить поляризационный оператор для динамических функций Грина.

Затравочная мацубаровская функция Грина изгибных фононов следует из уравнения для Лагранжевой плотности (1.7):

$$\mathcal{G}^0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\rho\omega^2 + \varkappa k^4} \quad (3.1)$$

Сначала будем двигаться так: построим теорию возмущений по параметру  $1/d_c$ . Для того чтобы посчитать собственную энергию, нужно сначала найти поляризационный оператор.

#### 3.1 Поляризационный оператор

$$\Pi(i\Omega, \mathbf{q}) = \frac{d_c}{3} \frac{1}{\beta} \sum_{i\omega_n} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} k_{\perp}^4 \mathcal{G}_{i\omega, \mathbf{k}}^0 \mathcal{G}_{i\Omega - i\omega, \mathbf{q} - \mathbf{k}}^0 \quad (3.1.1)$$

где суммирование подразумевается по бозонным мацубаровским частотам, а  $k_{\perp} = [\mathbf{k} \times \mathbf{q}]^4 / q^4$ .

Стоит отметить, что работать мы будем в высокотемпературном приближении. Это означает, что суммы по мацубаровским частотам и интегралы по импульсам сходятся на масштабах энергий, много меньших температуры. Как мы раньше определили, перенормировки изгибной жесткости и модуля Юнга происходят на импульсах, много меньших обратной

длины Гинзбурга. Эта область называется «универсальным режимом». Применимость высокотемпературного приближения следует из  $T \gg c(q_*)^2$ , где  $c = \sqrt{\frac{\varkappa}{\rho}}$ .

Оказывается, что проще вычислить поляризационный оператор не в мацубаровском представлении, а запаздывающий. Для этого нам понадобится тождество, связывающее спектральную плотность и значение оператора в мацубаровском представлении ([9]):

$$\mathcal{U}(i\Omega) = \int (d\omega) \frac{2 \operatorname{Im} U_R(\omega)}{\omega - i\Omega} \quad (3.1.2)$$

где  $(d\omega) = d\omega/(2\pi)$ . Запаздывающая затравочная функция Грина получается аналитическим продолжением мацубаровской функции Грина в верхней полуплоскости.

$$G_R^0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\varkappa k^4 - \rho(\omega + i0)^2} \quad (3.1.3)$$

Тогда спектральная плотность функции Грина будет мнимой частью (3.1.3):

$$\operatorname{Im} G_R^0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\pi}{2c\rho k^2} (-\delta(ck^2 + \omega) + \delta(ck^2 - \omega)) \quad (3.1.4)$$

В свою очередь, мнимая часть запаздывающего поляризационного оператора в высокотемпературном режиме дается выражением:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) = \frac{d_c}{6} \int (d\mathbf{k}) k^4 \sin^4(\varphi) \frac{\pi^2}{c^2 \rho^2 k^2 |q - k|^2} \int (d\omega_1) [\delta(\omega_1 - ck^2) - \delta(\omega_1 + ck^2)] \\ [\delta(\omega - \omega_1 - c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^2) - \delta(\omega - \omega_1 + c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^2)] \times \left[ \frac{\omega}{\beta \omega_1 (\omega - \omega_1)} \right] \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

где  $(d\mathbf{k}) = d\mathbf{k}/(2\pi)^2$ . Здесь мы воспользовались (3.1.2), заменив функции Грина на спектральные плотности, взяли тривиальную сумму по мацубаровским частотам, а потом выразили мнимую часть запаздывающего поляризационного оператора через спектральную плотность.

Вычислить этот интеграл можно точно, в результате чего получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Pi^R(cq^2, z = \omega/cq^2) = \frac{d_c}{192\beta \varkappa^2 q^2} \frac{1}{z^2} [\theta(1 - |z|) ((6z^3 - 3z + \operatorname{sign}(z)) \theta(|z| - 1/2) + 2z^3 \theta(1/2 - |z|)) \\ + (3z + \operatorname{sign}(z)) \theta(|z| - 1)] \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Воспользовавшись соотношениями Крамерса-Кронига, получим действительную часть:

$$\operatorname{Re} \Pi^R(cq^2, z = \omega/cq^2) = \frac{d_c}{192\pi\beta \varkappa^2 q^2} \frac{1}{z^2} (8z^2 + \ln \left| \frac{1+2z}{1-2z} \right| (4z^3 - 3z) + \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| (6z^3 - 6z) - \ln |4z^2 - 1|) \quad (3.1.7)$$

## 3.2 Мнимая часть собственной энергии

После того как был вычислен поляризационный оператор, можно аналогичными способами вычислить мнимую часть собственной энергии. Для этого воспользуемся выражением:

$$\Sigma(\mathbf{p}, i\varepsilon) = \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n = 2\pi n/\beta} 2 \int (d\mathbf{q}) \mathcal{G}^0(\mathbf{p} - \mathbf{q}, i\varepsilon - i\omega) \frac{Y}{1 + 3Y\Pi(\mathbf{q}, i\omega)} p_{\perp}^4 \quad (3.2.1)$$

Здесь учтена перенормировка модуля Юнга. В универсальном режиме:

$$Y(\mathbf{q}, i\omega) = \frac{Y}{1 + 3Y\Pi(\mathbf{q}, i\omega)} \approx \frac{1}{3\Pi(\mathbf{q}, i\omega)} \quad (3.2.2)$$

как и в статическом случае. В дальнейшем мы увидим, что интегралы будут набираться в окрестности массовой поверхности, где выполнено условие на малость импульса по сравнению с обратной длиной Гинзбурга.

Делая аналитическое продолжение:

$$Y^R(\mathbf{q}, \omega) = \frac{Y}{1 + 3Y\Pi^R(\mathbf{q}, \omega)} \approx \frac{1}{3\Pi^R(\mathbf{q}, \omega)} \quad (3.2.3)$$

Воспользуемся тем же приемом, который мы использовали при вычислении поляризационного оператора в прошлом разделе. Тогда выражение для мнимой части запаздывающей собственной энергетической части будет:

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = \frac{p_{\perp}^4 \omega}{12\pi^2 c \rho \beta} \int q dq d\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \int d\omega' \frac{\text{Im}\Pi^R(\mathbf{q}, \omega')}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega')|^2} \times \quad (3.2.4)$$

$$\times \frac{1}{\omega'(\omega - \omega')} [\delta(\omega - \omega' + c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2) - \delta(\omega - \omega' - c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)] \quad (3.2.5)$$

Этот интеграл можно вычислить приближенно для режимов  $\omega \gg cp^2$  и  $\omega \ll cp^2$ . Проводя эти вычисления и сшивая асимптотики (см. 6.1), получаем:

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -f(\omega/cp^2) \frac{\rho \omega c p^2}{d_c} \quad (3.2.6)$$

где  $f(x \ll 1) \approx 0.5$  и  $f(x \gg 1) \approx 2.55$ .

Если продолжить полученный результат до физической размерности  $d_c = 1$ , то мы увидим, что мнимая часть собственной энергии не мала по сравнению с энергией на массовой поверхности. Беспокоить нас это не должно, ведь мы не учли перенормировку изгибной жесткости. В следующей главе мы это учтем, а пока стоит отметить, что полученная собственная энергия не зависит от температуры. В теории фонон-фононного взаимодействия время жизни фононов (частота столкновений) в высокотемпературном режиме  $\frac{1}{\tau} \propto T^2$ . В двумерных кристаллических мембранах температурная зависимость частоты трехфононных взаимодействий (наши диаграммы соответствуют процессам с участием одного изгибного фонона и двух плоскостных) пропадает из-за экранировки модуля Юнга.

### 3.3 Учет статической экранировки

Как результаты классической задачи могут быть учтены в динамическом случае? Проверим утверждение, что в пределе нулевой частоты в собственную энергию в универсальном режиме дается вклад только статических линий (функция Грина на нулевой частоте).

Начнем с выражения (3.2.1), однако вместо затравочных функций Грина учтем все диаграммы типа SCSA. Для упрощения записи опустим все импульсы, заменив их на индексы и будем следить за тем, как ведут себя частоты.

$$\Sigma(0) = \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n = 2\pi n/\beta} 2\mathcal{G}_1(-i\omega)Y_2(i\omega) = \oint \frac{d\omega}{4\pi i} \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) Y_2(\omega)\mathcal{G}_1(-\omega) \quad (3.3.1)$$

Заменим суммирование по мацубаровским частотам на интегрирование по контуру в комплексной плоскости, охватывающим все интересующие нас бозонные частоты, вместе с гиперболическим тангенсом (полюсы гиперболического тангенса совпадают с интересующими нас частотами).

