Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

# Аномальный эффект Холла в сверхчистых баллистических электронных каналах

(Дипломная работа бакалавра)

Студент группы Б02-927:
Зограбян Д.С.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., член-корр. РАН Глазов М.М.

МФТИ 2023

# Аннотация

Развита теория аномального эффекта Холла для двумерного вырожденного электронного газа в сверхчистых каналах. Исследован баллистический режим распространения электронов, когда частота рассеяния электронов на других электронах, фононах и статических дефектов значительно меньше, чем обратное время пролета ширины канала. Эффект изучен с учетом вкладов от аномальной скорости, сдвига волнового пакета и асимметричного рассеяния. Было использовано кинетическое уравнение в приближении времени релаксации для учета рассеяния электронов на примесях и использовались граничные условия, соответствующие диффузному рассеянию на стенках. Был найден аномальный вклад в холловское напряжение в первом порядке по внешнему магнитному полю. Приведено соотношение между спиновой поляризацией системы находящейся лишь в электрическом поле с холловским напряжением в системе с магнитным полем.

# Содержание

**1 Введение** **3**

**2 Постановка задачи** **6**
2.1 Спиновая/долинная поляризация электронов в магнитном поле . . . . 6
2.2 Функция распределения при наличии электрического поля 8
2.3 Нормальный эффект Холла в баллистическом канале . . . 10

**3 Спиновый и аномальный эффекты Холла** **14**
3.1 Механизмы спинового эффекта Холла . . . . 14
3.1.1 Аномальная скорость . . . . 14
3.1.2 Асимметричное рассеяние . . . . 14
3.1.3 Сдвиг волнового пакета . . . . 16
3.1.4 Аномальное распределение . . . . 16
3.2 Аномальный эффект Холла в баллистическом канале . . . 17
3.3 Анализ и обсуждение результатов . . . . 20

**4 Заключение** **23**

# 1 Введение

В последние годы активно изучаются транспортные явления в двумерных системах. Одно из таких явлений это долинный ( [1, 4, 10]) или спиновый эффект Холла ( [1, 4, 6–9]), когда из за спин-орбитального взаимодействия появляется перпендикулярный электрическому полю спиновый или долинный ток (рис.1). Спиновый и долинный эффекты Холла в баллистическом и гидродинамическом каналах были изучены в работе [1]. При наличии внешнего магнитного поля электроны поляризуются по спину и/или долине и спиновый/долинный ток конвертируется в электрический. Таким образом возникает вклад в эффект Холла, называемый аномальным. Аномальный эффект Холла широко исследовался для обычных диффузионных образцов. Цель данной работы построить теорию для баллистического канала.

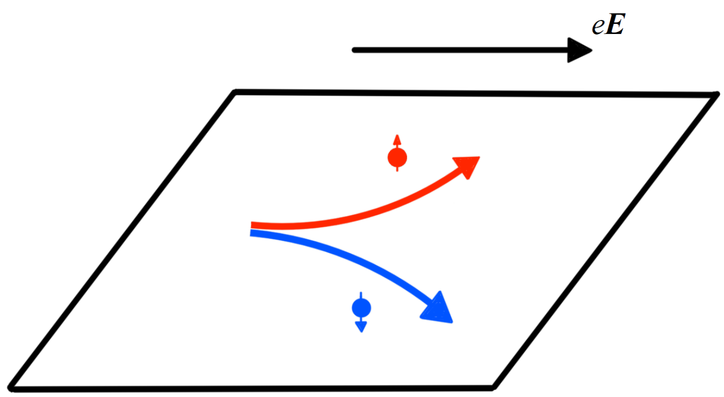



Рис. 1: Появление спинового тока при наличии внешнего электрического поля.

Мы будем изучать вырожденный электронный газ в баллистическом режиме, то есть когда длина свободного пробега электронов за счет электрон-электронных, электрон-фононных и электрон-присмесных столкновений намного больше характерных размеров системы: $l_{ee}, l_{ph}, l_{imp} \gg w$. Рассматривается модель с диффузными стенками в одном направлении (ось $x$), в перпендикулярном направлении (ось $y$) канал предполагается бесконечно протяженным. Электрическое поле приложено вдоль оси $y$. Перпендикулярно плоскости движения электронов имеется магнитное поле (рис. 2).

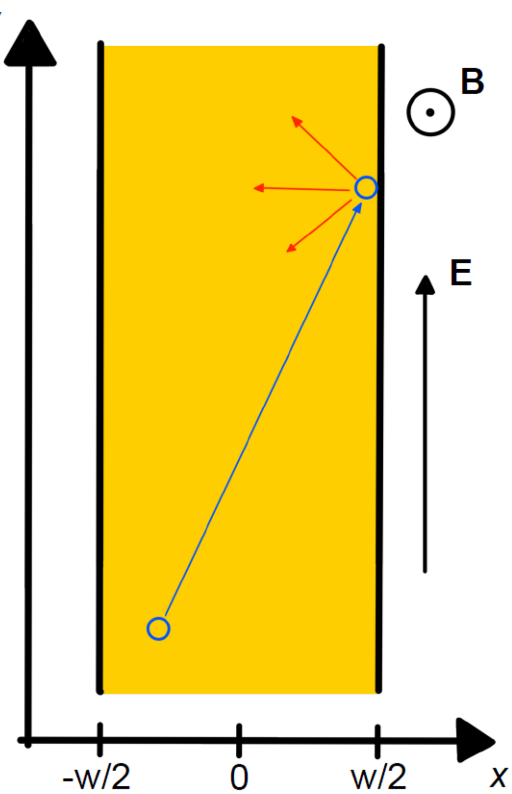



Рис. 2: Баллистический канал с диффузными стенками и магнитным полем перпендикулярно плоскости движения электронов.

Из за наличия магнитного поля на электроны действует сила Лоренца и электроны начинают накапливаться возле одной из стенок. Появляется так называемое холловское напряжение между стенками канала. Холловское напряжение, обусловленное действием силы Лоренца (т.е. нормальный эффект Холла [5]), для баллистических двумерных каналов было изучено в работе [2].

