Московский физико-технический институт

Факультет общей и прикладной физики

Кафедра проблем теоретической физики

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В ТОНКИХ БИСЛОЯХ СВЕРХПРОВОДНИК – НОРМАЛЬНЫЙ МЕТАЛЛ

Дипломная работа

студента 327 группы

Я. В. Фоминова

Базовая организация:

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

117334, Москва, Россия

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. М. В. Фейгельман

Рецензент:

к.ф.-м.н. М. А. Скворцов

Москва

1999

I. ВВЕДЕНИЕ

Общеизвестно, что теория Бардина-Купера-Шриффера (БКШ) [1] хорошо описывает большинство металлических сверхпроводников. Одна из главных качественных особенностей теории БКШ – простые соотношения [2] между нуль-температурной энергетической щелью в спектре возбуждений $\Delta(0)$, критической температурой сверхпроводящего перехода T_c и параметром порядка (аномальным средним) $\mathcal{F}(0+) = \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}',\tau\to\tau'+0}\langle T_\tau(\tilde{\psi}(\mathbf{r},\tau)\tilde{\psi}(\mathbf{r}',\tau'))\rangle$:

$$\Delta(0) \ = \ \frac{\pi}{\gamma}T_c \approx 1.76\, T_c, \quad (1)$$

$$\Delta \ = \ |\lambda|\mathcal{F}(0+), \quad (2)$$

где λ – константа связи электрон-электронного взаимодействия в сверхпроводнике, причем соотношение (2) верно при любой температуре.

Недавно Касумов и др. [3] обнаружили нарушение простых соотношений БКШ, изучая, при низких температурах, вольт-амперные характеристики углеродной нанотрубки, служащей контактом между двумя металлическими бислоями, сделанными из тантала (Ta) и золота (Au). Характерной особенностью бислоев являлось большое отношение толщин нормального (Au) и сверхпроводящего (Ta) слоев, $d_N/d_S \approx 100\,/5$. Измеренное Касумовым и др. низкотемпературное значение величины джозефсоновского критического тока I_c, будучи проанализировано с помощью соотношения Амбегаокара–Баратова [4] $I_c = \pi\Delta(0)/2eR_{\rm tube}$, говорит о наличии в тантале большой низкотемпературной щели, близкой к своему значению в объеме, $\Delta_{\rm Ta} \approx 7\,$K. В то же время, температурная зависимость $I_c(T)$ совершенно не соответствует предсказаниям теории БКШ: после медленного уменьшения от нуль-температурного значения, $I_c(T)$ резко падает до нуля при $T_c \approx 0.4\,$K, что примерно в 10 раз меньше критической температуры в объеме тантала. Хотя бислои сверхпроводник – нормальный металл (SN) интенсивно изучались теоретически, возможность подобного поведения не была отмечена ранее.

На свойства тонких бислоев оказывает влияние эффект близости, состоящий во взаимовлиянии сверхпроводника и нормального металла. Важность эффекта близости определяется прозрачностью границы между слоями, которую мы будем характеризовать прозрачностью границы на канал $\gamma_{\rm int}$; ее связь с кондактансом границы $G_{\rm int}$ дается формулой

$$G_{\text{int}} = 2\gamma_{\text{int}} N_{ch} G_K, \tag{3}$$

где $G_K = e^2/h$ – квантовый кондактанс, $N_{ch} = \mathcal{A}/(\lambda_F/2)^2$ – эффективное число каналов, приходящихся на границу, имеющую площадь $\mathcal{A}$.

Примером влияния эффекта близости может служить критическая температура бислоя T_c. В случае слабопрозрачной границы T_c близка к критической температуре слоя сверхпроводника T_c^{BCS}:

$$\frac{T_c}{T_c^{BCS}} = \exp\left(-\frac{\pi G_{\text{int}}}{8 G_K \mathcal{N}_S k_B T_c}\right) \quad \text{при } \epsilon_0 \ll k_B T_c, \tag{4}$$

где (при $\nu_0 = m p_F / 2\pi^2 \hbar^3$) $\mathcal{N}_X = \mathcal{A} d_X \nu_0^X$ – число состояний на единицу энергии вблизи уровня Ферми в слое X толщины d_X, а $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathcal{N}_N + \mathcal{N}_S}{\mathcal{N}_N \mathcal{N}_S} \frac{G_{\text{int}}}{G_K}$. В случае же почти прозрачной границы

$$\frac{T_c}{T_c^{BCS}} = \left[\sqrt{1 + \frac{(\hbar\omega_D)^2}{\epsilon_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{|\lambda| \nu_0^S}\right)\right]^{\frac{\mathcal{N}_N}{\mathcal{N}_S}} \quad \text{при } \epsilon_0 \gg k_B T_c, \tag{5}$$

где ω_D – дебаевская частота. Отсюда в пределе полностью прозрачной границы ($\epsilon_0 \to \infty$) получаем [5]

$$k_B T_c = 1.13\, \hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{|\lambda| \nu_0^S \, \mathcal{N}_S / \left(\mathcal{N}_N + \mathcal{N}_S\right)}\right), \tag{6}$$

т.е. обычное соотношение БКШ, но с перенормированной константой электрон-электронного взаимодействия.

