

---

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра проблем теоретической физики

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика

**Направленность (профиль) подготовки:** Общая и прикладная физика

## **ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ ДИОДНЫЙ ЭФФЕКТ В РЕЗИСТИВНОЙ МОДЕЛИ С ЕМКОСТЬЮ**

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Селезнев Глеб Сергеевич

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Фоминов Яков Викторович,  
д-р физ.-мат. наук, доц.

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2023

---

## Аннотация

В данной работе исследуется джозефсоновский диодный эффект на примере асимметричного СКВИДа, содержащего высшие гармоники в ток-фазовом соотношении. Для описания гистерезисного поведения контакта и других его свойств под действием внешнего тока используется резистивно-емкостная модель. В рамках этой модели была найдена аналитически и численно асимметрия вольт-амперной характеристики контакта и ступенек Шапиро. Также для случая нулевой емкости контакта было рассмотрено проявление джозефсоновского диодного эффекта в виде сильной асимметрии величины тепловых флуктуаций напряжения на контакте.

# Содержание

Аннотация	2
Введение	4
1 Постановка задачи	7
1.1 Асимметричный СКВИД	7
1.2 Резистивно-емкостная модель	8
2 Вольт-амперная характеристика контакта	10
2.1 Сдвиг $j_{c\pm}$	12
2.2 Асимметрия частот свободных колебаний	12
2.3 ВАХ при $j > j_c$	13
2.3.1 Критерии применимости метода разложения по гармоникам	15
2.3.2 Обсуждение асимметрии ВАХ в двух предельных случаях	16
2.4 Сдвиг $j_r$	16
2.4.1 Первый порядок по $\epsilon$	18
2.4.2 Первый порядок по $A$	19
2.4.3 Второй порядок по $\epsilon$ и первый порядок по $A$	19
2.5 Область одностороннего гистерезиса	20
3 Асимметрия ступенек Шапиро	22
3.1 Случай $\omega \gg 1$ и $\beta\omega \ll 1$ .	23
3.2 Случай $\beta\omega^2 \gg 1$ и $\beta\omega \gg 1$	24
4 Флуктуации напряжения на контакте	25
5 Заключение	28
6 Приложения	29
6.1 Вычисление поправки к $j_{r\pm}$ в первом порядке по $A$ и по $\epsilon$	29
6.2 Вычисление $Q$ методом перевала	31
6.3 Вычисление ступенек Шапиро	33

# Введение

Диодный эффект в различных электрических системах оказался очень интересен как с научной, так и с прикладной точек зрения и нашел множество технологических применений в виде фильтров, преобразователей, выпрямителей тока и т.д [1].

В настоящее время его проявление в сверхпроводящих системах, называемое сверхпроводящим диодным эффектом (SDE), активно изучается как теоретически, так и экспериментально [2, 3]. В различных материалах он может вызываться различными физическими механизмами, однако обычно для его наблюдения требуется нарушение симметрии по обращению времени и симметрии инверсии в рассматриваемой системе. Это может достигаться, например, за счет обменного поля и спин-орбитального взаимодействия в материале образца [4].

Сверхпроводящий диодный эффект, в частности, можно наблюдать и в системах, состоящих из джозефсоновских контактов [5, 6]. Тогда этот эффект будет называться джозефсоновским диодным эффектом (JDE). Проявляется он в различии поведений системы при протекании через нее прямого  $I > 0$  и обратного  $I < 0$  тока. Это различие может заключаться в асимметрии вольт-амперной характеристики (ВАХ) контакта, ступенек Шапиро и т.д.

Одной из реализаций системы, пригодной для наблюдения джозефсоновского диодного эффекта, является сверхпроводящий интерферометр (СКВИД), состоящий из нескольких джозефсоновских контактов при наличии внешнего магнитного потока  $\Phi$  через плоскость изучаемого образца [7, 8, 9].

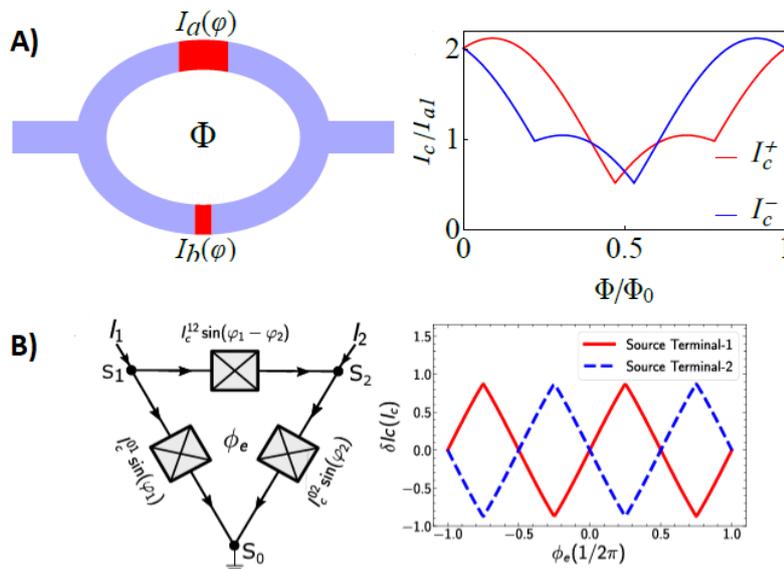


Рис. 1: Проявления джозефсоновского диодного эффекта в виде асимметрии критических токов  $I_c$  в зависимости от приложенного к петле потока в: (А) сверхпроводящем интерферометре из работы [7]; (В) трехтерминальной схеме из работы [8].

В такой системе за счет различия контактов в разных рукавах и наличия магнитного поля, которое создает разность фаз между сверхпроводящими токами от разных контактов, удастся достичь асимметрии свойств контакта при протекании через него прямого и обратного токов.

Аналитически можно исследовать джозефсоновский диодный эффект на примере асимметричного СКВИДа, находящегося в поперечном магнитном поле и содержащем высшие гармоники в ток-фазовом соотношении контакта:  $I(\varphi) = \sum_{n=1} I_n \sin(n\varphi + B_n)$ , где  $I_n$  и  $B_n$  задают амплитуды и фазы разных гармоник. Высшие гармоники естественным образом возникают во многих типах джозефсоновских контактов и обычно  $n$  гармоника имеет порядок малости  $T^n$ , где  $T$  - коэффициент прозрачности области слабой связи [10]. Кроме наличия высших гармоник в ток-фазовом соотношении контактов для наблюдения джозефсоновского диодного эффекта в данной системе также необходимо наличие магнитного потока, пронизывающего контур СКВИДа и нарушающего симметрию по обращению времени.

Самое простое ток-фазовое соотношение, удовлетворяющее описанному выше условию содержит в себе две гармоники со сдвигом фазы  $B$  между ними:  $I(\varphi) = I_1(\sin \varphi + A \sin(2\varphi - B))$ , где  $I_1$  определяет амплитуду первой гармоники, а  $A$  и  $B$  задают эффективную амплитуду и фазу второй гармоники. Контакт, обладающий таким ток-фазовым соотношением будет являться “минимальной моделью” джозефсоновского диода.

Минимальная модель была ранее рассмотрена в работе [7] на примере асимметричного СКВИДа в рамках резистивной модели (RSJ), в случае контакта нулевой емкости  $C = 0$ . В таком случае вольт-амперная характеристика контакта оказывается не гистерезисной и асимметричной, что является наглядным проявлением джозефсоновского диодного эффекта в данной системе.

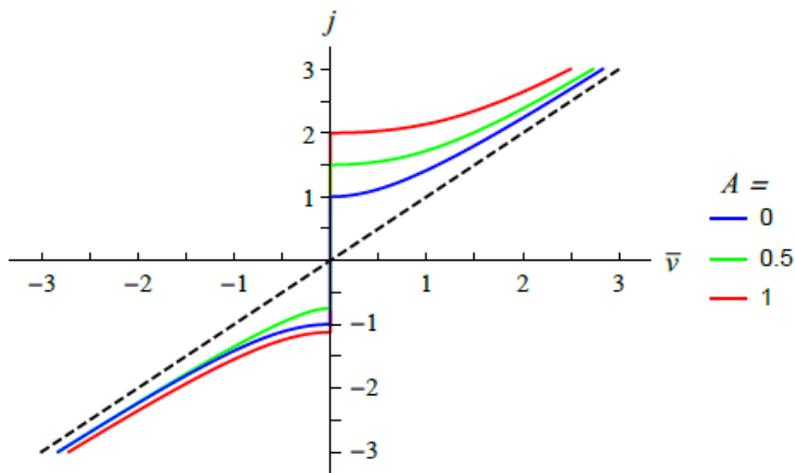


Рис. 2: Асимметричная вольт-амперная характеристика СКВИДа, взятая из работы [7] и рассмотренная при разных значениях амплитуд второй гармоники  $A$ .

Однако, широкий класс контактов демонстрирует гистерезисную вольт-амперную характеристику, что может быть связано с наличием большой емкости у этих контактов

[10, 11].

Поэтому, для корректного теоретического описания джозефсоновского диодного эффекта в системе, составленной из этих контактов, потребуется модифицировать модель RSJ с учетом конечной емкости системы.

Соответственно целью данной работы будет обобщение и развитие результатов [7] путем учета влияния конечной емкости  $C$  контакта на джозефсоновский диодный эффект в нем.

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Асимметричный СКВИД

В этом разделе мы приведем рассуждения, следующие работе [7]. Таким образом будут согласованы обозначения, используемые в дальнейшем.

Будем изучать JDE на примере асимметричного СКВИДа, содержащего высшие гармоники в ток-фазовом соотношении и находящегося в поперечном магнитном поле.

Для этого рассмотрим СКВИД, имеющий в одном рукаве контакт с ток-фазовым соотношением -  $I_a(\varphi)$ , а в другом рукаве контакт, вообще говоря с другим ток-фазовым соотношением -  $I_b(\varphi)$  и поместим его в магнитное поле, создающее поток  $\Phi$  через его петлю.

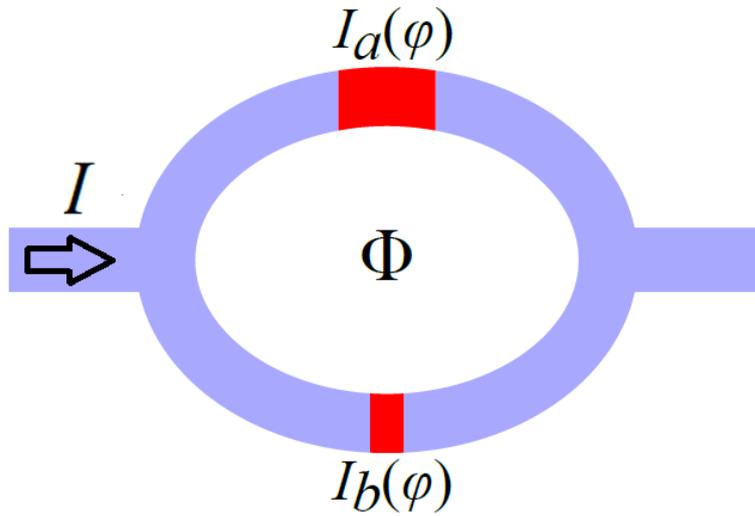


Рис. 3: Асимметричный сквид с джозефсоновскими контактами в рукавах, имеющими разные ток-фазовые характеристики  $I_a(\varphi)$  и  $I_b(\varphi)$ .