В работе [1] была изучена спиновая поляризация, возникающая в такой системе. Из-за механизмов, которые мы будем дальше обсуждать в разделе 2.3 электроны при наличии лишь электрического поля разделялись по спину. Электроны с разными спинами имели аномальные скорости разных знаков в направлении $Ox$. Интегралы столкновений для асимметричного рассеяние за счет спин-орбитального взаимодействия имели разные знаки и т.д. За счет этого, на краях образца появлялся ненулевой магнитный момент. На противоположных краях его направление было противоположным. В нашей задаче имеется магнитное поле, перпендикулярное плоскости системы, которое снимает вырождение энергии по спину. Энергия электрона, спин которого направлен вдоль магнитного поля меньше чем энергия электрона с противоположным спином, а значит электронов со спином вдоль магнитного поля станет больше чем электронов с противоположным спином[1]. Количественно мы эту спиновую поляризацию опишем в разделе 2.1. Из за того, что спинов направленных вдоль уже стало больше чем спинов направленных против, то так как разные спины рассеиваются в разном направлении, появится нескомпенсированный заряд на стенках и соответственно напряжение между ними. Этот эффект и будет давать аномальный вклад в холловское напряжение. Наша цель состоит в том, чтобы рассчитать этот вклад.

[1]Мы предполагаем определенный знак $g$-фактора электронов. Степень поляризации электронов меняет знак при смене знака $g$.

# 2 Постановка задачи

## 2.1 Спиновая/долинная поляризация электронов в магнитном поле

Для начала посчитаем степень спиновой поляризации нашей системы при наличии магнитного поля. Гамильтониан отвечающий за зеемановское расщепление будет выглядеть следующим образом [12]:

$$\mathcal{H}_Z = \frac{1}{2}\gamma\mu_B\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B} \tag{1}$$

Где $\gamma$ - $g$-фактор электрона, который отличен от двойки в кристаллах из за спин-орбитального взаимодействия, $\boldsymbol{\sigma}$-вектор из матриц Паули. Магнитное поле у нас направлено по $Oz$. Собственные энергии будут $\mp\frac{\gamma}{2}\mu_B B$ соответственно для спинов вдоль и против магнитного поля.
Химический потенциал двух подсистем электронов с разными спинами равны так как состояние у нас считается равновесным (рис. 3).

Запишем выражения для концентраций электронов со спинами соответственно вдоль и против магнитного поля:

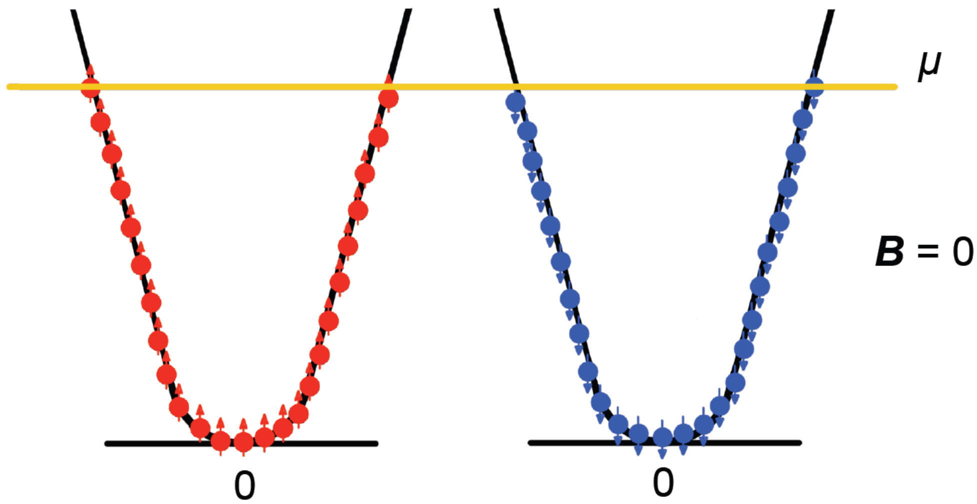
$$N_{\pm} = \int_{\mp\frac{\gamma}{2}\mu_B B}^{+\infty} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1}\frac{d^2p}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_{\mp\frac{\gamma}{2}\mu_B B}^{+\infty}\frac{d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1} \tag{2}$$

$$\int \frac{d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1} = \left| x \equiv \frac{\varepsilon-\mu}{T}\right| = T\int\frac{dx}{e^x+1} = T\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = \\ = -T\int d\ln\bigl(1+e^{-x}\bigr) \tag{3}$$

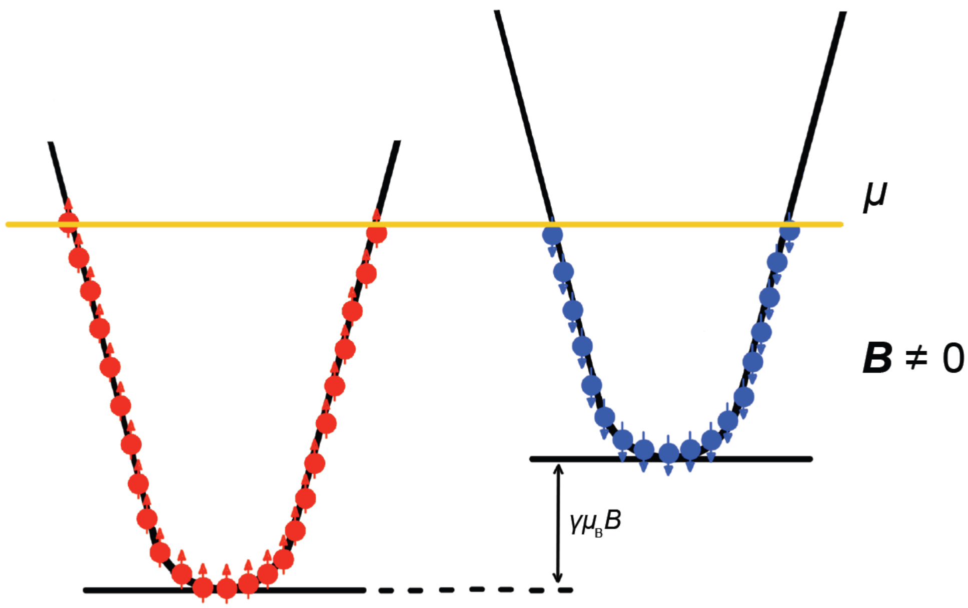
$$N_{\pm} = -gT\ln\left(1+e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{T}}\right)\Bigg|_{\mp\frac{\gamma}{2}\mu_B B}^{+\infty} = gT\ln\left(1+e^{\frac{\pm\frac{\gamma}{2}\mu_B B+\mu}{T}}\right) \tag{4}$$

Здесь было использовано обозначение для плотности состояний в двумерии на одну проекцию спина $g \equiv m/(2\pi\hbar^2)$. У нас $\mu \approx \varepsilon_F \gg T; \mu_B B$, поэтому единицу в логарифме можно убрать и тогда получиться:

$$N_{\pm} = g(\varepsilon_F \pm \frac{\gamma}{2}\mu_B B) \tag{5}$$




(a) Зоны проводимости для разнонаправленных спинов при отсутствии магнитного поля




(b) Зоны проводимости для разнонаправленных спинов при включенном магнитном поле

Рис. 3: Заполненность зон проводимости для случаев нулевого магнитного поля (a) и включенного внешнего магнитного поля (b)

В дальнейшем нам ещё встретится полуразность этих концентраций – средний спин, поэтому введем обозначение:

$$S_z = \frac{N_+ - N_-}{2} = \frac{\gamma}{2} g \mu_B B \tag{6}$$

Мы не учли изменение химического потенциала, так как оно квадратично по малому магнитному полю. Это можно понять к примеру из симметрийных соображений. Если поменять направление магнитного поля, то очевидно химический потенциал в равновесном состоянии не поменяется, поэтому его изменение не может зависеть линейно от магнитного поля.