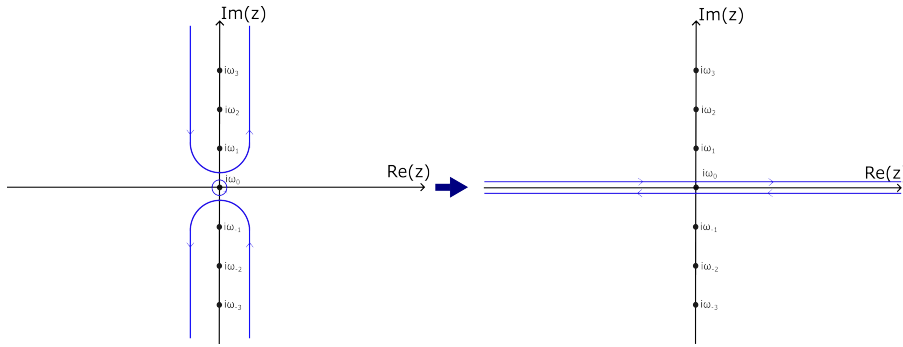


Рис. 1: Поворот контура интегрирования в комплексной плоскости

После поворота контура в комплексной плоскости получим выражение:

$$\Sigma(0) = \oint \frac{d\omega}{4\pi i} \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) Y_2(\omega)\mathcal{G}_1(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4\pi i} \coth\left(\frac{x}{2T}\right) (Y_2^R(x)G_1^A(-x) - Y_2^A(x)G_1^R(-x)) \quad (3.3.2)$$

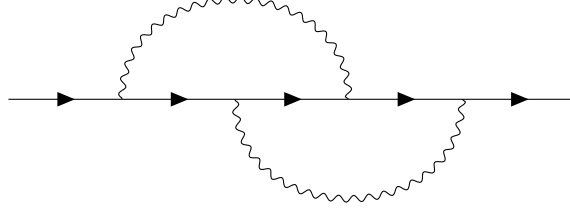
Воспользовавшись тем, что  $\text{Im } G^R(-x) = -\text{Im } G^R(x)$  и  $\text{Re } G^R(-x) = \text{Re } G^R(x)$ , получим:

$$\Sigma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4\pi i} \coth\left(\frac{x}{2T}\right) 2i \text{Im}(Y_2^R(x)G_1^R(x)) \quad (3.3.3)$$

В высокотемпературном пределе:

$$\begin{aligned} \Sigma(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4\pi i} \coth\left(\frac{x}{2T}\right) 2i \text{Im}(Y_2^R(x)G_1^R(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi} \frac{T}{x} \text{Im}(Y_2^R(x)G_1^R(x)) = \\ &= T \text{Re}(Y_2^R(0)G_1^R(0)) \quad (3.3.4) \end{aligned}$$

Таким образом, для диаграмм вида SCSA мы получили, что в статическую собственную энергию вносят вклады только линии (функции Грина и модуль Юнга) только на нулевой частоте. Этот же результат можно обобщить и на диаграммы, не входящие в ряд для SCSA. Таким образом, для такой диаграммы:



Аналогичный анализ показывает, что

$$\Sigma_2(0) = T^2 \operatorname{Re}(G_1^R(0)Y_1^R(0)) \operatorname{Re}(G_2^R(0)Y_2^R(0)G_3^R(0)) \quad (3.3.5)$$

Нетрудно заметить, что интегрирование по всем внутренним частотам по очереди снимается, так как в пределе высоких температур все гиперболические тангенсы можно заменить обратным аргументом. Таким образом, для всех диаграмм в собственной энергетической части выражение на нулевой частоте дается статическими диаграммами. Этот результат позволяет нам явно выделить статическую экранировку изгибной жесткости как результат суммирования вкладов в собственную энергетическую часть на нулевой частоте (соответствующий диаграммам в классическом пределе).

Несмотря на то, что диаграммы типа SCSA не исчерпывают все возможные вклады в собственную энергию, они корректно предсказывают (2.2.5). При этом, как уже было отмечено, в первом порядке по  $1/d_c$  SCSA дает правильный предел показателя  $\eta$ . Остальные диаграммы в таком случае лишь дают поправку к  $\eta$  в следующих по  $1/d_c$  порядках. Делая переход к  $d_c = 1$  степенная перенормировка  $\varkappa$  будет сохраняться, однако вклад остальных диаграмм будет менять показатель  $\eta$ .

Мы знаем, что в статической задаче мнимая часть равна нулю, поэтому мы можем считать время жизни изгибных фононов по теории возмущений, учитывая статическую экранировку изгибной жесткости.

### 3.4 Поляризационный оператор с учетом экранировки

Учтем статическую собственную энергию в функции Грина:

$$\mathcal{G}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\rho\omega^2 + \varkappa k^{4-\eta}} \quad (3.4.1)$$

Так как комбинация  $\varkappa k^{4-\eta}$  размерная, мы сделали преобразование  $\varkappa(q_*)^\eta \rightarrow \varkappa$ . Соответственно,  $c(q_*)^{\eta/2} \rightarrow c$ . Запаздывающая функция Грина будет даваться выражением:

$$G_R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\varkappa k^{4-\eta} - \rho(\omega + i0)^2} \quad (3.4.2)$$

Соответствующая мнимая часть:

$$\text{Im } G_R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\pi}{2c\rho k^{2-\eta/2}} \left( -\delta(ck^{2-\eta/2} + \omega) + \delta(ck^{2-\eta/2} - \omega) \right) \quad (3.4.3)$$

Выражение для поляризационного оператора остается неизменным (3.1.1).

Для мнимой части поляризационного оператора, после обезразмериваний и замен переменных получаем выражение, которое можно анализировать в предельных случаях:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) = & \frac{d_c}{24\pi} \frac{z}{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \int_0^\infty dx \int_{|x-1|}^{|x+1|} da \frac{x^{2\eta/2}}{a^{3-2\eta/2}} \left( 1 - \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{a^2}{2x} \right)^2 \right)^{3/2} \times \\ & \times [\delta(z - x^{2-\eta/2} - a^{2-\eta/2}) + \delta(z - x^{2-\eta/2} + a^{2-\eta/2}) + \delta(z + x^{2-\eta/2} - a^{2-\eta/2}) + \delta(z + x^{2-\eta/2} + a^{2-\eta/2})] \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Взять этот интеграл можно в двух предельных случаях (см. 6.2):  $\omega \gg cq^{2-\eta/2}$  и  $\omega \ll cq^{2-\eta/2}$ . В итоге получаем:

$$\text{Im } \Pi^R \left( \mathbf{q}, z = \frac{\omega}{cq^{2-\eta/2}} \right) = \frac{d_c}{\varkappa^2 \beta q^{2-4\eta/2}} f(\eta/2, z) \quad (3.4.5)$$

$$\begin{cases} f(\eta/2, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{z}{(2-\eta/2)} \frac{2^{-5\eta/2} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\eta/2)}{\Gamma(4 - \frac{5}{2}\eta/2)} & z \ll 1 \\ f(\eta/2, z) = \frac{1}{32(2-\eta/2)} \frac{z^{-1}}{q^{2-4\eta/2}} \left( \frac{z}{2} \right)^{\frac{3\eta/2}{2-\eta/2}} & z \gg 1 \end{cases} \quad (3.4.6)$$

Стоит проверить, чему равна функция  $f(0, z)$ :

$$\begin{cases} f(0, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{z}{2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{z}{96} & z \ll 1 \\ f(0, z) = (64z)^{-1} & z \gg 1 \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Что совпадает с пределами (3.1.6).

Действительную часть можно вычислить, воспользовавшись соотношением Крамерса-Кронига (см. 6.3).

$$\text{Re } \Pi^R(\mathbf{q}, z) = \frac{d_c}{\varkappa^2 \beta q^{2-4\eta/2}} g(\eta/2, z) \quad (3.4.8)$$

$$g(\eta/2, z) = \frac{1}{2^\lambda 32(2-\eta/2)} \frac{\tan \pi \lambda/2}{z^{1-\lambda}}, \quad z \gg 1 \quad (3.4.9)$$

$$g(\eta/2, z) = \Pi(\eta, D=2), \quad z \ll 1$$

$$\lambda = \frac{3\eta/2}{2-\eta/2} \quad (3.4.10)$$

Обозначение  $\Pi(\eta, D=2)$  взято из [6]. Можно заметить, что асимптотика в главном порядке

при  $z \gg 1$  равна нулю при  $\eta = 0$ . В случае точного расчета для нулевого  $\eta/2$  (3.1.7):

$$g(0, z) \propto \frac{\ln(z)}{z^2} \quad (3.4.11)$$

### 3.5 Собственная энергия

Для расчета мнимой части собственно-энергетической части воспользуемся выражением (3.2.1), только вместо затравочных функций Грина подставим перенормированные:

$$\Sigma(\mathbf{p}, i\varepsilon) = \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n=2\pi n/\beta} 2 \int (d\mathbf{q}) \mathcal{G}(\mathbf{p} - \mathbf{q}, i\varepsilon - i\omega) \frac{Y}{1 + 3Y\Pi(\mathbf{q}, i\omega)} p_{\perp}^4 \quad (3.5.1)$$

Аналогичными преобразованиями придем к интегралу, который так же сможем оценивать при различных соотношениях частоты и волнового вектора.

$$\text{Im } \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega p^{2-\eta/2} c\rho}{d_c 6\pi^2} \int \frac{x^{2-4\eta/2} dx da \sin^3(\varphi)}{a^{3-2\eta/2}} \left( \frac{f\left(\frac{z}{x^{2-\eta/2}} + \left(\frac{a}{x}\right)^{2-\eta/2}\right) \frac{1}{(z + a^{2-\eta/2})} + \frac{f\left(\frac{z}{x^{2-\eta/2}} - \left(\frac{a}{x}\right)^{2-\eta/2}\right) \frac{1}{(z - a^{2-\eta/2})}}{|f^2 + g^2|} \right) \quad (3.5.2)$$

где функции  $f$  и  $g$  взяты из (3.4.5) и (3.4.8) соответственно. Вычисляя интегралы приближенно (см. 6.4), получим:

$$\text{Im } \Sigma^R(\mathbf{p}, z) = -\frac{\varkappa p^{4-\eta}}{d_c} \mathcal{A}(\eta, z) \quad (3.5.3)$$

$$\mathcal{A}(\eta, z) \propto z^{1-\lambda} \quad z \gg 1 \quad (3.5.4)$$

$$\mathcal{A}(\eta, z) \propto z, \quad z \ll 1$$

Здесь мы воспользовались асимптотиками функций  $f$  и  $g$

$$f(z) = \begin{cases} f_0 z & z \ll 1 \\ f_{\infty} \frac{1}{z^{1-\lambda}} & z \gg 1 \end{cases} \quad (3.5.5)$$

$$g(z) = \begin{cases} g_0 & z \ll 1 \\ g_{\infty} \frac{1}{z^{1-\lambda}} & z \gg 1 \end{cases} \quad (3.5.6)$$

Обозначение  $\lambda$  взято из (3.4.10).

