Лекция 2. Приближенное вычисление определенных интегралов. Интегралы с «малым параметром».

1 Оценки интегралов путем разложения в ряд

Рассмотрим интеграл $\int_0^x e^{-t^2}dt$. При $x \ll 1$ его можно находить путем разложения подинтегрального выражения в ряд по степеням x:

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4/2 - ..\right) = x - x^3/3 + x^5/10 - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{n!(2n+1)} \quad (1)$$

Этот ряд сходится при всех x, но практически полезен при малых x, когда можно ограничиться первыми его членами.

При $x \gg 1$ можно использовать совсем другой приём: представим интеграл (1) в виде разности $\int_0^x = \int_0^\infty - \int_x^\infty$ и оценим второй член последовательно вычисляя его при помощи интегрирования по частям:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{x^2}^\infty \frac{du}{2\sqrt{u}}e^{-u} = \quad (2)$$
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}|_{x^2}^\infty + \int_{x^2}^\infty \frac{e^{-u}du}{4u^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{-x^2}\left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + ...\right]$$

n-ый член ряда в квадратных скобках в (2) имеет вид

$$a_n(x) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1}x^{2n+1}}$$

Ряд

$$S_N(x) = \sum_0^N a_n(x)$$

называется асимптотическим рядом. При $N \to \infty$ он расходится при любом x, т.к. факториал растет быстрее любой степени. Однако при $x \gg 1$ ряд этот, тем не менее, имеет смысл: с его помощью можно найти асимптотику искомого интеграла, ограничив суммирование ряда на том члене $N(x)$, за которым последующие $a_n(x)$ начинают расти. Хорошее приближение к искомому интегралу $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$ обеспечивается вычислением конечной суммы $S_{N(x)}(x) = \sum_0^{N(x)} a_n(x)$.

Отдельно, для справки, приведем здесь простейшее вычисление интеграла $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, использованного выше:

$$\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt\right]^2 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2-u^2} dt du = \qquad (3)$$
$$2\pi \int_0^\infty r dr e^{-r^2} = \pi \int_0^\infty dx e^{-x} = \pi$$

2 Выделение существенной части области интегрирования

Часто бывает полезно выяснить, какая область значений аргумента интегрирования дает основной вклад в интеграл, и в этой области сделать упрощающее приближение для подинтегрального выражения.

1. Интеграл $I(a) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ где $f(0) > 0$ и конечно, а функция $f(x)$ меняется заметным образом при $x \sim 1$.

Тогда при $a \ll 1$ можно вынести $f(x)$ из под знака интеграла, тогда $I(a) = 2f(0) \ln \frac{1}{a}$.

При $a \gg 1$ пренебрегаем x^2 в знаменателе и получаем $I(a) \approx \frac{1}{a} \int_{-1}^1 f(x) dx$.

2. Рассмотрим интеграл $I(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}}{\sqrt{x^2-t^2}} dt$ при малых и больших x.

а). Пусть $x \ll 1$. Тогда можно заменить e^{t^2} на единицу и интеграл тривиально вычисляется: $I(x \ll 1) = \frac{\pi}{2}$

б). При $x \gg 1$ главный вклад в $I(x)$ приходит от окрестности точки $t = x$, поэтому введем переменную $\xi = x - t$ и перепишем интеграл в виде

$$I(x) = \int_0^x e^{x^2 - 2x\xi + \xi^2} \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi x - \xi^2}} \tag{4}$$

В интеграле (4) существенна область $2\xi x \sim 1$, т.е. $\xi \sim 1/x$, поэтому членом ξ^2 можно пренебречь и в показателе экспоненты, и в знаменателе. В результате получим

$$I(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-2x\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi x}} = \frac{e^{x^2}}{2x} \int_0^\infty e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{\pi} e^{x^2}}{2x} \tag{5}$$

3. Рассмотрим интеграл $I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \sin^2(\beta x) dx$, здесь конечно $\alpha > 0$. Исследуем поведение $I(\alpha, \beta)$ при различных соотношениях параметров α и β. На самом деле, существенный параметр здесь только один, это отношение $\beta/\sqrt{\alpha}$, т.к. искомый интеграл можно переписать в виде

$$I(\alpha, \beta) = \alpha^{-1/2} \int_0^\infty e^{-z^2} \sin^2\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z\right) dz \tag{6}$$

Как видно из записи (6), существенна область интегрирования $z \sim 1$. Теперь рассмотрим предельные случаи:

а). $\beta \gg \sqrt{\alpha}$: аргумент синуса быстро осциллирует при $z \sim 1$, поэтому заменим квадрат синуса на его среднее значение $1/2$ и получим $I(\alpha, \beta) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\alpha}}$.