## 2.2 Функция распределения при наличии электрического поля

Для начала рассмотрим задачу с учетом только статического электрического поля $\mathbf{E} \parallel y$ и с диффузными стенками на оси $x$ на расстоянии $w$ друг от друга. В этой работе будем считать, что длина свободного пробега электрон-электронных столкновений намного больше чем длина электрон-примесных столкновений. Граничные условия на функцию распределения электронов будут следующими:

$$f_{\mathbf{p}}(\pm w/2) = \begin{cases} \text{const}, \ p_x > 0, \ x = -w/2, \\ \text{const}, \ p_x < 0, \ x = w/2. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда кинетическое уравнение на функцию распределения запишется следующим образом [13]:

$$\mathbf{v}\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{E}\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f_{\mathbf{p}} - \overline{f_{\mathbf{p}}}}{\tau} + Q_{ee}, \quad e < 0. \tag{8}$$

Система находится в равновесии, поэтому частная производная по времени нулевая. Здесь $\overline{f_{\mathbf{p}}}$ - усредненная по направления импульса функция распределения, которая вообще говоря отличается (но мало) от функции распределения Ферми-Дирака $f_0$, так как в системе имеется замороженный беспорядок в виде примесей, $\tau$-время релаксации электронов на примесях, $Q_{ee}$-Интеграл электрон-электронных столкновений, который в нашей работе берем равным нулю т.к. $l_{ee} \gg l_{imp}$. Производная функции распределения по $y$ зануляется т.к. система у нас трансляционно инвариантна по $y$ [2]. Сделаем замену $\delta f_{\mathbf{p}} = f_{\mathbf{p}} - \overline{f_{\mathbf{p}}}$ и оставим в члене с электрическим полем только $f_0$, т.к. считаем изменение функции распределения малым и ищем только линейный по полю вклад. Кинетическое уравнение преобразуется следующим образом:

$$v_x \frac{\partial \delta f_{\mathbf{p}}(x)}{\partial x} + eEv_y f_0' + \frac{\delta f_{\mathbf{p}}(x)}{\tau} = 0, \tag{9}$$

где $v_x, v_y$ соответственно проекции скорости на оси $x$ и $y$, а $f_0'$-производная функции распределения Ферми-Дирака по энергии: $f_0' = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$, где $\varepsilon_F$ - энергия Ферми. Решение уравнения будем искать в виде суммы двух вкладов один из которых будет зависеть от координаты а другой нет: $\delta f_{\mathbf{p}} = f_1 + f_2(x)$. Тогда уравнение (9) перепишется следующим образом:

$$v \cos\varphi \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} + eEv \sin\varphi f_0' + \frac{f_1 + f_2(x)}{\tau} = 0 \tag{10}$$

Здесь $\varphi$-угол между импульсом и осью $x$. Так как газ у нас вырожденный, то скорость порядка фермиевской: $v \approx v_F$, и

$$\begin{cases} f_1 = eEl \sin\varphi(-f_0'), \\ f_2(x) = \mathrm{const} \cdot \exp\left(-\frac{x}{l\cos\varphi}\right), \end{cases} \tag{11}$$

где $l = v_F \tau$ - время свободного пробега электронов на примесях, Учитывая граничные условия (7) решение уравнения будет следующим:

$$\delta f_{\mathbf{p}}(x) = eEl(-f_0') \sin\varphi \cdot \left\{1 - \exp\left[-\frac{x + w/2\ \mathrm{sign}(\cos\varphi)}{l\cos\varphi}\right]\right\} \tag{12}$$

Для узких каналов $w \ll l$ решение можно разложить до первого порядка по $w/l$:

$$\delta f_{\mathbf{p}}(x) \approx eE(-f_0') \sin\varphi \frac{x + w/2\ \mathrm{sign}(\cos\varphi)}{\cos\varphi}. \tag{13}$$

Данное выражение нам ещё неоднократно понадобится так как магнитное поле мы будем считать малым возмущением относительно системы с электрическим полем.

---

[2] Строго говоря, трансляционная инвариантность есть только "в среднем" по реализациям расположения примесей. Однако, нас не будут интересовать так называемые мезоскопические эффекты.

## 2.3 Нормальный эффект Холла в баллистическом канале

Перейдем к решению задачи с малым (по сравнению с электрическим) магнитным полем $B \parallel z$ ($x$, $y$, $z$ образуют правую тройку). Этот раздел посвящен нормальному эффекту Холла, обусловленному действием силы Лоренца на двумерные электроны. Наша цель – воспроизвести результат для нормального эффекта Холла из работ [2,3]. В стационарном состоянии при наличии внешнего электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{B}$ появляется холловское электрическое поле $\mathbf{E}_H$, параллельное оси $x$. Кинетическое уравнение запишется следующим образом:

$$\mathbf{v}\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{E}+\mathbf{E_H})\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f_{\mathbf{p}} - \overline{f_{\mathbf{p}}}}{\tau}. \qquad (14)$$

Здесь, как и раньше, $\overline{f_{\mathbf{p}}}$ среднее функции распределения по направлениям импульса. Теперь у нас имеется малое магнитное поле, поэтому изменение функции распределения будет не только выражение (12), но ещё добавится член связанный с магнитным полем. Подставим $f_{\mathbf{p}} = f_0 + \delta f_{\mathbf{p}} + \Delta f_{\mathbf{p}}$, где $\delta f_{\mathbf{p}}$ из (12)изменение функции распределения за счет наличия электрического поля, $\Delta f_{\mathbf{p}} \ll \delta f_{\mathbf{p}}$ добавка в функцию распределения из-за магнитного поля. Перепишем член с магнитном полем в (14) в более удобной форме. Перепишем градиент (импульсный) и векторное произведение в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial p}\hat{e}_p + \frac{1}{p}\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi, \qquad (15)$$

$$[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] = -vB\hat{e}_\varphi. \qquad (16)$$