### 3.6 Самосогласованное уравнение

В предыдущем разделе мы рассматривали вклад в собственную энергетическую часть всех диаграмм, которые в сумме дают перенормированный модуль Юнга. Стоит про-

верить, сохраняется ли степенное поведение  $\mathcal{A}(\eta, z)$  при учете всех диаграмм типа SCSA. Для этого нам достаточно проверить, что при данном степенном скейлинге мнимой части собственной энергии (функции Грина), мнимая часть поляризационного оператора будет иметь степенное поведение, эквивалентное (3.4.5). Если предположение верное, то поменяться может лишь численный коэффициент, который, как будет показано в дальнейшем, не влияет на степенное поведение корреляторов.

Стоит так же обговорить, что учет действительной части собственной энергетической части может привести лишь к изменению численного коэффициента, но не степенного показателя. Для этого определим степенное поведение действительной части собственной энергии при  $z \gg 1$  и  $z \ll 1$ . Так как статическую ее часть мы уже учли, введя перенормировку изгибной жесткости, нам нужно это явно учесть.

$$\operatorname{Re} \Sigma^R(\mathbf{p}, z) - \operatorname{Re} \Sigma^R(\mathbf{p}, 0) = -\frac{\varkappa p^{4-\eta}}{d_c} \mathcal{B}(\eta, z) \quad (3.6.1)$$

$$\mathcal{B}(\eta, z) = z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi} \frac{\mathcal{A}(\eta, x)}{x(x-z)} \quad (3.6.2)$$

Из этого уравнения видно, что при  $z \ll 1$ :

$$\mathcal{B}(\eta, z) \propto z^2 \quad (3.6.3)$$

А при  $z \gg 1$ :

$$\mathcal{B}(\eta, z) \propto z^{1-\lambda} \quad (3.6.4)$$

Для получения степенных зависимостей нас будут интересовать именно асимптотики мнимой части функции Грина, ведь интегралы набираются в параметрически больших областях. Несложно заметить, что (3.6.3) и (3.6.4) их не изменяют.

Для самосогласованного вычисления, нам понадобится переписать уравнение (3.1.5), заменив мнимые части затравочных функций Грина на мнимые части полных функций Грина. Такое уравнение примет вид:

$$\operatorname{Im} \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2d_c}{3} \int (d\mathbf{k}) k_{\perp}^4 \int (d\omega_1) \operatorname{Im} G_R(\omega_1, \mathbf{k}) \operatorname{Im} G_R(\omega - \omega_1, \mathbf{q} - \mathbf{k}) \left[ \frac{\omega}{\beta \omega_1 (\omega - \omega_1)} \right] \quad (3.6.5)$$

Запаздывающая функция Грина будет даваться выражением:

$$G_R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\varkappa k^{4-\eta} - \rho \omega^2 + (\operatorname{Re} \Sigma^R(\omega, \mathbf{k}) - \operatorname{Re} \Sigma^R(0, \mathbf{k})) + i \operatorname{Im} \Sigma^R(\omega, \mathbf{k})} \quad (3.6.6)$$



Подставляя в это выражение (3.5.3) и (3.6.1), получаем для мнимой части ( $d_c = 1$ ):

$$\text{Im } G_R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\mathcal{A}(\eta, z) \varkappa k^{4-\eta}}{(\varkappa k^{4-\eta} - \rho \omega^2 + \varkappa k^{4-\eta} \mathcal{B}(\eta, z))^2 + (\varkappa k^{4-\eta} \mathcal{A}(\eta, z))^2} \quad (3.6.7)$$

Выражение (3.6.5) можно оценить при  $z \gg 1$  и  $z \ll 1$ . Нетрудные вычисления показывают (см. 6.5):

$$\text{Im } \Pi^R \left( \mathbf{q}, z = \frac{\omega}{cq^{2-\eta/2}} \right) = \frac{1}{\varkappa^2 \beta q^{2-4\eta/2}} f'(\eta, z) \quad (3.6.8)$$

где  $f'(\eta, z) \sim f(\eta, z)$  при  $z \gg 1$  и  $z \ll 1$ . Таким образом, степенная зависимость собственной энергии самосогласованно проносится через уравнения SCSA.

Аргумент, позволяющий расширить это рассуждение до остальных диаграмм, во многом напоминает классический аргумент про скейлинг изгибной жесткости. В любом порядке по взаимодействию существуют диаграммы типа SCSA и диаграммы, не входящие в SCSA. При этом, ввиду того, что передача нулевого импульса вдоль линии взаимодействия запрещена, такие диаграммы имеют равное количество свободных импульсов и частот, по которым проводится интегрирование и суммирование соответственно. Так как любая диаграмма типа SCSA дает одинаковое степенное поведение для мнимой части собственной энергии, то и диаграммы не SCSA будут давать такое же степенное поведение мнимой части собственной энергии.

Таким образом мы получили довольно общий результат — универсальное степенное поведение мнимой поправки к спектру изгибных фононов. Данный результат поможет нам определить коррелятор изгибных смещений.

Теперь, когда вычисления были проведены самосогласованно, мы можем обозначить область частот и импульсов универсального режима. При выводе мы пользовались тем, что:

$$\Upsilon \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) \gg 1 \quad (3.6.9)$$

Рассмотрим два предельных соотношения частот и импульсов. Когда  $\omega \ll \omega_q$ , где  $\omega_q = cq^2$ , динамический поляризационный оператор в главном порядке равен статическому:

$$\Pi^R(\mathbf{q}, \omega) \sim q^{-(2-2\eta)} \sim \omega_q^{-\frac{2-2\eta}{2-\eta/2}} \quad (3.6.10)$$

Когда  $\omega \gg \omega_q$ :

$$\Pi^R(\mathbf{q}, \omega) \sim \omega^{-\frac{2-2\eta}{2-\eta/2}} \quad (3.6.11)$$

То есть при больших частотах зависимость от импульса пропадает. Как видно из уравнений (3.6.10) и (3.6.11), универсальный режим определяется условием:

$$\max\{\omega_q, \omega\} \ll \omega_* \quad (3.6.12)$$

где  $\omega_* = c(q_*)^2$ .

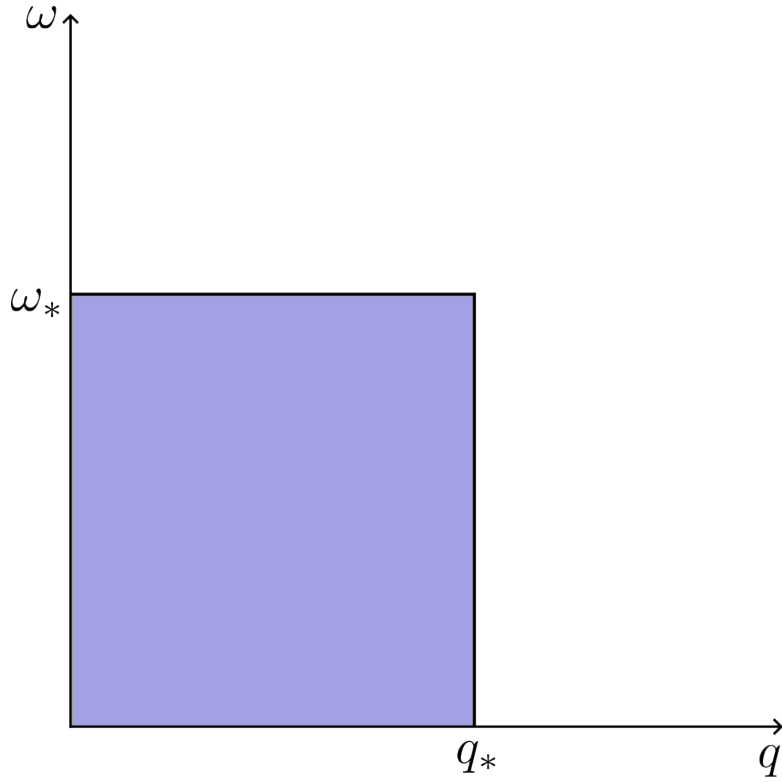


Рис. 2: Область универсального режима

#### 4 Корреляции флуктуаций изгибных смещений

Для вычисления среднего квадрата отклонений воспользуемся флуктуационно - диссипационной теоремой [11]:

$$\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle = 2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \text{Im} G_R(\omega, \mathbf{k}) \cosh\left(\frac{\omega}{2T}\right) (1 - e^{-i\omega t}) \quad (4.1)$$

На больших временах  $t \gg \omega_*^{-1}$  ( $\omega_*^{-1} \simeq 3 \cdot 10^{-12} s$ ) основной вклад будет приходиться от области малых импульсов и частот (3.6.12). Там мы можем пользоваться выражением (3.6.7). Вне универсального режима в первом порядке теории возмущений поправка получается малой, поэтому можем пользоваться выражением (3.4.3). На всех исследуемых временах коррелятор имеет степенное поведение (см. 6.6):

$$\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle \sim t^\beta \quad (4.2)$$

Для больших времен среднеквадратичное отклонение имеет субдиффузионное поведение с показателем  $\beta = \frac{1-\eta/2}{1-\eta/4} \simeq 0.75$  ( $\eta \approx 0.8$ ), в то время как на малых временах динамика супердиффузионная (баллистическая) с  $\beta = 2$ .

