
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

СВЕРХПРОВОДЯЩИЙ ОТКЛИК В СВЕРХПРОВОДНИКАХ СО СПИН-ОРБИТАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

(бакалаврская работа)

Студент:

Поляков Владислав Андреевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Фоминов Яков Викторович,
д-р физ.-мат. наук, доц.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2023

Аннотация

В этой работе рассматривается линейный отклик сверхпроводящего тока на векторный потенциал в двумерном сверхпроводнике со спин-орбитальным взаимодействием при наличии магнитного поля, приложенного в плоскости системы. Был воспроизведён результат статьи О. Dimitrova, M.V. Feigel'man, Phys. Rev. B 76, 014522 (2007) для функций Грина. Была найдена точная формула для сверхпроводящего отклика, которая с учётом приближений также воспроизвела результат из вышеуказанной статьи. Получено выражение для линейного сверхпроводящего отклика с точностью до членов, квадратичных по магнитному полю. Это выражение вычислено численно при всех температурах, а также аналитически найдены его асимптотики при $T \ll T_c$ и $1 - \frac{T}{T_c} \ll 1$.

Содержание

Аннотация	2
1 Введение	4
1.1 Предыдущие работы и мотивация	4
1.2 Постановка задачи	5
2 Порядки малости	6
3 Выражение для оператора тока	7
4 Отклик в киральном базисе	8
5 Формула Кубо	10
6 Функции Грина для пространственно-неоднородного сверхпроводника	13
6.1 Уравнения Горькова в общем случае	13
6.2 Пространственно-неоднородный случай	14
6.3 Переход к киральному базису	15
6.4 Окончательный ответ для функций Грина	16
7 Некоторые соотношения на Функции Грина	18
7.1 Тождества	18
7.2 Проверка соотношений на функции Грина	19
8 Разложение по магнитному полю	20
8.1 Поправки к спектру от Q и H	20
8.2 Разложение отклика	21
8.3 Низкотемпературный предел	24
8.4 Отклик вблизи критической температуры	24
8.5 Численный расчёт	25
9 Ответ из теории Гинзбурга-Ландау	26
10 Заключение	29
11 Полезные интегралы и суммы	30

1 Введение

1.1 Предыдущие работы и мотивация

В последнее время резко возрос интерес к системам, способным проявлять так называемый сверхпроводящий диодный эффект, заключающийся в том, что величина критического сверхпроводящего тока зависит от направления. Было предложено множество систем, в которых такой эффект может проявляться [1]-[5], однако особый интерес для нас в этой работе будут представлять сверхпроводники со спин-орбитальным взаимодействием.

Рассмотрим двумерный металл со спин-орбитальным взаимодействием типа Рашбы. Выберем ось z перпендикулярной плоскости, а сама система будет находиться в плоскости xy . В работах [6, 7, 8] было показано, что в такой системе имеется две ферми-поверхности разного радиуса, на одной из которых спин направлен вдоль вектора $\alpha_R \mathbf{p} \times \mathbf{e}_z$, играющего роль эффективного магнитного поля, на другой – против. При добавлении в эту систему магнитного поля, приложенного вдоль оси y , ферми-поверхности начинают сдвигаться в противоположные стороны вдоль оси x и деформироваться (рис. (2)). Это приводит к тому, что основному состоянию в такой системе становится выгодно иметь пространственно-неоднородную зависимость параметра порядка от координат $\Delta e^{i\mathbf{Q}r}$, где \mathbf{Q} направлен вдоль оси x и имеет смысл импульса центра масс куперовской пары. Такое состояние будем называть геликоидальным.

В работе [8] была подробно рассмотрена фазовая диаграмма для такой системы (см рис.(1)). В нулевом порядке по параметру $\frac{\alpha_R}{v_F}$, отвечающему за отношение спин-орбитальной энергии к энергии Ферми, при достаточно малых магнитных полях система находится в обычном состоянии в теории БКШ (отмечено BCS на рисунке), а при полях порядка T_{c0} происходит переход в геликоидальное состояние. Однако если считать $\frac{\alpha_R}{v_F}$ конечным параметром, то вектор \mathbf{Q} ненулевой во всём сверхпроводящем состоянии.

В недавней работе [9] был сделан акцент на диодном эффекте. Для этого авторы использовали теорию Гинзбурга-Ландау. В этой статье были получены численные и аналитические результаты для зависимости критических токов от магнитного поля, а также для зависимости тока от вектора \mathbf{q} , когда этот вектор не равен равновесному значению \mathbf{Q} .

Подход статьи Yuan и Fu применим лишь вблизи линии фазового перехода сверхпроводника в нормальное состояние, обозначенной жирной линией (1). При отдалении от этой линии, как правило, сверхпроводящие токи становятся сильнее, так что интересно узнать, как меняется анизотропия токов при этом.

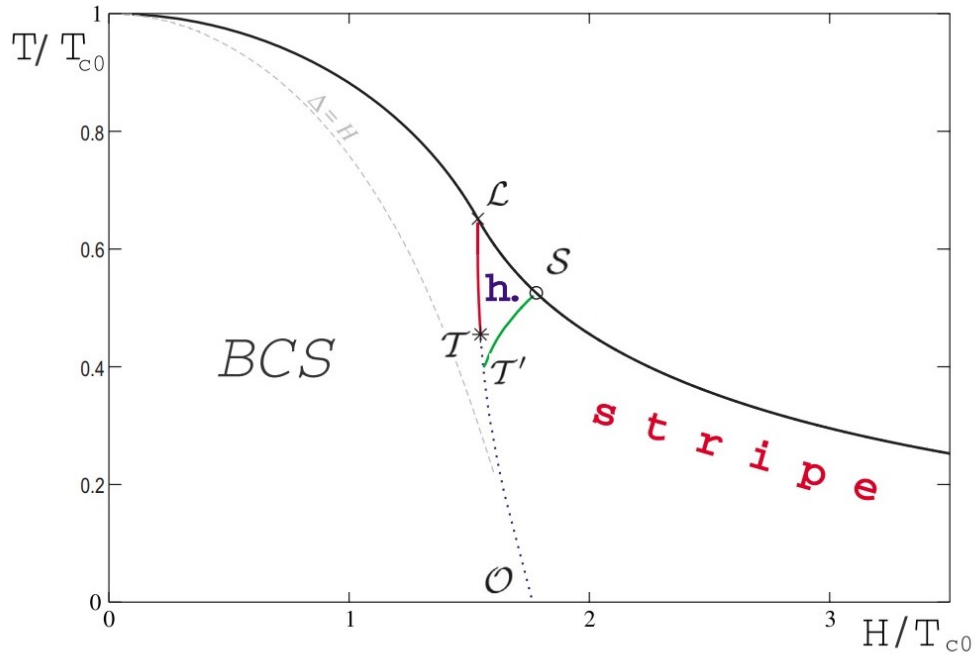


Рис. 1: Фазовая диаграмма двумерного сверхпроводника со спин-орбитальным взаимодействием. Рисунок взят из статьи [8]

1.2 Постановка задачи

Итак, пусть имеются электроны в двумерном металле со спин-орбитальным взаимодействием типа Рашбы $\alpha_R e_z(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\sigma})$ и квадратичной дисперсией. В плоскости системы в направлении оси y прикладывается магнитное поле (см. рис. (2)), много меньшее энергии Ферми E_f и энергии спин-орбитального взаимодействия $\alpha_R p_F$. Требуется найти отклик сверхпроводящего тока на внешний векторный потенциал.

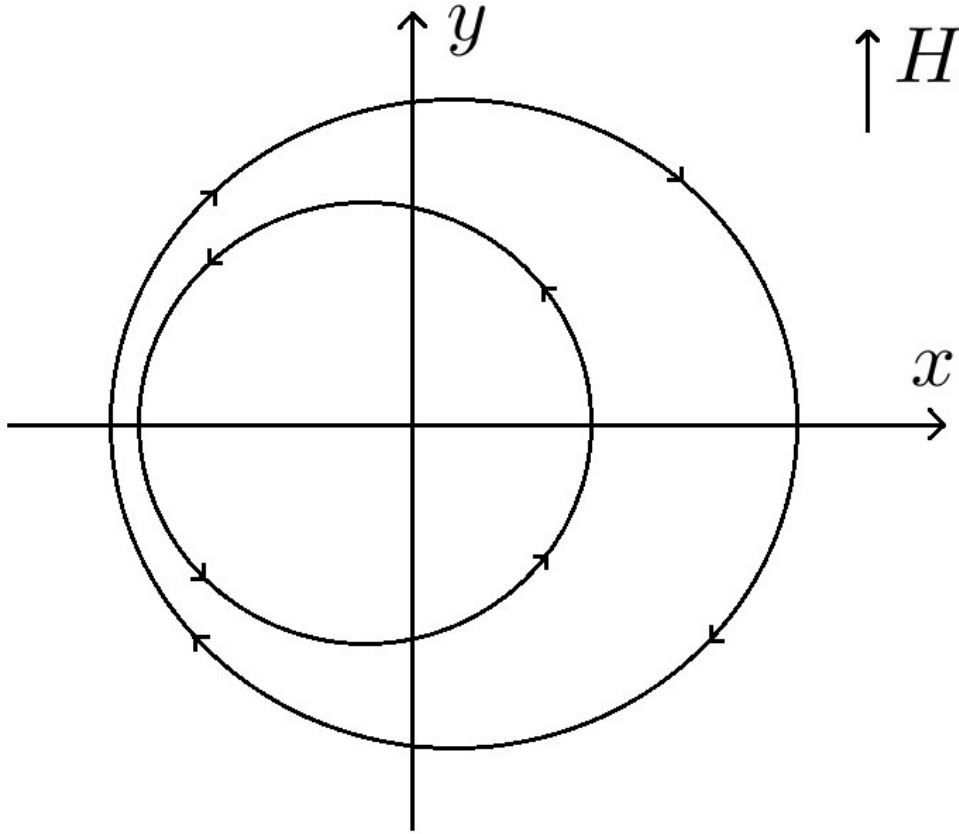


Рис. 2: Ферми-поверхности для случая наличия спин-орбитального взаимодействия и малого по сравнению с ним магнитного поля. Если поле прикладывается в плоскости образца, то ферми-поверхности сдвигаются в противоположные стороны на импульс $\frac{H}{v_F}$

2 Порядки малости

В этой задаче есть несколько важных параметров. Во-первых, мы считаем, что спин-орбитальное взаимодействие мало: $\frac{\alpha p}{E_F} \ll 1$, так что можно считать ферми-поверхности слабо отличающимися друг от друга. Во-вторых, магнитное поле слабее спин-орбитального эффекта $\frac{H}{\alpha p} \ll 1$, так что ферми-поверхности лишь слабо сдвигаются, а не начинают касаться друг друга. В-третьих, $\frac{H}{T_c} \ll 1$ и поэтому выражения вида $\frac{1}{T_c^2 + H^2}$ можно раскладывать в ряд. Другими словами, H – самый маленький параметр задачи, так что слагаемое с большей степенью H всегда параметрически меньше.