Подставляя скалярное произведение (15) и (16) в кинетическое уравнение (14) и учитывая направления векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E_H}$ получим следующее уравнение:

$$v_x\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial x} + eEv_yf_0' + eE_Hv_xf_0' + \omega_c\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \varphi} + \frac{\delta f_{\mathbf{p}} + \Delta f_{\mathbf{p}} - \overline{\Delta f_{\mathbf{p}}}}{\tau} = 0, \qquad (17)$$

где мы ввели циклотронную частоту $\omega_c = -eB/mc > 0$. Исключая из получившегося уравнения часть, удовлетворяющую уравнению (9) в отсутствии магнитного поля, получим следующее:

$$v_x\frac{\partial \Delta f_{\mathbf{p}}}{\partial x} + eE_Hv_xf_0' + \omega_c\frac{\partial \delta f_{\mathbf{p}}}{\partial \varphi} + \frac{\Delta f_{\mathbf{p}} - \overline{\Delta f_{\mathbf{p}}}}{\tau} = 0 \qquad (18)$$

Из этого уравнения требуется найти $E_H$ и $\Delta f_{\mathbf{p}}$. С помощью известного приема, основанного на переходе от химического к электрохимическому потенциалу, можно легко найти только холловское поле. Для этого умножим уравнение (18) на плотность состояний на одну проекцию спина и проинтегрируем это уравнение по энергии и сделаем следующие подстановки:

$$\Delta F_\varphi = g\int \Delta f_{\mathbf{p}} d\varepsilon_p, \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m}, \quad g = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \tag{19}$$

$$\delta F_\varphi = g\int \delta f_{\mathbf{p}} d\varepsilon_p = egEl\sin\varphi\cdot\left\{1-\exp\left[-\frac{x+w/2\,\mathrm{sign}(\cos\varphi)}{l\cos\varphi}\right]\right\}\approx$$
$$\approx egE\sin\varphi\frac{x+w/2\,\mathrm{sign}(\cos\varphi)}{\cos\varphi} \tag{20}$$

Смысл умножения на плотность состояний в том, что теперь $\overline{\Delta F_\varphi}$ имеет смысл локальной концентрации (а точнее её изменения). Интегрируя получим следующее уравнение:

$$v_x\frac{\partial\Delta F_\varphi}{\partial x} - egE_H v_x + \omega_c\frac{\partial\delta F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\Delta F_\varphi - \overline{\Delta F_\varphi}}{\tau} = 0 \tag{21}$$

Сделаем замену $\Delta\tilde{F}_\varphi(x) = \Delta F_\varphi(x) + eg\Phi(x)$, где $-\partial\Phi/\partial x = E_H$, которая соответствует переходу к электрохимическому потенциалу. Тогда получится уравнение на $\Delta\tilde{F}_\varphi$:

$$v_x\frac{\partial\Delta\tilde{F}_\varphi}{\partial x} + \omega_c\frac{\partial\delta F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\Delta\tilde{F}_\varphi - \overline{\Delta\tilde{F}_\varphi}}{\tau} = 0 \tag{22}$$

Важно отметить, что $\overline{\Delta F_\varphi} \ll eg\Phi$, т.к. кулоновское отталкивание между электронами дает намного больший вклад в ток, чем градиент концентрации. Значит $egE_H \approx -\partial\overline{\Delta\tilde{F}}/\partial x$. Решим уравнение (22) раскладывая функцию распределение по нулевой и первой гармоникам[3].

$$\Delta\tilde{F}_\varphi = F_0 + F_1\cos\varphi. \tag{23}$$

[3] На самом деле можно было бы решить и без учета первой гармоники, так как в дальнейшем окажется, что её учет дает лишь малую поправку. Но всё таки для наглядности учтём первую гармонику. Более высокие гармоники так же дают поправки меньшего порядка.

Подставляя данное разложение в (22) и учтём (20). После усреднения по углам получим уравнение на первую гармонику. Чтобы получить уравнение на нулевую гармонику, умножим уравнение на $\cos\varphi$ и только тогда усредним по углам. Получившиеся уравнения будут следующими:

$$\begin{cases} \dfrac{v}{2}\dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \omega_c egE \cdot \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left(x + \dfrac{w}{2}\cdot \mathrm{sign}(\cos\varphi)\right) = 0 \\ \dfrac{v}{2}\dfrac{\partial F_0}{\partial x} + \omega_c egE \cdot \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{\cos\varphi}\left(x + \dfrac{w}{2}\cdot \mathrm{sign}(\cos\varphi)\right) + \dfrac{F_1}{2\tau} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

В первом уравнении при интегрировании останется только член с координатной зависимостью, так как второй занулится по четности. Первообразная подынтегрального выражения это просто $\tan\varphi$, который расходится. Наше приближение в (20) работает только при $\cos\varphi \gg w/l$, а значит нужно сделать обрезку при $\tan\varphi \simeq l/w$. Тогда выражение для первой гармоники получится следующим[4]:

$$F_1 = -2\omega_c\tau egE\frac{x^2}{w}. \tag{25}$$

Далее рассмотрим интеграл во втором уравнение в (24). На этот раз по четности занулится координатная часть. Оставшаяся часть расходиться и нужна обрезка по аналогии с предыдущим интегралом при углах $\cos\varphi_0 \simeq w/l$. Разделяя интегралы на 4 одинаковых в разных квадрантах получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\frac{w}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\cdot\mathrm{sign}(\cos\varphi) = \frac{w}{\pi}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{w}{\pi}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\sin\varphi}{1-\sin^2\varphi} = \\ = \frac{w}{2\pi}\int_0^{\varphi_0}\left(\frac{1}{1-\sin\varphi}+\frac{1}{1+\sin\varphi}\right)d\sin\varphi = \frac{w}{2\pi}\ln\frac{1+\sin\varphi_0}{1-\sin\varphi_0} = \\ = \frac{w}{2\pi}\ln\left(\frac{4l^2}{w^2}\right) \approx \frac{w}{\pi}\ln\frac{l}{w}. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь последнее равенство написано с логарифмической точностью с учетом $w \ll l$. Учитывая связь $egE_H = -\partial F_0/\partial x$, получим из второго уравнения в (24) выражение для холловского поля:

$$E_H = E\cdot 2\omega_c\tau\left(\frac{w}{\pi l}\ln\frac{l}{w} - \frac{x^2}{wl}\right) \tag{27}$$

[4]Правда тут численный коэффициент есть превышение точности, но оставим его, просто чтобы окончательное выражение было немного красивее

Видно, что основной вклад в холловское поле дал интеграл во втором уравнении (24), а первая гармоника дала лишь параметрически малый вклад, т.к. $\ln(l/w) \gg 1$. Основной вклад в холловское поле будет:

$$E_H = E \cdot \omega_c \tau \frac{2w}{\pi l} \ln \frac{l}{w} \tag{28}$$

Представляется полезным сравнить этот ответ для $E_H$ с холловским полем, возникающим в диффузионных системах в малых полях $\omega_c \tau \ll 1$. В этом случае поле Холла имеет вид $E_H = \omega_c \tau E$. В баллистических каналах роль эффективного времени рассеяния играет отношение:

$$(w/v_F \ln(l/w) \ll \tau.$$

Поэтому холловское поле в баллистическом канале параметрически меньше, чем в диффузионном.