## 5 Результаты и анализ

В результате проделанной работы были изучены процессы распада изгибных фононов на звуковые фононы внутри плоскости. Несмотря на то, что просуммировать весь диаграммный ряд для взаимодействия типа  $\varphi^4$  представляется невозможным, благодаря результатам статической теории и обобщением их на динамический случай получилось сделать довольно общий вывод о степенной зависимости времени распада от частот и импульсов.

Интересным результатом является независимость вероятности в единицу времени процессов рассеяния от температуры в пределе высоких температур. На массовой поверхности изгибных фононов обратное время затухания оказывается соизмеримым с частотой:  $\rho\omega_q^2 \sim \text{Im} \Sigma^R(\omega_q, \mathbf{q})$ .

Результаты экспериментальных исследований изгибных флуктуаций [12] с использованием сканирующего туннельного микроскопа качественно согласуются с найденными в работе режимами флуктуаций. Однако показатели отличаются:  $\beta = 0.3$  и  $\beta = 1.4$  в субдиффузионном и супердиффузионном режиме соответственно. На такое поведение могут влиять остаточные напряжения, которые изменяют длинноволновый спектр изгибных фононов [6], а так же дефекты, меняющие показатель  $\eta$  ([13], [14]). Данный вопрос требует более детального рассмотрения.

В работе [8] динамика флуктуаций исследовалась с помощью феноменологического уравнения Ланжевена и было получено, что спустя какое-то время отклонения начинают вести себя диффузным образом, что подтверждается численным моделированием. В дальнейшем планируется изучить методы моделирования, примененные в работе [8], чтобы сделать вывод о причинах расхождения с построенной в нашей работе теорией.

## 6 Приложения

### 6.1 Собственная энергетическая часть в отсутствие экранирования

Экранированный модуль Юнга дается выражением (3.2.2). В уравнении на собственную энергию (3.2.1) сделаем замену, верную в универсальном режиме:

$$Y(\mathbf{q}, i\omega) \approx \frac{1}{3\Pi(\mathbf{q}, i\omega)} \quad (6.1.1)$$

Подставим это выражение в (3.2.1). Представим поляризационный оператор и функцию Грина в мацубаровском представлении в виде интеграла от спектральных плотностей согласно (3.1.2). Теперь возьмем сумму по мацубаровским частотам:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{i\omega} \frac{1}{(\omega' - i\omega)(\omega'' - (i\varepsilon - i\omega))} = \frac{\coth\left(\frac{\beta\omega'}{2}\right) + \coth\left(\frac{\beta\omega''}{2}\right)}{2(\omega' + \omega'' - i\varepsilon)} \quad (6.1.2)$$

После взятия суммы, получаем выражение:

$$\Sigma(\mathbf{p}, i\varepsilon) = \frac{2}{3} \int (d\mathbf{q}) p_{\perp}^4 \int (d\omega')(d\omega'') \frac{1}{\omega' + \omega'' - i\varepsilon} \frac{\pi}{c\rho(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} [\delta(\omega' + c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2) - \delta(\omega' - c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)] \times \quad (6.1.3)$$

$$\times \frac{\text{Im}\Pi^R(\mathbf{q}, \omega'')}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega'')|^2} \left[ \coth\left(\frac{\beta\omega'}{2}\right) + \coth\left(\frac{\beta\omega''}{2}\right) \right] \quad (6.1.4)$$

Переходя к высокотемпературному пределу, получаем такое выражение на мнимую часть запаздывающей собственной энергетической части (сделав замену  $\omega'' + \omega' = \omega$ ):

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = \frac{2\pi p^4 \omega}{3 \cdot 4\pi^2 c\rho\beta 2\pi} \int qdqd\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \int d\omega' \frac{\text{Im}\Pi^R(\mathbf{q}, \omega')}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega')|^2} \times \quad (6.1.5)$$

$$\times \frac{1}{\omega'(\omega - \omega')} [\delta(\omega - \omega' + c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2) - \delta(\omega - \omega' - c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)]$$

Интеграл по частотам от первой дельта-функции дает:

$$-\frac{p^4 \omega}{12\pi^2 c\rho\beta} \int qdqd\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \frac{\text{Im}\Pi^R(\mathbf{q}, \omega + c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega + c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)|^2} \frac{1}{(\omega + c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2) c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \quad (6.1.6)$$

Вклад от второй дельта-функции получается таким:

$$-\frac{p^4 \omega}{12\pi^2 c\rho\beta} \int qdqd\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \frac{\text{Im}\Pi^R(\mathbf{q}, \omega - c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega - c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)|^2} \frac{1}{(\omega - c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2) c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \quad (6.1.7)$$

Следующим шагом будет оценка интегралов в областях  $\omega \gg cp^2$ ,  $\omega \ll cp^2$  и  $\omega = cp^2$ . Для начала положим  $\omega \ll cp^2$ .

### 6.1.1 $\omega \ll cp^2$

В этом пределе можем пренебречь  $\omega$  в интеграле и оставить частоту только в префакторе. Также можно заметить, что оба вклада от разных дельта-функций в этом пределе дают одинаковый результат, а значит можно вычислить только один из интегралов, после чего умножить результат на 2.

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{2p^4 \omega}{12\pi^2 c\rho\beta} \int qdqd\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \frac{\text{Im}\Pi^R(\mathbf{q}, c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)}{|\Pi^R(\mathbf{q}, c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)|^2} \frac{1}{(c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)^2} \quad (6.1.8)$$

Перейдем к новым переменным интегрирования по таким правилам:

$$y = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \quad (6.1.9)$$

$$\left| \frac{\partial(q, \varphi)}{\partial(q, y)} \right| = \frac{2y}{q \sin(\varphi)p}$$

Двойка в якобиане возникает из-за того, что подынтегральная функция четная по углам, а наша замена однозначна только в одной полуплоскости. В новых переменных интеграл будет выглядеть так:

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{p^3\omega}{3\pi^2 c\rho\beta} \int_0^{+\infty} dq \int_{|p-q|}^{|p+q|} (1 - \cos^2(\varphi))^{3/2} \frac{y}{y^2} \frac{\text{Im}\Pi^R(\mathbf{q}, cy^2)}{|\Pi^R(\mathbf{q}, cy^2)|^2} \frac{1}{c^2 y^4} dy \quad (6.1.10)$$

$$(1 - \cos^2(\varphi))^{3/2} = \frac{(4p^2q^2 - (p^2 + q^2 - y^2)^2)^{3/2}}{8p^3q^3} = \frac{q^3 \left(4\frac{p^2}{q^2} - \left(\frac{p^2}{q^2} + 1 - x^2\right)^2\right)^{3/2}}{8p^3} \quad (6.1.11)$$

Сделаем интеграл по  $y$  безразмерным, вводя  $x = y/q$ ,  $dy = qdx$ :

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega}{3 \cdot 8\pi^2 c\rho\beta} \int_0^{+\infty} q^3 dq \int_{|p/q-1|}^{|p/q+1|} \left(4\frac{p^2}{q^2} - \left(\frac{p^2}{q^2} + 1 - x^2\right)^2\right)^{3/2} \frac{1}{c^2 x^5 q^5} \frac{\text{Im}\Pi^R(\mathbf{q}, cy^2)}{|\Pi^R(\mathbf{q}, cy^2)|^2} q dx \quad (6.1.12)$$

Введем для удобства новые обозначения:

$$A = \frac{d_c}{192\beta c^3 \rho^2} \quad (6.1.13)$$

$$\text{Re}\Pi^R(cq^2, z = \omega/cq^2) = \frac{A}{\pi cq^2} \text{Re}\Pi^R(\omega/cq^2)$$

$$\text{Im}\Pi^R(cq^2, z = \omega/cq^2) = \frac{A}{cq^2} \text{Im}\Pi^R(\omega/cq^2)$$

Учитывая это обозначение, закончим сводить интеграл по  $y$  к безразмерному виду.