Цель настоящей работы – рассмотреть промежуточную область прозрачностей границы ($0 < \gamma_{\text{int}} < 1$) и найти параметр порядка в сверхпроводнике Δ, плотность сверхпроводящих электронов в сверхпроводнике n_S и критическую температуру бислоя T_c как функции прозрачности γ_{int}. Мы также вычислим температурные зависимости $\Delta(T)$ и $n_S(T)$. Кроме того, будет найдена (при нескольких значениях γ_{int}) энергетическая плотность числа электронных состояний $\nu(E)$ и обсуждена получающаяся энергетическая щель E_g. Мы будем рассматривать бислой, имеющий те же характеристики, что и в эксперименте [3], хотя прямое сравнение наших результатов с экспериментом [3] пока невозможно.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ЭФФЕКТА БЛИЗОСТИ

Уравнения на функции Грина, описывающие свойства металла в сверхпроводящем состоянии, были получены Горьковым [2, 6]. Эти уравнения, однако, достаточно сложны, и для применения к реальным задачам обычно достаточно рассматривать их упрощенный вид. Первое упрощение основано на том, что в сверхпроводнике скорость движения куперовской пары как целого много меньше характерной скорости движения электронов, ее образующих – скорости Ферми. Можно сказать, что хотя электроны сильно вырождены, движение куперовских пар квазиклассично. Получающиеся, в главном порядке по малому отношению T_c/E_F, квазиклассические уравнения называются уравнениями Эйленбергера [7, 8]. Дальнейшего упрощения уравнений можно достичь в случае грязных сверхпроводников, содержащих немагнитные примеси высокой концентрации ($l \ll \xi_0$). Физический факт, на котором основано упомянутое упрощение, состоит в изотропизации функций Грина по мере повышения концентрации примесей. Эти уравнения были предложены Узаделем [8, 9], и именно их мы будем решать (по всей видимости, именно уравнения Узаделя наиболее соответствуют экспериментальной ситуации работы [3]).

A. Уравнения Узаделя в общем случае

Сформулируем уравнения Узаделя в наиболее общей неравновесной ситуации. Теория неравновесной сверхпроводимости описывает систему электронов в терминах корреляционных функций операторов электронного поля $\Psi(r,t)$. Полнота теории обусловлена тем, что нормальные и аномальные корреляторы рассматриваются одновременно. Для этого корреляторы группируются в матрицы 2×2 в электрон-дырочном пространстве Намбу. В гайзенберговском представлении введем обозначения $\Psi_\uparrow(r,t)$ и $\Psi_\uparrow^\dagger(r,t)$ для операторов уничтожения и рождения фермионной квазичастицы со спином $\uparrow$ и координатой r. Тогда вышеупомянутые корреляторы можно сгруппировать в две матрицы $\hat{M}$ и $\hat{M}'$, где $\hat{M}$ есть матрица антикоммутаторов операторов рождения и уничтожения, а $\hat{M}'$ – та же матрица, но с коммутаторами вместо антикоммутаторов:

$$\hat{M}(r,t-t') = \begin{pmatrix} \left\langle\left\{\Psi_\uparrow(r,t),\ \Psi_\uparrow^\dagger(r,t')\right\}\right\rangle & \langle\{\Psi_\uparrow(r,t),\ \Psi_\downarrow(r,t')\}\rangle \\ -\left\langle\left\{\Psi_\downarrow^\dagger(r,t),\ \Psi_\uparrow^\dagger(r,t')\right\}\right\rangle & -\left\langle\left\{\Psi_\downarrow^\dagger(r,t),\ \Psi_\downarrow(r,t')\right\}\right\rangle \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь скобки $\langle\rangle$ означают усреднение по статистическому распределению и по беспорядку, а $\{\}$ – антикоммутатор. Диагональные элементы матриц $\hat{M}$ и $\hat{M}'$ соответствуют нормальным, а недиагональные – сверхпроводящим корреляциям. Основными объектами теории являются запаздывающая, опережающая и келдышевская функции Грина $\hat{R}$, $\hat{A}$ и $\hat{K}$, определяемые следующим образом:

$$\hat{R}(r,\varepsilon) \; = \; \frac{1}{\nu_0}\mathcal{F}\left[-i\theta(t)\hat{M}(r,t)\right], \tag{8}$$

$$\hat{A}(r,\varepsilon) \; = \; \frac{1}{\nu_0}\mathcal{F}\left[i\theta(-t)\hat{M}(r,t)\right], \tag{9}$$

$$\hat{K}(r,\varepsilon) \; = \; \frac{1}{\nu_0}\mathcal{F}\left[-i\hat{M}'(r,t)\right], \tag{10}$$

где $\mathcal{F}$ означает фурье-преобразование по времени, ν_0 – плотность состояний на уровне Ферми в нормальном состоянии. Функция Хевисайда θ отбирает $t>0$ для $\hat{R}$ и $t<0$ для $\hat{A}$. Функция $\hat{K}$ отличается от функций $\hat{R}$ и $\hat{A}$ тем, что не содержит упорядочения по времени и является коммутатором (а не антикоммутатором) операторов. Она связана с функциями $\hat{R}$ и $\hat{A}$ соотношением $\hat{K}=\hat{R}\hat{f}-\hat{f}\hat{A}$, где $\hat{f}$ – функция распределения квазичастиц. В равновесии $\hat{f}=(1-2f_T)\hat{1}$, где f_T – обычная функция распределения Ферми. Функции $\hat{R}$ и $\hat{A}$, называемые равновесными функциями Грина, содержат информацию об одночастичном спектре. В дополнение к этому келдышевская функция $\hat{K}$ содержит информацию о заполнении этих одночастичных состояний.