# 3 Спиновый и аномальный эффекты Холла

Аномальный эффект Холла связан с генерацией холловского поля за счет конверсии спинового тока в электрический и, соответственно, возникновением дополнительного заряда на краях образца.

## 3.1 Механизмы спинового эффекта Холла

Для начала кратко обсудим механизмы которые приводят к спиновому эффекту Холла. Будем обсуждать модель описывающий двумерные полупроводниковые системы, такие как дихалькогениды переходных металлов ($MoS_2$, $WS_2$, ...). Данные механизмы подробно рассматривались в ряде работ, см., например, в [4] и приведенные там ссылки.

### 3.1.1 Аномальная скорость

Из за наличия кривизны Берри имеется аномальный вклад в скорость, который не зависит от механизмов рассеяния [14] (anomalous velocity):

$$\mathbf{v}_a = -\frac{2\xi e}{\hbar}[\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}], \quad \xi = \frac{\gamma^2}{E_g^2}, \quad \gamma = \frac{\hbar p_{cv}}{m_0}, \tag{29}$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ единичный вектор по оси $z$, $E_g$ - расстояние между валентной зоной и зоной проводимости, $p_{cv}$ - матричный элемент оператора импульса между валентной зоной и зоной проводимости. Важно отметить, что мы считаем энергию Ферми $\varepsilon_F$ электронов в зоне проводимости намного меньше щели $E_g$. Для электронов с противоположными проекциями спина во внешнем поле $\mathbf{E} \parallel y$ скорости будут направлены вдоль и против оси $x$:

$$v_a^{\pm} = \pm\frac{2\xi}{\hbar}eE. \tag{30}$$

Остальные вклады связаны с процессами рассеяния электронов. Обсудим их подробнее.

### 3.1.2 Асимметричное рассеяние

Спин-орбитальное взаимодействие приводит к асимметричному рассеянию электронов на примесях [4] (skew scattering). Будем считать, что примеси короткодействующие и разбросаны случайным образом. Тогда потенциал примесей запишется следующим образом:

$$V_{c,v}(\mathbf{r}) = \sum_i U_{c,v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R_i}), \tag{31}$$

где индексы $c$ и $v$ соответствуют зоне проводимости и валентной зоне. Можно найти время свободного пробега электронов на примесях через золотое правило Ферми:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} n_{imp} \sum_{\mathbf{k}'} |U_c|^2 \cdot \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) = \frac{2\pi}{\hbar} g|U_c|^2 n_{imp}, \tag{32}$$

где $n_{imp}$- концентрация примесей в системе. Напомним, что $g = m/(2\pi\hbar^2)$ - плотность состояний на одну проекцию спина.

Интегралы столкновений на примесях соответственно для спинов вдоль и против оси $z$ будут следующими:

$$G^{\pm}_{sk} = \pm\xi S_{imp} g \cdot \int_0^{\infty} d\varepsilon_p \sum_{\mathbf{p}'} [\mathbf{p}' \times \mathbf{p}]_z \delta(\varepsilon_p - \varepsilon'_p)\delta f_{\mathbf{p}'}(x), \tag{33}$$

$$S_{imp} = \frac{2\pi U_v}{\tau} - \frac{U_v}{U_c}\frac{\hbar}{g\varepsilon_F\tau^2}. \tag{34}$$

Здесь первый член отвечает вкладу третьего порядка по потенциалу примеси, а второй – когерентному рассеянию на парах примесей. Выражение для $\delta f_p$ дается формулой (12). Выражение для интеграла столкновений получится следующим:

$$G^{\pm}_{sk}(\varphi, x) = \pm 4 S_{imp}\tau \frac{\tau}{\hbar}\frac{w}{\pi l} \ln\left(\frac{l}{w}\right) \frac{\xi e}{l\hbar} E N^2_{\pm} \cdot \cos\varphi \tag{35}$$

Напомним, что $N_{\pm}$ - концентрации электронов со спинами направленных вдоль и против магнитного поля. Наличие анизотропной генерации приводит к возникновению тока.

Отметим, что в (35) имеется $\ln(l/w) \gg 1$. При выводе этой формулы мы пользовались приближенным выражением (13), которое перестает работать при углах $\cos\varphi \simeq w/l$, поэтому при интегрировании углы, соответствующие скользящему падению электронов на стенки канала, “обрезались”: $\varphi \simeq \pi/2 - w/l$. В следующем за логарифмическом приближении возникает координатная зависимость генерации, но она нас не интересует.

### 3.1.3 Сдвиг волнового пакета

Из за сдвига волнового пакета во время рассеяния на примесях получается добавка к скорости электронов, которая имеет разный знак для каждой из проекции спинов [4] (side jump velocity или side jump accumumation):

$$v_{sj}^{\pm} = \pm\frac{2\pi}{\hbar N_{\pm}}\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} X_{p'p}|M_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \cdot \delta(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_p)\delta f_{\mathbf{p}}(x), \tag{36}$$

где $M_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ - матричный элемент потенциала (31), а

$$\mathbf{R}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} \equiv (X_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}, Y_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) = \frac{\xi}{\hbar}\left(1 + \frac{U_v}{U_c}\right)[(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \times \hat{\mathbf{z}}] \tag{37}$$

– элементарный сдвиг электронного волнового пакета при рассеянии. Физически, возникновение сдвига волнового пакета обусловлено аномальной скоростью, индуцированной потенциалом примеси.