Сверхпроводящий ток, текущий через весь контакт  $I_s = I_a(\varphi_a) + I_b(\varphi_b)$ . Из-за наличия потока  $\Phi$ , пронизывающего контур, разности фаз на контактах а и б будут связаны соотношением:

$$\varphi_a - \varphi_b = \phi, \quad \phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (1.1.1)$$

Тогда, определяя  $\varphi = (\varphi_a + \varphi_b)/2$  получаем:

$$I_s(\varphi) = I_a(\varphi + \phi/2) + I_b(\varphi - \phi/2). \quad (1.1.2)$$

Сразу отметим важный факт: если оба контакта будут синусоидальными, то

$$I_s(\varphi) = I_{a1} \sin(\varphi + \phi/2) + I_{b1} \sin(\varphi - \phi/2) = I_1(\phi) \sin(\varphi + \gamma), \quad (1.1.3)$$

где  $I_1(\phi)$  и  $\gamma$  определяются из соотношений:

$$\begin{cases} I_1(\phi) = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{b1}^2 + 2I_{a1}I_{b1} \cos \phi} \\ \tan \gamma = \frac{I_{a1} - I_{b1}}{I_{a1} + I_{b1}} \tan \frac{\phi}{2}. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

То есть ток-фазовое соотношение контакта снова будет синусоидальным, что исключает возможность наблюдения джозефсоновского диодного эффекта в данном случае (т.к.  $\gamma$  будет просто определять общий сдвиг фазы и не приведет к изменению максимальных и минимальных значений токов).

Поэтому далее мы будем рассматривать ситуацию, когда один из контактов синусоидальный, а другой имеет как первую, так и вторую гармонику в ток-фазовом соотношении, то есть:

$$\begin{cases} I_a(\varphi) = I_{a1} \sin \varphi \\ I_b(\varphi) = I_{b1} \sin \varphi + I_{b2} \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Тогда, подставляя эти ток-фазовые соотношения в (1.1.2) и нормируя их на амплитуду первой гармоники  $I_1$ , определяемой формулой (1.1.5) получаем:

$$J(\varphi) = \frac{I_s(\varphi)}{I_1(\phi)} = \sin \varphi + A(\phi) \sin (2\varphi - B), \quad (1.1.6)$$

где  $A$  и  $B$  играют роль безразмерных амплитуд и фаз второй гармоники и даются выражениями:

$$A = \frac{I_{b2}}{I_1(\phi)} \quad B = \phi + 2\gamma(\phi). \quad (1.1.7)$$

Таким образом, асимметричный СКВИД можно рассматривать как джозефсоновский контакт с ток-фазовым соотношением, соответствующим “минимальной модели” и дающегося выражением (1.1.6).

## 1.2 Резистивно-емкостная модель

Далее, нас будет интересовать, как будет вести себя контакт при действии на него постоянным током амплитуды  $I_{dc}$  и переменным током амплитуды  $I_{ac}$ , частоты  $\Omega$  и с начальной фазой равной  $\Delta$ .

В частности, нас будет интересовать его ВАХ, то есть зависимость  $\bar{V}(I_{dc})$  - среднего напряжения на контакте от приложенного постоянного тока.

Будем исследовать свойства контакта, пользуясь резистивно-емкостной моделью. Это модель, в которой реальный контакт моделируется идеальным контактом с ток-фазовым соотношением  $I_s(\varphi)$ , который шунтирован резистором с сопротивлением  $R$  и включен параллельно конденсатору с емкостью  $C$ . Эффективная схема представлена на рисунке 4.

Уравнения Джозефсона для этого контакта примут хорошо известный в литературе вид [13]:

$$\frac{\hbar C}{2e} \varphi'' + \frac{\hbar}{2eR} \varphi' + J(\varphi) = I_{dc} + I_{ac} \cos(\Omega t + \Delta) \quad (1.2.1)$$

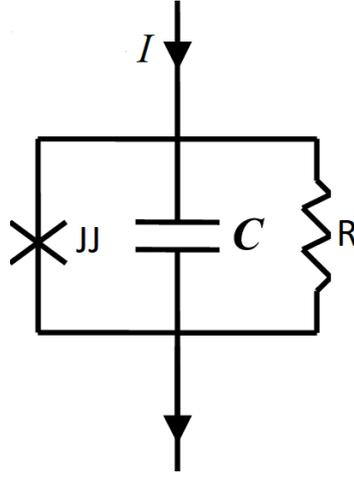


Рис. 4: Эффективная схема джозефсоновского контакта в резистивно-емкостной модели.

$$\hbar\varphi' = 2eV. \quad (1.2.2)$$

Обезразмерим эти уравнения. Для этого будем мерить ток в амплитудах первой гармоники контакта  $I_1$ , напряжение в единицах  $I_1 R$ , а время в безразмерных единицах  $\tau = \omega_J t = \frac{2e}{\hbar} I_1 R t$ .

Тогда, с учетом выбора таких единиц уравнения Джозефсона запишутся в виде:

$$\beta\varphi'' + \varphi' + J(\varphi) = j_{dc} + j_{ac} \cos(\omega\tau + \Delta) \quad (1.2.3)$$

$$\varphi' = v. \quad (1.2.4)$$

В этих уравнениях  $j_{ac/dc} = \frac{I_{ac/dc}}{I_1}$  и  $v = \frac{V}{I_1 R}$  являются обезразмеренными переменным / постоянным током и напряжением соответственно, а  $\omega = \frac{\Omega}{\omega_J}$  обезразмеренной частотой переменного тока.

Легко заметить, что уравнения Джозефсона можно интерпретировать как уравнения Ньютона для движения частицы массы  $\beta = \frac{2eI_1 CR^2}{\hbar}$  (параметр  $\beta$  называется параметром МакКамбера) с затуханием под действием внешней силы:

$$F(\varphi, t) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = j_{dc} + j_{ac} \cos(\omega\tau + \Delta) - J(\varphi), \quad (1.2.5)$$

где был введен потенциал  $U(\varphi)$  (называемый также “потенциалом стиральной доски”). При этом  $\varphi$  будет играть роль координаты частицы, а напряжение  $v$  роль скорости частицы.

Отметим, что в случае  $j_{dc} = j$ ;  $j_{ac} = 0$  и  $J(\varphi)$  из (1.1.6) выражение для потенциала  $U(\varphi)$  принимает простой вид:

$$U(\varphi) = -j\varphi - \cos\varphi - \frac{A}{2} \cos(2\varphi - B). \quad (1.2.6)$$

Графически этот потенциал представлен на рисунке 5.

Аналогия между уравнениями Джозефсона и движением частицы в потенциале (1.2.6) является полезной и будет использована нами в дальнейшем для интерпретации

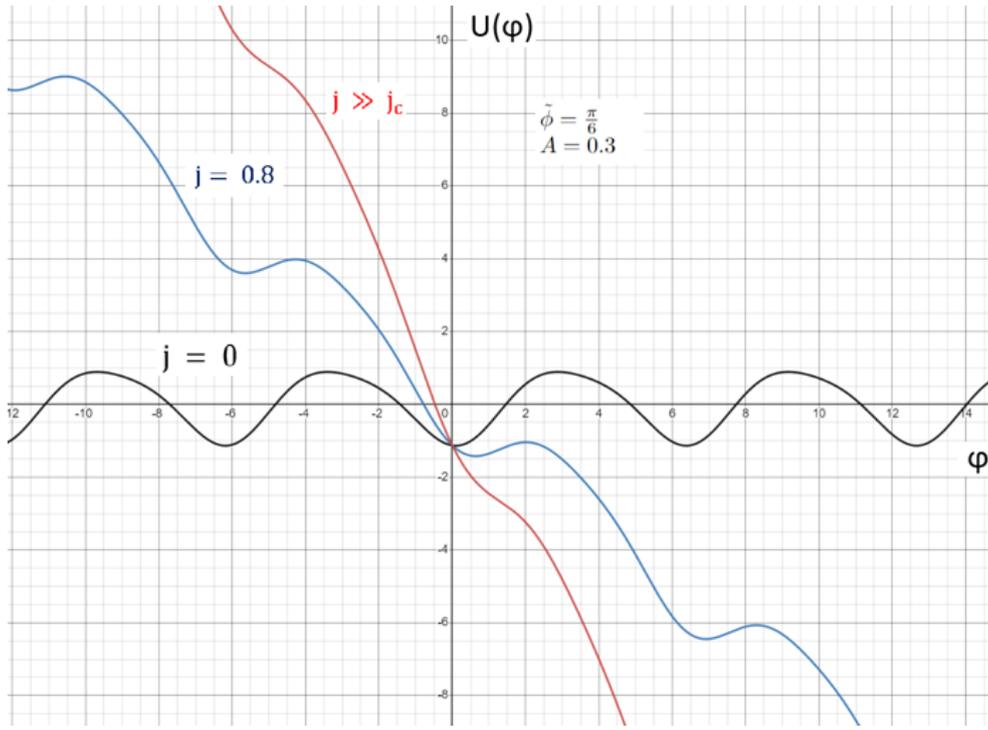


Рис. 5: Механическая аналогия первого уравнения Джозефсона: движения частицы в потенциале  $U(\varphi)$  в случае разных  $j = j_{dc}$ .

полученных результатов и качественного анализа поведения контакта.

Для случая ВАХ минимальной модели, согласно (1.1.6) уравнения Джозефсона примут вид:

$$\beta\varphi'' + \varphi' + \sin\varphi + A \sin(2\varphi - B) = j_{dc} + j_{ac} \cos(\omega\tau + \Delta) \quad (1.2.7)$$

$$\varphi' = v. \quad (1.2.8)$$

Эти уравнения и будут описывать динамику Джозефсоновского контакта с учетом второй гармоники в ток-фазовом соотношении.

Их можно исследовать аналитически, а также численно в разных предельных случаях. Например, ранее в работе [7] были исследованы эти уравнения в случае  $\beta = 0$ .

В этой же работе теоретически будут рассмотрены асимметричные свойства контакта в минимальной модели при параметре  $\beta \neq 0$  (то есть, пользуясь механической аналогией, ненулевой массы частицы).

## 2 Вольт-амперная характеристика контакта

Прежде всего нас будет интересовать асимметрия ВАХ контакта, то есть асимметрия зависимости тока через контакт от среднего по времени напряжения на нем. Формально, асимметрия будет выражаться соотношением вида:  $I(\bar{V}) \neq -I(-\bar{V})$ , где  $\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt$  среднее значения напряжения на контакте, а  $T \rightarrow \infty$ .

В этой главе будем исследовать ВАХ контакта в режиме постоянного тока, то есть

при  $j_{dc} = j = const$  и  $j_{ac} = 0$ . Тогда уравнения Джозефсона примут вид:

$$\beta\varphi'' + \varphi' + \sin\varphi + A \sin(2\varphi - B) = j \quad (2.1)$$

$$\varphi' = v. \quad (2.2)$$

Численные расчеты для ВАХ контакта при разных значениях  $\beta$  приведены на рисунке 6.

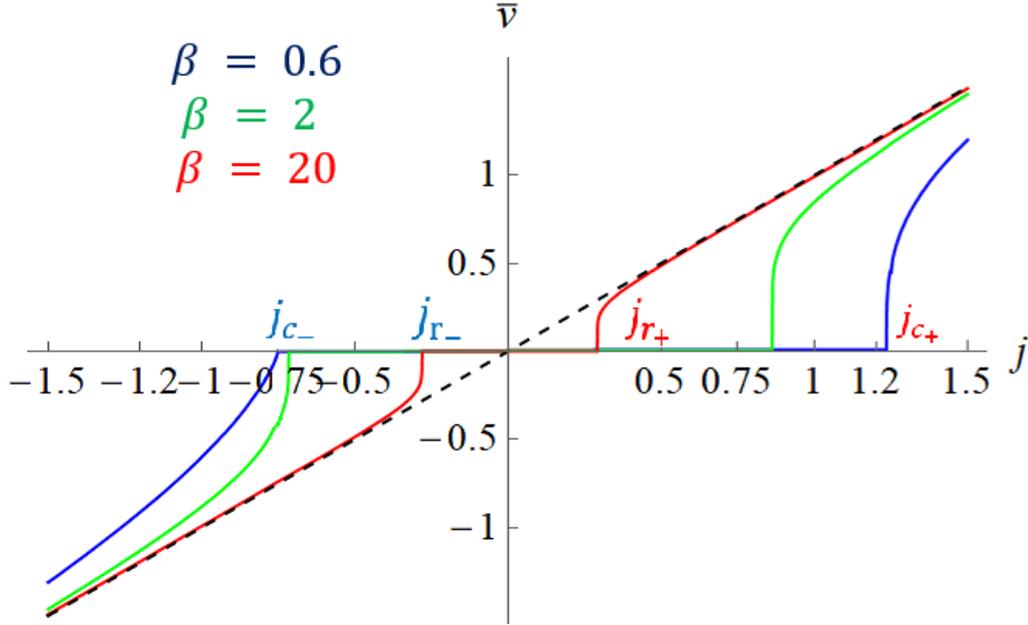


Рис. 6: ВАХ контакта при разных значениях  $\beta$  при  $A = 0.25$  и  $B = \frac{\pi}{2}$ . Штрихованная линия соответствует закону Ома.

