

# ДЗ-1: Матрицы рассеяния

## Задача 1.1. (2 балла)

(а) Выведите квантово-механическое выражение для плотности потока вероятности через волновую функцию (в отсутствие векторного потенциала).

(б) В базисе плоских волн вида  $e^{\pm ikx}/\sqrt{v}$  определите понятие вероятностей отражения и прохождения ( $R$  и  $T$ ) для одномерной задачи рассеяния в случае произвольного потенциала с различными асимптотиками при  $x = \pm\infty$ . Выразите  $R$  и  $T$  через амплитуды плоских волн.

## Задача 1.2. (3 балла)

Рассмотрим многоканальную задачу рассеяния в базисе плоских волн вида  $e^{\pm ikx}/\sqrt{v}$ . Матрица рассеяния  $\hat{S}$  связывает налетающие ( $a_L, a_R$ ) и улетающие ( $b_L, b_R$ ) волны:

$$\begin{pmatrix} \vec{b}_L \\ \vec{b}_R \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} \vec{a}_L \\ \vec{a}_R \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{r} & \hat{t}' \\ \hat{t} & \hat{r}' \end{pmatrix}.$$

Определим трансфер-матрицу  $\hat{M}$ , которая связывает волны справа и слева от рассеивателя:

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_L \\ \vec{b}_L \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} \vec{b}_R \\ \vec{a}_R \end{pmatrix}$$

— верхние элементы столбцов здесь отвечают волнам, движущимся направо.

Найдите элементы матрицы  $\hat{M}$ . Упростите результат, пользуясь унитарностью матрицы  $\hat{S}$  [на самом деле, упростить придется только элемент (2, 2), который можно выразить только через  $\hat{t}'$ ].

## Задача 1.3. (4 балла)

Рассмотрим потенциальную ступеньку:  $U(x) = U_1$  при  $x < 0$ , и  $U(x) = U_2$  при  $x > 0$ . Найдите  $\hat{S}$  и  $\hat{M}$  для одноканального случая. Проверьте унитарность  $\hat{S}$ .

## Задача 1.4. (4 балла)

Рассмотрим прямоугольный потенциальный барьер:  $U(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $x > a$ , и  $U(x) = U_0$  при  $0 < x < a$ . Найдите  $\hat{M}$  для одноканального случая, используя результат задачи 1.3. Из полученной матрицы  $\hat{M}$  найдите амплитуды прохождения и отражения,  $t$  и  $r$  (для самопроверки сравните их с известными выражениями из учебников).