Определенные выше три функции Грина можно рассматривать совместно, составив из них матрицу 4×4, обозначаемую $\check{G}$, подчиняющуюся условию "нормировки" $\check{G}^2=\hat{1}$:

$$\check{G}(r,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\hat{R} & \hat{K}\\ 0 & \hat{A}\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Из гамильтониана, содержащего упругое рассеяние на немагнитных примесях и электрон-фононное взаимодействие, получается уравнение Узаделя на глобальную функцию Грина $\check{G}(r,\varepsilon)$:

$$\hbar D\check{\nabla}(\check{G}\check{\nabla}\check{G})+i[\check{H}_0,\,\check{G}]=0. \tag{12}$$

Здесь D – коэффициент диффузии, $\check{H}_0=\begin{pmatrix}\hat{H}_0 & 0\\ 0 & \hat{H}_0\end{pmatrix}$ при $\hat{H}_0=\begin{pmatrix}E & \Delta\\ -\Delta^* & -E\end{pmatrix}$, где E – энергия, Δ – параметр порядка, который должен быть определен самосогласованно из уравнения

$$\Delta=\nu_0|\lambda|\int_0^{\hbar\omega_D}\mathcal{F}\left[\langle\{\Psi_\uparrow(r,t),\,\Psi_\downarrow(r,t')\}\rangle\right]dE=\nu_0|\lambda|\int_0^{\hbar\omega_D}\frac{1}{4i}\mathrm{Tr}\left[\left(\hat{\tau}_x-i\hat{\tau}_y\right)\hat{K}\right]\,dE, \tag{13}$$

где $\hat{\tau}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\hat{\tau}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ – матрицы Паули. Основное уравнение (12) должно быть дополнено граничными условиями [10] на поверхности раздела (в случае бислоя имеются две поверхности раздела каждого из слоев с вакуумом и одна – друг с другом)

$$\sigma_l \left(\check{G}_l \check{\nabla} \check{G}_l\right) = \sigma_r \left(\check{G}_r \check{\nabla} \check{G}_r\right) = \frac{g_{\text{int}}}{2} \left[\check{G}_l,\, \check{G}_r\right], \tag{14}$$

где индексы l и r означают, что соответствующие величины берутся непосредственно слева или справа от поверхности соответственно, σ означает проводимость вещества в нормальном состоянии, и g_{int} означает кондактанс на единицу площади поверхности: $g_{\text{int}} = G_{\text{int}}/\mathcal{A}$.

B. Равновесный эффект близости

В термодинамическом равновесии все свойства системы описываются запаздывающей или опережающей функцией Грина. Будем рассматривать запаздывающую функцию $\hat{R}$. Введем для нее угловую параметризацию:

$$\hat{R} = \cos\theta\, \hat{\tau}_z + \sin\theta\, (\cos\varphi\, \hat{\tau}_x + \sin\varphi\, \hat{\tau}_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\theta = \theta(r, E)$ – комплексный угол, характеризующий спаривание, и $\varphi = \varphi(r, E)$ – вещественная сверхпроводящая фаза.

В объеме нормального металла угол θ равен нулю при всех энергиях. В объеме же сверхпроводника $\theta = \theta_{BCS}(E) = \arctan i\frac{\Delta}{E}$.

Физические свойства системы могут быть выражены в терминах угла θ. Уравнение самосогласования для параметра порядка Δ принимает вид

$$\Delta(r) = \nu_0 |\lambda| \int_0^{\hbar\omega_D} dE\ \text{th}\left(\frac{E}{2k_B T}\right) \text{Im}\left[\sin\theta(r, E)\right] \exp i\varphi(r, E). \tag{16}$$

Одночастичная плотность состояний $\nu(r, E)$ и плотность сверхпроводящих электронов $n_S(r)$ даются формулами

$$\nu(r, E) \;=\; \nu_0\, \text{Re}\left[\cos\theta(r, E)\right], \tag{17}$$

$$n_S(r) \;=\; -2\frac{m}{e^2\hbar}\sigma \int_0^{\infty} dE\ \text{th}\left(\frac{E}{2k_B T}\right) \text{Im}\left[\sin^2\theta(r, E)\right]. \tag{18}$$

В настоящей работе мы не будем рассматривать токонесущие состояния системы, т.е. будем считать сверхпроводящую фазу φ постоянной. В геометрии, в которой пространственные свойства системы зависят только от одной координаты x (в случае бислоя ось x направлена поперек слоев), уравнение для запаздывающей функции Грина $\hat{R}$, полученное из уравнения (12), с учетом параметризации (15) принимает вид

$$\frac{\hbar D}{2}\frac{\partial^2\theta(x,E)}{\partial x^2} + iE\sin\theta(x,E) + \Delta(x)\cos\theta(x,E) = 0. \tag{19}$$

Соответствующие граничные условия получаются из условий (14):

$$\sigma_l \left.\frac{\partial\theta_l}{\partial x}\right|_{x=0} = \sigma_r \left.\frac{\partial\theta_r}{\partial x}\right|_{x=0} = g_{\text{int}} \sin(\theta_l(0,E) - \theta_r(0,E)). \tag{20}$$

Именно с этой формой уравнения Узаделя и граничных условий к нему мы будем работать в дальнейшем при изучении бислоя SN.