Другими словами, существует следующая иерархия масштабов энергий:

$$E_F \gg \alpha p \gg T_c \gg H \quad (2.1)$$

Будем работать в приближении, что $\frac{\alpha}{v_F}$ и $\frac{H}{T_c}$ – малые, но конечные параметры, а величинами $\frac{H}{\alpha p}$ и меньше мы пренебрежём.

Также следует отметить, что в случае $\frac{H}{T_c} \ll 1$ согласно статье [8] импульс центра масс куперовской пары $Q = 2\frac{\alpha H}{v^2}$.

3 Выражение для оператора тока

В наиболее общем виде можно записать оператор тока как

$$j = e\psi^\dagger(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{p}}\xi(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})\psi(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

где $\xi(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p})$ - энергия квазичастицы. В гамильтониане системы есть три слагаемых. Первое - квадратичная дисперсия свободной частицы, второе - сдвиг энергии из-за химического потенциала, третье - слагаемое от спин-орбитального взаимодействия.

$$H(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E_F + \alpha_R \mathbf{e}_z (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H} \quad (3.2)$$

Возьмём производную в уравнении (3.1), зная явный вид гамильтониана

$$j = e\psi^\dagger(\mathbf{r})\left(\frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{e\mathbf{A}}{mc} + \alpha_R(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{e}_z)\right)\psi(\mathbf{r}) \quad (3.3)$$

где $\psi = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)^T$.

Мы заинтересованы в отклике тока на малые магнитные поля, при приложенном постоянном магнитном поле вдоль оси y . В дальнейшем будет удобно выбрать такую калибровку постоянного поля, при которой вектор-потенциал направлен по оси z . В таком случае, как дальше будет видно, постоянное поле не будет давать дополнительных слагаемых в сверхпроводящем отклике и будет входить лишь в выражение для спектра и в функции Грина.

$$j = e\psi^\dagger(\mathbf{r})\left(\frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{e\mathbf{A}}{mc} + \mathbf{e}_z \frac{eH_0x}{mc} + \alpha_R(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{e}_z)\right)\psi(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

Теперь нам нужно усреднить этот оператор по основному состоянию системы с температурой T . Система двумерна, так что в этой задаче не может быть тока вдоль оси z . По этой причине третье слагаемое в формуле выше занулится

$$\langle e\psi^\dagger(\mathbf{r})\mathbf{e}_z \frac{eH_0x}{mc} \psi(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (3.5)$$

Второй член можно усреднить напрямую, так как \mathbf{A} это просто число.

$$- \langle e\psi^\dagger(\mathbf{r})\frac{e\mathbf{A}}{mc}\psi(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{e^2\mathbf{A}}{mc} \langle \psi^\dagger\psi \rangle = -\frac{e^2n}{mc}\mathbf{A} \quad (3.6)$$

Оставшиеся два члена есть ни что иное, как оператор скорости. Их мы перепишем как

$$\langle e\psi^\dagger(\mathbf{r})\left[\frac{\mathbf{p}}{m} + \alpha_R(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{e}_z)\right]\psi(\mathbf{r}) \rangle = \langle e\psi^\dagger(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{p}}\xi(\mathbf{p})\psi(\mathbf{r}) \rangle \quad (3.7)$$

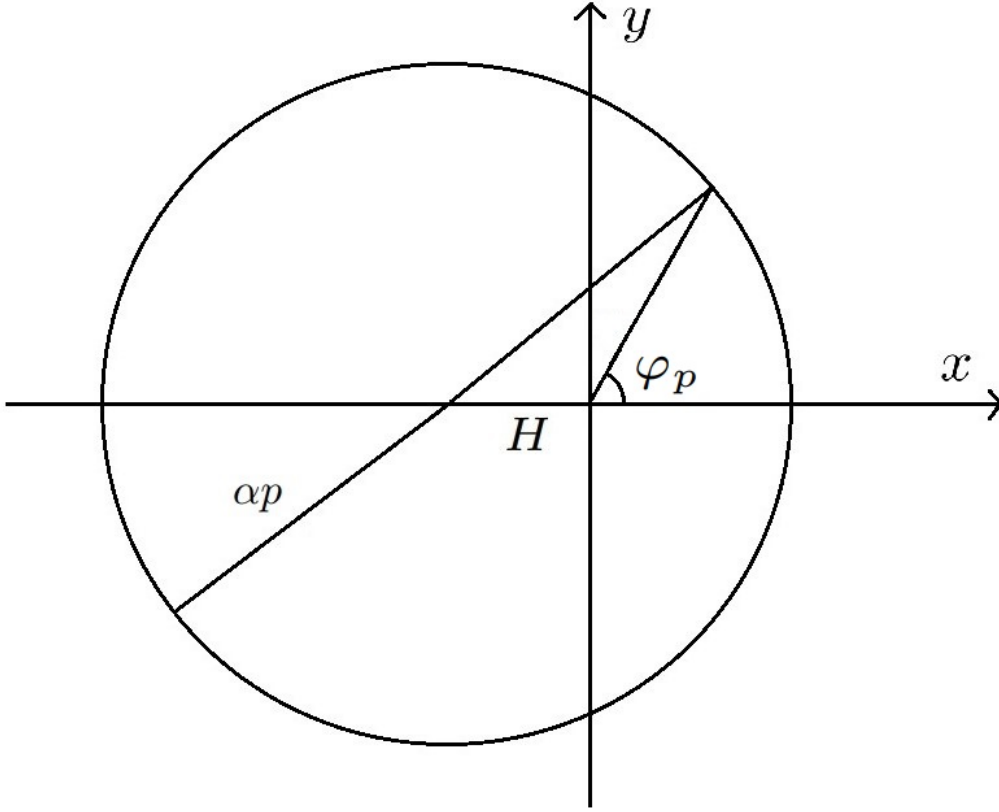


Рис. 3: Геометрический смысл угла φ_p . Этот угол соответствует углу радиус-вектора в точку окружности радиуса αp , сдвинутой на вектор H вдоль оси x .

4 Отклик в киральном базисе

Следуя статье [8], диагонализуем гамильтониан преобразованием вида $a_\alpha(p) = \eta_{\alpha\lambda}(p)a_\lambda(p)$

$$\eta_\lambda(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda e^{i\varphi_p(H)} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Здесь угол φ_p задаётся выражением

$$\cos \varphi_p = \frac{\alpha p_x - H}{\sqrt{(\alpha p)^2 - 2\alpha p_x H + H^2}} \quad (4.2)$$

Тогда эта система имеет диагональный гамильтониан в киральном базисе

$$H(\mathbf{p}) = \sum_\lambda \int \psi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) \xi_\lambda(\mathbf{p}) \psi_\lambda(\mathbf{p}) - \psi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) \frac{e\mathbf{A}}{c} \frac{\partial \xi_\lambda(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \psi_\lambda(\mathbf{p}) (d\mathbf{p}) \quad (4.3)$$

с точностью до линейных по \mathbf{A} слагаемых. Здесь гамильтониан сразу разложен до линейных по вектор-потенциалу слагаемых. Поэтому можно подставить в уравнение (3.7)

дисперсию в киральном базисе, которая задаётся выражением

$$\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \lambda\sqrt{(\alpha\mathbf{p})^2 - 2\alpha p_x H + H^2}. \quad (4.4)$$

В таком случае оператор тока будет иметь два слагаемых

$$\hat{\mathbf{j}} = \sum_\lambda \psi_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) \left(e \frac{\partial \xi_\lambda(p)}{\partial \mathbf{p}} - \frac{e^2}{c} \nabla_p [(\mathbf{A} \nabla_p) \xi_\lambda(p)] \right) \psi_\lambda(\mathbf{p}) \quad (4.5)$$

Среднее от первого слагаемого будем называть градиентным вкладом, среднее от второго - диамагнитным. Как было показано в предыдущем разделе, вклад в ток от диамагнитного слагаемого вычисляется напрямую. Для вычисления же градиентного вклада на нулевой температуре следует воспользоваться формулой Кубо

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^t dt' \int_V d^3 r' Q(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}', t') \quad (4.6)$$

или в импульсно-частотном представлении

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{p}, \omega) \rangle = Q(\mathbf{p}, \omega) \mathbf{A}(\mathbf{p}, \omega). \quad (4.7)$$

Для ненулевых температур используется формула для мацубаровской восприимчивости

$$Q^M(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{c} \langle T_\tau \mathbf{j}(\tau, \mathbf{r}) \mathbf{j}(0, \mathbf{r}') \rangle \quad (4.8)$$

из которой затем аналитическим продолжением на верхнюю полуплоскость получается обычный отклик.

5 Формула Кубо

Займёмся более подробно формулой Кубо:

$$Q_{\alpha\beta}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{c} \sum_{\sigma\sigma'} \langle T_{\tau} \psi_{\sigma}^{+}(r, \tau) \hat{j}_{\alpha} \psi_{\sigma}(r, \tau) \psi_{\sigma'}^{+}(r', 0) \hat{j}_{\beta} \psi_{\sigma'}(r', 0) \rangle \quad (5.1)$$

Наиболее простой способ работать с этим выражением это перейти в Фурье пространство

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \int \psi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \\ \psi^{+}(\mathbf{r}) &= \int \psi^{+}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для простоты далее представим градиентную часть оператора тока как $j_{\alpha}(p) = ev_{\alpha}$. Тогда выражение из формулы Кубо можно переписать следующим образом

$$Q_{\alpha\beta}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^2}{c} \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k'_1}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\mathbf{k}_1\mathbf{r} - i\mathbf{k}'\mathbf{r}' + i\mathbf{k}'_1\mathbf{r}'} v_{\alpha}(k_1) v_{\beta}(k'_1) \langle T_{\tau} \psi_{\sigma}^{+}(k, \tau) \psi_{\sigma}(k_1, \tau) \psi_{\sigma'}^{+}(k', 0) \psi_{\sigma'}(k'_1, 0) \rangle \quad (5.3)$$

Усреднение Т-упорядоченного произведения раскрывается по теореме Вика. Сразу опустим члены, которые после интегрирования по импульсам и суммирования по спинам дадут ноль (диаграмма вида двух петель).