б). $\beta \ll \sqrt{\alpha}$: здесь можно заменить $\sin^2\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z\right) \to \beta^2 z^2/\alpha$ и вычислить более простой интеграл

$$I(\alpha, \beta) \approx \frac{\beta^2}{\alpha^{3/2}} \int_0^\infty e^{-z^2} z^2 dz = \frac{\sqrt{\pi}\beta^2}{4\alpha^{3/2}}$$

Впрочем, исходный интеграл $I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\sin^2(\beta x)dx$ можно вычислить и точно. Для этого необходимо переписать его, расширив область интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ и поделив на 2, затем представить синус как комбинацию экспонент с мнимыми аргументами, и провести сдвиги переменных под знаком интеграла, чтобы свести интеграл к стандартному Гауссову виду. В результате получим

$$I(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(1-e^{-\beta^2/\alpha}\right) \tag{7}$$

Как видно, в рассмотренных выше предельных случаях получаем те же ответы, что были ранее получены приближенными способами.

4. Исследуем интеграл $I(\beta)=\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{x+1}dx$ при малых и больших значениях параметра β.

При $\beta\gg 1$ все просто: интеграл сходится при $x\sim 1/\beta\ll 1$, поэтому можно пренебречь x в знаменателе и получится $I(\beta)\approx 1/\beta$.

При $\beta\ll 1$ существенная область интегрирования широкая, $x\sim 1/\beta\gg 1$, поэтому в главном приближении можно пренебречь единицей в знаменателе, но заменить нижний предел на 1. Получим, что $I(\beta)\approx\ln\frac{1}{\beta}$. Представляет интерес вычисление поправки к этому простейшему приближению. Для этого поступим таким образом: введем новую функцию $g(\beta)=I(\beta)-\ln\frac{1}{\beta}$ и выведем уравнение на $g(\beta)$, продифференцировав исходный интеграл для $I(\beta)$ по β:

$$-\frac{dI(\beta)}{d\beta}=\int_0^\infty\frac{x+1-1}{x+1}e^{-\beta x}dx=\frac{1}{\beta}-I(\beta) \tag{8}$$

поэтому для $g(\beta)$ получаем уравнение

$$\frac{dg}{d\beta}-g=\ln\frac{1}{\beta} \tag{9}$$

которое можно решать методом "вариации постоянной":

$$g(\beta) = e^{\beta}\left[\int_0^{\beta} e^{-x}\ln\frac{1}{x}dx + C_1\right] \tag{10}$$

Первый член (10) обращается в нуль при $\beta \to 0$, так что нам надо определить постоянную C_1. Выражение (10) справедливо при любом β, так что можно рассмотреть его предел $\beta \to \infty$ и заключить, что

$$C_1 = \int_0^{\infty} e^{-x}\ln(x)dx \equiv \int_0^{\infty}\frac{dt}{t}\left[e^{-t} - \frac{1}{1+t}\right] = -\mathrm{C} \approx -0.577 \tag{11}$$

т.к. иначе бы мы получили, что $g(\beta)$ экспоненциально расходится при $\beta \to \infty$. Число $\mathrm{C} \approx 0.577..$ называют постоянной Эйлера (иногда также называют и число $\gamma = e^{\mathrm{C}}$).

Теперь, вспомнив, что мы интересуемся областью $\beta \ll 1$, получаем окончательно для $I(\beta)$:

$$I(\beta) = \ln\frac{1}{\beta} - \mathrm{C} + O(\beta) \tag{12}$$

3 Приближенное вычисление бесконечных рядов

Ряд $S_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ - это простейшая геометрическая прогрессия. Чуть более сложный ряд $S_2(q)\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ легко вычислить, продифференцировав $S_1(q)$ почленно:

$$S_2(q) = \frac{dS_1(q)}{dq} = \frac{1}{(1-q)^2} \tag{13}$$

Вычисление ряда $S_3(q) = \sum_{n=0}^{\infty}\ln(n)q^n$ можно провести при $1 - q = \epsilon \ll 1$, заметив, что в этом случае основной вклад в сумму ряда происходит от членов с номерами $n \sim 1/\epsilon \gg 1$, поэтому вычисление дискретного ряда можно заменить интегрированием:

$$S_3(q) =\approx \int_0^\infty \ln(x) q^x dx \approx \int_0^\infty e^{-\epsilon x} \ln(x) dx \approx \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha} \qquad (14)$$

Список литературы

[1] А. Б. Мигдал, "Качественные методы в квантовой теории" , "Наука" , Москва, 1975.

[2] Я. Б. Зельдович и А. Д. Мышкис, "Элементы прикладной математики" "Наука" , Москва, 1972 (возможно, есть недавнее переиздание).