Используя приближенное выражение для $\delta f_{\mathbf{p}}$ (13)[5] получаем в главном порядке по $\ln l/w \gg 1$

$$v_{sj} = \mp\left(1 + \frac{U_v}{U_c}\right)\frac{w}{\pi l}\ln\left(\frac{l}{w}\right)\frac{2\xi}{\hbar}eE \tag{38}$$

Видно, что сдвиговая скорость не зависит от координаты $x$. Зависимость от координаты может появится в следующем за логарифмическим приближением, но такие вклады обладают малостью и нас не интересуют.

### 3.1.4 Аномальное распределение

Сдвиги волновых пакетов приводят к еще одному вкладу в спиновый эффект Холла. Этот вклад связан с тем, что сдвиг волнового пакета в электрическом поле сопровождается изменением его энергии, а значит рассеяние на примесях становится асимметричным и может приводить к генерации тока [4]. Соответствующий вклад называют вкладом аномального распределения (anomalous distribution). Интеграл столкновений с

[5]Это выражение перестает работать при углах $\cos\varphi \simeq w/l$, поэтому делалась обрезка $\varphi \simeq \pi/2 - w/l$, которая и приводит к возникновению логарифма в (38) по аналогии с тем, что возникает при асимметричном (skew) рассеянии.

учетом работы поля запишется следующим образом:

$$G^{\pm}_{adist}(\varphi, x) = \pm\frac{2\pi}{\hbar} g \int_0^\infty d\varepsilon_p \sum_{\mathbf{p}'} |M_{p'p}|^2 (eEY_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \cdot \\ \cdot \delta'(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_p)[f_0(\varepsilon_{p'}) - f_0(\varepsilon_p)], \quad (39)$$

где обозначения такие же как и в предыдущем пункте. После интегрирования получится результат:

$$G^{\pm}_{adist} = \mp\left(1 + \frac{U_v}{U_c}\right)\frac{2\xi e}{l\hbar} E N^{\pm} \cos\varphi. \quad (40)$$

Выражения для аномальной скорости $v_a^{\pm}$ (30), $v_{sj}^{\pm}$ (38), а также для генерации $G^{\pm}_{sk}$ (35), $G^{\pm}_{adist}$ (40) составляют основу для расчет аномального вклада в поле Холла в баллистических каналах.

## 3.2 Аномальный эффект Холла в баллистическом канале

Перейдем теперь к ключевой части нашей задачи: расчету аномального эффекта Холла в баллистическом канале. Для этого запишем уравнение уже проинтегрированное по энергиям кинетическое уравнение (22) с учетом аномальных вкладов. Так как наша система находится в магнитном поле и поляризована по спинам, то нужно записать кинетическое уравнение уже для каждой из проекций спина (или для электронов из разных долин в двухдолинном полупроводнике):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x \Delta F^{\pm}_{\varphi}(x) + (v_a^{\pm} + v_{sj}^{\pm})N_{\pm}\right] - egE_H v_x + \omega_c \frac{\partial \delta F^{\pm}_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\Delta F^{\pm}_{\varphi} - \overline{\Delta F^{\pm}_{\varphi}}}{\tau} = G^{\pm}. \quad (41)$$

Как и раньше мы не учитываем электрон-электронные столкновения, темп генерации $G^{\pm} = G^{\pm}_{sk} + G^{\pm}_{adist}$ - интеграл столкновений от асимметричного рассеяния (35) и аномального распределения (40), $v_a$ и $v_{sj}$, соответственно, аномальная скорость из-за кривизны Берри и сдвига волнового пакета, которые даются уравнениями (30) и (38). Важно отметить, что перед аномальными скоростями стоят концентрации электронов для двух проекций соответственно, которая равна нулевой гармонике интегрированной функции распределения (среднее по углам): $N_{\pm} = \overline{F^{\pm}_{\varphi}}$. Мы оставляем перед аномальными скоростями лишь концентрацию электронов в равновесном состоянии при наличии лишь магнитного поля, так как при дальнейших наших действиях в главном порядке перед $v_{a/sj}$ останется только $S_z = (N_+ - N_-)/2$, а остальные вклады перед $v_{a/sj}$ будут линейные по аномальным скоростям а значит это уже будет второй порядок малости.

Как и в разделе 2.3 нас интересует холловское поле $E_H$. Сделаем следующую подстановку:

$$\Delta F_\varphi = \frac{\Delta F_\varphi^+ + \Delta F_\varphi^-}{2}, \quad \delta F_\varphi = \frac{\delta F_\varphi^+ + \delta F_\varphi^-}{2}, \tag{42}$$

где введены поправки функции распределения электронов. Используя то обстоятельство, что для аномальных скоростей $v_a^+ = -v_a^-$, $v_{sj}^+ = -v_{sj}^-$, и воспользовавшись соотношением (6), переписываем уравнение (41) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x \Delta F_\varphi(x) + (v_a^+ + v_{sj}^+) S_z\right] - egE_H v_x + \omega_c \frac{\partial \delta F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\Delta F_\varphi - \overline{\Delta F_\varphi}}{\tau} = \\ = \frac{G^+ + G^-}{2}. \tag{43}$$

Делая такую же замену как и при переходе от (21) к (22), т.е. переходя к электрохимическому потенциалу, перепишем уравнение (43) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x \Delta \tilde{F}_\varphi(x) + (v_a^+ + v_{sj}^+) S_z\right] + \omega_c \frac{\partial \delta F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\Delta \tilde{F}_\varphi - \overline{\Delta \tilde{F}_\varphi}}{\tau} = G_b \cos\varphi. \tag{44}$$

Темп генерации $G_b$[6] может быть представлен как сумма вкладов аномального распределения и асимметричного рассеяния:

$$G_b = G_{sk} + G_{adist}, \tag{45}$$

$$G_{sk} = 8 S_{imp} \tau \frac{\tau}{\hbar} \frac{w}{\pi l} \ln\left(\frac{l}{w}\right) \frac{\xi e}{l\hbar} E N_1 S_z, \tag{46}$$

$$G_{adist} = -\left(1 + \frac{U_v}{U_c}\right) \frac{2\xi e}{l\hbar} E S_z, \tag{47}$$

[6]Индекс $b$ указывает на то, что канал баллистический.