$$\begin{aligned} &\langle T_{\tau} \psi_{\sigma}^{+}(k, \tau) \psi_{\sigma}(k_1, \tau) \psi_{\sigma'}^{+}(k', 0) \psi_{\sigma'}(k'_1, 0) \rangle = \\ &\langle T_{\tau} \psi_{\sigma}^{+}(k, \tau) \psi_{\sigma'}^{+}(k', 0) \rangle \langle T_{\tau} \psi_{\sigma'}(k'_1, 0) \psi_{\sigma}(k_1, \tau) \rangle - \\ &\langle T_{\tau} \psi_{\sigma}(k_1, \tau) \psi_{\sigma'}^{+}(k', 0) \rangle \langle T_{\tau} \psi_{\sigma'}(k'_1, 0) \psi_{\sigma}^{+}(k, \tau) \rangle = \\ &-G_{\sigma\sigma'}(\tau, k_1, k') G_{\sigma'\sigma}(-\tau, k'_1, k) + F_{\sigma\sigma'}^{+}(\tau, -k, k') F_{\sigma'\sigma}(-\tau, k'_1, -k_1) \end{aligned} \quad (5.4)$$

В дальнейшем нас будет интересовать отклик на нулевой частоте и волновом векторе. Переход в частотное представление даётся посредством формулы

$$\begin{aligned} G(i\omega_n, r) &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} e^{i\omega_n \tau} G(\tau, r) d\tau \\ G(\tau, r) &= T \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n \tau} G(i\omega_n, r) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Импульсная же часть даётся интегралом по \mathbf{r} и \mathbf{r}' от отклика в координатном представлении, что даст две дельта функции. После интегрирования по двум из четырёх импульсов

останется следующее:

$$Q_{\alpha\beta}(\tau, \mathbf{p} = 0, \mathbf{p}' = 0) = \frac{e^2}{c} \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} v_\alpha(k) v_\beta(k') \left[-G_{\sigma\sigma'}(\tau, k, k') G_{\sigma'\sigma}(-\tau, k', k) + F_{\sigma\sigma'}^+(\tau, -k, k') F_{\sigma'\sigma}(-\tau, k', -k) \right] \quad (5.6)$$

Далее перейдём в частотное представление и учтём форму зависимости функций Грина от двух аргументов (6.2.3), которая будет найдена позднее.

$$Q_{\alpha\beta}(\Omega = 0, \mathbf{p} = 0, \mathbf{p}' = 0) = \frac{e^2 T}{c} \sum_{\sigma\sigma'\omega_n} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} v_\alpha(k) v_\beta(k') \left[-G_{\sigma\sigma'}(\omega_n, \frac{k+k'}{2}) G_{\sigma'\sigma}(\omega_n, \frac{k+k'}{2}) \delta(k-k') \delta(k-k') + F_{\sigma\sigma'}^+(\omega_n, \frac{k'-k}{2}) F_{\sigma'\sigma}(\omega_n, \frac{k'-k}{2}) \delta(k+k'-Q) \delta(k+k'-Q) \right] \quad (5.7)$$

Интеграл по k' сводится к замене k' на соответствующее выражение из дельта-функции. При этом надо учесть, что $\delta(p=0) = (2\pi)^2 V$ где V -объём системы.

$$Q_{\alpha\beta}(\Omega = 0, \mathbf{p} = 0, \mathbf{p}' = 0) = -\frac{e^2 TV}{c} \sum_{\sigma\sigma'\omega_n} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[v_\alpha(k) v_\beta(k) G_{\sigma\sigma'}(\omega_n, k) G_{\sigma'\sigma}(\omega_n, k) - v_\alpha(k) v_\beta(Q-k) F_{\sigma\sigma'}^+(\omega_n, \frac{Q}{2}-k) F_{\sigma'\sigma}(\omega_n, \frac{Q}{2}-k) \right] \quad (5.8)$$

С помощью линейной замены переменной интегрирования во втором слагаемом нетрудно убедиться, что

$$Q_{\alpha\beta}(\Omega = 0, \mathbf{p} = 0, \mathbf{p}' = 0) = -\frac{e^2 VT}{c} \sum_{\sigma\sigma'\omega_n} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[v_\alpha(k) v_\beta(k) G_{\sigma\sigma'}(\omega_n, k) G_{\sigma'\sigma}(\omega_n, k) - v_\alpha(\frac{Q}{2}-k) v_\beta(k+\frac{Q}{2}) F_{\sigma\sigma'}^+(\omega_n, k) F_{\sigma'\sigma}(\omega_n, k) \right] \quad (5.9)$$

Отсюда сразу видно, что так как при отражении относительно оси x скорость меняет знак на противоположный, а функции Грина остаются такими же, недиагональные вклады в отклик равны нулю.

Мы работаем в главном порядке по параметру $\frac{H}{\alpha p_F}$, так что $v_\alpha(p)$ является нечётной функцией p . Кроме того, по параметру малости $\frac{\alpha H}{v E_F}$ можно пренебречь сдвигом на Q в аргументе $v_\alpha(p)$. Тогда выражение упростится ещё сильнее

$$Q_{\alpha\beta}(\Omega = 0, \mathbf{p} = 0, \mathbf{p}' = 0) = -\frac{e^2 TV}{c} \sum_{\sigma\sigma'\omega_n} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} v_\alpha(k) v_\beta(k) \left[G_{\sigma\sigma'}(\omega_n, k) G_{\sigma'\sigma}(\omega_n, k) + F_{\sigma\sigma'}^+(\omega_n, k) F_{\sigma'\sigma}(\omega_n, k) \right] \quad (5.10)$$

В пространственно-однородном случае отклик имел бы вид

$$Q(k) = \int Q(r - r') e^{ikr - ikr'} d(r - r') \quad (5.11)$$

В случае функций двух переменных нужно держать зависимость от двух переменных

$$Q(p, p') = \int Q(r, r') e^{ipr - ip'r'} dr dr' \quad (5.12)$$

Можно убедиться, что вся пространственная неоднородность находится в функциях F и F^+ в виде накрутки фазы, и эта неоднородность сократится в выражении для линейного отклика. Тогда на нулевом волновом векторе нетрудно видеть, что эти два выражения связаны простым соотношением

$$Q_{\alpha\beta}(\Omega = 0, \mathbf{p} = 0, \mathbf{p}' = 0) = V Q_{\alpha\beta}(\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) \quad (5.13)$$

Теперь можно перейти в киральный базис и выражение для отклика примет свой окончательный вид

$$Q_{\alpha\beta}(\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = -\frac{e^2 T}{c} \sum_{\lambda\omega_n} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} v_\alpha(k) v_\beta(k) \left[G_\lambda(\omega_n, k) G_\lambda(\omega_n, k) + F_\lambda^+(\omega_n, k) F_\lambda(\omega_n, k) \right] \quad (5.14)$$

Диаманитный вклад: Стоит отметить, что, формально, интеграл по импульсам расходится. Для того, чтобы это исправить, вычтем из этой формулы аналогичную, но сделав везде формальную замену $\Delta \rightarrow 0$.

$$Q_{\alpha\beta}(\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = -\frac{e^2 T}{c} \sum_{\lambda\omega_n} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} v_\alpha(p) v_\beta(p) \frac{\xi_\lambda^2(\frac{Q}{2} - p) - \omega_n^2 + |\Delta|^2 + 2i\omega_n \xi_\lambda(\frac{Q}{2} - p)}{(\tilde{\omega}_n^2(p + \frac{Q}{2}) + \epsilon_\lambda^2(p + \frac{Q}{2}) + |\Delta|^2)^2} - \frac{\xi_\lambda^2(\frac{Q}{2} - p) - \omega_n^2 + 2i\omega_n \xi_\lambda(\frac{Q}{2} - p)}{(\tilde{\omega}_n^2(p + \frac{Q}{2}) + \epsilon_\lambda^2(p + \frac{Q}{2}))^2} \quad (5.15)$$

В этом случае интеграл будет набираться на ферми-поверхности и можно перейти к интегрированию по плотности состояний. Очевидным образом, если устремить теперь $\Delta \rightarrow 0$, то интеграл будет нулевым, а так в нормальном металле отклик тока на постоянный векторный потенциал равен нулю из калибровочной инвариантности, можно заключить, что тот то, что мы вычли из нашего выражения есть ни что иное, как диаманитный вклад. Пока на время забудем о нём и обсудим более подробно градиентный вклад.

6 Функции Грина для пространственно-неоднородного сверхпроводника

6.1 Уравнения Горькова в общем случае

В этом разделе представлен вывод самого общего вида уравнений Горькова для функций Грина от двух аргументов с пространственно-несимметричным спектром, то есть без каких-либо приближений. Данный вывод следует соответствующему параграфу в книге Минеева и Самохина [10].

Функции Грина определяются как

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(p, p', \tau) &= -\langle T_\tau \psi_\alpha(p, \tau) \psi_\beta^+(p', 0) \rangle \\ F_{\alpha\beta}(p, p', \tau) &= \langle T_\tau \psi_\alpha(p, \tau) \psi_\beta(-p', 0) \rangle \\ F_{\alpha\beta}^+(p, p', \tau) &= \langle T_\tau \psi_\alpha^+(-p, \tau) \psi_\beta^+(p', 0) \rangle \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Возьмём производную от нормальной функции Грина, записав её в терминах операторов рождения и уничтожения.

$$\begin{aligned} \frac{dG_{\alpha\beta}(k, k', \tau)}{d\tau} &= -\frac{d}{d\tau} (\theta(\tau) \langle a_{k,\alpha}(\tau) a_{k',\beta}^+(0) \rangle - \theta(-\tau) \langle a_{k',\beta}^+(0) a_{k,\alpha}(\tau) \rangle) = \\ &= \left\langle \frac{da_{k,\alpha}(\tau)}{d\tau} a_{k',\beta}^+(0) \right\rangle - (2\pi)^2 \delta(\tau) \delta(k' - k) \delta_{\alpha,\beta} \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Производная оператора уничтожения, согласно уравнению Гейзенберга, даётся коммутатором с гамильтонианом

$$\frac{da}{d\tau} = [H, a] \quad (6.1.3)$$

Гамильтониан системы же возьмём из теории БКШ

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k,k'} \langle k, \alpha | H_0 | k', \beta \rangle a_{k,\alpha}^+ a_{k',\beta} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,k',q} V_{\alpha\beta,\lambda\mu}(k, k') a_{-k+q/2,\alpha}^+ a_{k+q/2,\beta}^+ a_{k'+q/2,\lambda} a_{-k'+q/2,\mu} \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Коммутатор с квадратичными слагаемыми считается тривиально. Коммутатор с членом 4-го порядка распишем подробнее

$$\left[\frac{1}{2} \sum_{p,k',q} V_{\gamma_1,\phi,\gamma_2,\gamma_3}(p, k') a_{-p+q/2,\gamma_1}^+ a_{p+q/2,\phi}^+ a_{k'+q/2,\gamma_2} a_{-k'+q/2,\gamma_3}, a_{k,\alpha} \right] = \quad (6.1.5)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{p,k',q} V_{\gamma_1,\phi,\gamma_2,\gamma_3}(p, k') \left[a_{-p+q/2,\gamma_1}^\dagger a_{p+q/2,\phi}^\dagger a_{k,\alpha} \right] a_{k'+q/2,\gamma_2} a_{-k'+q/2,\gamma_3} \quad (6.1.6)$$