Обсудим ВАХ контакта при наличии у него емкости.

Как известно при  $j < j_c$ , называемым критическим током, уравнения Джозефсона имеют стационарное решение, дающееся решением уравнения

$$\sin\varphi + A \sin(2\varphi - B) = j. \quad (2.3)$$

На механическом языке это означает, что у потенциала, изображенного на рисунке 5, есть минимумы, в которых может “сидеть” частица при данном значении  $j$ . При этом средняя скорость частицы  $\bar{v} = 0$ .

При дальнейшем увеличении тока через контакт  $j > j_c$  стационарное решение пропадает. Задача становится нестационарной  $\varphi' \neq 0$ , и соответственно согласно второму уравнению Джозефсона (1.2.4) на контакте появляется ненулевое напряжение  $\bar{v}$ . На механическом языке же это означает, что минимумы потенциала пропадают и частица начинает “скатываться” по потенциалу стиральной доски, то есть у нее появляется ненулевая средняя скорость  $\bar{v}$ .

Если теперь мы начнем уменьшать ток, то когда мы дойдем до значения  $j = j_c$ , напряжение на контакте не упадет до нуля, как можно было бы наивно ожидать. Напротив,

оно будет оставаться ненулевым вплоть до некоторого  $j = j_r$ , называемым током возврата, и только после этого резко упадет до 0 (резкость падения напряжения вблизи  $j_r$  мы в своей работе исследовать не будем, но отметим, что для синусоидального контакта, согласно работе [12], вблизи  $j_r$  поведение ВАХ описывается соотношением  $\frac{j-j_r}{j_r} \sim \frac{1}{v} \exp(-\frac{1}{v})$ ). Таким образом в системе явным образом наблюдается гистерезис. При повышении тока мы двигаемся по прямой ветки решения, а затем, начиная уменьшать ток, мы доходим до значения  $j_c$  и переходим на возвратную ветку и двигаемся по ней вплоть до  $j_r$ , где напряжение падает до 0.

Такое поведение контакта качественно можно объяснить с помощью механической аналогии: частица, двигаясь с некоторой средней скоростью, будет “проскакивать” ямки потенциала и лишь при некотором критическом угле наклона “стиральной доски” остановится. При этом понятно, что чем больше масса частицы, то есть чем больше  $\beta$ , то тем дальше частица сможет совершать движение по инерции, проскакивая ямки, и тем соответственно меньше будет ток возврата  $j_r$ .

Очевидно, что если бы не было слагаемого со второй гармоникой в ток-фазовом соотношении, то никакой асимметрии токов возврата и критических токов не было бы:  $j_{r+} = |j_{r-}|$  и  $j_{c+} = |j_{c-}|$ .

Однако из-за наличия асимметричной второй гармоники ВАХ контакта в целом будет асимметричной. В частности можно ожидать разных значений критических токов  $j_{c+} \neq |j_{c-}|$  и токов возврата  $j_{r+} \neq |j_{r-}|$ .

## 2.1 Сдвиг $j_{c\pm}$

Сначала найдем критические токи  $j_{c+}$  и  $j_{c-}$  в случаях  $j > 0$  и  $j < 0$  соответственно, считая амплитуду второй гармоники  $A \ll 1$ . Это можно сделать, решая уравнение (2.3) по теории возмущений в первом порядке по  $A$ , раскладываясь около  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Получим, что:

$$\begin{cases} j_{c+} = 1 + A \sin B \\ j_{c-} = -1 + A \sin B. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

На этом простом примере мы видим, что появился асимметричный сдвиг критического тока, пропорциональный  $A \sin B \ll 1$ . Комбинация  $A \sin B$  является типичной и, как мы увидим далее, будет входить во все ответы, описывающие асимметрии каких-либо физических величин в данной системе. Также заметим, что для наблюдения джозефсоновского диодного эффекта требуется наличие нетривиального магнитного потока через контур СКВИДа (не кратного целым и полуцелым значениям кванта магнитного потока), чтобы  $B \neq 2\pi$  и  $B \neq \pi$ .

## 2.2 Асимметрия частот свободных колебаний

При  $j < j_c$  как уже было отмечено ранее частица не может совершать инфинитное движение, а может лишь колебаться около минимума одной из потенциальных ям. В

случае синусоидального контакта и  $j = 0$  эта частота как известно равна  $\omega_p = \sqrt{\frac{2eI_1}{\hbar C}}$  и называется плазменной частотой.

Выясним как изменяется частота этих колебаний в первом порядке по  $A \ll 1$ , считая также, что  $\frac{A}{\sqrt{1-j^2}} \ll 1$ , то есть, что мы не подошли достаточно близко к величине  $j_{c\pm}$ , когда минимумы потенциала, изображенного на рисунке 5, пропадают. Для этого квадратично разложим потенциал (1.2.6) около его минимума и оставим слагаемые только первого порядка по  $A$ . Получим что:

$$\frac{\omega_{\pm}^2}{\omega_p^2} = \sqrt{1-j^2} + 2A \cos B \sqrt{1-j^2} \pm \frac{Aj(3-2j^2) \sin B}{\sqrt{1-j^2}}. \quad (2.2.1)$$

Видим, что асимметричная поправка к частотам пропорциональна  $A \sin B$  и может оказаться важной при попытке резонансно воздействовать переменным током на наш контакт.

### 2.3 ВАХ при $j > j_c$

Далее рассмотрим асимметрию ВАХ контакта в нестационарном режиме. Для того чтобы сделать это аналитически, рассмотрим предел достаточно больших токов  $j$  (точный критерий применимости полученного при этом ответа обсудим далее в разделе 2.3.1).

Отметим сразу, что описанный ниже способ построения теории возмущений (ТВ) не работает в пределе малых емкостей (или на механическом языке в пределе малых масс, когда динамика системы в уравнении (1.2.7) определяется диссипативным членом, пропорциональным  $\varphi'$ , а не слагаемым, содержащим  $\beta$ ).

Также отметим, что далее в этом разделе нигде не предполагается, что амплитуда второй гармоники  $A$  мала.

Перепишем уравнение (2.1) введя новую переменную времени  $\tau \rightarrow \tau j$  (далее для удобства будем обозначать ее как  $t$ ) и затем поделим обе части на  $j$ . Получим следующее уравнение:

$$\beta \varphi'' = \frac{1}{j} - \frac{\varphi'}{j} - \frac{\sin \varphi}{j^2} - \frac{A \sin(2\varphi - B)}{j^2}. \quad (2.3.1)$$

Физически ясно, что при больших токах ВАХ контакта будет выходить на закон Ома  $\bar{v} = j + O(1/j)$ . Нас, однако, будут интересовать асимметричные нелинейные поправки к закону Ома.

Будем искать его решение методом разложения по гармоникам (считая при этом параметром теории возмущений  $\frac{1}{j}$ ). При этом будем рассматривать систему в установившемся режиме.

Тогда, ищем решение в виде:

$$\begin{cases} \varphi(t) = \nu t + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\nu t + b_n \sin n\nu t) \\ \nu = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{j^n} \\ a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \frac{1}{j^k} \\ b_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \frac{1}{j^k}. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Как видно  $\nu$  задает частоту колебаний фазы контакта. В нулевом порядке в этой системе единиц  $\nu_0 = 1$ . Коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  же задают амплитуды различных гармоник колебаний фазы контакта. Будем их искать в виде ряда теории возмущений, подставляя решение в описанном выше виде в уравнении (2.3.1). Далее в каждом порядке по  $\frac{1}{j}$  будем раскладывать обе части равенства (2.3.1) в ряд Фурье по  $\nu$  и приравнивать коэффициенты в обеих частях при  $\sin n\nu t$  и  $\cos n\nu t$ . Отметим, что в самих  $\sin \nu t$  и  $\cos \nu t$  раскладывать  $\nu$  в ряд по  $\frac{1}{j}$  не нужно.

Поправки же к  $\nu$  будут возникать из-за раскрытия в правой части равенства слагаемых вида  $\# \cos n\nu t \cos \nu t$ ;  $\# \sin n\nu t \sin \nu t$  и т.п, то есть слагаемых, которые при разложении в ряд Фурье по частоте  $\nu$  дают не только осциллирующие слагаемые, но и нулевые гармоники(константы), которая в точности должны компенсироваться соответствующими слагаемыми, приходящими от  $\frac{\varphi'}{j} = \frac{\nu}{j}$ .

Также заметим, что при этом среднее напряжение на контакте  $\bar{v} = \overline{\varphi'(t)} = \nu$ , т.к среднее значение осциллирующих слагаемых - 0.

Конкретный пример подсчета в наинизшем нетривиальном порядке по  $\frac{1}{j}$  (а именно в порядке  $\frac{1}{j^2}$ , т.к. в нулевом и первом порядке (2.3.1) очевидно тождественно выполняется):

Ищем решение в виде:

$$\begin{cases} \nu = 1 + \frac{c_1}{j} \\ \varphi(t) = t + \frac{c_1 t}{j} + \frac{1}{j^2} (a_{12} \cos \nu t + b_{12} \sin \nu t + a_{22} \cos 2\nu t + b_{22} \sin 2\nu t). \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Подставляя в (2.3.1) решение в таком виде, оставляя в нем слагаемые порядка  $\frac{1}{j^2}$ , раскладывая обе части равенства в ряд фурье по  $\nu t$  и приравнивая коэффициенты при первых и вторых гармониках получим систему:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ -\beta a_{12} = 0 \\ -\beta b_{12} = -1 \\ -4\beta a_{22} = A \sin B \\ -4\beta b_{22} = -A \cos B. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

В итоге:  $a_{12} = 0$ ;  $b_{12} = \frac{1}{\beta}$ ;  $a_{22} = -\frac{A \sin B}{4}$ ;  $b_{22} = \frac{A \cos B}{4}$ .

Отметим, что в этом порядке ТВ при разложении в ряд Фурье слагаемых в правой части уравнения (2.3.1) не возникло нулевых гармоник, из-за чего  $c_1 = 0$ , однако такие слагаемые непременно возникнут в дальнейшем при раскрытии по ТВ слагаемых  $\sin \varphi$  и  $A \sin(2\varphi - B)$  в правой части уравнения (2.3.1). Продолжая эту процедуру для старших порядков ТВ получим следующую зависимость напряжения на контакте от тока:  $\overline{V}(j) = \nu(j)I_1R$ :

$$\frac{\overline{V}}{I_1R} = j - \frac{1}{j^3} \left( \frac{1}{2\beta^2} + \frac{A^2}{8\beta^2} \right) + \frac{1}{j^5} \left( \frac{16 + A^2 + 24A\beta \cos B}{32\beta^4} \right) - \frac{1}{j^6} \left( \frac{15A \sin B}{16\beta^4} \right) + O(1/j^7) \quad (2.3.5)$$

### 2.3.1 Критерии применимости метода разложения по гармоникам

Давайте теперь кратко обсудим критерий применимости нашей ТВ (метода разложения по гармоникам). На самом деле, хоть мы и вели формально разложение по параметру  $\frac{1}{j}$ , но реальные условия применимости такого метода:  $\beta j \gg 1$  и  $\beta j^2 \gg 1$ . Это можно понять из полученного ответа (2.3.5): каждый следующий порядок теории возмущений дает поправку к закону Ома и эта поправка имеет порядок:  $\frac{1}{(\beta j^2)^m (\beta j)^n}$ , где  $m$  и  $n$  целые числа. Тогда достаточным условием применимости полученной теории возмущений и являются описанные выше условия.