где $N_1$ - концентрация электронов на одну проекцию спина в системе без внешних полей. Решение уравнения (44) будет состоять из нормальной части (22) и интересующих нас аномальных вкладов. Можно исключить из уравнения (44) части отвечающие за нормальный эффект Холла в соответствии с уравнением (22) и получить уравнение на аномальную часть интегральной функции распределения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x \Delta\tilde{F}_\varphi(x) + (v_a^+ + v_{sj}^+)S_z\right] + \frac{\Delta\tilde{F}_\varphi - \overline{\Delta\tilde{F}_\varphi}}{\tau} = G_b \cos\varphi. \tag{48}$$

Так как вклады у нас входят линейно в функцию распределения, то запишем отдельно уравнения на вклад от аномальных скоростей и на вклад от интеграла столкновений $G_b$. Начнем с аномальных скоростей. Уравнение будет следующим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v\cos\varphi \cdot \Delta\tilde{F}_\varphi(x) + v_{a/sj}^+ S_z\right] + \frac{\Delta\tilde{F}_\varphi - \overline{\Delta\tilde{F}_\varphi}}{\tau} = 0. \tag{49}$$

Здесь среднее по углам от выражения в квадратных скобках есть ни что иное как поток частиц в направлении $x$. Потока через границ нет, а значит это среднее должно зануляться. Перепишем функцию распределения через нулевую и первую гармоники[7]:

$$\Delta\tilde{F}_\varphi = F_0 + F_1\cos\varphi. \tag{50}$$

Подставляя это разложение в уравнение (49) и выделяя члены с нулевыми и первыми гармониками получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{v}{2}F_1 + v_a^+ S_z\right) = 0 \\ v\dfrac{\partial F_0}{\partial x} = -\dfrac{F_1}{\tau} \end{cases} \tag{51}$$

Здесь в круглых скобках в первом уравнении уже стоит ни что иное как поток частиц. Из условия, что поток нулевой сразу найдем первую гармонику, а из второго уравнения в (51) найдём и нулевую гармонику. Тогда интегральная функция распределения будет выглядеть следующим

[7]Вообще говоря можно записать и вторую гармонику и убедиться, что в баллистическом режиме она зануляется, так как аномальные скорости не зависят от координаты. В гидродинамическом пределе( $l_{ee} \ll w \ll l_{imp}$) это уже не так и надо учитывать вторую гармонику (см. [15])

образом:

$$\Delta\tilde{F}_{\varphi}^{a/sj} = 2\frac{v_{a/sj}^{+}x}{v_F l}S_z - 2\cos\varphi\frac{v_{a/sj}^{+}}{v_F}S_z. \tag{52}$$

Как обсуждалось выше в баллистическом режиме аномальные скорости не зависят от координаты, поэтому вклады в холловское поле от аномальных скоростей принимают простой вид

$$E_H^{a/sj} = -\frac{2S_z}{eg}\frac{v_{a/sj}^{+}}{v_F l}. \tag{53}$$

Для нахождения вкладов от асимметричного рассеяния и аномального распределения такой вывод через разложение по гармоникам избыточен, так как интеграл столкновений пропорционален $\cos\varphi$ и нулевая гармоника функции распределения (среднее) отвечающая этому вкладу сразу получается из уравнения (48) (а именно нулевая нам и нужна для нахождения холловского поля). Вклады от асимметричного рассеяния и аномального распределения запишутся в следующей форме:

$$\Delta\tilde{F}_{\varphi}^{sk/adist} = \frac{x}{v_F}G_{sk/adist}, \tag{54}$$

причем скорости генерации $G_{sk/adist}$ не зависят от координат. Соответственно, их вклады в холловское поле имеют вид

$$E_H^{sk/adist} = -\frac{1}{egv_F}G_b^{sk/adist}. \tag{55}$$

Уравнения (53) и (55) являются решениями поставленной задачи.

## 3.3 Анализ и обсуждение результатов

Проанализируем полученные результаты. Для начала выделим основные вклады в аномальный эффект Холла. Так как в баллистическом канале $(w/l)\ln(l/w) \ll 1$, то основные вклады в аномальное холловское поле вносят аномальная скорость и аномальное распределение:

$$\overline{\Delta F_{\varphi}^{b}} = \overline{\Delta F_{\varphi}^{a}} + \overline{\Delta F_{\varphi}^{adist}} = \left(1 - \frac{U_v}{U_c}\right)\frac{2\xi e}{v_F\hbar}ES_z\frac{x}{l}, \tag{56}$$

$$E_H^b = E_H^a + E_H^{adist} = -\frac{2\xi}{gv_F\hbar}\left(1 - \frac{U_v}{U_c}\right)ES_z\frac{1}{l}. \tag{57}$$

Остальные вклады от асимметричного рассеяния и сдвигов волновых пакетов содержат малый параметр $w/l\ln(l/w)$:

$$\overline{\Delta F_\varphi^{sj}} + \overline{\Delta F_\varphi^{sk}} = S_z \frac{4\xi eE}{v_F\hbar}\frac{w}{\pi l}\ln\left(\frac{l}{w}\right)\frac{x}{l}\left(\frac{2\pi U_v\tau g\varepsilon_F}{\hbar} - 1 - 2\frac{U_v}{U_c}\right), \tag{58}$$

и соответственно для холловского поля:

$$E_H^{sj} + E_H^{sk} = -S_z \frac{4\xi E}{gv_F\hbar l}\frac{w}{\pi l}\ln\left(\frac{l}{w}\right)\left(\frac{2\pi U_v\tau g\varepsilon_F}{\hbar} - 1 - 2\frac{U_v}{U_c}\right). \tag{59}$$

Аналогичные выводы были сделаны в статье [1] относительно соотношений между вкладами в спиновый или долинный ток. Физически очевидно, что в сверхчистом канале рассеяние подавлено, поэтому основную роль должен играть вклад от аномальной скорости. Кроме этого, вклад от аномального распределения и генерируется в меру рассеяния на примесях, и релаксирует за счет рассеяния на примесях, поэтому он также не содержит малого параметра $(w/l)\ln(l/w) \ll 1$ и частично компенсирует вклад аномальной скорости. Подчеркнем, что в отличие от систем с диффузионным распространением электронов в баллистических каналах полная компенсация вклада от аномальной скорости не происходит. Это связано с тем, что заметная часть импульса теряется на стенках канала, а не в его объеме, см., подробности, в [1].

Интересно заметить, что нормальный вклад в холловское поле (28) имеет малый параметр $(w/l)\ln(l/w) \ll 1$. Основные вклады в аномальной части не имеют такого малого параметра. У них имеется малость по параметру $(\varepsilon_F/E_g)^2$, т.е. квадрат отношения между энергией Ферми в зоне проводимости и размером щели между зоной проводимости и валентной зоной. В случае когда эффективные потенциалы примесей для электронов в зоне проводимости и в валентной зоне равны: $U_c = U_v$, тогда главный вклад в аномальное холловское поле занулится и тогда надо будет рассмотреть следующий порядок (59). В этих вкладах уже имеется параметр малости $(w/l)\ln(l/w) \ll 1$ как в нормальной части холловского поля, и конечно заодно есть малость по $(\varepsilon_F/E_g)^2$.