1. *Пример решения уравнения Узаделя: грязный сверхпроводник БКШ*

В объемном сверхпроводнике или в сверхпроводнике, размеры которого меньше длины когерентности (тонкая пленка или тонкий провод), параметр порядка $\Delta(r) = \Delta_{BCS}$ постоянен в пространстве, и уравнение Узаделя (19) сводится к

$$\operatorname{tg}\theta_{BCS}(E) = i\frac{\Delta}{E}, \tag{21}$$

откуда

$$\theta_{BCS}(E) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + i\operatorname{arc\,th}\frac{E}{\Delta}, & \text{если } |E| < \Delta \\ i\operatorname{arc\,th}\frac{\Delta}{E}, & \text{если } |E| > \Delta. \end{cases} \tag{22}$$

Из формул (16), (17), (18) получаются обычные соотношения БКШ (для наглядности рассматриваем случай $T = 0$):

$$\Delta_{BCS} = 2\hbar\omega_D e^{-1/\nu_0|\lambda|} \tag{23}$$

$$\nu_{BCS}(E) = \begin{cases} 0, & \text{если } |E| < \Delta \\ \nu_0\frac{|E|}{\sqrt{E^2-\Delta^2}}, & \text{если } |E| > \Delta. \end{cases} \tag{24}$$

$$n_S^{BCS} = \pi\frac{m\sigma}{e^2\hbar}\Delta_{BCS}. \tag{25}$$

III. ЭФФЕКТ БЛИЗОСТИ В ТОНКОМ БИСЛОЕ СВЕРХПРОВОДНИК – НОРМАЛЬНЫЙ МЕТАЛЛ

Рассмотрим бислой SN, состоящий из слоя нормального металла ($-d_N < x < 0$), контактирующего (при $x = 0$) со слоем сверхпроводника ($0 < x < d_S$). В этом случае применимо уравнение Узаделя в форме (19). Будем считать, что слои достаточно тонкие, так что их можно рассматривать как однородные (критерий будет приведен ниже). Отсюда следует, что параметр порядка Δ в сверхпроводнике можно считать постоянным в пространстве. В то же время, будем считать, что взаимодействие электронов в нормальном металле отсутствует: $\lambda = 0$, поэтому $\Delta = 0$ в нормальной области. Тогда можно расписать уравнение Узаделя (19) в двух частях бислоя:

$$\begin{cases} \frac{\hbar D_N}{2}\frac{\partial^2\theta_N(x,E)}{\partial x^2} + iE\sin\theta_N(x,E) = 0 \\ \frac{\hbar D_S}{2}\frac{\partial^2\theta_S(x,E)}{\partial x^2} + iE\sin\theta_S(x,E) + \Delta\cos\theta_S(x,E) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Из этих уравнений видны характерные пространственные масштабы для двух слоев, и условие однородности, упомянутое выше, можно сформулировать в виде

$$d_S \ll \sqrt{\frac{\hbar D_S}{\Delta}}, \qquad d_N \ll \sqrt{\frac{\hbar D_N}{\Delta}}, \tag{27}$$

полученном из соотношений $d \ll \sqrt{\hbar D/E}$ с характерной энергией Δ (т.к. свойства системы определяются энергиями порядка Δ или меньше). Заметим, что уменьшение Δ с ростом прозрачности границы γ_{int} облегчает выполнение условий (27). Уравнения (26) можно один раз проинтегрировать:

$$\begin{cases} \frac{\hbar D_N}{4}\left(\frac{\partial\theta_N(x,E)}{\partial x}\right)^2 - iE\cos\theta_N(x,E) = f_N(E) \\ \frac{\hbar D_S}{4}\left(\frac{\partial\theta_S(x,E)}{\partial x}\right)^2 - iE\cos\theta_S(x,E) + \Delta\sin\theta_S(x,E) = f_S(E). \end{cases} \tag{28}$$

Функции $f_N(E)$ и $f_S(E)$ должны быть определены из граничных условий. Из условий (20) получаем $\partial\theta/\partial x = 0$ на границах с вакуумом (т.к. эти границы непрозрачны), откуда

$$\begin{cases} f_N(E) \; = \; -iE\cos\theta_N(x = -d_N, E) \\ f_S(E) \; = \; -iE\cos\theta_S(x = d_S, E) + \Delta\sin\theta_S(x = d_S, E). \end{cases} \tag{29}$$

Обозначим

$$\begin{cases} \theta_N(E) \; \equiv \; \theta_N(x = -d_N, E) \\ \theta_S(E) \; \equiv \; \theta_S(x = d_S, E). \end{cases} \tag{30}$$

В силу однородности слоев функции $\theta_N(x,E)$ и $\theta_S(x,E)$ почти постоянны как функции координаты x: $\theta_N(x,E) \approx \theta_N(E)$, $\theta_S(x,E) \approx \theta_S(E)$. Однако, для их нахождения необходимо учесть слабые пространственные изменения и воспользоваться граничными условиями на SN-границе. Подставляя

$$\begin{cases} \theta_N(x,E) \;=\; \theta_N(E) + \delta\theta_N(x,E) \\ \theta_S(x,E) \;=\; \theta_S(E) + \delta\theta_S(x,E) \end{cases} \tag{31}$$

в уравнения (28), линеаризуем их с учетом малости $|\delta\theta_N(x,E)|$, $|\delta\theta_S(x,E)| \ll 1$ и находим решение

$$\begin{cases} \delta\theta_N(x,E) \;=\; \frac{1}{\hbar D_N}(-iE\sin\theta_N(E))(x+d_N)^2 \\ \delta\theta_S(x,E) \;=\; \frac{1}{\hbar D_S}(-iE\sin\theta_S(E) - \Delta\cos\theta_S(E))(x-d_S)^2. \end{cases} \tag{32}$$

Наконец, граничные условия (20) на SN-границе дают

$$-i\tau_N E\sin\theta_N(E) = i\tau_S E\sin\theta_S(E) + \tau_S\Delta\cos\theta_S(E) = \sin\left(\theta_N(E) - \theta_S(E)\right), \tag{33}$$

где использованы обозначения $\tau_N = 2\sigma_N d_N/\hbar D_N g_{\text{int}}$, $\tau_S = 2\sigma_S d_S/\hbar D_S g_{\text{int}}$. Определив $\theta_S(E)$ из уравнений (33), мы можем, в принципе, найти любые характеристики системы (т.к. нахождение $\theta_S(E)$ фактически означает нахождение запаздывающей функции Грина $\hat{R}$, см. раздел II B).

