Семинар 6 по теме "Дифференциальные уравнения"

22 апреля 2016 г.

Задача 1 (разложение в ряд)

Часто решение линейного дифференциального уравнения можно найти в виде разложения в ряд по степеням x. Проиллюстрируем это на примере. Найдём решение дифференциального уравнения Бесселя

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y(x) = 0$$

в виде разложения $y(x) = \sum_k a_k x^k$. Функцией Бесселя называется такое решение, которое в нуле регулярно и $J_0(0) = 1$.

Решение

Подставля $y(x)$ в нужном виде в уравнение, мы получаем:

$$\sum_k k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_k a_k k x^{k-2} + \sum_k a_k x^k = 0$$

$$\sum_k (k^2 a_k + a_{k-2})x^{k-2} = 0$$

Приравнивая коэффициенты при различных степенях x нулю, мы получаем рекуррентное соотношение $a_k = -\frac{1}{k^2}a_{k-2}$. Поскольку коэффициенты выражаются друг через друга через один, то для того, чтобы полностью задать решение, необходимо задать ровно два коэффициента. Это соответствует тому, что это - дифференциальное решение второго порядка. Поскольку мы требуем регулярности функции в нуле, то она не может содержать отрицательные степени k. Таким образом, следуют следующие условия на коэффициенты:

$$a_0 = 1; \quad a_{-k} = 0, \quad \forall k > 0$$

Из этого мы заключаем, что все нечётные члены равны нулю $a_{2k-1} \equiv 0$; а чётные равны:

$$a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} \cdot \frac{-1}{(2(k-1))^2} \cdot \dots \cdot \frac{-1}{2^2} \cdot (-1) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}$$

$$y(x) \equiv J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Задача 2 (математический маятник)

Рассмотрим классическое дифференциальное уравнение движения математического маятника ($\omega^2 = \frac{g}{l}$):

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi$$

Если из положения равновесия маятнику придать необходимую начальную скорость, конечное положение маятника может оказаться точно перевёрнутым. Найдём такое решение.

Решение

Для такого уравнения можно записать некую сохраняющуюся величину $E[\varphi(t)]$ (так называемый "первым интегралом"; он может зависеть как от φ в некий момент времени, так и от производных). Сохранение этой величины означает, что для любого $\varphi\,(t)$ - решения уравнения, будет выполнено $\frac{d}{dt}E[\varphi(t)] \equiv 0$. В данном случае, выражение для первого интеграла можно написать из физических соображений — известно, что для консервативных систем имеется закон сохранения энергии; в нашем случае его можно записать как:

$$E[\varphi(t)] = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos\varphi$$

Действительно:

$$\frac{d}{dt}E[\varphi(t)] = \ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi) \equiv 0$$

Заметим, что если имеют место колебания амплитуды ϕ_0, то $E = -\omega^2 \cos\varphi_0$

При помощи первых интегралов можно понижать степень уравнения. Действительно, если величина E сохраняется, то мы можем просто записать уравнение уже первого порядка, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Кроме того, подставим значение энергии через амплитуду колебаний ϕ_0.

$$E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}} = \omega dt$$

Вернемся к поиску решения $\varphi(t)$. Если теперь проинтегрировать полученное тождество и разрешить его, выразив $\varphi(t)$, мы полностью решим задачу в общем виде. Однако, в общем случае интеграл в левой части не выражается через элементарные функции; для таких интегралов введен целый класс специальных функций, называемые эллиптическими интегралами.

В случае малых φ_0 его можно взять приближённо, заменив $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$; полученный ответ будет ни чем иным как гармоническим решением $\sin(\omega t + \varphi_0)$.

С другой стороны, есть ещё один специальный случай, когда это уравнение можно решить точно — случай $\varphi_0 = \pi$. При этом мы получаем:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega^2(1 + \cos\varphi)}} = t - t_0 \Leftrightarrow \int \frac{d\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \omega(t - t_0)$$

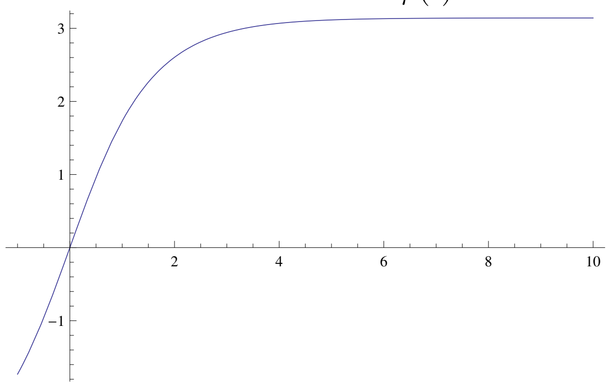
Интеграл берётся:

$$\int \frac{d\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \int \frac{d(\sin\frac{\varphi}{2})}{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \left| \begin{array}{c} \sin\frac{\varphi}{2} = \tanh z \\ d(\sin\frac{\varphi}{2}) = \frac{dz}{\cosh^2 z} \end{array} \right| = \int dz = z = \operatorname{arctanh}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Тем самым, выражая $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = 2\arcsin\tanh\omega(t-t_0)$$

Рис. 1: Решение $\varphi(t)$



Во-первых, для того, чтобы маятнику “добраться” до точки $\varphi = \pi$, ему требуется бесконечное время (он лишь асимптотически приближается к этому значению). В обратную сторону это означает, что из вертикального положения маятник будет падать вечно; что, конечно, соответствует тому факту, что $\varphi = \pi$ — тоже положение равновесия системы.

Задачи для домашнего решения

Задача 1. Найти разложение в ряд по x функции Бесселя $J_m(x)$ целого порядка m, определяемой как решение дифференциального уравнения:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y(x) = 0$$

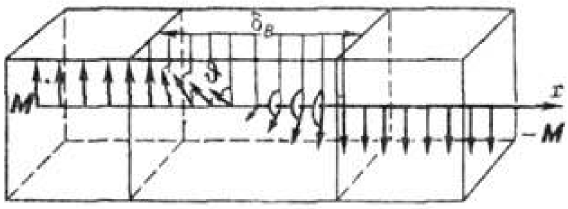
Задача 2. (*Доменная стенка Блоха*) В классическом ферромагнетике намагниченность каждой “точки” постоянна, а меняется лишь её направление (имеются “вращающиеся стрелочки” в каждой точке). Также известно, что в ферромагнетиках, как правило, устанавливается доменная структура - имеются большие области, в которых “стрелочки” смотрят преимущественно в одном направлении.

В одномерном случае зависимость угла от координаты $\theta(x)$ определяется дифференциальным уравнением:

$$A\theta''(x) + K\sin(\theta(x))\cos(\theta(x)) = 0$$

Предлагается определить такую зависимость для “доменной стенки”, что соответствует граничным условиям $\theta(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$ и $\theta'(\pm\infty) = 0$.

Рис. 2: Доменная стенка



Задача 3. (*Матричная экспонента*) Используя определение через ряд, найдите матричную экспоненту e^A для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4. (*Осциллятор с трением*) Найти решение дифференциального уравнения, описывающее грузик на пружинке с трением ($\dot{x}\,(t) \equiv \frac{dx}{dt}$):

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

с начальными условиями $x\,(0) = 0$, $\dot{x}\,(0) = v_0$.

В случае большого затухания $\gamma \gg \omega_0$ найти максимальное отклонение такого осциллятора от положения равновесия и момент времени, когда это отклонение достигается.

Задача 5. Для задачи про маятник, оценить время падения маятника вниз, если изначально его отклонили на малый угол $\delta\varphi \ll 1$ от положения “вертикально вверх”.