Физически же, этот метод описывает поправки к ВАХ контакта, когда она близка к закону Ома, а жесткость критерия применимости теории возмущений определяется емкостью контакта. Так, как можно понять из рисунка 6, для больших параметров МакКамбера ВАХ быстрее выходит на закон Ома, чем для случая малых значений этого параметра. Также отметим, что для случая больших емкостей контакта  $\beta \gg 1$  эти условия работают в области ВАХ практически вплоть до токов возврата  $j_r \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ .

Поэтому этот случай в дальнейшем мы будем называть “случаем больших емкостей”, имея в виду при этом все тонкости, указанные выше.

Методом разложения по гармоникам также в принципе удастся рассмотреть другой предельный случай:  $\beta j \ll 1$  и  $j \gg 1$ . Он соответствует контакту с малой емкостью при приложении к нему большого постоянного тока. В частности, в этом пределе можно рассмотреть случай, когда  $\beta$  является самым малым параметром задачи и вообще положить ее равной 0. Это было проделано в работе [7].

Итого, метод разложения по гармоникам применим в двух предельных случаях:

$$1) \begin{cases} \beta j^2 \gg 1 \\ \beta j \gg 1. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

$$2) \begin{cases} \beta j \ll 1 \\ j \gg 1. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

### 2.3.2 Обсуждение асимметрии ВАХ в двух предельных случаях

Теперь давайте сравним асимметрию ВАХ в обоих вышеперечисленных случаях, где ответ может быть найден аналитически методом разложения по гармоникам (асимметричное слагаемое в ВАХ контакта обведено красным цветом):

1) ВАХ контакта в случае  $\beta j \gg 1$  и  $\beta j^2 \gg 1$ :

$$\frac{\bar{V}}{I_1 R} = j - \frac{1}{j^3} \left( \frac{1}{2\beta^2} + \frac{A^2}{8\beta^2} \right) + \frac{1}{j^5} \left( \frac{16 + A^2 + 24A\beta \cos B}{32\beta^4} \right) - \frac{1}{j^6} \left( \frac{15A \sin B}{16\beta^4} \right) + O(1/j^7) \quad (2.3.8)$$

2) ВАХ контакта в случае  $\beta j \ll 1$  и  $j \gg 1$ , взятая из работы [7]:

$$\frac{\bar{V}}{I_1 R} = j - \frac{(1 + A^2)}{2j} - \frac{3A \sin B}{4j^2} + O(1/j^3) \quad (2.3.9)$$

Видим, что в случае больших емкостей контакта асимметрия ВАХ контакта оказывается сильно подавленной (порядка  $\frac{1}{(\beta j)^2(\beta j^2)^2}$ ), в отличие от случая малых емкостей, когда подавление слабее (лишь как  $\frac{1}{j^2}$ ).

Однако, отметим, что в случае малых емкостей для применимости полученного нами ответа требуется подавать большие токи на контакт, где модель RCSJ может плохо работать, в то время как в случае больших емкостей контактные критерии применимости полученного ответа менее жесткие и в них токи могут быть порядка критических.

## 2.4 Сдвиг $j_r$

Как уже было отмечено выше в случае наличия второй гармоники в ток-фазовом соотношении контакта следует ожидать асимметрии токов возврата  $j_{r+} \neq |j_{r-}|$ .

Найдем эту асимметричную поправку в пределе больших емкостей контакта  $\beta \gg 1$  и малой амплитуды второй гармоники  $A \ll 1$ .

Для того чтобы это сделать переписываем (2.1) несколько в другом виде, перейдя от безразмерного времени  $\tau = \omega_j t$  к  $\tilde{t} = t \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}} = t \omega_p$ . Тогда первое уравнение Джозефсона примет следующий вид:

$$\varphi'' + \epsilon \varphi' + \sin \varphi + A \sin(2\varphi - B) = j \quad (2.4.1)$$

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ll 1. \quad (2.4.2)$$

Заметим, что  $\epsilon$  играет роль коэффициента затухания колебаний в нашей системе и в данном предельном случае этот коэффициент оказывается мал. Далее будем искать ток возврата с помощью теории возмущений по параметрам  $A$  и  $\epsilon$ .

Как уже было отмечено ранее, удобно пользоваться механической аналогией между контактом и частичкой массы  $\beta$ . Перейдем полностью на механический язык и переписываем

уравнение (2.4.1) в виде уравнения на энергию  $E(t)$  частицы:

$$E(t) = \frac{\varphi'^2}{2} - \cos \varphi - j\varphi - \frac{A}{2} \cos(2\varphi - B) = E_0 - \int_{-T}^t \epsilon \varphi'^2 dt, \quad (2.4.3)$$

где  $E_0$  - начальная энергия частицы, а за  $-T$  обозначен момент начала движения.

Это уравнение мы и будем рассматривать по ТВ, считая слагаемые  $-\int_{-T}^t \epsilon \varphi'^2 dt$  и  $\frac{A}{2} \cos(2\varphi - B)$  малыми по параметрам  $\epsilon$  и  $A$  соответственно.

Далее, по определению ток возврата  $j_r$  - это ток на возвратной ветки, при котором напряжение падает до 0. То есть на “механическом” языке значение  $j_r$  - это критическое значение внешней силы, которое отделяет область инфинитного движения частицы, когда она скатывается с какой-то средней скоростью  $v$  по “стиральной доске”, от области, где  $v = 0$  и частица может совершать только финитное движения в одной из ям потенциала 5.

Возвратный ток будет являться функцией от коэффициента затухания  $\epsilon$  и амплитуды второй гармоники:  $j_r = j_r(A, \epsilon)$ . Подставляя его значение в (2.4.3) и, решив его, мы сможем найти траекторию  $\varphi(t)$ , соответствующую данному значению  $j_r$ . Нас, однако, интересует обратная ситуация: мы не знаем  $j_r$  и хотим его найти из (2.4.3). Поэтому нам нужно сначала понять, какая траектория “соответствует” значению  $j_r$ .

Для этого разберемся с нулевым порядком теории возмущений в уравнении (2.4.3) по  $\epsilon$  и по  $A$ . В этом порядке можно пренебречь затуханием в системе. При этом можно понять, что тогда будет мал и ток возврата  $j_r \sim \epsilon \rightarrow 0$ , который определяет угол наклона “стиральной доски”, т.к. в этом случае частицу будет сложно остановить, и придется сделать угол наклона “стиральной доски” очень маленьким, чтобы этого достичь. Тогда, в этом порядке теории возмущений наклоном “стиральной доски” также можно пренебречь, и при этом уравнения движения станут инвариантны по обращению времени.

Поэтому, далее, в этом порядке рассмотрим частицу, стартующую с максимума потенциала (1.2.6) в момент времени  $-T$  и достигающую соседний максимум в момент времени  $T$ . Для этого ей нужно придать начальную скорость в максимуме  $v \rightarrow 0$ . Тогда она за параметрически большое время  $2T$  достигнет соседнего максимума и там будет иметь точно такую же скорость  $v \rightarrow 0$ .

Если же придать частице большую скорость, то она будет совершать инфинитное движение, перекатываясь по “стиральной доске”. А если же отпускать частицу с  $v \rightarrow 0$  не из максимума, то она не сможет достичь соседнего максимума.

Таким образом, в нулевом порядке теории возмущений (для уравнения (2.4.3)) траектория, описывающая движение частицы, которая стартует из одного максимума потенциала с бесконечно малой скоростью и заканчивает свое движение в соседнем максимуме, будет соответствовать значению  $j_r$  в уравнении (2.4.3).

Далее можно искать поправки к этой траектории по  $\epsilon$  и по  $A$  по теории возмущений. Внешний вид такой траектории показан на рисунке 7.

Таким образом для определения свойств траектории нам нужно прежде всего найти

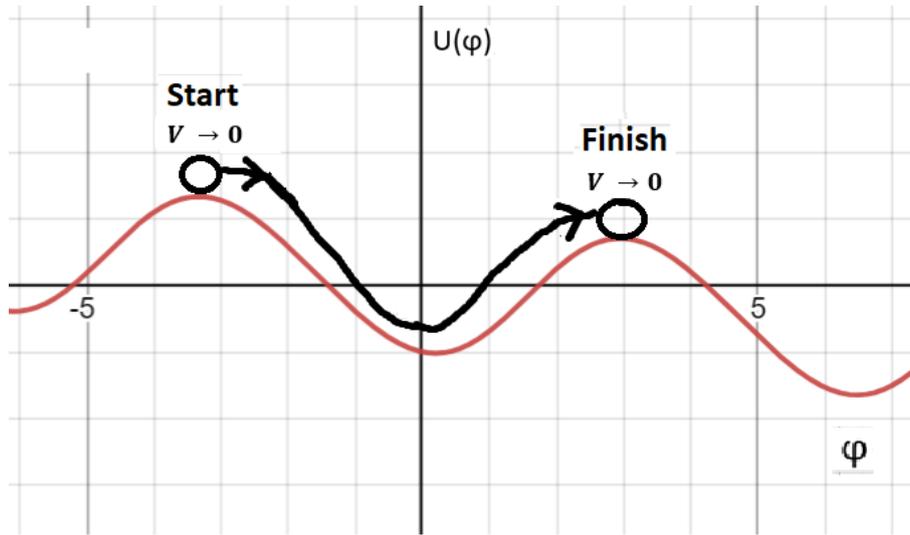


Рис. 7: Траектория, соответствующая  $j_r$ .

$\varphi_{in}$  - положение максимума потенциала (то, откуда начнет скатываться частица) в нужном порядке теории возмущений, а затем определить соответственно  $E_0 = U(\varphi_{in})$ , т.к мы полагаем  $v = 0$ .

Затем можно искать траекторию частицы, решая уравнение (2.4.3). А чтобы найти  $j_{r\pm}$  можно воспользоваться уравнением баланса энергии: потери энергии за время перекачивания должны компенсироваться выигрышем в потенциальной энергии. Тогда получаем уравнение на  $j_{r\pm}$ :

$$\pm 2\pi j_{r\pm} = \int_{-T}^t \epsilon \varphi'^2 dt = \epsilon \int_{\varphi_{in}}^{\varphi_{in} \pm 2\pi} \varphi' d\varphi, \quad (2.4.4)$$

где знак  $\pm$  отражает положительное и отрицательное значение токов через контакт.

Сразу отметим, что уравнение на  $j_r$  имеет один “лишний” порядок по  $\epsilon$  по сравнению с уравнением (2.4.3). То есть, чтобы найти  $j_r$  в  $n+1$  порядке по  $\epsilon$  достаточно рассматривать уравнение (2.4.3) в  $n$  порядке по  $\epsilon$ .

Также заметим, что на самом деле для подсчета  $j_r$  нет необходимости искать траекторию частицы из уравнения (2.4.3), а необходимо лишь выразить из него  $\varphi'$  и подставлять в (2.4.4). Так мы и будем поступать.

Теперь приступим к поиску  $j_{r\pm}$  по ТВ.