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega}{3 \cdot 8\pi^2 c^2 \rho\beta A} \int_0^{+\infty} q dq \int_{|p/q-1|}^{|p/q+1|} \left(4\frac{p^2}{q^2} - \left(\frac{p^2}{q^2} + 1 - x^2\right)^2\right)^{3/2} \frac{1}{x^5} \frac{\text{Im}\Pi^R(x^2)}{|\Pi^R(x^2)|^2} dx \quad (6.1.14)$$

Оказывается, удобно поменять пределы интегрирования:

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega}{3 \cdot 8\pi^2 c^2 \rho\beta A} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^5} \frac{\text{Im}\Pi^R(x^2)}{|\Pi^R(x^2)|^2} dx \int_{\frac{p}{1+x}}^{\frac{p}{1-x}} q dq \left(4\frac{p^2}{q^2} - \left(\frac{p^2}{q^2} + 1 - x^2\right)^2\right)^{3/2} \quad (6.1.15)$$

Второй интеграл можно взять точно:

$$\int_{\frac{p}{1+x}}^{\frac{p}{|1-x|}} q dq \left( 4 \frac{p^2}{q^2} \left( \frac{p^2}{q^2} + 1 - x^2 \right)^2 \right)^{3/2} = \frac{1}{2} \int_{\frac{p^2}{(1+x)^2}}^{\frac{p^2}{(1-x)^2}} \left( 4 \frac{p^2}{z} \left( \frac{p^2}{z} + 1 - x^2 \right)^2 \right)^{3/2} dz = \quad (6.1.16)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^3} [4p^2 z - (p^2 + z(1-x^2)^2)]^{3/2} = 3p^2 \pi (x^4 \theta(1-x) + \theta(x-1)) \quad (6.1.17)$$

Оставшийся интеграл можно взять численно:

$$\text{Im} \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega p^2}{8\pi c^2 \rho \beta A} \int_0^\infty \frac{1}{x^5} \frac{\text{Im} \Pi^R(x^2)}{|\Pi^R(x^2)|^2} (x^4 \theta(1-x) + \theta(x-1)) dx \quad (6.1.18)$$

И мы получаем:

$$\text{Im} \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) \approx -\frac{\omega p^2}{8\pi c^2 \rho \beta A} 0.2055 \quad (6.1.19)$$

### 6.1.2 $\omega \gg cp^2$

В этом пределе можно заметить, что в областях  $q \ll p$  и  $\mathbf{q} \sim \mathbf{p}$ , выражение  $c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 \ll \omega$ , поэтому им можно пренебречь по сравнению с частотой. Получившийся интеграл будет даваться выражением:

$$\text{Im} \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{p^4}{6\pi^2 c \rho \beta} \int q dq d\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \frac{\text{Im} \Pi^R(\mathbf{q}, \omega)}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega)|^2} \frac{1}{c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \quad (6.1.20)$$

Сделаем те же замены, которые мы делали в предыдущем разделе:

$$\text{Im} \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{1}{3 \cdot 8\pi^2 c^2 \rho \beta} \int_0^{+\infty} q dq \frac{\text{Im} \Pi^R(\mathbf{q}, \omega)}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega)|^2} \int_{|p/q-1|}^{|p/q+1|} \left( 4 \frac{p^2}{q^2} - \left( \frac{p^2}{q^2} + 1 - x^2 \right)^2 \right)^{3/2} \frac{1}{x^3} dx \quad (6.1.21)$$

Второй интеграл можно взять точно:

$$\int_{|p/q-1|}^{|p/q+1|} \left( 4 \frac{p^2}{q^2} - \left( \frac{p^2}{q^2} + 1 - x^2 \right)^2 \right)^{3/2} \frac{1}{x^3} dx = 3\pi \left( \frac{p^4}{q^4} \theta(q-p) + \theta(p-q) \right) \quad (6.1.22)$$

Оставшееся выражение получается таким:

$$\begin{aligned} \text{Im} \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) &= -\frac{1}{8\pi c^2 \rho \beta} \int_0^{+\infty} q dq \frac{\text{Im} \Pi^R(\mathbf{q}, \omega)}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega)|^2} \left( \frac{p^4}{q^4} \theta(q-p) + \theta(p-q) \right) \\ &= -\frac{1}{A \cdot 8\pi c \rho \beta} \int_0^{+\infty} q^3 dq \frac{\text{Im} \Pi^R(\omega/cq^2)}{|\Pi^R(\omega/cq^2)|^2} \left( \frac{p^4}{q^4} \theta(q-p) + \theta(p-q) \right) \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

Как можно заметить, подынтегральное выражение зависит от соотношения  $\omega/cq^2$ ,

поэтому мы можем оценить его в трех различных областях:

$$q^3 \frac{\text{Im}\Pi^R(\omega/cq^2)}{|\Pi^R(\omega/cq^2)|^2} \left( \frac{p^4}{q^4} \theta(q-p) + \theta(p-q) \right) \approx \begin{cases} \frac{\omega q}{3c} & cq^2 \ll cp^2 \ll \omega \\ \frac{\omega p^4}{3cq^3} & cp^2 \ll cq^2 \ll \omega \\ \frac{\pi^2 \omega p^4}{72cq^3} & cp^2 \ll \omega \ll cq^2 \end{cases}$$

Интеграл набирается в области  $cq^2 \ll \omega$ , поэтому, воспользовавшись соответствующей асимптотикой:

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) \approx -\frac{\omega p^2}{24A \cdot \pi c^2 \rho \beta} \quad (6.1.24)$$

### 6.1.3 $\omega = cp^2$

В этом случае интеграл можно оценить только численно. Начнем с упрощения выражения для первой дельта-функции:

$$-\frac{p^4 \omega}{12\pi^2 c \rho \beta} \int q dq d\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \frac{\text{Im}\Pi^R(\mathbf{q}, cp^2 + c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)}{|\Pi^R(\mathbf{q}, cp^2 + c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2)|^2} \frac{1}{(cp^2 + c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2) c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \quad (6.1.25)$$

Сделав замену  $z = q/p$ , перепишем:

$$I_1 = -\frac{\omega p^2}{6A\pi^2 \beta c^2} \int_0^\infty z^3 dz \int_0^\pi d\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{(1+z^2-2z\cos(\varphi))^2} \frac{\text{Im}\Pi^R\left(\frac{z}{z^2} + 1 - 2\frac{\cos(\varphi)}{z}\right)}{\left|\Pi^R\left(\frac{z}{z^2} + 1 - 2\frac{\cos(\varphi)}{z}\right)\right|^2} \frac{1}{2+z^2-2z\cos(\varphi)} \quad (6.1.26)$$

Аналогично, для второй дельта-функции получаем:

$$I_2 = -\frac{\omega p^2}{6A\pi^2 \beta c^2} \int_0^\infty z^3 dz \int_0^\pi d\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{(1+z^2-2z\cos(\varphi))^2} \frac{\text{Im}\Pi^R\left(-1 + 2\frac{\cos(\varphi)}{z}\right)}{\left|\Pi^R\left(-1 + 2\frac{\cos(\varphi)}{z}\right)\right|^2} \frac{1}{-z^2 + 2z\cos(\varphi)} \quad (6.1.27)$$

Численный расчет дает:

$$\text{Im}\Sigma^R(\mathbf{p}, \omega = cp^2) = -0.509 \frac{\omega p^2}{6\pi^2 \rho \beta c^2 A} \quad (6.1.28)$$

## 6.2 Мнимая часть поляризационного оператора с учетом экранирования

Аналогично 6.1, приведем выражение (3.1.1) к виду (3.4.4).

$$\begin{aligned} \Pi(i\Omega, \mathbf{q}) &= \frac{d_c}{3} \frac{1}{\beta} \sum_{i\omega} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} k_\perp^4 \int (d\omega_1) \int (d\omega_2) \frac{\pi}{c\rho k^{2-\eta/2}} \left( -\delta(c|\mathbf{k}^{2-\eta/2} + \omega_1) + \delta(c|\mathbf{k}^{2-\eta/2} - \omega_1) \right) \times \\ &\times \frac{\pi}{c\rho |\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}} \left( -\delta(c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2} + \omega_2) + \delta(c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2} - \omega_2) \right) \times \frac{1}{(\omega_1 - i\omega)(\omega_2 - (i\Omega - i\omega))} \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Воспользовавшись (6.1.2), получим:

$$\begin{aligned} \Pi(i\Omega, \mathbf{q}) &= \frac{d_c}{3} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} k_{\perp}^4 \int (d\omega_1) \int (d\omega_2) \frac{\pi}{c\rho k^{2-\eta/2}} (-\delta(ck^{2-\eta/2} + \omega_1) + \delta(ck^{2-\eta/2} - \omega_1)) \times \\ &\times \frac{\pi}{c\rho|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}} (-\delta(c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2} + \omega_2) + \delta(c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2} - \omega_2)) \times \frac{\coth\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) + \coth\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)}{2(\omega_1 + \omega_2 - i\Omega)} \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Сделав замену  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ , в высокотемпературном пределе получим:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{d_c}{6} \int (d\mathbf{k}) k^4 \sin^4 \varphi \frac{\pi^2}{c^2 \rho^2 k^{2-\eta/2} |q - k|^{2-\eta/2}} \int (d\omega_1) [\delta(\omega_1 - ck^{2-\eta/2}) - \delta(\omega_1 + ck^{2-\eta/2})] \\ &[\delta(\omega - \omega_1 - c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}) - \delta(\omega - \omega_1 + c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2})] \times \left[ \frac{\omega}{\beta\omega_1(\omega - \omega_1)} \right] \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Произведем интегрирование по  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{d_c}{6} \frac{\omega\pi^2}{c^2 \rho^2 \beta} \int \frac{kdk}{4\pi^2} \frac{k^{2+\eta/2} \sin^4 \varphi d\varphi}{|q - k|^{2-\eta/2}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ck^{2-\eta/2}} \\ &\left( \frac{1}{(\omega - ck^{2-\eta/2})} [\delta(\omega - ck^{2-\eta/2} - c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}) - \delta(\omega - ck^{2-\eta/2} + c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2})] + \right. \\ &\left. \frac{1}{\omega + ck^{2-\eta/2}} [\delta(\omega + ck^{2-\eta/2} - c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}) - \delta(\omega + ck^{2-\eta/2} + c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2})] \right) \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Преобразуем выражение, чтобы привести его к более лаконичному виду:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{d_c}{6} \frac{\omega\pi^2}{c^2 \rho^2 \beta} \int \frac{kdk}{4\pi^2} \frac{k^{2+\eta/2} \sin^4 \varphi d\varphi}{|q - k|^{2-\eta/2}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ck^{2-\eta/2}} \frac{1}{c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}} \times \\ &\times [\delta(\omega - ck^{2-\eta/2} - c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}) + \delta(\omega - ck^{2-\eta/2} + c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}) + \delta(\omega + ck^{2-\eta/2} - c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}) + \\ &+ \delta(\omega + ck^{2-\eta/2} + c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2})] \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Переходя к интегрированию по  $y$  (6.1.9), получаем:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{d_c}{24\pi} \frac{\omega}{c^4 \rho^2 \beta q} \int y dy dk \frac{k^{2\eta/2} \sin^3 \varphi}{y^{4-2\eta/2}} \times [\delta(\omega - ck^{2-\eta/2} - cy^{2-\eta/2}) + \\ &+ \delta(\omega - ck^{2-\eta/2} + cy^{2-\eta/2}) + \delta(\omega + ck^{2-\eta/2} - cy^{2-\eta/2}) + \delta(\omega + ck^{2-\eta/2} + cy^{2-\eta/2})] \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Теперь обезразмерим интегральное выражение, делая замены:

$$z = \frac{\omega}{cq^{2-\eta/2}}, \quad \delta(\omega) = \frac{\delta(z)}{cq^{2-\eta/2}} \quad (6.2.7)$$

$$x = k/q, \quad a = y/q \quad (6.2.8)$$



После замен интеграл приводится к виду:

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{d_c}{24\pi} \frac{\omega}{c^4 \rho^2 \beta q} \int (aq)(qda)(qdx) \frac{(qx)^{2\eta/2} \sin^3 \varphi}{(qa)^{4-2\eta/2}} \frac{1}{cq^{2-\eta/2}} \times \\
&\times [\delta(z - x^{2-\eta/2} - a^{2-\eta/2}) + \delta(z - x^{2-\eta/2} + a^{2-\eta/2}) + \delta(z + x^{2-\eta/2} - a^{2-\eta/2}) + \delta(\omega + x^{2-\eta/2} + a^{2-\eta/2})] = \\
&= \frac{d_c}{24\pi} \frac{z}{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \int_0^\infty dx \int_{|x-1|}^{|x+1|} \frac{x^{2\eta/2} \sin^3 \varphi}{a^{3-2\eta/2}} \times \\
&\times [\delta(z - x^{2-\eta/2} - a^{2-\eta/2}) + \delta(z - x^{2-\eta/2} + a^{2-\eta/2}) + \delta(z + x^{2-\eta/2} - a^{2-\eta/2}) + \delta(\omega + x^{2-\eta/2} + a^{2-\eta/2})]
\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

$$\sin^3(\varphi) = \frac{(4k^2 q^2 - (k^2 + q^2 - y^2)^2)^{3/2}}{8k^3 q^3} = \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{a^2}{2x}\right)^2\right)^{3/2} \tag{6.2.10}$$

Объединяя данные выражения:

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{d_c}{24\pi} \frac{z}{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \int_0^\infty dx \int_{|x-1|}^{|x+1|} \frac{x^{2\eta/2}}{a^{3-2\eta/2}} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{a^2}{2x}\right)^2\right)^{3/2} \times \\
&\times [\delta(z - x^{2-\eta/2} - a^{2-\eta/2}) + \delta(z - x^{2-\eta/2} + a^{2-\eta/2}) + \delta(z + x^{2-\eta/2} - a^{2-\eta/2}) + \delta(\omega + x^{2-\eta/2} + a^{2-\eta/2})]
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

С этого момента будем оценивать интегралы в разных областях параметра  $z$ .

### 6.2.1 $\omega \ll cq^{2-\eta/2}$ или $z \ll 1$

Предположим, что  $\text{Im } \Pi^R$  - аналитическая функция  $z$ . В таком случае мы можем пренебречь  $z$  под интегралом. Так как  $x$  и  $a$  - положительные, только вторая и третья дельта-функции будут отличны от нуля в области интегрирования.

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{d_c}{12\pi} \frac{z}{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \int_0^\infty dx \int_{|x-1|}^{|x+1|} \frac{x^{2\eta/2}}{a^{3-2\eta/2}} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{a^2}{2x}\right)^2\right)^{3/2} \times \\
&\times [\delta(x^{2-\eta/2} - a^{2-\eta/2})] = \\
&= \frac{d_c}{12\pi} \frac{z}{(2 - \eta/2)c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \int_{1/2}^\infty dx \frac{x^{2\eta/2}}{x^{4-3\eta/2}} \left(1 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2\right)^{3/2} = \\
&= \frac{d_c}{4\pi} \frac{z}{(2 - \eta/2)c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \frac{2^{-5\eta/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\eta/2\right)}{\Gamma\left(4 - \frac{5}{2}\eta/2\right)}
\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

### 6.2.2 $\omega \gg cq^{2-\eta/2}$ или $z \gg 1$

В этом предельном случае проще считать интеграл в терминах углов, поэтому вновь перепишем выражение:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) = & \frac{d_c}{24\pi} \frac{z}{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \int_0^\infty dx \int_0^\pi d\varphi \frac{x^{2\eta/2+1}}{a^{4-2\eta/2}} \sin^4 \varphi \times \\ & \times [\delta(z - x^{2-\eta/2} - (x^2 + 1 - 2x \cos \varphi)^{1-\eta/2/2})] \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Остальные дельта-функции были исключены, ибо они дают субдоминантные асимптотики. Можно заметить, что после интегрирования по  $x$  мы должны будем подставить  $x^{2-\eta/2} \approx a^{2-\eta/2} \approx z/2$ .

$$\text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) \approx \frac{d_c}{48(2-\eta/2)} \frac{z}{c^4 \pi \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \int_0^\pi d\varphi \frac{x^{2\eta/2+1}}{x^{5-3\eta/2}} \sin^4 \varphi = \frac{d_c}{32(2-\eta/2)} \frac{z^{-1}}{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{3\eta/2}{2-\eta/2}} \quad (6.2.14)$$

## 6.3 Действительная часть поляризационного оператора с учетом экранировки

### 6.3.1 $\omega \gg cq^{2-\eta/2}$ или $z \gg 1$

Воспользуемся соотношением Крамерса - Кронига для вычисления действительной части. Интеграл будет набираться в области, где мы сможем воспользоваться асимптотикой  $\text{Im } \Pi^R(z)$  для больших  $z$ .

$$\begin{aligned} \text{Re } \Pi^R(z) = & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\text{Im } \Pi^R(x)}{x-z} dx = \frac{d_c}{32(2-\eta/2)\pi} \frac{1}{2^\lambda c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sign } x dx}{(x-z) |x|^{1-\lambda}} \\ = & \frac{d_c}{32(2-\eta/2)} \frac{1}{2^\lambda c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \frac{\tan \pi \lambda / 2}{z^{1-\lambda}} \end{aligned}$$

### 6.3.2 $\omega \ll cq^{2-\eta/2}$ или $z \ll 1$

Мы знаем точное выражение для поляризационного оператора при нулевой частоте из статической задачи [6]:

$$\text{Re } \Pi(z) = \frac{d_c}{\beta c^4 \rho q^{2-4\eta/2}} \Pi(\eta, D=2) \quad (6.3.1)$$

## 6.4 Собственная энергетическая часть с учетом экранирования

Начнем с того, что модифицируем уравнения (6.1.6) и (6.1.7). С учетом экранирования, суммарный вклад будет даваться выражением:

$$\operatorname{Im} \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega p^3}{6\pi^2 c^2 \rho \beta} \int \frac{dq dy \sin^3(\varphi)}{y^{3-2\eta/2}} \left( \frac{\operatorname{Im} \Pi^R(\mathbf{q}, \omega + cy^{2-\eta/2})}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega + cy^{2-\eta/2})|} \frac{1}{\omega + cy^{2-\eta/2}} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{Im} \Pi^R(\mathbf{q}, \omega - cy^{2-\eta/2})}{|\Pi^R(\mathbf{q}, \omega - cy^{2-\eta/2})|} \frac{1}{\omega - cy^{2-\eta/2}} \right)$$

Здесь мы перешли к интегрированию по  $y$  в соответствии с (6.1.9). Обезразмерим интеграл, используя (3.4.5) и (3.4.8):

$$\operatorname{Im} \Pi^R(\mathbf{q}, \varepsilon) = \frac{d_c f(z = \frac{\varepsilon}{cq^{2-\eta/2}})}{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}} \quad (6.4.1)$$

$$\operatorname{Re} \Pi^R(\mathbf{q}, \varepsilon) = \frac{d_c g(z = \frac{\varepsilon}{cq^{2-\eta/2}})}{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}}$$

$$\tau = \frac{\omega}{cq^{2-\eta/2}}$$

$$z = \frac{\omega}{cp^{2-\eta/2}}$$

Совершая такую подстановку, получим:

$$\operatorname{Im} \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega p^3}{6d_c \pi^2 c^2 \rho \beta} \int \frac{dq dy \sin^3(\varphi)}{y^{3-2\eta/2}} \left( \frac{f\left(\tau + \left(\frac{y}{q}\right)^{2-\eta/2}\right)}{|f^2 + g^2|} \frac{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}}{cp^{2-\eta/2} \left(z + \left(\frac{y}{p}\right)^{2-\eta/2}\right)} + \right. \\ \left. \frac{f\left(\tau - \left(\frac{y}{q}\right)^{2-\eta/2}\right)}{|f^2 + g^2|} \frac{c^4 \rho^2 \beta q^{2-4\eta/2}}{cp^{2-\eta/2} \left(z - \left(\frac{y}{p}\right)^{2-\eta/2}\right)} \right) \quad (6.4.2)$$

Обезразмеривая импульсы по правилу  $q = px$ ,  $y = pa$ , получим выражение:

$$\operatorname{Im} \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega p^{2-\eta/2} c \rho}{6d_c \pi^2} \int \frac{x^{2-4\eta/2} dx da \sin^3(\varphi)}{a^{3-2\eta/2}} \left( \frac{f\left(\frac{z}{x^{2-\eta/2}} + \left(\frac{a}{x}\right)^{2-\eta/2}\right)}{|f^2 + g^2|} \frac{1}{(z + a^{2-\eta/2})} + \right. \\ \left. \frac{f\left(\frac{z}{x^{2-\eta/2}} - \left(\frac{a}{x}\right)^{2-\eta/2}\right)}{|f^2 + g^2|} \frac{1}{(z - a^{2-\eta/2})} \right) \quad (6.4.3)$$

Таким образом мы получаем выражение (3.5.2). Найдем асимптотики этого выражения в разных пределах.