Обсудим связь между нашими результатами и результатами статьи [1]. Введем величину характеризующую степень поляризации электронов в магнитном поле $P_s = S_z/(N_1)$. В статье [1] обсуждалась спиновая поляризация баллистического канала при наличии лишь электрического поля, то есть отклонение концентраций электронов с разнонаправленными спинами от равновесного значения. Она получалась следующей:

$$\Delta N_b^{\pm} = \pm \left(1 - \frac{U_v}{U_c}\right) \frac{2\xi e}{v_F \hbar} E N_1 \frac{x}{l}. \tag{60}$$

Данное выражение связана с нулевой гармоникой интегральной функции распределения (или, проще говоря, с изменением локальной плотности электронов) следующим простым соотношением:

$$\overline{\Delta F_\varphi^b} = \Delta N_b^+ P_z. \tag{61}$$

Среднее от интегральной функции распределения, как мы уже отмечали, равна с точностью до множителя $eg$ электростатическому потенциалу, а значит связь можно переписать в виде:

$$eg\Phi_a(x) = \Delta N_b^+(x) P_z, \tag{62}$$

где $\Phi_a$ – аномальный вклад в электростатический потенциал соответствующий холловскому полю (57). В случае баллистического канала холловское поле получается независящим от координаты, поэтому можно легко переписать данную связь через разность потенциалов на краях образца, а именно

$$\Delta N_b^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{P_z} \frac{V_H^a}{eg} \frac{x}{w}, \tag{63}$$

где $V_H^a$ - аномальный вклад в холловское напряжение. Эту связь можно эквивалентным образом переписать как выражение холловского напряжения через спиновую поляризацию:

$$V_H^a = egP_z \frac{w}{x} \Delta N_b^{\pm}(x). \tag{64}$$

Важно отметить, что такая связь будет только в баллистическом канале. К примеру в гидродинамическом случае такой связи не реализуется. Дело в том, что при наличии электрон-электронных столкновений происходит релаксация спинового тока при столкновениях электронов с разными проекциями спина, а релаксации электрического тока не происходит из за сохранения импульса при электрон-электронных столкновениях, вне зависимости от проекций спинов (см. подробнее в [15]).

# 4 Заключение

В данной работе мы построили теорию аномального эффекта Холла в сверхчистых электронных каналах на основе двумерных полупроводников. Электронный газ считался вырожденным, а движение электронов – баллистическим, т.е. предполагалось, что время пролета ширины канала $w/v$ значительно меньше, чем время электрон-примесных, электрон-фононных и электрон-электронных столкновений. Рассеяние электронов на стенках канала считалось диффузным.

Внешнее электрическое поле было направлено вдоль канала, оно приводит к постоянному электрическому току. Магнитное поле было направлено по нормали к плоскости канала, оно приводит к двум эффектам: силе Лоренца и, соответственно, нормальному эффекту Холла, и спиновой или долинной поляризации электронов, что в сочетании со спин-орбитальным взаимодействием приводит к аномальному эффекту Холла.

Мы учли следующие механизмы, дающие вклад в аномальную часть холловского напряжения [разд. (3.1)]: аномальная скорость за счет кривизны Берри (anomalous velocity), асимметричное рассеяние на примесях (skew scattering) и сдвиг волнового пакета (side jump). Эффект сдвига приводит к двум вкладами: добавке к аномальной скорости, связанной с накоплением сдвигов (side jump accumulation), и вкладу аномального распределения (anomalous distribution).

В результате учета всех имеющихся механизмов [разд. 3.2] мы получили холловское поле для случая когда электрон примесные столкновения намного чаще чем электрон-электронные. Были выявлены два основных механизма, которые приводят к главному вкладу в аномальный эффект Холла: аномальная скорость и аномальное распределение. При этому холловское поле однородно. Остальные механизмы дают вклады, которые меньше по параметру $w/l \ln(l/w)$, где $l$–длина свободного пробега электронов на примесях. Они так же однородны в канале. Учет более малых вкладов привел бы к неоднородным в канале вкладам, которые малы по параметру $w/l$.

Также получена простая связь между спиновой поляризацией, возникающей в канале за счет спинового эффекта Холла, и аномальным вкладом в холловское напряжение, возникающее при наличии магнитного поля.

# Список литературы


[1] M. M. Glazov, Valley and spin accumulation in ballistic and hydrodynamic channels, 2D Mater. **9**, 015027 (2022)

[2] P. S. Alekseev and M. A. Semina, Hall effect in a ballistic flow of two-dimensional interacting particles, Phys Rev B **100**, 125419 (2019)

[3] P. S. Alekseev and M. A. Semina, Ballistic flow of two-dimensional interacting electrons, Phys. Rev. B **98**, 165412 (2018)

[4] M. M. Glazov and L. E. Golub, Valley Hall effect caused by the phonon and photon drag, Phys Rev B **102**, 155302 (2020)

[5] E. H. Hall, XXXVIII. On the new action of magnetism on a permanent electric current, The London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci. **5**, 157 (1881).

[6] M.I. Dyakonov, V.I. Perel, Current induced spin orientation of electrons in semiconductors, Phys. Lett. A **35A**, 459 (1971)

[7] J. E. Hirsch, Spin Hall effect Phys. Rev. Lett. **83**, 1834 (1999)

[8] J. Wunderlich, B. Kaestner, J. Sinova, and T. Jungwirth, Experimental Observation of the Spin-Hall Effect in a Two-Dimensional Spin-Orbit Coupled Semiconductor System, Phys. Rev. Lett. **94**, 047204 (2005)

[9] Alexey Kavokin, Guillaume Malpuech, and Mikhail Glazov, Optical spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**, 136601 (2005)

[10] Mak K.F., McGill K.L., Park J. and McEuen P.L., The valley Hall effect in MoS2 transistors, Science **344** 1489–92 (2014)

[11] Naoto Nagaosa, Jairo Sinova, Shigeki Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong, Anomalous Hall effect, Rev. Mod. Phys. **82** 1539–92 (2010)

[12] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics (1977): Non-Relativistic Theory (Oxford: Butterworth-Heinemann)

[13] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Physical Kinetics (1981) (Oxford: Butterworth-Heinemann)

[14] N.A. Sinitsyn, Semiclassical theories of the anomalous Hall effect, J. Phys.: Condens. Matter. **20** 023201 (2007)

[15] К.К. Григорян, *Аномальный эффект Холла в гидродинамическом режиме*, Выпускная квалификационная работа бакалавра, МФТИ (2023).