#### 2.4.1 Первый порядок по $\epsilon$

Как уже было отмечено выше, для того, чтобы найти  $j_r$  в первом порядке по  $\epsilon$  нужно рассмотреть нулевой порядок уравнения (2.4.3) по  $\epsilon$  и А:

$$E(t) = \frac{\varphi'^2}{2} - \cos \varphi = E_0 \quad (2.4.5)$$

Также, как уже было отмечено ранее и как будет показано в дальнейшем  $j_r \sim \epsilon$ , поэтому в этом порядке ТВ мы им пренебрегли. Далее определим в нулевом порядке начальную точку скатывания частицы и соответственно начальную энергию. Как легко понять мак-

суммы потенциала для положительного и отрицательного тока  $j_r$  через контакт определяются точками  $\varphi_{in} = \pm\pi$ , а соответствующая энергия равна  $E_0 = 1$ . Таким образом, выражая  $\varphi'$  получаем:

$$|j_{r\pm}| = \frac{1}{2\pi}\epsilon \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \frac{4\epsilon}{\pi} \quad (2.4.6)$$

Получили известный в литературе [13] результат, который, как мы и предположили заранее, имеет порядок  $\epsilon$ .

Также сразу было очевидно, что в нулевом порядке по  $A$  мы получим одинаковые значения  $j_{r\pm}$ . Так что для нахождения асимметрии переходим к теории возмущений по  $A$ .

### 2.4.2 Первый порядок по $A$

Можно наивно предположить, что асимметричная поправка к токам возврата будет уже в первом порядке по  $A$ .

Однако, прежде чем приступить к подсчету  $j_{r\pm}$  для дальнейшего уменьшения количества вычислений заметим, что уравнение Джозефсона (2.1) инвариантно относительно одновременной замены  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ,  $B \rightarrow -B$ ,  $j \rightarrow -j$ . Из этого следует, что если мы получим ответ для  $j_{r+}$ , то, сделав в нем замену  $B \rightarrow -B$  мы получим значение  $|j_{r-}|$ . Поэтому далее будем считать только  $j_{r+}$ .

Рассмотрим теперь уравнение (2.4.3) в первом порядке по  $A$  и в нулевом порядке по  $\epsilon$ :

$$E(t) = \frac{\varphi'^2}{2} - \cos \varphi - \frac{A}{2} \cos(2\varphi - B) = E_0. \quad (2.4.7)$$

Максимум потенциала сдвинется и в первом порядке по  $A$  будет в точке:  $\varphi_{in} = -\pi - A \sin B$ , а  $E_0 = 1 - \frac{A \cos B}{2}$ .

Аналогично, выражая  $\varphi'$  из (2.4.7) и подставляя в (2.4.4) получаем:

$$j_{r+} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi - A \sin B}^{\pi - A \sin B} \sqrt{2(1 + \cos \varphi) + A(\cos(2\varphi - B) - \cos B)} d\varphi = \frac{4\epsilon}{\pi} \left(1 - \frac{A \cos B}{3}\right) = |j_{r-}|. \quad (2.4.8)$$

Видим, что опять поправка к току возврата оказалась одинаковой для обоих направлений тока через контакт.

Этого, однако, следовало ожидать, т.к. взятие нулевого порядка по  $\epsilon$  в уравнении (2.4.3) соответствует переходу к  $j = 0$  и никакой асимметрии в этом случае быть не может. Таким образом асимметричную поправку к токам возврата следует искать в первом порядке теории возмущений по  $\epsilon$  и по  $A$  в уравнении (2.4.3).

### 2.4.3 Второй порядок по $\epsilon$ и первый порядок по $A$

Рассмотрим наконец уравнение (2.4.3) в первом порядке по  $\epsilon$  и по  $A$ . Это означает, что в нем нужно подставить  $j$  из (2.4.8) а в слагаемом  $-\epsilon \int_{-\varphi_{in}}^{\varphi} \tilde{\varphi}' d\tilde{\varphi}$  подставить  $\tilde{\varphi}'$  из

уравнения (2.4.7).

Начальные значения:  $\varphi_{in} = -\pi - A \sin B - \frac{4\epsilon}{\pi} - \frac{8A\epsilon \cos B}{\pi}$ ;  $E_0 = 1 - A \cos B + \frac{4A\epsilon \sin B}{\pi} + 4\epsilon(1 - \frac{A \cos B}{3})$ . Подставляя далее это все в (2.4.4) и считая интегралы получаем ответ:

$$j_{r_+} = \frac{4\epsilon}{\pi} - \frac{4\epsilon A \cos B}{3\pi} + \epsilon^2 A \sin B \left( \frac{2(8 + \pi^2)}{6\pi^2} - \frac{58}{6\pi^2} \right). \quad (2.4.9)$$

Теперь, если мы заменим  $B \rightarrow -B$ , то слагаемое, выделенное красным цветом сменил знак. Это и есть асимметричная поправка к току возврата. Таким образом заключаем, что разница токов возврата равна:

$$j_{r_+} - |j_{r_-}| = \epsilon^2 A \sin B \left( \frac{2(8 + \pi^2)}{3\pi^2} - \frac{58}{3\pi^2} \right) \approx -0.751\epsilon^2 A \sin B. \quad (2.4.10)$$

## 2.5 Область одностороннего гистерезиса

Как известно из численных расчетов [13] в обычной RCSJ модели (с синусоидальным ток-фазовым соотношением) гистерезис в системе наблюдается только при  $\beta > \beta_{cr} \approx 0.75$ .

В случае же наличия второй гармоники в ток-фазовом соотношении в зависимости от направления тока критические значения  $\beta_{\pm}$  при которых система начинает проявлять гистерезисные свойства не будут равны:  $\beta_+ \neq \beta_-$ .

Для  $A = 0.25$ ,  $B = \frac{\pi}{2}$  были численно построены ВАХ контакта. Результаты изображены на рисунке 8. Отметим, что для этих значений  $j_{c_+} = 1.25$ ;  $j_{c_-} = -0.75$ .

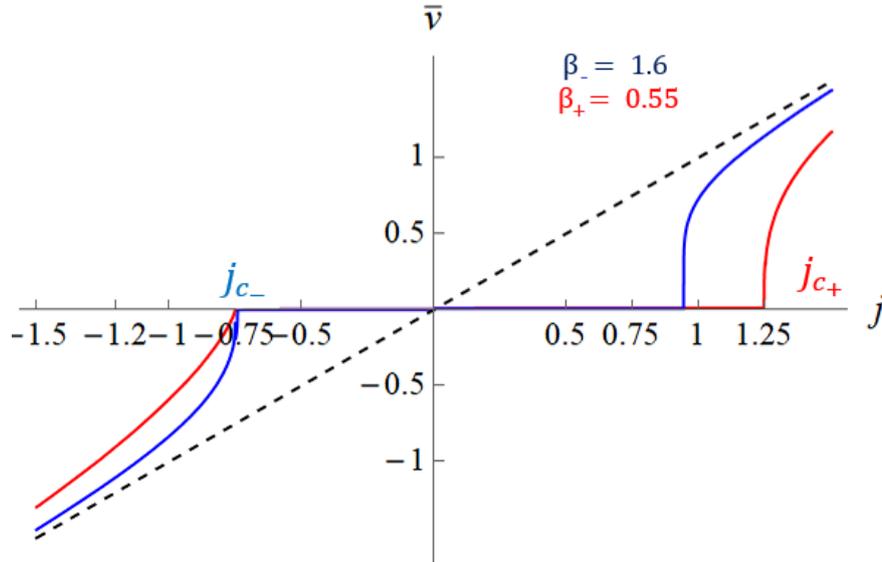


Рис. 8: Асимметрия гистерезисного поведения контакта при разных значениях  $\beta$ .

Результаты расчетов показывают, что в данном случае  $\beta_+ \approx 0.55$ ,  $\beta_- \approx 1.6$ . То есть при значении параметров:  $\beta_- > \beta > \beta_+$  в системе наблюдается односторонний гистерезис (то есть гистерезисное поведение есть только при  $j > 0$ ; при  $j < 0$  гистерезиса нет и ток  $j_{r-} = j_{c-}$ ).

### 3 Асимметрия ступенек Шапиро

Рассмотрим теперь проявления джозефсоновского диодного эффекта при воздействии на нашу систему переменным током  $j_{ac}$ .

Уравнения Джозефсона в данном случае примут наиболее общий вид (1.2.7):

$$\beta\varphi'' + \varphi' + \sin\varphi + A \sin(2\varphi - B) = j_{dc} + j_{ac} \cos(\omega t + \Delta) \quad (3.1)$$

$$\varphi' = v, \quad (3.2)$$

где для удобства мы переобозначили переменную времени:  $\tau \rightarrow t$  (аналогичное переобозначение используется в приложении 6.3).

В этих уравнениях  $\Delta$  задает сдвиг фаз между собственными колебаниями в системе (колебаниями при  $j_{ac} = 0$ ) и колебаниями переменного тока, и этот коэффициент может быть произвольным.

Нас, как и в прошлой главе, будет интересовать зависимость среднего напряжения на контакте от тока, то есть зависимость  $\bar{v}(j)$ .

Особенностью данного случая по сравнению с рассмотренной ранее ВАХ контакта в отсутствие переменного тока является наличие так называемых “ступенек Шапиро”. То есть при фиксированной частоте переменного тока  $\omega$  при определенных значениях напряжений  $\bar{v}$  на контакте будут возникать скачки токов. Конкретный вид этих ступенек, полученный в модели RCSJ для разных значений  $\beta$ , приведен на рисунке 9.

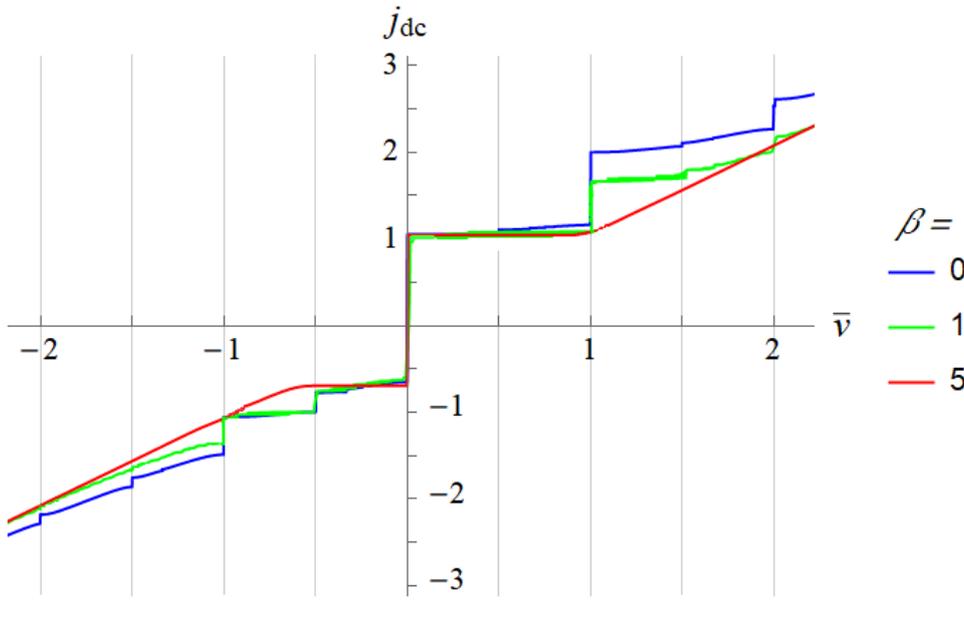


Рис. 9: Асимметрия ступенек Шапиро при  $A = 0.5$ ,  $B = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega = 1$ ,  $j_{ac} = 1$  и различных значениях  $\beta$ .