Далее:

$$\begin{aligned} \left[a_{-p+q/2, \gamma_1}^\dagger a_{p+q/2, \phi}^+, a_{k, \alpha} \right] &= a_{-p+q/2, \gamma_1}^+ a_{p+q/2, \phi}^+ a_{k, \alpha} - a_{k, \alpha} a_{-p+q/2, \gamma_1}^+ a_{p+q/2, \phi}^+ = \\ &= a_{-p+q/2, \gamma_1}^+ \delta_{\alpha\phi} \delta(p+q/2-k) - \delta_{\alpha\gamma_1} \delta(k+p-q/2) a_{p+q/2, \phi}^+ \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Подставим это в самое первое уравнение в этом разделе

$$\begin{aligned} \frac{dG_{\alpha\beta}(k, k', \tau)}{d\tau} &= - \sum_{k_1} \langle k\alpha | H_0 | k_1 \gamma \rangle G_{\gamma\beta}(k_1, k') - (2\pi)^2 \delta(\tau) \delta(k-k') \delta_{\alpha\beta} - \\ - \sum_{k_1, q} \frac{V_{\gamma_1, \alpha, \gamma_2, \gamma_3}(k, k') - V_{\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}(k, k')}{2} &\langle T_\tau a_{q-k, \gamma_1}^+(\tau) a_{k_1+q/2, \gamma_2}(\tau) a_{-k_1+q/2, \gamma_3}(\tau) a_{k'\beta}^+(0) \rangle \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

До этого момента все вычисления были точными и опирались исключительно на квантовую механику.

Теперь же используем метод среднего поля и определим параметр порядка

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(k, q) &= - \sum_{k'} V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(k, k') F_{\lambda\mu}(k' + q/2, k' - q/2, 0) \\ \Delta_{\lambda\mu}^+(k, q) &= - \sum_{k'} V_{\alpha\beta, \mu\lambda}(k', k) F_{\alpha\beta}^+(k' - q/2, k' + q/2, 0) \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

В дальнейшем уравнения Горькова удобно записать перейдя в частотное представление.

$$G_{\alpha\beta}(k, k', \tau) = T \sum_n G_{\alpha\beta}(k, k', \omega_n) e^{-i\omega_n \tau} \quad (6.1.10)$$

И теперь мы можем записать самый общий вид уравнений Горькова:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1} \langle k\alpha | i\omega_n - H_0 | k_1 \gamma \rangle G_{\gamma\beta}(k_1, k', \omega_n) + \sum_q \Delta_{\alpha\gamma}(k, q) F_{\gamma\beta}^+(k - q, k', \omega_n) = \\ = (2\pi)^2 \delta_{\alpha\beta} \delta(k - k') \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Схожими вычислениями можно получить два других уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{k_1} \langle -k_1 \gamma | i\omega_n + H_0 | -k\alpha \rangle F_{\gamma\beta}^+(k_1, k', \omega_n) + \sum_q \Delta_{\alpha\gamma}^+(k, q) G_{\gamma\beta}(k + q, k', \omega_n) = 0 \\ \sum_{k_1} \langle k\alpha | i\omega_n - H_0 | k_1 \gamma \rangle F_{\gamma\beta}(k_1, k', \omega_n) - \sum_q \Delta_{\alpha\gamma}(k, q) G_{\beta\gamma}(-k', -k + q, -\omega_n) = 0 \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

6.2 Пространственно-неоднородный случай

Мы предполагаем, что параметр порядка имеет синглетную структуру $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (i\sigma_y)_{\alpha\beta} \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ Кроме того, в геликоидальной фазе в координатном пространстве он имеет вид $\Delta(r, r') = \Delta \exp i \frac{r+r'}{2} \mathbf{Q}$, то в импульсном представлении проинтегрировав по коорди-

нате центра масс:

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha\beta}(k, q) &= \Delta\delta(q - Q)(i\sigma_y)_{\alpha\beta} \\ \Delta_{\alpha\beta}^+(k, q) &= \Delta^+\delta(q - Q)(i\sigma_y)_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (6.2.1)$$

Независимость от параметра порядка от k и его спиновая структура являются следствиями синглетного характера сверхпроводимости. Дельта-функциональная часть задаёт осцилляции фазы параметра порядка в координатном пространстве с пространственной частотой Q . Такой анзатц позволяет переписать уравнения в виде

$$\begin{aligned}(\delta_{\alpha\gamma}i\omega_n - H_{\alpha\gamma}(k))G_{\gamma\beta}(k, k', \omega_n) + \Delta_{\alpha\gamma}F_{\gamma\beta}^+(k - Q, k', \omega_n) &= (2\pi)^2\delta_{\alpha\beta}\delta(k - k') \\ (\delta_{\alpha\gamma}i\omega_n + H_{\gamma\alpha}(-k))F_{\gamma\beta}^+(k, k', \omega_n) + \Delta_{\alpha\gamma}^+G_{\gamma\beta}(k + Q, k', \omega_n) &= 0\end{aligned}\quad (6.2.2)$$

Как нетрудно видеть, что уравнения Горькова с таким параметром порядка самосогласованы только если функции Грина можно факторизовать следующим образом

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}(k, k', \omega_n) &= (2\pi)^2G_{\alpha\beta}\left(\frac{k + k'}{2}, \omega_n\right)\delta(k - k') \\ F_{\alpha\beta}^+(k, k', \omega_n) &= (2\pi)^2F_{\alpha\beta}^+\left(\frac{k + k'}{2}, \omega_n\right)\delta(k - k' + Q) \\ F_{\alpha\beta}(k, k', \omega_n) &= (2\pi)^2F_{\alpha\beta}\left(\frac{k + k'}{2}, \omega_n\right)\delta(k - k' - Q)\end{aligned}\quad (6.2.3)$$

Подставив такой вид функций Грина в уравнения Горькова и проинтегрировав обе части уравнения по dk' , можно получить окончательную форму уравнений (6.1.11), (6.1.12) в терминах функций от одного волнового вектора

$$\begin{aligned}(\delta_{\alpha\gamma}i\omega_n - H_{\alpha\gamma}(k))G_{\gamma\beta}(k, \omega_n) + \Delta_{\alpha\gamma}F_{\gamma\beta}^+\left(k - \frac{Q}{2}, \omega_n\right) &= \delta_{\alpha\beta} \\ (\delta_{\alpha\gamma}i\omega_n + H_{\gamma\alpha}(-k))F_{\gamma\beta}^+\left(k + \frac{Q}{2}, \omega_n\right) + \Delta_{\alpha\gamma}^+G_{\gamma\beta}\left(k + Q, \omega_n\right) &= 0\end{aligned}\quad (6.2.4)$$

6.3 Переход к киральному базису

Подставим в определения функций Грина операторы рождения и уничтожения, выраженные через соответствующие операторы в киральном базисе. Прделав это, можно получить связь гамильтонианов в спиновом и киральном базисах

$$\begin{aligned}H_{\alpha\beta}(p) &= \xi_{\lambda\lambda'}(p)\eta_{\alpha\lambda}(p)\eta_{\beta\lambda}^*(p) \\ G_{\alpha\beta}(p) &= \eta_{\alpha\lambda}(p)\eta_{\beta\lambda'}^*(p)G_{\lambda\lambda'}(p) \\ F_{\alpha\beta}(p) &= \eta_{\alpha\lambda}(p)\eta_{\beta\lambda'}(-p)F_{\lambda\lambda'}(p) \\ F_{\alpha\beta}^+(p) &= \eta_{\alpha\lambda}^*(-p)\eta_{\beta\lambda'}^*(p)F_{\lambda\lambda'}^+(p)\end{aligned}\quad (6.3.1)$$

Подставим это в уравнения Горькова

$$\begin{aligned}
& \eta_{\alpha\lambda}(k)\eta_{\beta\lambda'}^*(k)(i\omega_n - \xi_\lambda(k))G_{\lambda\lambda'}(k, \omega_n) + \\
& + \Delta_{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\lambda}^*(-k + \frac{Q}{2})\eta_{\beta\lambda'}^*(k - \frac{Q}{2})F_{\lambda\lambda'}^+(k - \frac{Q}{2}, \omega_n) = \delta_{\alpha\beta} \\
& \eta_{\alpha\lambda}(-k)\eta_{\beta\lambda'}^*(k + \frac{Q}{2})(i\omega_n + \xi_\lambda(-k))F_{\lambda\lambda'}^+(k + \frac{Q}{2}, \omega_n) + \\
& + \Delta_{\alpha\gamma}^+\eta_{\gamma\lambda}(k + Q)\eta_{\beta\lambda'}^*(k + Q)G_{\lambda\lambda'}(k + Q, \omega_n) = 0
\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Используя соотношения ортогональности векторов η и их покомпонентное выражение:

$$\begin{aligned}
& (i\omega_n - \xi_\lambda(k))G_{\lambda\lambda'}(k, \omega_n) + \\
& + \frac{-i\nu e^{-i\varphi_{-k+Q}} + i\lambda e^{-i\varphi_k}}{2} \frac{1 + \lambda'\mu e^{i\varphi_k - i\varphi_{k - \frac{Q}{2}}}}{2} \Delta F_{\nu\mu}^+(k - \frac{Q}{2}, \omega_n) = \delta_{\lambda\lambda'} \\
& (i\omega_n + \xi_\lambda(-k))F_{\lambda\lambda'}^+(k + \frac{Q}{2}, \omega_n) + \\
& + \frac{i\nu e^{i\varphi_{k+Q}} - i\lambda e^{i\varphi_{-k}}}{2} \frac{1 + \lambda'\mu e^{i(\varphi_k - \varphi_{k+Q})}}{2} \Delta^+ G_{\nu\mu}(k + Q, \omega_n) = 0
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Если пренебречь Q в фазах, а также воспользоваться очевидным соотношением для изотропного случая (когда $H = 0$ и φ задаётся просто углом импульса с осью x) $\varphi_{-k} = \pi + \varphi_k$, которое верно, если пренебречь Q , уравнения окажутся диагональными:

$$\begin{aligned}
& (i\omega_n - \xi_\lambda(k))G_\lambda(k, \omega_n) + i\lambda e^{-i\varphi_k} \Delta F_\lambda^+(k - \frac{Q}{2}, \omega_n) = 1 \\
& (i\omega_n + \xi_\lambda(-k))F_\lambda^+(k + \frac{Q}{2}, \omega_n) + i\lambda e^{i\varphi_k} \Delta^+ G_\lambda(k + Q, \omega_n) = 0
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

λ принимает значения $1, -1$ и по ней не подразумевается суммирование.