Однако, решить уравнения (33) аналитически не удается. Поэтому мы решаем их численно. Исключив $\theta_N(E)$ из системы уравнений (33), мы получаем единственное уравнение на функцию $\theta_S(E)$, которое дает два уравнения на функции $\operatorname{Re}\theta_S(E)$ и $\operatorname{Im}\theta_S(E)$. Полученную систему двух нелинейных уравнений решаем численно с помощью модифицированного метода Ньютона [11].

Решение уравнений (33) зависит от параметров бислоя: размеров, характеристик материалов, составляющих бислой, и прозрачности SN-границы. Эта зависимость входит в (33) через величины τ_N и τ_S, которые могут быть представлены в виде

$$\tau_N = 2\pi\frac{d_N}{\hbar v_N^F}\frac{1}{\gamma_{\text{int}}}, \qquad \tau_S = 2\pi\frac{d_S}{\hbar v_S^F}\frac{1}{\gamma_{\text{int}}}. \tag{34}$$

Мы рассматриваем бислой SN, в котором сверхпроводником является тантал, а нормальным металлом – золото. Скорости Ферми v^F для этих материалов являются табличными величинами. Толщины слоев считаем такими же, как в эксперименте [3]: $d_N = 100$ нм, $d_S = 5$ нм. Таким образом, решение уравнений (33) зависит лишь от прозрачности границы на канал γ_{int}.

A. Численные результаты

Имея решение для функции $\theta_S(E)$, мы начинаем со случая нулевой температуры, $T = 0$, и изучаем зависимость параметра порядка Δ и плотности сверхпроводящих электронов n_S в сверхпроводнике [см. уравнения (16), (18)] от $\gamma_{\rm int}$. Результаты показаны на рисунке 1. На том же рисунке показана зависимость критической температуры T_c от $\gamma_{\rm int}$, которая может быть получена следующим образом.

Критическая температура T_c определяется как температура, при которой обращается в нуль параметр порядка Δ. В то же время, вблизи T_c сверхпроводящие корреляции очень малы, $|\theta| \ll 1$, однако уравнение самосогласования (16) имеет решение $\Delta \neq 0$. Линеаризуя граничные условия (33) по θ_N и θ_S, легко находим решение:

$$\theta_S(E) = i\frac{\Delta}{E}\left[1 - \frac{\tau_N}{\tau_N + \tau_S}\frac{1}{1 + i\frac{\tau_N\tau_S}{\tau_N+\tau_S}E}\right]. \tag{35}$$

Подставляя этот результат в уравнение самосогласования (16) и сокращая обе стороны уравнения на Δ, получаем:

$$\frac{1}{\nu_0|\lambda|} = \int_0^{\hbar\omega_D}\frac{dE}{E}\left[1 - \frac{\tau_N}{\tau_N + \tau_S}\frac{1}{1 + \left(\frac{\tau_N\tau_S}{\tau_N+\tau_S}\right)^2 E^2}\right]\operatorname{th}\frac{E}{2k_B T_c}. \tag{36}$$

Первое слагаемое в скобках дает интеграл того же вида, что и интеграл, определяющий критическую температуру БКШ T_c^{BCS}:

$$\frac{1}{\nu_0|\lambda|} = \int_0^{\hbar\omega_D}\frac{dE}{E}\operatorname{th}\frac{E}{2k_B T_c^{BCS}} \approx \ln\frac{1.13\,\hbar\omega_D}{k_B T_c^{BCS}}, \tag{37}$$

поэтому уравнение (36) может быть переписано в виде

$$\ln\frac{T_c}{T_c^{BCS}} = -\int_0^{\hbar\omega_D}\frac{dE}{E}\frac{\tau_N}{\tau_N + \tau_S}\frac{1}{1 + \left(\frac{\tau_N\tau_S}{\tau_N+\tau_S}\right)^2 E^2}\operatorname{th}\frac{E}{2k_B T_c}. \tag{38}$$

Из этого уравнения и получается кривая T_c, изображенная на рисунке 1.

В случае сверхпроводника БКШ все три кривые, изображенные на рисунке 1, должны были бы совпадать. Мы видим, что в нашем случае это не так: кривые отличаются, причем в окрестности $1/\gamma_{\rm int} = 100$ это отличие – на порядок. На рисунках 2 и 3 область $80 < 1/\gamma_{\rm int} < 150$ изображена в увеличенном масштабе.

На рисунке 4 показаны температурные зависимости параметра порядка Δ и плотности сверхпроводящих электронов n_S в сверхпроводнике. При $1/\gamma_{\rm int} = 110$ наблюдается существенное отклонение от предсказаний теории БКШ.