Такие ступеньки на ВАХ характеристике возникают, когда частота колебаний на контакте  $\nu = \bar{v}$  синхронизируется с частотой переменного тока  $\omega$ , то есть  $\omega = \frac{n}{k}\nu$ , где  $n$  и  $k$  целые числа. При этом на самой ступеньке одному значению  $v$  может соответствовать

несколько значений  $j$ , определяемых сдвигом фаз  $\Delta$ .

Для того чтобы исследовать ступеньки Шапиро аналитически, так же как и в прошлой главе воспользуемся методом разложения по гармоникам. При этом отметим, что, как и в прошлой главе  $A$  не обязана быть малой, а вот  $j_{ac}$  мы будем предполагать малым.

Однако, в отличие от прошлой главы, зафиксируем частоту колебаний фазы на контакте или, что эквивалентно, среднее напряжение на контакте  $\bar{v} = \nu$  и будем смотреть какой постоянный ток  $j$  будет соответствовать данному напряжению, то есть искать зависимость  $j(\bar{v})$ , а не  $\bar{v}(j)$ . Идейно это аналогично методу, предложенному в работе [14].

Зная, что частота внешнего тока  $\omega$  должна синхронизоваться с частотой собственных колебаний в контуре  $\nu$ , будем рассматривать две ступеньки Шапиро, представляющие наибольший интерес: первую и половинную. Формально это соответствует случаям:  $v = \pm\omega$ ;  $v = \pm\frac{\omega}{2}$ , где мы считаем без ограничения общности  $\omega > 0$ .

Также, как и ранее пользоваться методом разложения по гармоникам можно в 2 предельных случаях(далее мы сразу учли, что в обоих предельных случаях ВАХ близка к закону Ома и значит  $j \sim \nu \sim \omega$ ):

### 3.1 Случай $\omega \gg 1$ и $\beta\omega \ll 1$ .

Как уже упоминалось ранее этот предел соответствует малым емкостям контакта. В этом случае:

- Найдена полувысота первой ступеньки Шапиро (при этом отметим, что здесь  $j_{ac}$  не обязана быть малой величиной):

$$j_{\pm} \approx \frac{j_{ac}}{2\omega} \left(1 \pm \frac{9A \sin B}{4\omega}\right). \quad (3.1.1)$$

В этом случае оказалось, что асимметрия первой ступеньки Шапиро может быть найдена уже в первом порядке теории возмущений по  $\frac{1}{\omega}$ .

- Найдена полувысота половинной ступеньки Шапиро:

$$j_{\pm\frac{1}{2}} \approx \frac{j_{ac}A}{\omega} \left(1 + \frac{\beta \cos B}{2A}\right). \quad (3.1.2)$$

Однако, в этом случае в нескольких низших порядках теории возмущений асимметрии половинной ступеньки Шапиро не наблюдается(до членов  $O(\beta\omega)$  включительно).

Этот результат качественно находится в согласии с результатами работы [7], где также исследовалась асимметрия ступенек первой и половинной ступенек Шапиро в случае  $\beta = 0$ . Схожие вычисления показали отсутствие асимметрии половинной ступеньки Шапиро в наинизшем порядке соответствующей теории возмущений, рассмотренной в работе(где, однако, нельзя было считать  $\omega \gg 1$ ).

Таким образом асимметрия половинной ступеньки Шапиро оказывается слабее асимметрии первой ступеньки.

### 3.2 Случай $\beta\omega^2 \gg 1$ и $\beta\omega \gg 1$

Напомним, что это “случай больших емкостей”, который обсуждался в главе 2.3.1. Как результат, используя метод разложения по гармоникам:

- Найдена полувысота первой ступеньки Шапиро:

$$j_{\pm} \approx \frac{j_{ac}}{2\beta\omega^2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\beta\omega^2}\right) + O\left(\frac{1}{\beta\omega}\right) \pm \frac{45A \sin B}{16\beta^2\omega^3} \right). \quad (3.2.1)$$

В ответе для удобства записи были отброшены симметричные поправки к величине ступеньки Шапиро и оставлен только наименьший по ТВ асимметричный вклад. Как видим, он оказывается слабее (лежит в более старших порядках ТВ), чем соответствующий асимметричный член для первой ступеньки Шапиро в случае малых емкостей контакта.

- Найдена полувысота половинной ступеньки Шапиро:

$$j_{\pm\frac{1}{2}} \approx \frac{Aj_{ac}}{\beta\omega^2} \left( 1 + \frac{\cos B}{A\beta\omega^2} \right). \quad (3.2.2)$$

Асимметрии в низших порядках ТВ опять же, как и в случае контактов малых емкостей, не наблюдается (до членов порядка  $O\left(\frac{1}{\beta^3\omega^6}\right)$  включительно).

В итоге, как в случае больших емкостей контакта, так и в случае малых емкостей контакта наблюдается асимметрия первой ступеньки Шапиро.

Асимметрия же половинной ступеньки Шапиро оказывается более слабой и требует рассмотрения более высоких порядков теории возмущений в методе разложения по гармоникам.

## 4 Флуктуации напряжения на контакте

Рассмотрим теперь тепловые флуктуации напряжения на контакте при токах  $|j| < |j_{c\pm}|$ , когда среднее напряжение без их учета равно 0.

Сначала обсудим этот вопрос качественно. В пределе нулевой температуры частица стремится занять положение в минимуме потенциальной энергии 5. При наличии же конечной температуры контакта  $T$  частица будет колебаться около этого минимума с частотой, даваемой выражением (2.2.1) и с какой-то вероятностью иногда “выпрыгивать” из ямки из-за чего на контакте будет появляться напряжение.

Ограничимся рассмотрением случая контакта нулевой емкости  $\beta = 0$ . Без учета второй гармоники в ток фазовом-соотношении контакта этот случай был подробно рассмотрен в работе [15]. Далее мы обобщим результаты этой работы на случай наличия малой второй гармоники в ток-фазовом соотношении контакта  $A \ll 1$ .

Для того чтобы разобраться с этим явлением аналитически запишем уравнение Джозефсона в виде уравнения Ланжевена:

$$\varphi' = -\Gamma \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} + \xi(t) = -\Gamma(I_1 \sin \varphi + I_{b2} \sin(2\varphi - B) - I) + \xi(t), \quad (4.1)$$

где  $\Gamma = \frac{2eR}{\hbar}$ ;  $\xi(t) = \frac{2eR}{\hbar} j(t)$ , а  $j(t)$  - случайный ток, текущий через контакт. При этом коррелятор  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2T\Gamma\delta(t-t')$ .

Для того чтобы найти среднее значение напряжения на контакте, нужно будет сначала найти функцию распределения различных значений  $\varphi - P(\varphi, t)$ . Для этого напишем для нее уравнение Фоккера-Планка, получающиеся обычным способом из уравнения Ланжевена на  $\varphi$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} \frac{1}{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( T \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} P \right). \quad (4.2)$$

Далее обезразмерим токи на  $I_1$ , а энергию и соответственно температуру будем мерить в единицах  $E_J = \frac{\hbar I_1}{2e}$  и рассмотрим стационарную функцию распределения  $P_{st}(\varphi)$ . Тогда уравнение Фоккера-Планка примет вид:

$$Q = T \frac{\partial P_{st}}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} P_{st} = \frac{\partial P_{st}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tau} (\sin \varphi + A \sin(2\varphi - B) - j) P_{st}, \quad (4.3)$$

где  $\tau = \frac{T}{E_J}$ , а  $Q$  - некая константа, определяющаяся из условия нормировки функции распределения.

Решая это уравнение методом вариации постоянной получаем:

$$P_{st}(\varphi) = Q \exp\left\{ \frac{1}{\tau} (\cos \varphi + j\varphi + \frac{A}{2} \cos(2\varphi - B)) \right\} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \exp\left\{ -\frac{1}{\tau} (\cos x + jx + \frac{A}{2} \cos(2x - B)) \right\} dx. \quad (4.4)$$

Константы  $\varphi_0$  и  $Q$  необходимо будет найти из условия нормировки и периодичности

$P_{st}(\varphi)$ :

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} P_{st}(\varphi) d\varphi = 1 \\ P_{st}(\varphi + 2\pi) = P_{st}(\varphi). \end{cases} \quad (4.5)$$

Так же как и в случае с ВАХ можно считать напряжение для  $j > 0$ , а затем из симметрий уравнений Джозефсона относительно одновременной замены  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ,  $j \rightarrow -j$ ,  $V \rightarrow -V$ ;  $B \rightarrow -B$  можно заключить, что  $V(-j, B) = -V(j, -B)$ . Поэтому далее будем обсуждать только случай  $j > 0$ .

Тогда из условия периодичности легко понять, что  $\varphi_0 = +\infty$  при  $j > 0$ , а  $Q$  можно найти из условия:

$$\frac{1}{Q} = - \int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{1}{\tau}(\cos \varphi + j\varphi + \frac{A}{2} \cos(2\varphi - B))\right\} \int_{\varphi}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\tau}(\cos x + jx + \frac{A}{2} \cos(2x - B))\right\}. \quad (4.6)$$

Среднее напряжение на контакте можно найти, усреднив второе уравнение Джозефсона:

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{\hbar}{2e} \varphi' \right\rangle = RI_1 \int_0^{2\pi} (j - \sin \varphi - A \sin(2\varphi - B)) P_{st}(\varphi) d\varphi = 2\pi \tau Q RI_1. \quad (4.7)$$

Последнее равенство было получено интегрированием по частям явного выражения  $P_{st}$ .

Оказывается, возможна сильная асимметрия значений среднего напряжения на контакте при малых температурах контакта  $T \ll E_j \Leftrightarrow \tau \ll 1$ . Далее и будем рассматривать этот предел.

Технически же в нем удается вычислить интеграл в (4.6) методом перевала при токах не слишком близких к критическому, т.к. тогда  $\frac{1}{\tau} \gg 1$  оказывается большим параметром в экспоненте.

Будем считать амплитуду второй гармоники  $A \ll 1$ , но при этом большей чем приведенная температура:  $A \gg \tau$ . При выполнении этого условия роль асимметрии потенциальной энергии будет сильно влиять на возможность термоактивации.

Предположим также, что  $A \gg \tau \gg A^2$  (качественно это означает, что для термоактивации важна асимметрия только в первом порядке по  $A$ ). Условие  $A^2 \ll \tau$  не обязательно и нужно лишь для того, чтобы считать перевальные точки, необходимые для подсчета интеграла (4.6), в первом порядке по  $A$ , а не в более старших порядках по этому параметру.

А вот для использования самого метода перевала потребуется следующее:  $\tau \ll \sqrt{1 - j^2}$  и  $A \ll \sqrt{1 - j^2}$ . Эти условия, по факту, означают, что метод перевала не будет работать при токах близких к критическому.

Тогда, с учетом всего вышесказанного перевальные точки внутреннего интеграла в

выражении (4.6) даются точками:

$$\varphi_n = \pi - \arcsin j - A \frac{(1 - 2j^2) \sin B + 2j\sqrt{1 - j^2} \cos B}{\sqrt{1 - j^2}} + 2\pi n. \quad (4.8)$$

Тогда, находя  $Q$  из (4.6) интегрированием с использованием метода перевала и подставляя это значение в (4.7) находим:

$$\bar{V}(j) = 2RI_1 \left[ \sqrt{1 - j^2} \pm \frac{A|j| \sin B}{\sqrt{1 - j^2}} (3 - 2j^2) \right] \sinh\left(\frac{j\pi}{\tau}\right) e^{-\frac{1}{\tau}(2\sqrt{1 - j^2} + 2j \arcsin j \pm 2A \sin B |j| \sqrt{1 - j^2})}. \quad (4.9)$$

Здесь мы уже подразумеваем, что  $j$  может быть любого знака. Отметим, что если положить  $A = 0$ , то мы воспроизведем ответ, полученный в работе [15].