Ещё больше упростить эти уравнения можно, если найти связь между Δ и Δ^+ . Сделать это можно, определив потенциал взаимодействия в явном виде. Мы предполагаем, что потенциал притяжения имеет синглетную структуру, то есть

$$V_{\alpha\beta\mu\nu}(k, k') = -V(k, k')(i\sigma_y)_{\alpha\beta}(i\sigma_y)_{\mu\nu} \tag{6.3.5}$$

из определения Δ и Δ^+ через уравнения (6.1.9) видно, что

$$\Delta^* = -\Delta^+ \tag{6.3.6}$$

6.4 Окончательный ответ для функций Грина

Итак, сдвинем теперь аргумент у второго уравнения на Q и подставим $\Delta^* = -\Delta^+$:

$$\begin{aligned}
& (i\omega_n - \xi_\lambda(k))G_\lambda(k, \omega_n) + i\lambda e^{-i\varphi_k} \Delta F_\lambda^+(k - \frac{Q}{2}, \omega_n) = 1 \\
& (i\omega_n + \xi_\lambda(Q - k))F_\lambda^+(k - \frac{Q}{2}, \omega_n) - i\lambda e^{i\varphi_k} \Delta^* G_\lambda(k, \omega_n) = 0
\end{aligned} \tag{6.4.1}$$

Здесь опять же, пренебрегаем малыми поправками порядка $\frac{Q}{p_F}$, которые возникнут из-за φ_k . Решив эти уравнения, получим ответ для функций Грина

$$\begin{aligned} G_\lambda(k, \omega_n) &= \frac{i\omega_n + \xi(Q - k)}{(i\omega_n - \xi_\lambda(k))(i\omega_n + \xi_\lambda(Q - k)) - |\Delta|^2} \\ F_\lambda^+(k - \frac{Q}{2}, \omega_n) &= \frac{i\lambda e^{i\varphi_k} \Delta^*}{(i\omega_n - \xi_\lambda(k))(i\omega_n + \xi_\lambda(Q - k)) - |\Delta|^2} \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Также в дальнейшем будет удобно использовать обозначения $\tilde{\omega}_n(p) = \omega_n + i\frac{\xi_\lambda(p) - \xi_\lambda(Q-p)}{2}$, $\epsilon_\lambda(p) = \frac{\xi_\lambda(p) + \xi_\lambda(Q-p)}{2}$. В них функции Грина становятся более похожими на функции Грина обычного сверхпроводника

$$\begin{aligned} G_\lambda(k, \omega_n) &= -\frac{i\omega_n + \xi_\lambda(Q - k)}{\tilde{\omega}_n^2(k) + \epsilon_\lambda^2(k) + |\Delta|^2} \\ F_\lambda^+(k - \frac{Q}{2}, \omega_n) &= -\frac{i\lambda e^{i\varphi_k} \Delta^*}{\tilde{\omega}_n^2(k) + \epsilon_\lambda^2(k) + |\Delta|^2} \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Этот результат согласуется с результатом статьи [8], однако подробный вывод был необходим, чтобы понять, с точностью до какого порядка малости применим этот ответ.

7 Некоторые соотношения на Функции Грина

Как было сказано ранее, параметр порядка имеет линейно меняющуюся в пространстве фазу. Из уравнения самосогласования следует, что тогда в координатном пространстве аномальные функции Грина осциллирует с тем же волновым вектором

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}(r, r', \tau) &= \exp(i\mathbf{Q}\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2})F_{\alpha\beta}(r - r', \tau) \\ F_{\alpha\beta}^+(r, r', \tau) &= \exp(-i\mathbf{Q}\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2})F_{\alpha\beta}^+(r - r', \tau) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Нормальная же функция Грина зависит трансляционно-инвариантна и зависит только от разности координат. Взяв от написанного выше вида функции Грина преобразование Фурье по обоим аргументам и перейдя к интегрированию по центру масс и разности координат можно ещё раз убедиться в справедливости соотношений (6.2.3).

7.1 Тождества

Напишем определение Функции Грина и сделаем комплексное сопряжение

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^*(p, p', \tau) &= -\langle T_\tau \psi_\alpha(p, \tau) \psi_\beta^+(p', 0) \rangle^* = -\langle T_\tau \psi_\beta(p', 0) \psi_\alpha^+(p, -\tau) \rangle = G_{\beta\alpha}(p', p, \tau) \\ F_{\alpha\beta}^*(p, p', \tau) &= \langle T_\tau \psi_\alpha(p, \tau) \psi_\beta(-p', 0) \rangle^* = \langle T_\tau \psi_\beta^+(-p', 0) \psi_\alpha^+(p, -\tau) \rangle = F_{\beta\alpha}^+(p', p, \tau) \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

Тут стоит сказать, что операции $+$ и \dagger , вообще говоря, не одно и то же. $\psi^+(\tau)$ означает оператор рождения в представлении вторичного квантования, который проэволюционировал во мнимом времени $\psi^+(\tau) = e^{-H\tau}\psi(0)e^{H\tau}$, а $\psi^\dagger(\tau)$ означает эрмитово сопряжение оператора уничтожения во мнимом времени τ . Поэтому между ними есть соотношение, которое было использовано в формуле выше

$$\psi^+(\tau) = \psi^\dagger(-\tau) \quad (7.1.2)$$

Далее перейдём к частотному представлению

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^*(p, p', \omega_n) &= \left(\frac{1}{2} \int e^{i\omega_n\tau} F_{\alpha\beta}(p, p', \tau) d\tau \right)^* = \frac{1}{2} \int e^{-i\omega_n\tau} F_{\beta\alpha}^+(p', p, \tau) d\tau = \\ &= F_{\beta\alpha}^+(p', p, -\omega_n) \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Аналогично для нормальной функции Грина. В итоге мы получаем

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(p, p', \omega_n) &= G_{\beta\alpha}^*(p', p, -\omega_n) \\ F_{\alpha\beta}^+(p, p', \omega_n) &= F_{\beta\alpha}^*(p', p, -\omega_n) \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Кроме того, два оператора рождения или два оператора уничтожения всегда антикоммутируют, так что ещё имеются соотношения

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\beta}(p, p', \tau) &= \langle T_\tau \psi_\alpha(p, \tau) \psi_\beta(-p', 0) \rangle = \\
&= -\langle T_\tau \psi_\beta(-p', 0) \psi_\alpha(p, \tau) \rangle = -F_{\beta\alpha}(-p', -p, -\tau) \\
F_{\alpha\beta}^+(p, p', \tau) &= \langle T_\tau \psi_\alpha^+(-p, \tau) \psi_\beta^+(p', 0) \rangle = \\
&= -\langle T_\tau \psi_\beta^+(p', 0) \psi_\alpha^+(-p, \tau) \rangle = -F_{\beta\alpha}^+(-p', -p, -\tau)
\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

А значит в частотном представлении

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\beta}(p, p', \omega_n) &= -F_{\beta\alpha}(-p', -p, -\omega_n) \\
F_{\alpha\beta}^+(p, p', \omega_n) &= -F_{\beta\alpha}^+(-p', -p, -\omega_n)
\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

7.2 Проверка соотношений на функции Грина

Проверим симметричные свойства функций Грина, подставив их в последние два уравнения Горькова:

$$\begin{aligned}
(i\omega_n \delta_{\alpha\gamma} - H_{\alpha\gamma}(k)) F_{\gamma\beta}(k, k', \omega_n) - \Delta(i\sigma_y)_{\alpha\gamma} G_{\beta\gamma}(-k', -k + Q, -\omega_n) &= 0 \\
(i\omega_n \delta_{\gamma\alpha} + H_{\gamma\alpha}(-k)) F_{\gamma\beta}^+(k, k', \omega_n) + \Delta^+(i\sigma_y)_{\alpha\gamma} G_{\gamma\beta}(k + Q, k', \omega_n) &= 0
\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Воспользуемся тождествами из предыдущего раздела для второго уравнения

$$(i\omega_n \delta_{\gamma\alpha} + H_{\gamma\alpha}(-k)) F_{\beta\gamma}^*(k', k, -\omega_n) + \Delta^+(i\sigma_y)_{\alpha\gamma} G_{\beta\gamma}^*(k', k + Q, -\omega_n) = 0 \tag{7.2.2}$$

Сделаем замену и $k \rightarrow -k$ и $k' \rightarrow -k'$ а затем и комплексное сопряжение

$$(-i\omega_n \delta_{\alpha\gamma} + H_{\alpha\gamma}(k)) F_{\beta\gamma}(-k', -k, -\omega_n) + (\Delta^+)^*(i\sigma_y)_{\alpha\gamma} G_{\beta\gamma}(-k', -k + Q, -\omega_n) = 0 \tag{7.2.3}$$

И, наконец, воспользовавшись соотношением $\Delta^+ = -\Delta^*$ и тождеством (7.1.6) можно увидеть, что одно уравнение Горькова полностью воспроизводит другое.

8 Разложение по магнитному полю

Перед началом разложения поймём, какие порядки стоит удерживать. При вычислении функций Грина делалось приближение, в котором в киральном базисе уравнения были диагональны. Недиагональные элементы имели малость $\frac{Q}{p_F} = \frac{\alpha}{v} \frac{H}{E_F}$, возникающую из-за угла φ_p . Такого же порядка малости есть поправки от изменения аргументов скорости в предыдущем разделе. Суммарно эти эффекты дадут множитель порядка $(1 + \# \frac{\alpha}{v} \frac{H}{E_F})$. А вот разложение ξ_λ в выражениях для функций Грина имеет смысл, потому что из кинетической энергии вычтен химический потенциал и эта величина может быть произвольно малой. По этой причине самой большой величиной в дроби будет Δ в случае малых температур и T_c при T близких к критическим. Поправка от учёта магнитного поля здесь будет $\frac{H}{T_c}$.