Наконец, на рисунке 5 показана зависимость плотности состояний $\nu(E) = \nu_0 \operatorname{Re}[\cos\theta_S(E)]$ от энергии. Эта зависимость радикально отличается от плотности состояний в теории БКШ. В частности, вместо щели Δ_{BCS} наблюдается мини-щель E_g при очень малых энергиях. Эта мини-щель может быть найдена аналитически:

B. Вычисление мини-щели в плотности состояний

Существование щели означает, что в области малых энергий плотности состояний в обоих слоях равны нулю:

$$\operatorname{Re}[\cos\theta_S] = \operatorname{Re}[\cos\theta_N] = 0, \tag{39}$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} \theta_S &= \frac{\pi}{2} + i\vartheta_S \\ \theta_N &= \frac{\pi}{2} + i\vartheta_N, \end{cases} \tag{40}$$

где ϑ_S и ϑ_N вещественны. В этом случае из уравнений (33) получаем:

$$\begin{cases} \operatorname{th}\vartheta_N &= \frac{\operatorname{sh}\vartheta_S - \tau_N E}{\operatorname{ch}\vartheta_S} \\ \operatorname{ch}\vartheta_N &= -\frac{\tau_S}{\tau_N}\operatorname{ch}\vartheta_S + \frac{\tau_S\Delta}{\tau_N E}\operatorname{sh}\vartheta_S. \end{cases} \tag{41}$$

Мы рассматриваем область малых энергий. Предположим, что в этой области $|\operatorname{sh}\vartheta_S| \gg \tau_N E$ (получив ответ, мы найдем условие, при котором это соотношение выполнено). Тогда из первого уравнения (41) находим, что $\vartheta_N = \vartheta_S$, и в этом случае второе уравнение (41) приводит к результату

$$\operatorname{th}\vartheta_S = \frac{\tau_N + \tau_S}{\tau_S}\frac{E}{\Delta}, \tag{42}$$

откуда следует

$$\cos\theta_S = \cos\theta_N = -i\frac{E}{\sqrt{E_g^2 - E^2}}, \tag{43}$$

где $E_g = \frac{\tau_S}{\tau_N + \tau_S}\Delta$. Формула (43) имеет тот же вид, что и в случае БКШ, но с щелью E_g вместо Δ. Теперь рассмотрим величину $\tau_N E/\operatorname{sh}\vartheta_S$, малость которой требуется для справедливости этого результата:

$$\frac{\tau_N E}{\operatorname{sh}\vartheta_S(E)} = \tau_N\sqrt{E_g^2 - E^2} < \tau_N E_g \approx \tau_S\Delta. \tag{44}$$

Последнее соотношение выполнено в силу того, что $\tau_S/\tau_N \sim d_S/d_N \ll 1$. Таким образом, мы получили, что

$$E_g = \frac{\tau_S}{\tau_N + \tau_S}\Delta, \qquad \text{если } \tau_S\Delta \ll 1. \tag{45}$$

Теперь рассмотрим противоположный случай $\tau_S\Delta \gg 1$. Предположим, что в этом случае при малых энергиях $|\operatorname{sh}\vartheta_S| \ll \tau_N E$. Тогда из первого уравнения (41) следует, что $\operatorname{th}\vartheta_N = -\tau_N E$. Воспользовавшись вторым уравнением (41), получаем

$$\operatorname{sh}\vartheta_S = \frac{1}{\tau_S\Delta}\frac{\tau_N E}{\sqrt{1-(\tau_N E)^2}}, \tag{46}$$

и, как мы и предполагали, при малых энергиях отношение $|\operatorname{sh}\vartheta_S|/\tau_N E$ действительно много меньше единицы. Отсюда следует, что

$$\cos\theta_S = -i\frac{1}{\tau_S\Delta}\frac{\tau_N E}{\sqrt{1-(\tau_N E)^2}}, \tag{47}$$

и мы находим щель:

$$E_g = \frac{1}{\tau_N}, \qquad \text{если } \tau_S\Delta \gg 1. \tag{48}$$

Из формул (45) и (48) следует, что с ростом $1/\gamma_{\text{int}}$ щель E_g сначала растет (малые $\tau_S\Delta$), а затем убывает (большие $\tau_S\Delta$). Поэтому E_g достигает максимума при $\tau_S\Delta \sim 1$, этому соответствует значение $1/\gamma_{\text{int}} \approx 140$. Конечно, приведенная оценка справедлива лишь по порядку величины.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен бислой сверхпроводник – нормальный металл, в котором сверхпроводником является тантал, а нормальным металлом – золото. Характерной особенностью бислоя является малая толщина сверхпроводящего слоя: $d_S/d_N = 5\,/100\, = 0.05$. Исходя из уравнения Узаделя, справедливого для грязных сверхпроводящих систем, получены уравнения, из которых численно найдены зависимости параметра порядка в сверхпроводнике Δ, плотности сверхпроводящих электронов в сверхпроводнике n_S и критической температуры бислоя T_c от прозрачности границы на канал γ_{int}. Также рассмотрена зависимость Δ и n_S от температуры. Обнаружено, что вместо щели Δ в плотности состояний имеется мини-щель E_g, величина которой в двух предельных (по γ_{int}) случаях найдена аналитически. Общим результатом работы является вывод о том, что эффект близости в рассматриваемой системе приводит к сильному отличию свойств системы от предсказаний теории БКШ, в частности, это отличие проявляется в нарушении соотношений БКШ между Δ, T_c и n_S.

---

[1] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).

[2] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, М., Физматгиз, 1962.

[3] A. Yu. Kasumov, R. Deblock, M. Kociak, B. Reulet, H. Bouchiat, I. I. Khodos, Yu. B. Gorbatov, V. T. Volkov, C. Journet, M. Burghard, submitted to Science.

[4] V. Ambegaokar, A. Baratoff, Phys. Rev. Lett. **10**, 486 (1963).

[5] P. G. de Gennes, Rev. Mod. Phys. **36**, 225 (1964).