Как уже было сказано, если отказаться от условия  $A^2 \ll \tau$ , то будет необходимо учитывать старшие порядки ТВ по  $A$  при подсчете точек перевала. Видим, что так как отношение  $\frac{2A \sin B j \sqrt{1 - j^2}}{\tau}$  может быть гораздо больше 1, а оно стоит в экспоненте, то при токах, не слишком близких к 0 (когда асимметрия ослабевает) и не слишком близких к 1 (где метод перевала перестает работать и данный ответ не применим) асимметрия среднего напряжения на контакте может быть велика.

Это означает, что при одном и том же  $|j|$  в случае  $j > 0$  флуктуации напряжения гораздо слабее чем для  $j < 0$ . Результаты численного расчета флуктуационного напряжения при разных температурах контакта приведены на рисунке 10. Вычисление соответствует формуле (4.6) и не использует метод перевала.

Как мы видим, действительно, флуктуации напряжения при положительных токах слабее чем при отрицательных токах. Асимметрия флуктуаций растет при увеличении токов и падает при увеличении температуры.

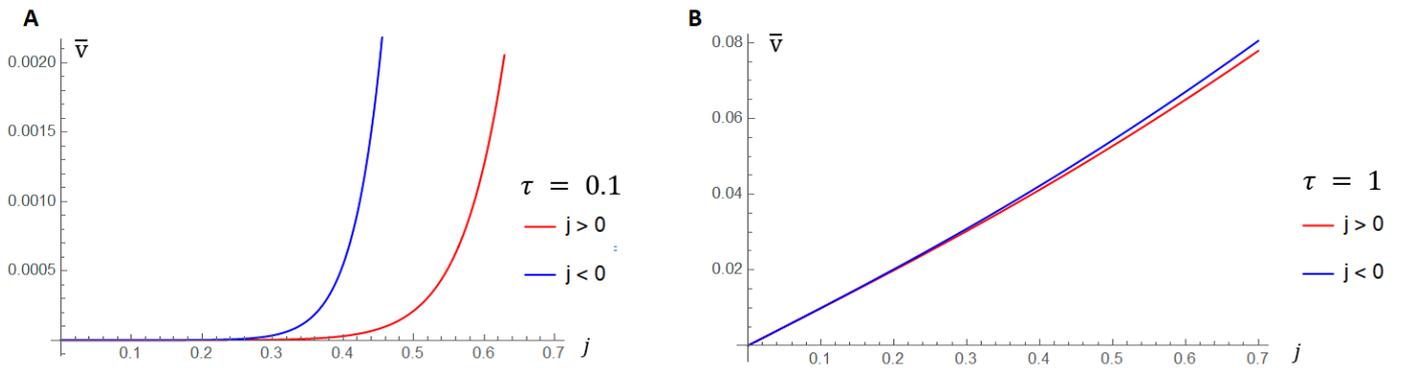


Рис. 10: Асимметрия флуктуаций напряжения на контакте в случае  $A = 0.25$ ,  $B = \frac{\pi}{2}$  и разных температурах контакта.

## 5 Заключение

В данной работе были рассмотрены проявления джозефсоновского диодного эффекта в рамках резистивно-емкостной модели для СКВИДа, находящегося в магнитном поле и содержащего вторую гармонику вида  $A \sin(2\varphi - B)$  в ток-фазовом соотношении контакта.

С помощью метода разложения по гармоникам была найдена аналитически асимметрия вольт-амперной характеристики в случае больших емкостей контакта, а также асимметрия высот первых ступенек Шапиро в двух предельных случаях: а) больших емкостей контакта; б) больших токов в случае малых емкостей. Асимметрия же половинных ступенек Шапиро оказалась слабее и в наинизших порядках данной теории возмущений ее найти не удалось.

В общем же случае вольт-амперные характеристики и высоты ступенек Шапиро для разных значений параметров МакКамбера были найдены численно. В обоих случаях с ростом  $\beta$  джозефсоновский диодный эффект в системе подавлялся (с точки зрения общей асимметрии ВАХ и ступенек Шапиро).

В то же время, при учете емкости контакта возникают особенности, которые отсутствовали в задаче без емкости, например, асимметрия токов возврата. Она была найдена аналитически в случае малой амплитуды второй гармоники и большого параметра МакКамбера контакта. Для произвольных же значений параметра МакКамбера значения токов возврата были найдены численно.

Также численно было показано, что существует область значений параметров МакКамбера, где при одном направлении тока контакт демонстрирует гистерезисное поведение, а при обратном токе гистерезиса в системе нет.

Наконец в работе, как аналитически, так и численно было рассмотрено проявление джозефсоновского диодного эффекта в виде асимметричных тепловых флуктуаций напряжения на контакте при токах, меньших критического и нулевой емкости контакта. Было показано, что асимметрия тепловых флуктуаций в случае достаточно малых температур может быть экспоненциально сильной.

В дальнейшем планируется рассмотреть флуктуации напряжения в случае конечного параметра МакКамбера контакта, а также проверить пригодность нашей модели для объяснения имеющихся экспериментальных результатов, полученных при исследовании джозефсоновского диодного эффекта в СКВИДе, состоящем из синусоидального контакта и наномостика.

## 6 Приложение

### 6.1 Вычисление поправки к $j_{r_{\pm}}$ в первом порядке по $A$ и по $\epsilon$

Рассмотрим уравнение (2.4.3) в первом порядке теории возмущений по  $A$  и по  $\epsilon$ . Как уже было сказано в основном тексте для этого в него вместо  $j$  нужно подставить  $j_r$ , выраженное в первом порядке по  $A$  из уравнения (2.4.8), а вместо  $\varphi'$  в слагаемом  $-\epsilon \int_{-\varphi_{in}}^{\varphi} \tilde{\varphi}' d\tilde{\varphi}$  подставить значение  $\varphi'$ , выраженное из (2.4.7).

Начальные же условия:  $\varphi_{in} = -\pi - A \sin B - \frac{4\epsilon}{\pi} - \frac{8A\epsilon \cos B}{\pi}$ , а следовательно  $E_0 = 1 - A \cos B + \frac{4A\epsilon \sin B}{\pi} + 4\epsilon(1 - \frac{A \cos B}{3})$ .

С учетом всего вышесказанного получим выражение для  $\varphi'$ :

$$\varphi' = \left[ 2(1 + \cos \varphi) + A(\cos(2\varphi - B) - \cos B) + \frac{8\epsilon}{\pi} \left(1 - \frac{A \cos B}{3}\right) \varphi + 8\epsilon \left(1 - \frac{A \cos B}{3}\right) - \right. \\ \left. - 2\epsilon \int_{-\pi - A \sin B}^{\varphi} \sqrt{2(1 + \cos x) + A(\cos(2x - B) - \cos B)} dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.1.1)$$

Теперь же, подставляя это значение в выражение для  $j_{r_+}$  и оставляя в ответе члена порядка  $\epsilon^2 A$  из (2.4.4) получаем:

$$j_{r_+} = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\pi - A \sin B - \frac{4\epsilon}{\pi}}^{\pi - A \sin B - \frac{4\epsilon}{\pi}} \left[ 2(1 + \cos \varphi) + A(\cos(2\varphi - B) - \cos B) + \frac{8\epsilon}{\pi} \left(1 - \frac{A \cos B}{3}\right) \varphi + 8\epsilon \left(1 - \frac{A \cos B}{3}\right) - \right. \\ \left. - 2\epsilon \int_{-\pi - A \sin B}^{\varphi} \sqrt{2(1 + \cos x) + A(\cos(2x - B) - \cos B)} dx \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi. \quad (6.1.2)$$

Для того чтобы упростить подсчет интеграла, сделаем замену переменной  $\tilde{\varphi} = \varphi + A \sin B + \frac{4\epsilon}{\pi}$  в интеграле, а после этого разложим подынтегральное выражение до первого порядка

по  $\epsilon$  и по  $A$ . Получим следующее:

$$\begin{aligned}
j_{r+} = & \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \left[ \sqrt{4 \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)} + \frac{\epsilon \left( -8\pi \sin \frac{\phi}{2} + 16 \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\phi}{2} \right) + 8\phi \right)}{2\pi \sqrt{4 \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)}} + \right. \\
& \left. + A \frac{\cos(B - 2\phi) + 4 \sin(B) \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\phi}{2} \right) - \cos(B)}{2\sqrt{4 \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)}} - \right. \\
& \frac{\epsilon A \left( -3\pi^2 \cos(B - 2\phi) - 12\pi^2 \sin(B) \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\phi}{2} \right) + 3\pi^2 \cos(B) \right) \left( 8\pi^2 \sin \frac{\phi}{2} - 8\pi\phi - 8\pi \sin \phi \right)}{6\pi \cdot 2\pi^3 \left( 4 \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right) \right)^{3/2}} \\
& \left. - \frac{\epsilon A \left( 24\pi \sin(B - 2\phi) + 8\pi\phi \cos(B) + 24\pi \sin(B) \cos \phi - 2\pi^2 \left( \left( 3 \sin \left( B + \frac{\phi}{2} \right) + \sin \left( B - \frac{3\phi}{2} \right) \right) \right) \right)}{6\pi \cdot \sqrt{4\pi^2 \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)}} \right] d\phi.
\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Первое слагаемое в первой строке (6.1.3) даст  $j_r = \frac{4\epsilon}{\pi}$ , то есть ответ, полученный нами ранее в первом порядке теории возмущений. Второе слагаемое в первой строке даст 0 в силу нечетности подынтегрального выражения, а слагаемое во второй строке даст поправку к  $j_r$  первого порядка по  $A$  равную  $-\frac{4\epsilon A \cos B}{3\pi}$ , также полученную нами ранее.

Интерес же представляют два оставшихся слагаемых, которые и дадут нам асимметричный вклад. Слагаемые, содержащие  $\cos B$  сократятся из-за того, что они входят в подынтегральное выражение нечетным образом, а слагаемые, содержащие  $\sin B$  останутся. После вычисления соответствующих интегралов получаем асимметричную поправку равную:  $\Delta j_{r\pm} = \epsilon^2 A \sin B \left( \frac{2(8+\pi^2)}{6\pi^2} - \frac{58}{6\pi^2} \right)$ .

Таким образом для  $j_{r\pm}$  получаем ответ (2.4.9).

## 6.2 Вычисление Q методом перевала

Для расчета флуктуаций напряжения на контакте нам необходимо вычислить Q, дающееся выражением:

$$\frac{1}{Q} = - \int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{1}{\tau}(\cos \varphi + j\varphi + \frac{A}{2} \cos(2\varphi - B))\right\} d\varphi \int_{\varphi}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\tau}(\cos x + jx + \frac{A}{2} \cos(2x - B))\right\} dx \quad (6.2.1)$$

При достаточно низких температурах  $\tau \ll \sqrt{1 - j^2}$  максимумы подинтегрального выражения будут резкими и тогда можно пользоваться методом перевала для подсчета интеграла. Интеграл будет набираться в малой окрестности перевальной точки внешнего интеграла (по  $\varphi$ ):

$$\varphi_{out} = \arcsin j - A \frac{(1 - 2j^2) \sin B + 2j\sqrt{1 - j^2} \cos B}{\sqrt{1 - j^2}}. \quad (6.2.2)$$

При этом максимумы внутреннего (по  $x$ ) и внешнего интеграла (по  $\varphi$ ) сильно отделены друг от друга, а интегралы как раз и набираются в окрестностях максимумов соответствующих выражений. Это означает, что, для того чтобы посчитать внешний интеграл по методу перевала, достаточно подставить в него значение внутреннего интеграла в точке  $\varphi_{out}$ . А это значение также может быть посчитано по методу перевала, ведь если внешний интеграл по  $\varphi$  набирается в окрестности точки  $\varphi_{out}$ , то значит во внутреннем интеграле в пределах интегрирования вместо  $\varphi$  можно подставить  $\varphi_{out}$ . При этом интегрирование заденет все внутренние перевальные точки  $\varphi_n$ , значения которых мы определим ниже.