Теперь рассмотрим подробнее выражение в скобках (5.14). Сдвинем аргумент импульса в нормальных функциях Грина на $Q/2$, чтобы знаменатели в нормальных и аномальных слагаемых совпадали. Также воспользуемся соотношениями (7.1.4) для аномальной функции Грина

$$\begin{aligned} G_\lambda(\omega_n, p)G_\lambda(\omega_n, p) + F_\lambda^+(\omega_n, p)F_\lambda(\omega_n, p) &\approx \\ \approx G_\lambda(\omega_n, p + \frac{Q}{2})G_\lambda(\omega_n, p + \frac{Q}{2}) + F_\lambda^+(\omega_n, p)(F_\lambda^+(-\omega_n, p))^* &= \\ = \frac{\xi_\lambda^2(\frac{Q}{2} - p) - \omega_n^2 + |\Delta|^2 + 2i\omega_n\xi_\lambda(\frac{Q}{2} - p)}{(\tilde{\omega}_n^2(p + \frac{Q}{2}) + \epsilon_\lambda^2(p + \frac{Q}{2}) + |\Delta|^2)^2} & \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь было учтено, что для знаменателя замена $\omega_n \rightarrow -\omega_n$ и комплексное сопряжение эквивалентно замене $\tilde{\omega}_n \rightarrow -\tilde{\omega}_n$, что ничего не изменит, так как $\tilde{\omega}_n$ входит в квадрате.

8.1 Поправки к спектру от Q и H

Как упоминалось ранее, гамильтониан (3.2) можно диагонализировать с помощью преобразования (4.1). В этом базисе точное выражение для спектра имеет вид (4.4). В дальнейшем нам потребуется разложение $\xi_\lambda(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{Q}}{2})$ по степеням H . К счастью, \mathbf{Q} направлено вдоль оси x , так что при разложении корня можно учесть этот вектор сдвигом магнитного поля. Тогда получаем, что

$$\xi_\lambda(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{Q}}{2}) = \xi_\lambda^0 + f + g \quad (8.1.1)$$

где $\xi_\lambda^0(p) = \frac{p^2}{2m} - \alpha p$ означает дисперсию при нулевом магнитном поле, а f и g (линейный и квадратичный по полю вклад соответственно) определены как

$$\begin{aligned} f &= (\lambda H + \frac{Q}{2}(\frac{p}{m} - \lambda\alpha)) \cos \theta \\ g &= \frac{Q^2}{8m} - \frac{\lambda}{2\alpha p}(H - \frac{\alpha Q}{2})^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

$\xi_\lambda(-\mathbf{p} + \frac{\mathbf{Q}}{2})$ отличается от $\xi_\lambda(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{Q}}{2})$ заменой $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$. Поэтому эффективные переменные, через которые записан знаменатель функций Грина раскладываются довольно компактным образом

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_n(p + \frac{Q}{2}) &= \omega_n + if \\ \epsilon(p + \frac{Q}{2}) &= \xi_\lambda^0(p) + g\end{aligned}\tag{8.1.3}$$

С этого момента под ξ_λ без аргумента будет подразумеваться $\xi_\lambda^0(p)$

8.2 Разложение отклика

Представим это выражение в виде дроби и разложим её в ряд. При этом стоит опустить члены, включающие 3-й и более старшие порядки по магнитному полю. Также сразу опустим в последней строчке линейные по полю члены, так как они все пропорциональны косинусу угла между импульсом и осью x , что даст ноль при усреднении по углам, так как произведение $v_\alpha v_\beta$ не меняет знак при пространственной инверсии.

$$\begin{aligned}\frac{B_0 + B_1 + B_2}{(A_0 + A_1 + A_2)^2} &= \frac{B_0}{A_0^2} \left(1 + \frac{B_1}{B_0} + \frac{B_2}{B_0}\right) \left(1 + \frac{A_1}{A_0} + \frac{A_2}{A_0}\right)^{-2} = \\ &= \frac{B_0}{A_0^2} \left(1 + \frac{B_2}{B_0} - 2\frac{B_1 A_1}{B_0 A_0} - 2\frac{A_2}{A_0} + 3\frac{A_1^2}{A_0^2}\right)\end{aligned}\tag{8.2.1}$$

где

$$\begin{aligned}A &= \tilde{\omega}_n^2(p + Q/2) + \epsilon_\lambda^2(p + Q/2) + |\Delta|^2 \\ B &= \xi_\lambda^2(Q/2 - p) - \omega_n^2 + |\Delta|^2 + 2i\omega_n \xi_\lambda(Q/2 - p)\end{aligned}\tag{8.2.2}$$

Используем ранее введённые обозначения для разложения, в которых

$$\begin{aligned}A &= (\omega_n + if)^2 + (\xi_\lambda + g)^2 + |\Delta|^2 = \omega_n^2 + 2if\omega_n - f^2 + \xi_\lambda^2 + 2g\xi_\lambda + |\Delta|^2 \\ B &= \xi_\lambda^2(Q/2 - p) - \omega_n^2 + |\Delta|^2 + 2i\omega_n \xi_\lambda(Q/2 - p) = \\ &= \xi_\lambda^2 - 2\xi_\lambda f + f^2 + 2\xi_\lambda g - \omega_n^2 + |\Delta|^2 + 2i\omega_n \xi_\lambda - 2i\omega_n f + 2i\omega_n g\end{aligned}\tag{8.2.3}$$

Сгруппируем слагаемые по порядкам малости

$$\begin{aligned}A_0 &= \xi_\lambda^2 + \Delta^2 + \omega_n^2 \\ A_1 &= 2i\omega_n f \\ A_2 &= 2g\xi_\lambda - f^2 \\ B_0 &= \xi_\lambda^2 + \Delta^2 - \omega_n^2 + 2i\omega_n \xi_\lambda \\ B_1 &= -2(\xi_\lambda + i\omega_n)f \\ B_2 &= 2(\xi_\lambda + i\omega_n)g + f^2\end{aligned}\tag{8.2.4}$$

Или в старых обозначениях

$$\begin{aligned}
A_0 &= \xi_\lambda^2 + \Delta^2 + \omega_n^2 \\
B_0 &= \xi_\lambda^2 + \Delta^2 - \omega_n^2 + 2i\omega_n\xi_\lambda \\
A_1 &= 2i\omega_n \cos\theta \left(\lambda H + \frac{Q}{2} \left(\frac{p}{m} - \lambda\alpha \right) \right) \\
B_1 &= -2(\xi_\lambda + i\omega_n) \cos\theta \left(\lambda H + \frac{Q}{2} \left(\frac{p}{m} - \lambda\alpha \right) \right) \\
A_2 &= 2\xi_\lambda \left(\frac{Q^2}{8m} - \frac{\lambda}{2\alpha p} \left(H - \frac{\alpha Q}{2} \right)^2 \sin^2\theta \right) - \cos^2\theta \left(\lambda H + \frac{Q}{2} \left(\frac{p}{m} - \lambda\alpha \right) \right)^2 \\
B_2 &= 2(\xi_\lambda + i\omega_n) \left(\frac{Q^2}{8m} - \frac{\lambda}{2\alpha p} \left(H - \frac{\alpha Q}{2} \right)^2 \sin^2\theta \right) + \cos^2\theta \left(\lambda H + \frac{Q}{2} \left(\frac{p}{m} - \lambda\alpha \right) \right)^2
\end{aligned} \tag{8.2.5}$$

Этот результат получен подстановкой формулы для разложения спектра (8.1.1) в явный вид функций A и B . Члены, не зависящие от магнитного поля, имеют порядок $T_c^2(0)$, линейные по полю – $HT_c(0)$, а члены второго порядка – H^2 . Также не будем забывать, что здесь мы пренебрегли величинам порядка Q/p_F . Так что вышеописанное разложение справедливо в том случае, если $T_c \gg H$, и $Q \ll p_F$. Принимая во внимание тот факт, что малость поля по сравнению с T_c означает так называемую слабо-геликоидальную фазу (см [8]), последнее условие можно также переписать как $\frac{\alpha^2}{v_F} H \ll E_F$.

Теперь вернёмся к разложению дроби и подставим в неё полученные результаты:

$$\frac{B}{A^2} = \frac{B_0}{A_0^2} + \frac{B_2 A_0^2 - 2A_0 A_1 B_1 + 3B_0 A_1^2 - 2A_0 B_0 A_2}{A_0^4} \tag{8.2.6}$$

В B_2 и A_2 можно сразу опустить член с g , потому что он нечётный по ω_n и ξ_λ . В B_1 можно игнорировать ξ_λ , так как такой член нечётен по ξ_λ . В B_0 пренебрежём $2i\omega_n\xi_\lambda$ по тем же причинам.

Таким образом получается, что

$$\begin{aligned}
\frac{B}{A^2} &= \frac{B_0}{A_0^2} + \frac{A_0^2 f^2 - 8\omega_n^2 A_0 f^2 - 12\omega_n^2 f^2 B_0 + 2A_0 B_0 f^2}{A_0^4} = \\
&= \frac{B_0}{A_0^2} + 3f^2 \frac{(\xi_\lambda^2 + \Delta^2)^2 - 6\omega_n^2 (\xi_\lambda^2 + \Delta^2) + \omega_n^4}{A_0^4}
\end{aligned} \tag{8.2.7}$$

Скорость по определению равна $\frac{d\xi_\lambda(p)}{dp}$. Так что можем заменить $(\frac{p}{m} - \lambda\alpha)^2 p dp \frac{d\varphi}{(2\pi)^2}$ на $(\frac{p}{m} - \lambda\alpha) p d\xi_\lambda \frac{d\varphi}{(2\pi)^2}$. Также видно, что интеграл набирается на ферми-поверхности, так что можно заменить импульсы на импульсы Ферми. Как упоминалось ранее, компоненты скорости с точностью $\frac{H}{\alpha p_F}$ можно заменить на их выражение при $Q, H = 0$. После всех

упрощений выражение для отклика принимает вид

$$Q_{xx}(i\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = -\frac{Te^2}{c} \sum_{\omega_n, \lambda} \left(\frac{p_F^2}{m} - \lambda \alpha p_F \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_\lambda^2 - \omega_n^2 + |\Delta|^2}{(\omega_n^2 + \xi_\lambda^2 + |\Delta|^2)^2} (\cos^2 \theta) +$$

$$+ 3 \cos^4 \theta \left(\lambda H + \frac{Q}{2} \left(\frac{p}{m} - \lambda \alpha \right) \right)^2 \frac{(\xi_\lambda^2 + \Delta^2)^2 - 6\omega_n^2(\xi_\lambda^2 + \Delta^2) + \omega_n^4}{(\omega_n^2(p) + \xi_\lambda^2 + |\Delta|^2)^4} d\xi_\lambda \frac{d\theta}{(2\pi)^2} \quad (8.2.8)$$

Для Q_{yy} нужно всего лишь подставить $\sin^2 \theta$ вместо $\cos^2 \theta$ в первом члене и $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$ вместо $\cos^4 \theta$ во втором.