[6] Л. П. Горьков, ЖЭТФ **34**, 735 (1958).

[7] G. Eilenberger, Z. Phys. B **214**, 195 (1968).

[8] А. В. Свидзинский, *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости*, М., Наука, 1982.

[9] K. D. Usadel, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970).

[10] М. Ю. Куприянов, В. Ф. Лукичев, ЖЭТФ **94**, 139 (1988).

[11] Р. П. Федоренко, *Введение в вычислительную физику*, М., Изд-во МФТИ, 1994.

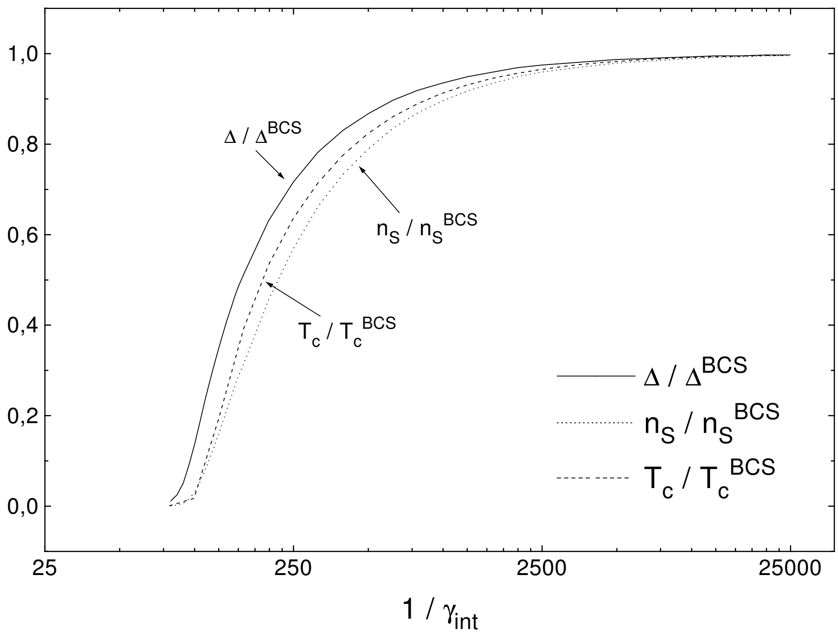

Рис. 1: Зависимости параметра порядка в сверхпроводнике Δ, плотности сверхпроводящих электронов в сверхпроводнике n_S и критической температуры бислоя T_c от прозрачности границы на канал γ_{int} при нулевой температуре. Все величины нормированы на соответствующие БКШ-значения. Случай БКШ соответствует отсутствию эффекта близости, т.е. непрозрачной границе: $\gamma_{\text{int}} = 0$.

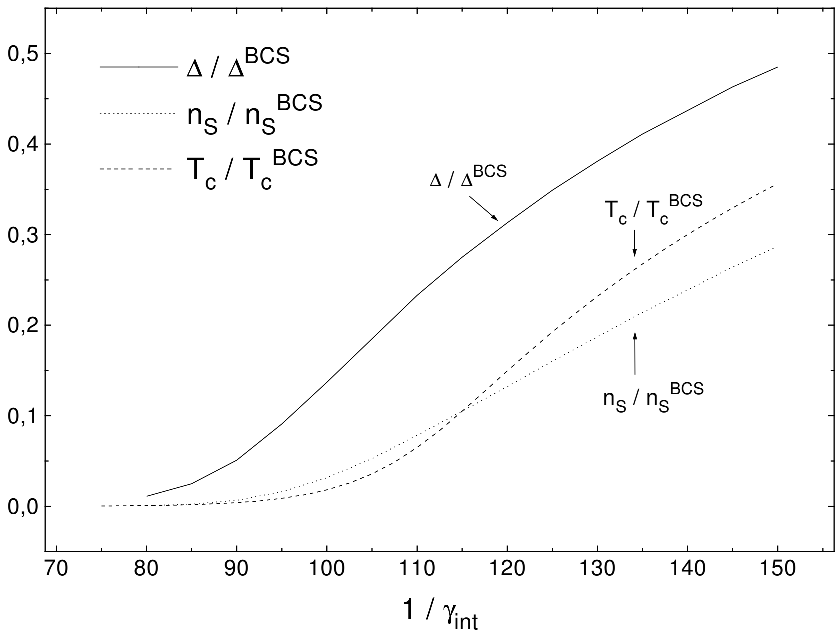

Рис. 2: Увеличенная часть рисунка 1. Изображена область больших прозрачностей $\gamma_{\rm int}$, в которой нарушение соотношений БКШ между Δ, n_S и T_c проявляется наиболее сильно.