Таким образом нам нужно посчитать внутренний интеграл по методу перевала во всех перевальных точках  $\varphi_n$  и внешний интеграл в одной перевальной точке  $\varphi_{out}$ .

Перевальные точки внутреннего выражения задаются выражениями:

$$\varphi_n = \pi - \arcsin j - A \frac{(1 - 2j^2) \sin B + 2j\sqrt{1 - j^2} \cos B}{\sqrt{1 - j^2}} + 2\pi n \quad (6.2.3)$$

Чтобы посчитать интеграл по методу перевала, нужно знать значение второй производной функции, стоящей в экспоненте и собственно само значение этой функции в перевальной точке. Тогда, вклад  $I_n$  в  $1/Q$  от каждой перевальной точки внутреннего интеграла будет равен:

$$I_n = \sqrt{\frac{2\pi\tau}{F_{2in}}} \exp\left[-\frac{j}{\tau} 2\pi n + \frac{F_{0in}}{\tau}\right] = I_0 \exp\left(-\frac{j}{\tau} 2\pi n\right), \quad (6.2.4)$$

где введены обозначения:

$$F_{2in} = \frac{2Aj^3 \sin(B)}{\sqrt{1 - j^2}} + 4A\sqrt{1 - j^2}j \sin(B) - \frac{Aj \sin(B)}{\sqrt{1 - j^2}} + 2Aj^2 \cos(B) - 2A \cos(B) + \sqrt{1 - j^2}, \quad (6.2.5)$$

То есть здесь  $F_{2in}$  - значение второй производной выражения под экспонентой в переваль-

ной точке внутреннего интеграла (отметим, что он не зависит от номера  $n$  перевальной точки). Аналогично:

$$F_{0in} = A\sqrt{1-j^2}j \sin(B) + Aj^2 \cos(B) - \frac{1}{2}A \cos(B) + \sqrt{1-j^2} - \pi j + j \arcsin(j), \quad (6.2.6)$$

где  $F_{0in}$  - значение самой функции в экспоненте во внутренней перевальной точке (опять же это значение не зависит от номера  $n$  перевальной точки).

Тогда, просуммировав геометрическую прогрессию, найдем суммарный вклад от внутренних точек:  $I = \sum_n I_n = \frac{I_0}{(1-\exp(-\frac{2\pi}{\tau}))}$ .

Теперь найдем аналогичные выражения для внешней перевальной точки  $\varphi_{out}$ :

$$F_{2out} = \frac{2Aj^3 \sin(B)}{\sqrt{1-j^2}} + 4A\sqrt{1-j^2}j \sin(B) - \frac{Aj \sin(B)}{\sqrt{1-j^2}} - 2Aj^2 \cos(B) + 2A \cos(B) + \sqrt{1-j^2} \quad (6.2.7)$$

$$F_{0out} = A\sqrt{1-j^2}j \sin(B) - Aj^2 \cos(B) + \frac{1}{2}A \cos(B) + \sqrt{1-j^2} + j \arcsin(j). \quad (6.2.8)$$

Подставляя это все в (4.6) получаем в итоге:

$$Q = \frac{1}{2\pi\tau} \left( \frac{Aj(2j^2-3)\sqrt{1-j^2}\sin(B)}{j^2-1} + \sqrt{1-j^2} \right) \times \exp\left( \frac{-2A\sqrt{1-j^2}j \sin(B) - 2\sqrt{1-j^2} - 2j \arcsin j}{\tau} \right) 2 \sinh\left[\frac{j\pi}{\tau}\right]. \quad (6.2.9)$$

Далее, выражая  $\langle V \rangle$  через  $Q$  по формуле (4.7) получаем приведенный ранее ответ для флуктуаций напряжения (4.9).

### 6.3 Вычисление ступенек Шапиро

Вычисления ступенек Шапиро аналитически проводились в двух предельных случаях:

$$1) \begin{cases} \beta\nu^2 \gg 1 \\ \beta\nu \gg 1 \end{cases} \quad (6.3.1)$$

$$2) \begin{cases} \beta\nu \ll 1 \\ \nu \gg 1. \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Здесь мы переписали критерии применимости из раздела (2.3.1) через  $\nu$ .

В обоих случаях мы считали фиксированной частоту колебаний фазы на контакте  $\nu$  и искали возникающие при этом нелинейные поправки к току по методу разложения по гармоникам. Так как вычисления оказывались громоздкими и требовали привлечения нескольких порядков теории возмущений по соответствующим параметрам (по  $\frac{1}{\beta\nu}$  и  $\frac{1}{\beta\nu^2}$  в 1 случае, и  $\beta\nu$  и  $\frac{1}{\nu}$  во 2 случае), то их мы проводили с использованием системы “Wolfram Mathematica” следующим образом: искали амплитуды гармоник и поправки к току в виде ряда по параметрам теории возмущений, а затем подставляли этот ряд в уравнение (1.2.7). После чего мы раскладывали обе части полученного равенства в ряд Фурье и приравнивали коэффициенты при  $\cos n\nu t$  и  $\sin n\nu t$  в обеих частях равенства.

После того как были найдены поправки к току  $j$ , мы отделили вклад, который не зависит от  $\Delta$  (и при этом задает ВАХ контакта в отсутствии переменного тока) и вклад, содержащий  $\Delta$ . Его мы назовем  $j_\Delta$ . Именно этот вклад и будет определять нам полувысоту ступенек Шапиро.

Затем мы представили  $j_\Delta$  в виде:

$$j_{\Delta\pm} = C_{1\pm} \sin \Delta + C_{2\pm} \cos \Delta, \quad (6.3.3)$$

Мы могли так сделать, т.к. слагаемых, содержащих старшие гармоники вида  $\cos m\Delta$  в рассмотренных порядках ТВ в случае  $j_{ac} \ll 1$  не возникало. Тогда, в силу произвольности сдвига фаз  $\Delta$  мы видим, что при одной и той же  $\bar{v} = \nu$  на контакте может быть несколько значений  $j$ , что и говорит нам о наличии ступеньки на графике ВАХ. Ее полувысоту можно найти, максимизируя  $j_{\Delta\pm}$  по  $\Delta$ , и она будет равна соответственно:  $j_\pm = \sqrt{C_{1\pm}^2 + C_{2\pm}^2}$ .

В рассмотренных предельных случаях получаем:

- Полувысоту первой ступеньки Шапиро в случае больших частот  $\nu \gg 1$  и малых емкостей  $\beta\nu \ll 1$ :

$$j_\pm \approx \frac{j_{ac}}{2|\nu|} \sqrt{\beta^2 + \left(1 + \frac{9 \sin B A}{4 \nu}\right)^2} \quad (6.3.4)$$

- Полувысоту половинной ступеньки Шапиро в случае больших частот  $\nu \gg 1$  и очень

малых емкостей  $\beta\nu \ll 1$ :

$$j_{\pm\frac{1}{2}} \approx \frac{j_{ac}}{2|\nu|} \sqrt{(A \cos B + \frac{\beta}{2} + 2A\beta\nu \sin B)^2 + (A \sin B - 2A\beta\nu \cos B)^2} \quad (6.3.5)$$

- Полувысоту первой ступеньки Шапиро в случае больших емкостей ( $\beta\nu^2 \gg 1$  и  $\beta\nu \gg 1$ ):

$$j_{\pm} \approx \frac{j_{ac}}{2\beta\nu^2} \sqrt{(1 - \frac{7A \cos B}{8\beta\nu^2} + \frac{59A \sin B}{16\beta^2\nu^3})^2 + \frac{1}{(\beta\nu^2)^2} (\pm|\nu| - \frac{7A \sin B}{8})^2} \quad (6.3.6)$$

- Полувысоту половинной ступеньки Шапиро в случае больших емкостей ( $\beta\nu^2 \gg 1$  и  $\beta\nu \gg 1$ ):

$$j_{\pm\frac{1}{2}} \approx \frac{j_{ac}}{4\beta\nu^2} \left[ \left( \frac{1}{2\beta\nu^2} + A \cos B - \frac{A \sin B}{2\beta\nu} + \frac{A \cos B(96 + 5A^2 + 16\nu^2)}{64\beta^2\nu^4} \right)^2 + \right. \\ \left. \left( A \sin B + \frac{A \cos B}{2\beta\nu} - \frac{A \sin B(96 + 5A^2 + 16\nu^2)}{64\beta^2\nu^4} + \frac{1}{4\beta^2\nu^3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.3.7)$$

Отметим, что при раскрытии скобок в выражениях для высот половинных ступенек Шапиро в обоих случаях все асимметричные слагаемые сократятся, а значит асимметрии высот половинных ступенек Шапиро в этом порядке ТВ не будет.

В итоге, упрощая и разлагая выражения выше, получаем ответы из главы 3.

## Список литературы

- [1] A.Malvino, D.Bates, and P.Hoppe, *Electronic Principles* (McGrawHill, NewYork,2020).
- [2] K.Yasuda, H.Yasuda, T.Liang, R.Yoshimi, A.Tsukazaki, K.S.Takahashi, N.Nagaosa, M.Kawasaki, and Y.Tokura, «Nonreciprocal charge transport at topological insulator/superconductor interface», *Nat. Commun.* 10, 2734 (2019).
- [3] F. Ando, Y. Miyasaka, T. Li, J. Ishizuka, T. Arakawa, Y. Shiota, T. Moriyama, Y. Yanase, and T. Ono, «Observation of superconducting diode effect», *Nature* 584, 373 (2020).
- [4] S. Ilic and F. S. Bergeret, «Theory of the supercurrent diode effect in Rashba superconductors with arbitrary disorder», *Phys. Rev. Lett.* 128, 177001 (2022).
- [5] J. Hu, C.Wu, and X. Dai, «Proposed design of a Josephson diode», *Phys. Rev. Lett.* 99, 067004 (2007).
- [6] K. Misaki and N. Nagaosa, Theory of the nonreciprocal Josephson effect, *Phys. Rev. B* 103, 245302 (2021).
- [7] Ya. V. Fominov and D. S. Mikhailov «Asymmetric higher-harmonic SQUID as a Josephson diode», *Phys. Rev. B* 106, 134514(2022).
- [8] Mohit Gupta, Gino V. Graziano, Mihir Pendharkar, Jason T. Dong, Connor P. Dempsey, Chris Palmstrøm Vlad S. Pribiag «Gate-tunable superconducting diode effect in a three-terminal Josephson device», *Nature Communications* volume 14, Article number: 3078 (2023).
- [9] Rubén Seoane Souto, Martin Leijnse, and Constantin Schrade «Josephson Diode Effect in Supercurrent Interferometers» *Phys. Rev. Lett.* 129, 267702(2022).
- [10] K. K. Likharev, «Dynamics of Josephson Junctions and Circuits» (Gordon and Breach, New York, 1986).
- [11] Fink,R.L.; Thompson,M.;Hilbert, Claude;Kroger,Harry«Hysteretic Josephson junctions from high Tc superconducting thin films» *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* (ISSN 1051-8223), vol. 3, no. 1, pt. 4, p. 2219-2221.(1993).
- [12] Y. C. Chen, M. P. A. Fisher and A. J. Leggett «The return of a hysteretic Josephson junction to the zero-voltage state:I-V characteristic and quantum retrapping », *J. Appl. Phys.* 64, 3119 (1988).
- [13] A. Barone and G. Paterno, «Physics and Applications of the Josephson Effect» (Wiley, New York, 1982).
- [14] E. D. Thompson, «Perturbation theory for a resistivity shunted Josephson element», *Journal of Applied Physics* 44, 5587 (1973).

- [15] Vinay Ambegaokar and B. I. Halperin «Voltage Due to Thermal Noise in the dc Josephson Effect», Phys. Rev. Lett. 22, 1364(1969)