6.4.1  $\omega \gg cp^{2-\eta/2}$  или  $z \gg 1$

Как и в случае, рассмотренном в предыдущем разделе, пренебрежем  $a^{2-\eta/2}$  по сравнению с  $z$ :

$$\text{Im } \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega p^{2-\eta/2} c \rho}{3d_c \pi^2} \int_0^\infty \left( \frac{f\left(\frac{z}{x^{2-\eta/2}}\right) 1}{|f^2 + g^2| z} \right) x^{2-4\eta/2} dx \int_{|x-1|}^{x+1} \frac{da \sin^3(\varphi)}{a^{3-2\eta/2}} \quad (6.4.4)$$

Чтобы получить асимптотику выражения, оценим интеграл по  $a$  в двух областях:

$$\int_{|x-1|}^{x+1} \frac{da \sin^3(\varphi)}{a^{3-\eta/2}} \approx \begin{cases} \frac{3\pi x}{8} & x \ll 1 \\ \frac{3\pi}{8x^{3-2\eta/2}} & x \gg 1 \end{cases} \quad (6.4.5)$$

Так как нас интересует только степенная зависимость мнимой части собственной энергии, будем интегрировать асимптотическое выражение (6.4.5) в границах областей применимости приближения. Таким образом, мы пренебрегаем отличием функции от ее асимптотики в параметрически малой области, где у этой функции нет особенностей. Из вышесказанного следует, что наши вычисления не позволяют определить численный коэффициент, но позволяют определить степенное поведение вкладов. Будем обозначать константу порядка единицы  $\#$ .

$$\text{Im } \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega p^{2-\eta/2} c \rho}{8\pi d_c} \left[ \int_0^\# \left( \frac{f\left(\frac{z}{x^{2-\eta/2}}\right) 1}{|f^2 + g^2| z} \right) x^{3-4\eta/2} dx + \int_\#^\infty \left( \frac{f\left(\frac{z}{x^{2-\eta/2}}\right) 1}{|f^2 + g^2| z} \right) \frac{1}{x^{1+2\eta/2}} dx \right] \quad (6.4.6)$$

Воспользуемся асимптотиками  $f$  и  $g$ :

$$f(z) = \begin{cases} f_0 z & z \ll 1 \\ f_\infty \frac{1}{z^{1-\lambda}} & z \gg 1 \end{cases} \quad (6.4.7)$$

$$g(z) = \begin{cases} g_0 & z \ll 1 \\ g_\infty \frac{1}{z^{1-\lambda}} & z \gg 1 \end{cases} \quad (6.4.8)$$

Здесь использовано обозначение (3.4.10).

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) &\approx -\frac{\omega p^{2-\eta/2} c \rho}{8\pi d_c} \left[ \int_0^\# \left( \frac{f_\infty}{|f_\infty^2 + g_\infty^2|} \frac{z^{1-\lambda}}{z} \right) x dx + \int_\#^\infty \left( \frac{f_\infty}{f_\infty^2 + g_\infty^2} \frac{z^{1-\lambda}}{z} \right) \frac{dx}{x^{3+\eta/2}} \right] = \\ &= -\# \frac{\omega p^{2-\eta/2} c \rho}{d_c} z^{-\lambda} \quad (6.4.9) \end{aligned}$$

6.4.2  $\omega \ll cp^{2-\eta/2}$  или  $z \ll 1$

Предположим аналитичность мнимой части собственной энергии, пренебрежем  $z$  в подынтегральном выражении:

$$\text{Im } \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) = -\frac{\omega p^{2-\eta/2} c \rho}{3d_c \pi^2} \int \frac{x^{2-4\eta/2} dx da \sin^3(\varphi)}{a^{5-3\eta/2}} \left( \frac{f \left( \left( \frac{a}{x} \right)^{2-\eta/2} \right)}{|f^2 + g^2|} \right) \quad (6.4.10)$$

Этот интеграл можно оценить теми же методами, что и в случае  $z \gg 1$ :

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma^R(\mathbf{p}, \omega) &= -\frac{\omega p^{2-\eta/2} c \rho}{3d_c \pi^2} \int_0^\infty x^{2-4\eta/2} dx \int_{|x-1|}^{x+1} \frac{da \sin^3(\varphi)}{a^{5-3\eta/2}} \left( \frac{f \left( \left( \frac{a}{x} \right)^{2-\eta/2} \right)}{|f^2 + g^2|} \right) = \\ &= -\frac{\omega p^{2-\eta/2} c \rho}{8\pi} \left[ \# \int_0^\# dx \times x + \# \int_1^\infty \frac{1}{x^{3+\eta/2}} dx \right] = \\ &= -\# \frac{\omega p^{2-\eta/2} c \rho}{8\pi} \quad (6.4.11) \end{aligned}$$

Это рассуждение было приведено для того, чтобы показать, что интеграл (6.4.10) сходится.

## 6.5 Самосогласованный учет мнимой части собственной энергии

Подставим (3.6.7) в (3.4.5). В этом вычислении нас будет интересовать только зависимость от частоты, численные коэффициенты будем опускать.

$$\text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) \sim \int d\omega_1 \int k^5 dk d\varphi \sin^4 \varphi \frac{1}{\beta c^2 \rho^2 k^{4-2\eta/2}} \frac{\mathcal{A}(\eta, t_1)}{(t_1^2 - 1)^2 + \mathcal{A}^2} \frac{1}{c^2 |q - k|^{4-2\eta/2}} \frac{\mathcal{A}(\eta, t_2)}{(t_2^2 - 1)^2 + \mathcal{A}^2} \frac{\omega}{\omega_1 (\omega - \omega_1)} \quad (6.5.1)$$

Здесь введены параметры  $t_1 = \omega_1 / ck^{2-\eta/2}$ ,  $t_2 = (\omega - \omega_1) / c|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^{2-\eta/2}$ . Перейдем от этих обозначений к другим:  $\tau = \omega_1 / cq^{2-\eta/2}$  и  $z = \omega / cq^{2-\eta/2}$ . Перепишем выражение для мнимой части поляризационного оператора:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^R(\mathbf{q}, \omega) &\sim \int d\tau \int k^5 dk d\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{c^4 \beta \rho^2 k^{4-2\eta/2} y^{4-2\eta/2}} \frac{z}{\tau(z - \tau)} \times \\ &\quad \times A_1 \left( \tau \left( \frac{q}{k} \right)^{2-\eta/2} \right) A_1 \left( (z - \tau) \left( \frac{q}{k} \right)^{2-\eta/2} \right) \quad (6.5.2) \end{aligned}$$

Обезразмеривая переменные интегрирования  $k = xq$ ,  $y = ax$ :

$$\text{Im } \Pi^R(z, q) \sim \frac{d_c}{\beta \rho^2 c^4 q^{2-4\eta/2}} \int d\tau \int x^5 dx d\varphi \sin^4 \varphi \frac{1}{x^{4-2\eta/2} a^{4-2\eta/2}} \frac{z}{\tau(z-\tau)} A_1\left(\frac{\tau}{x^{2-\eta/2}}\right) A_1\left(\frac{z-\tau}{a^{2-\eta/2}}\right) \quad (6.5.3)$$

Здесь мы ввели обозначение:

$$A_1(x) = \frac{\mathcal{A}(\eta, x)}{(x^2 - 1)^2 + \mathcal{A}(\eta, x)^2} \quad (6.5.4)$$

Для начала посмотрим на случай  $z \gg 1$ , аналогично предыдущим разделом, пренебрежем всем, чем можем, по сравнению с  $z$ .

$$\text{Im } \Pi^R(z, q) \sim \frac{d_c}{\beta \rho^2 c^4 q^{2-4\eta/2}} \int x^5 dx d\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{x^{4-2\eta/2} a^{4-2\eta/2}} A_1\left(\frac{z}{a^{2-\eta/2}}\right) \int \frac{d\tau}{\tau} A_1\left(\frac{\tau}{x^{2-\eta/2}}\right) \quad (6.5.5)$$

Второй интеграл сходится и дает численный множитель. Осталось оценить первый интеграл. Для этого найдем асимптотику  $A_1$ . Положим,  $z \gg a^{2-\eta/2}$ :

$$A_1\left(\frac{z}{a^{2-\eta/2}}\right) \sim \left(\frac{z}{a^{2-\eta/2}}\right)^{-3-\lambda} \quad (6.5.6)$$