Усредним по углам, обезразмерим интеграл и проинтегрируем по ξ_λ . Подробности вычислений см. в приложении

Интеграл от первого слагаемого:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_\lambda^2 - \omega_n^2 + |\Delta|^2}{(\omega_n^2 + \xi_\lambda^2 + |\Delta|^2)^2} d\xi_\lambda = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \frac{2\Delta^2}{\omega_n^2 + \Delta^2} \quad (8.2.9)$$

Второй же член даст:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_\lambda^4 + \xi_\lambda^2(2\Delta^2 - 6\omega_n^2) + \Delta^4 - 6\Delta^2\omega_n^2 + \omega_n^4}{(\xi_\lambda^2 + \omega_n^2 + \Delta^2)^4} d\xi_\lambda =$$

$$= \frac{\pi}{16} \frac{8\Delta^4 - 32\Delta^2\omega_n^2}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^{7/2}} \quad (8.2.10)$$

После взятия всех интегралов:

$$Q_{\alpha\alpha}(i\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = -\frac{Te^2}{c} \frac{1}{4} \sum_{\omega_n, \lambda} \left(\frac{p_F^2}{m} - \lambda \alpha p_F \right) \left(\frac{\Delta^2}{(\Delta^2 + \omega_n^2)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{8} a \left(\lambda H + \frac{Q}{2} \left(\frac{p}{m} - \lambda \alpha \right) \right)^2 \frac{\Delta^4 - 4\Delta^2\omega_n^2}{(\Delta^2 + \omega_n^2)^{\frac{7}{2}}} \right) \quad (8.2.11)$$

Здесь $a = 1$ когда $\alpha = x$ и $a = \frac{1}{3}$ когда $\alpha = y$. Суммирование по $\alpha = x$ не предполагается. Этот коэффициент получается от описанного выше усреднения по углам.

Суммирование по λ тоже не представляет особых трудностей, так как $\lambda = \pm 1$

$$Q_{\alpha\alpha}(i\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = -\frac{Te^2}{c} \frac{1}{4} \sum_{\omega_n} \left(\frac{2p_F^2}{m} \right) \left(\frac{\Delta^2}{(\Delta^2 + \omega_n^2)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{8} a \left(H^2 - 2\alpha QH + \frac{3}{4} \alpha^2 Q^2 + \frac{p^2 Q^2}{4m^2} \right) \frac{\Delta^4 - 4\Delta^2\omega_n^2}{(\Delta^2 + \omega_n^2)^{\frac{7}{2}}} \right) \quad (8.2.12)$$

Можно пренебречь $\frac{3}{4} \alpha^2 Q^2$ по сравнению с $\frac{p^2 Q^2}{4m^2}$. Также можно подставить $Q = 2 \frac{\alpha H}{v^2}$:

$$Q_{\alpha\alpha}(i\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = -\frac{Te^2}{c} \frac{1}{4} \sum_{\omega_n} \left(\frac{2p_F^2}{m} \right) \left(\frac{\Delta^2}{(\Delta^2 + \omega_n^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{9}{8} a (H^2 - 3 \frac{\alpha^2}{v^2} H^2) \frac{\Delta^4 - 4\Delta^2 \omega_n^2}{(\Delta^2 + \omega_n^2)^{\frac{7}{2}}} \right) \quad (8.2.13)$$

Недиагональные члены в линейном отклике равны нулю из-за усреднения по углам:

$$Q_{xy}(i\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = 0 \quad (8.2.14)$$

Учёт диамагнитного вклада Как было сказано выше, учесть диамагнитный вклад можно вычтя из градиентного отклика аналогичное выражение, но заменив все Δ на нули. Все интегралы берутся точно так же, так что замену можно делать уже в формуле (8.2.13), что даст ноль. Единственное, что немного поменяется, это предел применимости. Теперь видно, что разложение в ряд работает пока $H \ll T$ (а не T_c , как было раньше).

8.3 Низкотемпературный предел

Получим ответ в терминах сверхпроводящей плотности, которая определяется из соотношения

$$Q_{\alpha\alpha}(i\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = -\frac{n_s e^2}{mc} \quad (8.3.1)$$

При низких температурах заменим суммирование интегрированием.

$$\sum_{\omega_n} \rightarrow \int \frac{d\omega_n}{2\pi T} \quad (8.3.2)$$

Взяв безразмерные интегралы (см. приложение) получаем

$$Q_{\alpha\alpha}(i\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = -\frac{e^2 p_F^2}{2\pi mc} = -\frac{ne^2}{mc} \quad (8.3.3)$$

В терминах сверхпроводящей плотности это значит, что с точностью до членов четвёртого порядка по магнитному полю при нулевой температуре все электроны переходят в сверхпроводящее состояние.

$$n = n_s \quad (8.3.4)$$

8.4 Отклик вблизи критической температуры

Найдём ответ вблизи критической температуры, то есть в области $1 - \frac{T}{T_c(H)} \ll 1$, где $T_c(H)$ – изменённая магнитным полем критическая температура. Ответ в этом пределе

можно получить, пренебрегая Δ там, где она стоит рядом с ω_n :

$$\begin{aligned}
Q_{\alpha\alpha}(i\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) &= -\frac{Te^2}{c} \frac{2p_F^2}{m} \sum_{x=\frac{\omega_n}{\Delta}} \left(\frac{1}{4} \frac{\Delta^2}{(\omega_n^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{32} a (H^2 - 3 \frac{\alpha^2}{v^2} H^2) \frac{-4\Delta^2 \omega_n^2}{(\omega_n^2)^{\frac{7}{2}}} \right) = \\
&= -\frac{Te^2}{c} \frac{2p_F^2}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2\pi^3 T^3} \left(\frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{9}{2} a \frac{H^2 - 3 \frac{\alpha^2}{v^2} H^2}{(\pi T)^2} \frac{1}{(2n+1)^5} \right)
\end{aligned} \tag{8.4.1}$$

Напомним, что $\omega_n = 2\pi T(n + \frac{1}{2})$. Тогда суммы сводятся к дзета-функциям (подробности см. в приложении). Также T можно заменить на $T_c(H)$ и ответ в этом пределе:

$$Q_{\alpha\alpha}(i\Omega = 0, \mathbf{k} = 0) = -\frac{ne^2}{mc} \left[\frac{7}{4\pi^2} \zeta(3) \frac{\Delta^2}{T_c^2(H)} \right] \left(1 - \frac{a}{\pi^2} \frac{279}{56} \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{H^2 - 3 \frac{\alpha^2}{v^2} H^2}{T_c^2(H)} \right) \tag{8.4.2}$$

или

$$n_s = n \left[\frac{7}{4\pi^2} \zeta(3) \frac{\Delta^2}{T_c^2(H)} \right] \left(1 - \frac{a}{\pi^2} \frac{279}{56} \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{H^2 - 3 \frac{\alpha^2}{v^2} H^2}{T_c^2(H)} \right) \tag{8.4.3}$$

Вклад, пропорциональный $\frac{H^2}{T_c^2(H)}$ возникает из-за формы спектра, а поправка $\frac{\alpha^2}{v^2} \frac{H^2}{T_c^2(H)}$ из-за сдвигов аргументов импульса вида $\xi(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{Q}}{2})$.

8.5 Численный расчёт

Также можно численно найти точное выражение для отклика через сумму по мацубаровским частотам, введя безразмерную переменную $x = \frac{2\pi T}{\Delta}$. Для удобства представим отклик в виде

$$Q_{\alpha\alpha} = -\frac{ne^2}{mc} \left(A(x) + aB(x) \frac{H^2 - 3 \frac{\alpha^2}{v^2} H^2}{\Delta^2} \right) \tag{8.5.1}$$

Функции $A(x)$ и $B(x)$ представлены на Рис.(4)

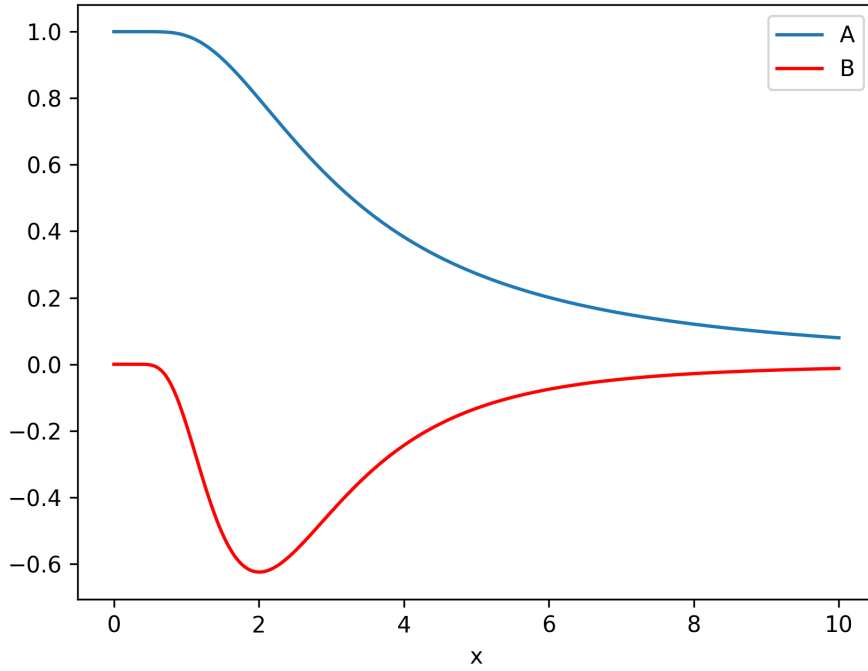


Рис. 4: Функции $A(x)$ и $B(x)$ в зависимости от $x = \frac{2\pi T}{\Delta}$. Предел низких температур соответствует $x \rightarrow 0$, а близость к критической температуре означает $x \rightarrow \infty$

9 Ответ из теории Гинзбурга-Ландау

В работах [9, 11], как упоминалось ранее, также исследуется поведение тока в двумерных сверхпроводниках со спин-орбитальным взаимодействием, но делается это в рамках теории Гинзбурга-Ландау. Опираясь на эти статьи, сравним наши результаты с результатами, получающимися из этих статей.