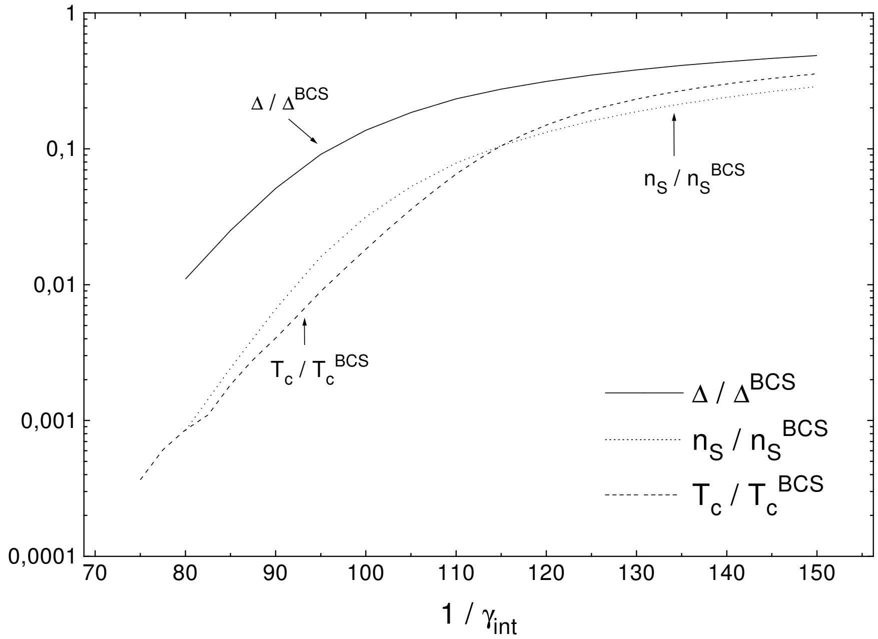

Рис. 3: То же, что и на рисунке 2, но в логарифмическом масштабе по оси ординат.

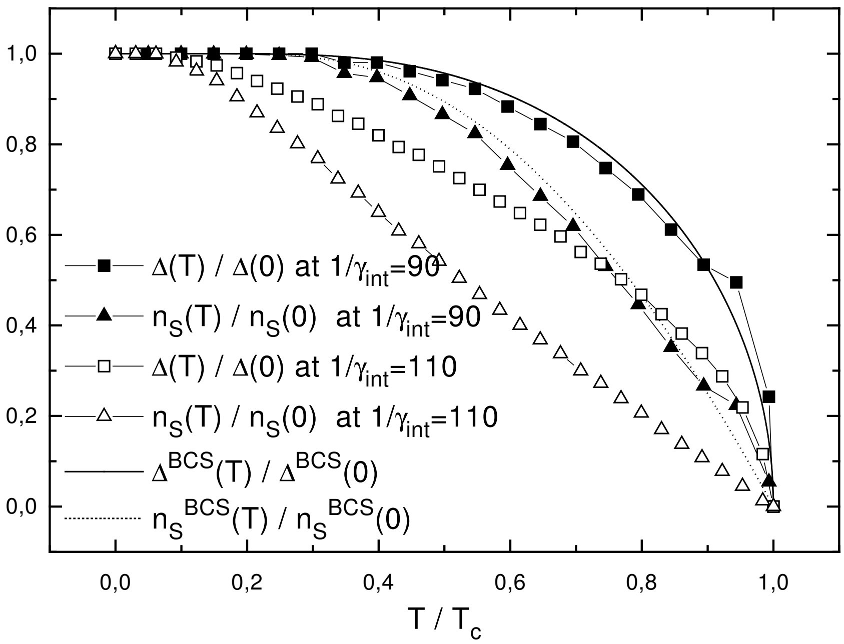

Рис. 4: Температурные зависимости Δ и n_S при $1/\gamma_{\mathrm{int}} = 90$ и 110. Для сравнения показаны те же зависимости в случае сверхпроводника БКШ.

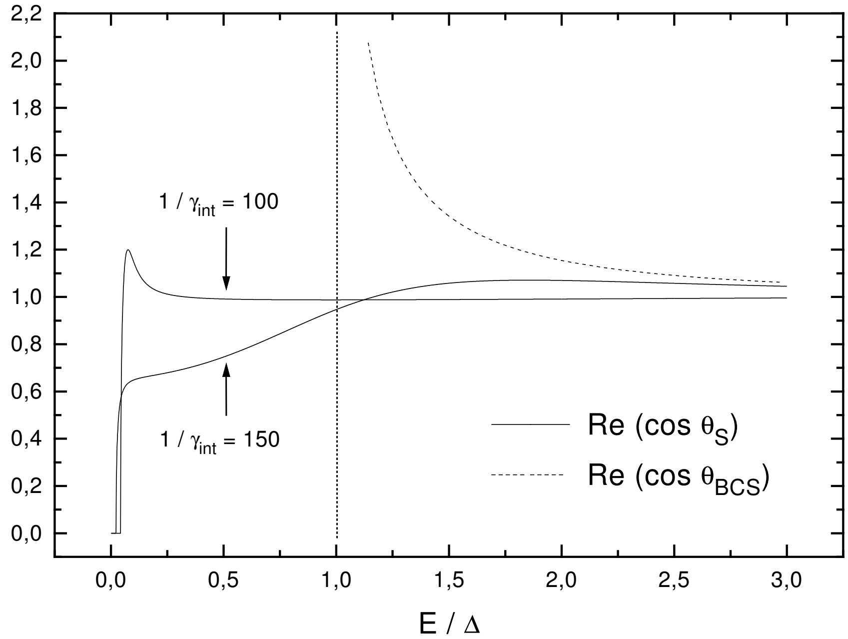

Рис. 5: Зависимость плотности состояний ν, нормированной на плотность состояний на уровне Ферми, $\nu(E/\Delta)/\nu_0 = \mathrm{Re}\,[\cos\theta_S(E/\Delta)]$, от энергии E, нормированной на Δ, при $1/\gamma_{\rm int} = 100$ и 150. Для сравнения показана плотность состояний в случае сверхпроводника БКШ: $\frac{\nu_{BCS}(E/\Delta)}{\nu_0} = \mathrm{Re}\,[\cos\theta_{BCS}(E/\Delta)] = \begin{cases} 0, & \text{если } |E| < \Delta \\ \frac{|E/\Delta|}{\sqrt{(E/\Delta)^2-1}}, & \text{если } |E| > \Delta. \end{cases}$