Другая асимптотика нам не важна, ибо значение интеграла в области  $z \ll a^{2-\eta/2}$  будет подавлено степенным образом. Будем оценивать интеграл при  $x \gg 1$ , именно там будет набираться интеграл:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^R(z, q) &\sim \frac{d_c}{\beta \rho^2 c^4 q^{2-4\eta/2}} \int x^5 dx d\varphi \sin^4(\varphi) \frac{1}{x^{4-2\eta/2} a^{4-2\eta/2}} \left(\frac{z}{a^{2-\eta/2}}\right)^{-3-\lambda} \sim \\ &\sim z^{-3-\lambda} \int_{\#}^{\#z^{1/(2-\eta/2)}} x^{3+4\eta/2} dx \sim z^{-1+\lambda} \quad (6.5.7) \end{aligned}$$

Таким образом, на больших частотах зависимость воспроизводится. В обратном пределе  $z \ll 1$  пренебрежем  $z$  в подынтегральном выражении:

$$\text{Im } \Pi^R(z, q) \sim \frac{d_c}{\beta \rho^2 c^4 q^{2-4\eta/2}} \int d\tau \int x^5 dx d\varphi \sin^4 \varphi \frac{1}{x^{4-2\eta/2} a^{4-2\eta/2}} \frac{z}{\tau^2} A_1\left(\frac{\tau}{x^{2-\eta/2}}\right)^2 \sim z \quad (6.5.8)$$

Несложно проверить, что интеграл сходится, поэтому асимптотика на малых  $z$  линейная. Следовательно, уравнения типа SCSA сохраняют степенное поведение (3.4.5).

## 6.6 Вычисление среднеквадратичных отклонений

Преобразуем выражение (4.1):

$$\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle \sim \int_0^\infty d\omega \int (d\mathbf{k}) \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \text{Im } G^R(\omega, \mathbf{k}) \quad (6.6.1)$$

При области, удовлетворяющей условию (3.6.12), мнимая часть функции Грина (3.6.7). Во всех остальных областях собственная энергетическая часть в первом порядке по взаимодействию будет мала по сравнению с энергией на массовой поверхности, поэтому будем считать мнимую часть функции Грина равной (3.4.3). Перед тем, как вычислять интеграл по частотам, возьмем интеграл по импульсам:

$$\int (d\mathbf{k}) \frac{\mathcal{A}(\eta, z) \varkappa k^{4-\eta}}{(\varkappa k^{4-\eta} - \rho\omega^2)^2 + (\varkappa k^{4-\eta} \mathcal{A}(\eta, z))^2} \sim \int_0^{q_*} \frac{dk}{\varkappa k^{3-2\eta/2}} \frac{\mathcal{A}(\eta, z)}{(z^2 - 1)^2 + \mathcal{A}(\eta, z)^2} \quad (6.6.2)$$

Переходя к интегрированию по безразмерной переменной  $z = \omega/ck^{2-\eta/2}$ , получаем:

$$\int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{\varkappa} \left(\frac{c}{\omega}\right)^{1-\frac{\eta/2}{2-\eta/2}} \frac{1}{z^{\frac{\eta/2}{2-\eta/2}} (z^2 - 1)^2 + \mathcal{A}(\eta, z)^2} \sim \left(\frac{c}{\omega}\right)^{1-\frac{\eta/2}{2-\eta/2}} \frac{1}{\varkappa} \sim \frac{1}{\varkappa(q_*)^2} \left(\frac{\omega_*}{\omega}\right)^{1-\frac{\eta/2}{2-\eta/2}} \quad (6.6.3)$$

Здесь  $z_0 = \omega/\omega_* \ll 1$ , поскольку при  $z \gg 1$  мнимая часть функции Грина дается 3.4.3. В последней строчке был совершен переход к  $\varkappa$  на больших волновых векторах. Для мнимой части функции Грина на больших волновых векторах возьмем интеграл по импульсам:

$$\int_{q_*}^{q_{uv}} k dk \frac{1}{\rho\omega c} \delta\left(\frac{\omega}{c} - k^2\right) \sim \theta(\omega - \omega_*) \theta(\omega_{uv} - \omega) \frac{1}{\rho\omega c} \quad (6.6.4)$$

где  $q_{uv}$  — импульс ультрафиолетовой обрезки, а  $\omega_{uv}$  — соответствующая энергия. Теперь можем посчитать вклад в флуктуации от универсального режима и от коротковолнового.

### 6.6.1 $t \gg \omega_*^{-1}$

Вклад от универсально режима дается выражением ( $x = \omega/\omega_*$ ):

$$\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle_{q < q_*} \sim \omega_* \int_0^1 dx \frac{\omega_*}{\varkappa(q_*)^2} \left(\frac{1}{x}\right)^{1-\frac{\eta/2}{2-\eta/2}} \coth\left(\frac{x\omega_*}{2T}\right) \sin^2\left(\frac{x\omega_* t}{2}\right) \quad (6.6.5)$$

Интеграл набирается в окрестности  $x \sim (\omega_* t)^{-1}$  и равен:

$$\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle_{q < q_*} \sim \frac{T}{\varkappa(q_*)^2} (\omega_* t)^{1-\eta/2/(2-\eta/2)} \quad (6.6.6)$$

Для коротковолнового предела вклад в флуктуации:

$$\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle_{q > q_*} \sim \int_1^{\omega_{uv}/\omega_*} dx \frac{1}{\rho x c} \coth\left(\frac{x\omega_*}{2T}\right) \sin^2\left(\frac{x\omega_* t}{2}\right) \sim \frac{T}{\varkappa(q_*)^2} \quad (6.6.7)$$

Несложно заметить, что вклад от длинноволновой области доминирует, поэтому можно заключить, что на больших временах характер термодинамических флуктуаций субдиффузионный.

### 6.6.2 $T^{-1} \ll t \ll \omega_*^{-1}$

В этом пределе вклад от универсального режима квадратичный по времени:

$$\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle_{q < q_*} \sim \frac{T}{\varkappa(q_*)^2} (\omega_* t)^2 \quad (6.6.8)$$

Такой аналогичный вклад будет наблюдаться и на меньших временах. Для коротковолновых флуктуаций интеграл набирается в окрестности  $x \sim (\omega_* t)^{-1}$  и равен:

$$\langle (h(t) - h(0))^2 \rangle_{q > q_*} \sim \int_1^{\omega_{uv}/\omega_*} dx \frac{1}{\rho x c} \coth\left(\frac{x\omega_*}{2T}\right) \sin^2\left(\frac{x\omega_* t}{2}\right) \sim \frac{T}{\varkappa(q_*)^2} (\omega_* t) \quad (6.6.9)$$

При таком времени коротковолновые флуктуации вносят доминирующий факт, а характер флуктуаций — диффузионный. Для того чтобы оценивать времена меньше обратной температуры, надо учитывать квантовые флуктуации [5]. Стоит отметить, что мы ожидаем в этой области реализацию баллистического режима, хотя это и требует более детального рассмотрения.



## Список литературы

- [1] Теоретическая Физика В 10т. Т. 7. Теория Упругости Ландау, Лифшиц 2003 264с М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 — 2005 гг.
- [2] Maya Paczuski, Mehran Kardar, and David R. Nelson «Landau Theory of the Crumpling Transition», Phys. Rev. Lett. 60, 2638 – Published 20 June 1988
- [3] I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, and A. D. Mirlin «Rippling and crumpling in disordered free-standing graphene», Phys. Rev. B 92, 155428 – Published 21 October 2015
- [4] Mikhail I. Katsnelson, Radboud Universiteit Nijmegen «Graphene Carbon in Two Dimensions». Черноголовка, 1998
- [5] I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, M. I. Katsnelson, and A. D. Mirlin «Quantum elasticity of graphene: Thermal expansion coefficient and specific heat», Phys. Rev. B 94, 195430 – Published 21 November 2016
- [6] Pierre Le Doussal, Leo Radzihovsky «Anomalous elasticity, fluctuations and disorder in elastic membranes», Annals of Physics 392 (2018) 340-410
- [7] Enzo Granato, K. R. Elder, S. C. Ying, and T. Ala-Nissila «Dynamics of fluctuations and thermal buckling in graphene from a phase-field crystal model», Phys. Rev. B 107, 035428 – Published 24 January 2023
- [8] Ken-ichi Mizuochi et al «Dynamical scaling of polymerized membranes» 2014 EPL 107 38003
- [9] Gerald D. Mahan «Many-Particle Physics»
- [10] E. Guitter, F. David, S. Leibler, L. Peliti. Thermodynamical behavior of polymerized membranes. Journal de Physique, 1989, 50 (14), pp.1787-1819.
- [11] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика Статистическая Физика. ЧАСТЬ I 3-е изд., испр. -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. - 584 с. (т. V)
- [12] M.L. Ackerman, P. Kumar, M. Neek-Amal, P.M. Thibado, F.M. Peeters, and Surendra Singh «Anomalous Dynamical Behavior of Freestanding Graphene Membranes» Phys. Rev. Lett. 117, 126801 – Published 13 September 2016
- [13] I V Gornyi et al 2017 2D Mater. 4 011003 «Anomalous Hooke’s law in disordered graphene»
- [14] D. R. Saykin, V. Yu. Kachorovskii, and I. S. Burmistrov «Phase diagram of a flexible two-dimensional material» Phys. Rev. Research 2, 043099 – Published 19 October 2020