Как известно, теория Гинзбурга-Ландау это разложение свободной энергии по степеням параметра порядка

$$f(\mathbf{q}) = \alpha_f(\mathbf{q})|\Delta_{\mathbf{q}}|^2 + \frac{\beta}{2}|\Delta_{\mathbf{q}}|^4 \quad (9.1)$$

Ток получается варьированием свободной энергии по векторному потенциалу, то есть в данном случае просто взятием производной. Сверхпроводящий отклик же задаётся взятием ещё одной производной:

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial A_{\alpha}} \left(-N_0 c \frac{\partial f(\mathbf{q} - \frac{2e}{c}\mathbf{A})}{\partial A_{\beta}} \right) \Big|_{\mathbf{A}=0} \quad (9.2)$$

где $N_0 = 4\pi m^{-3}$ плотность состояний. Нетрудно видеть, что производные по векторному потенциалу можно заменить на производные по импульсу, а векторный потенциал в аргу-

менте положить равным нулю

$$Q_{\alpha\beta} = -4 \frac{N_0 e^2}{c} \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \Big|_{A=0} \quad (9.3)$$

Минимизируя свободную энергию по параметру порядка, можно получить, что

$$f = -\frac{\alpha_f^2(\mathbf{q})}{2\beta}. \quad (9.4)$$

Осталось подставить сюда явный вид зависимости коэффициентов Ландау от \mathbf{q} из недавней статьи Noah Yuan [11].

$$\alpha_f(\mathbf{q}) = t - (b_0 - b_1 q^2) \mathbf{q}(\mathbf{H} \times \hat{z}) + a_0 q^2 - a_1 q^4 \quad (9.5)$$

где $a_0 = \frac{C_0}{4} \frac{v_F^2}{(\pi T_c)^2}$, $a_1 = \frac{C_1}{8} \frac{v_F^4}{(\pi T_c)^4}$, $b_0 = \frac{3}{2} C_0 \frac{\alpha_R}{(\pi T_c)^2}$, $b_1 = \frac{5}{2} C_1 \frac{\alpha_R v^2}{(\pi T_c)^4}$, $\beta = \frac{C_0}{(\pi T_c)^2}$. Здесь обозначено α_R - постоянная спин-орбитального взаимодействия, v_f - скорость ферми, $C_0 = \frac{7\zeta(3)}{8}$, $C_1 = \frac{93\zeta(5)}{2^8}$ - численные коэффициенты.

Такое разложение справедливо, если $H \ll T_c$. Из этих данных следует, что в равновесном состоянии

$$\mathbf{q} = 3 \frac{\alpha}{v^2} (\mathbf{H} \times \hat{z}) \quad (9.6)$$

что находится в противоречии со статьями [8, 9], где численный коэффициент равен 2.

Теперь нетрудно видеть, что недиагональные члены в восприимчивости равны нулю, а диагональные получаются взятием производных от α_q

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= -4 \frac{N_0 e^2}{c\beta} \left(\left(\frac{\partial \alpha_f}{\partial q_x} \right)^2 + \alpha_f \frac{\partial^2 \alpha_f}{\partial q_x^2} \right) \\ Q_{yy} &= -4 \frac{N_0 e^2}{c\beta} \left(\left(\frac{\partial \alpha_f}{\partial q_y} \right)^2 + \alpha_f \frac{\partial^2 \alpha_f}{\partial q_y^2} \right) \end{aligned} \quad (9.7)$$

В равновесии первые производные равны нулю. Также удобно сразу подставить $-\frac{\alpha_f}{\beta} = \Delta^2$. Возьмём же вторую производную от выражения выше и получим в явном виде, опуская члены старше второго порядка по магнитному полю (считая, что $q \sim H$)

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= -4 \frac{N_0 e^2}{c\beta} \alpha_f \frac{\partial^2 \alpha_f}{\partial q_x^2} = -8\pi^2 \frac{ne^2}{cm} \left[\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{\Delta^2}{T_c^2} \right] \left(1 + \frac{3b_1 q_x H}{a_0} - \frac{6a_1 q_x^2}{a_0} \right) \\ Q_{yy} &= -4 \frac{N_0 e^2}{c\beta} \alpha_f \frac{\partial^2 \alpha_f}{\partial q_x^2} = -8\pi^2 \frac{ne^2}{cm} \left[\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{\Delta^2}{T_c^2} \right] \left(1 + \frac{b_1 q_x H}{a_0} - \frac{2a_1 q_x^2}{a_0} \right) \end{aligned} \quad (9.8)$$

Или если подставить (9.6)

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= -8\pi^2 \frac{ne^2}{cm} \left[\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{\Delta^2}{T_c^2} \right] \left(1 + 3 \frac{279}{56} \frac{7}{4} \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{\alpha^2}{v^2} \frac{H^2}{T_c^2} \right) \\
 Q_{yy} &= -8\pi^2 \frac{ne^2}{cm} \left[\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{\Delta^2}{T_c^2} \right] \left(1 + \frac{279}{56} \frac{7}{4} \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{\alpha^2}{v^2} \frac{H^2}{T_c^2} \right)
 \end{aligned} \tag{9.9}$$

Перед формулой присутствует коэффициент $8\pi^2$, а также коэффициенты при множителе $\frac{\alpha^2}{v^2} \frac{H^2}{T_c^2}$ отличаются от соответствующего расчёта через функции Грина ровно в $\frac{7}{4}$ раза. Но, что более важно, здесь отсутствует член $-\# \frac{H^2}{T_c^2}$, который параметрически больше, чем $\frac{\alpha^2}{v^2} \frac{H^2}{T_c^2}$, а также имеет другой знак.

10 Заключение

Отталкиваясь от результатов работ [9, 8] было вычислено влияние магнитного поля на отклик тока на векторный потенциал двумерного сверхпроводника со спин-орбитальным взаимодействием. Был проведён подробный вывод функций Грина для геликоидального состояния и определены параметры малости, по которым делались приближения, таким образом воспроизведён результат из статьи [8]. Найдена точная формула для сверхпроводящего отклика в линейном порядке, выраженная через функции Грина. С учётом приближений из неё следует формула из статьи [8].

В этой формуле затем, принимая во внимание явную зависимость спектра от магнитного поля, путём разложения точного выражения, мы получили поправки к линейному сверхпроводящему отклику в этой системе в главных порядках по магнитному полю. Ответ выражается через сумму по мацубаровским частотам, которую мы вычислили численно, а также нашли асимптотики в пределах $T \ll T_c$ и $T - T_c \ll T_c$. Удивительно, но при отсутствии магнитного поля сверхпроводящий отклик с точностью $\frac{\Delta}{E_F}$ равен отклику в обычном сверхпроводнике без обменного поля и спин-орбитального взаимодействия. Недиагональные слагаемые в отклике равны нулю, так как формула для них симметрична при отражении относительно оси x , хотя, формально, в задаче есть выделенное направление, заданное магнитным полем, направленным по оси y . Все линейные по полю вклады дают ноль, так как нет никакого естественного способа составить скалярную величину из вектора. Более удобным оказывается выразить отклик через сверхпроводящую плотность, определяемую из соотношения $Q = \frac{e^2 n_s}{mc}$. В таких терминах мы получили, что наличие спин-орбитального взаимодействия не подавляет сверхпроводимость при малых температурах, то есть $n_s = n$ при $T \rightarrow 0$ с точностью до членов четвёртого порядка по магнитному полю, а отклик является изотропным. В пределе температур, близких к T_c , в сверхпроводящем отклике появляется анизотропия. Проявляется она в том, что отклик приобретает множитель $(1 - \beta \frac{H^2}{T_c^2})$ где коэффициент перед $\frac{H^2}{T_c^2}$ отличается в 3 раза для оси y и для оси x .

Полученные в данной работе результаты не сходятся с высокотемпературном пределе с теорией Гинзбурга-Ландау из статьи [11]. Отличие заключается в наличии параметрически большего вклада от магнитного поля. Кроме того, коэффициент при члене $\frac{\alpha^2 H^2}{v^2 T_c^2}$ в статье Naoh Yuan в 7/4 раза больше, чем полученный нами. Однако, стоит отметить, что изначально эти результаты были изложены в статье [9], а год спустя в мае 2023 года выходит вторая работа одного из авторов этой статьи [11], в которой утверждается, что в предыдущих расчётах забыта часть членов и некоторые численные коэффициенты неверны. Однако, например, коэффициент для вектора \mathbf{Q} в статье [11] отличается от коэффициентов в статьях [9, 8] в полтора раза. Таким образом, результаты из статьи [11] и предшествующей ей статьи [9] требуется перепроверить.

11 Полезные интегралы и суммы

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (11.1)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{8} \quad (11.2)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{3}{8} \quad (11.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad (11.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad (11.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^4} dx = \frac{\pi}{16} \quad (11.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^4} dx = \frac{\pi}{16} \quad (11.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^4} dx = \frac{5\pi}{16} \quad (11.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = 2 \quad (11.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-4x^2}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}} dx = 0 \quad (11.10)$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{7}{8}\zeta(3) \quad (11.11)$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} = \frac{31}{32}\zeta(5) \quad (11.12)$$

Список литературы

- [1] Tomohiro Yokoyama, Mikio Eto, Yuli V. Nazarov «Anomalous Josephson effect induced by spin-orbit interaction and Zeeman effect in semiconductor nanowires» Mesoscale and Nanoscale Physics (2014)

- [2] Margarita Davydova, Saranesh Prembabu and Liang Fu «Universal Josephson diode effect» arXiv:2201.00831 (2022)
- [3] Noah F. Q. Yuan and Liang Fu «Topological metals and finite-momentum superconductors» PNAS 118 (3) e2019063118 (2021)
- [4] M. Naritsuka, T. Ishii, S. Miyake, Y. Tokiwa, R. Toda, M. Shimozawa, T. Terashima, T. Shibauchi, Y. Matsuda, and Y. Kasahara «Emergent exotic superconductivity in artificially engineered tricolor Kondo superlattices» Phys. Rev. B 96, 174512 (2017)
- [5] Timo Schumann, Luca Galletti, Hanbyeol Jeong, Kaveh Ahadi, William M. Strickland, Salva Salmani-Rezaie, and Susanne Stemmer «Possible signatures of mixed-parity superconductivity in doped polar SrTiO₃ films» Phys. Rev. B 101, 100503(R) (2020)
- [6] Lev P. Gor'kov and Emmanuel I. Rashba «Superconducting 2D System with Lifted Spin Degeneracy: Mixed Singlet-Triplet State» Phys. Rev. Lett. 87, 037004 – (2001)
- [7] Victor M. Edelstein «Spin polarization of conduction electrons induced by electric current in two-dimensional asymmetric electron systems» Solid State Commun. 73, 233 (1990).
- [8] Ol'ga Dimitrova and M. V. Feigel'man «Theory of a two-dimensional superconductor with broken inversion symmetry» Phys. Rev. B 76, 014522 (2007)
- [9] Noah F. Q. Yuan and Liang Fu «Supercurrent diode effect and finite momentum superconductivity» PNAS 119 (15) e2119548119 (2022).
- [10] Минеев В.П., Самохин К.В. Введение в теорию необычной сверхпроводимости. М.: Изд-во МФТИ, 1998
- [11] Noah F. Q. Yuan «Surface supercurrent diode effect» arXiv:2305.04219 (2023)