

# Transport in mesoscopic systems (lecture notes, MIT and Skoltech)

Yakov Fominov

Last edited: 10 September 2025

These are fragments of the lecture notes. They may not contain all the necessary details and topics! This version may be updated.

## Оглавление

<b>Оглавление</b>	<b>1</b>
<b>I Normal systems</b>	<b>4</b>
<b>1 Quantum point contacts (QPC).</b>	<b>7</b>
1.1 Ток через квантовый точечный контакт . . . . .	7
1.1.1 Дополнительные комментарии . . . . .	11
1.2 Квантование кондактанса . . . . .	13
1.2.1 А где же диссипация? . . . . .	15
1.2.2 Элементарный вывод кондактанса одного открытого канала при $T = 0$ . . . . .	15
1.2.3 Элементарное объяснение формулы Шарвина . . . . .	15
1.2.4 Пояснения к размытию ступеней . . . . .	16
1.3 Full counting statistics . . . . .	17
1.3.1 Statistics of electron transfers . . . . .	17
1.3.1.1 Low-temperature limit . . . . .	18

1.3.1.2	Energy-independent transmission eigenvalues . . . . .	19
1.3.2	Noise . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Coulomb blockade.</b>	<b>23</b>
2.1	Coulomb effects in a single-electron transistor (SET) . . . . .	23
2.1.1	Toy model: resistively-shunted capacitor . . . . .	23
2.1.2	SET . . . . .	24
2.2	Single-electron transistor at thermodynamic equilibrium . . . . .	27
2.3	Single-electron transistor at finite voltage bias . . . . .	29
2.3.1	Zero temperature . . . . .	29
2.3.2	Finite temperatures . . . . .	34
2.3.3	More general cases . . . . .	40
2.3.4	The case of $R_2 \gg R_1$ at $T = 0$ . . . . .	40
<b>II</b>	<b>Superconducting systems</b>	<b>43</b>
<b>3</b>	<b>Andreev reflection</b>	<b>44</b>
3.1	Josephson current carried by Andreev bound states . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Stationary Josephson effect</b>	<b>46</b>
4.1	Feynman's derivation of the Josephson relations . . . . .	46
4.2	Введение . . . . .	47
4.3	Теория Гинзбурга–Ландау . . . . .	48
4.4	Общие свойства джозефсоновского тока . . . . .	53
4.5	Стационарный эффект Джозефсона . . . . .	54
4.5.1	Эффект Джозефсона в туннельном SIS-контакте . . . . .	54
4.5.2	Простейший сквид . . . . .	55
4.5.3	Эффект близости в SIN-контакте . . . . .	56
4.5.4	Эффект Джозефсона в SINIS-контакте . . . . .	57
4.5.5	Теория Асламазова и Ларкина . . . . .	59
4.6	GL with exchange field . . . . .	62
4.7	$\pi$ junction . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Phase slips</b>	<b>64</b>
5.1	Critical current in thin superconducting wires (whiskers) . . . . .	64
5.2	Experiment and basic idea of phase-slip centers . . . . .	65
5.3	TDGL . . . . .	67
5.4	Details of derivation . . . . .	68
5.4.1	Boundary conditions . . . . .	68
5.4.2	One phase-slip center . . . . .	69

<i>ОГЛАВЛЕНИЕ</i>	3
5.4.3 Two phase-slip centers . . . . .	72
5.4.4 Continuous limit . . . . .	72
<b>Литература</b>	<b>75</b>

Часть I

Normal systems

# Введение

В ситуациях, когда электрический ток течёт через проводники малых размеров, возникает множество интересных фундаментальных явлений, которые имеют и очень важное прикладное значение, связанное с миниатюризацией электронной техники. Явления эти, в результате которых транспортные свойства макроскопических систем оказываются чувствительны к процессам, связанным с переносом отдельных электронов, относятся к сравнительно молодой и активно развивающейся в настоящее время области физики под названием *квантовая мезоскопика*.<sup>1</sup>

Согласно квантовой механике, электроны проявляют как свойства частиц, так и свойства волн. Корпускулярная природа электронов приводит к дискретности переноса заряда, из-за чего при определённых условиях в наноконтактах возникает подавление электронного транспорта («кулоновская блокада»). В то же время волновая природа электронов проявляется в переносе тока через очень узкие проводники, которые работают как волноводы для электронов (это происходит при ширине проводника, сравнимой с длиной волны электронов — от нанометров в металлах до микронов в полупроводниках). Оба эти явления интересны не только с академической точки зрения, но и с прикладной, так как транспортные свойства нанопроводников и наноконтактов очень чувствительны к внешним воздействиям, например электрическим и магнитным полям. Электронные устройства, основанные на упомянутых выше явлениях, используются уже сейчас в современной электронике как транзисторы, сверхчувствительные детекторы заряда. Кроме того, элементная база активно разрабатываемой сегодня микроэлектроники нового поколения в значительной степени основана на технологическом использовании корпускулярно-волновых свойств электронов.

Итак, мы обсудим два явления, обусловленные малыми геометрическими размерами проводников. Во-первых, если перенос заряда осуществляется через промежуточный металлический «островок» малых размеров, связанный с остальной цепью туннельными контактами, то необходимо учитывать, что с уменьшением размеров проводника уменьшается его электрическая ёмкость. В конце концов, при вполне дости-

---

<sup>1</sup>Термин *мезоскопика* в буквальном переводе с греческого означает *междускопика*. Квантовая мезоскопика изучает явления, которые проявляются на масштабах, промежуточных между микро- и макроскопическими. Иными словами, это масштабы больше атомных, но меньше характерного масштаба длины, на котором уже можно пренебречь квантовыми корреляциями. Для точечных контактов этот верхний масштаб — порядка длины сбоя фазы или длины энергетической релаксации. В системах с кулоновской блокадой этот масштаб определяется ёмкостью.

жимых экспериментальных параметрах ёмкость  $C$  может стать настолько малой, что даже кулоновская энергия  $E_c = e^2/2C$  одного дополнительного электрона на островке может оказаться существенной. Тогда необходимо учитывать влияние кулоновских эффектов на транспорт, перенос заряда через островок требует запаса энергии, и может реализовываться явление, называемое *кулоновской блокадой*, когда к контакту приложено конечное напряжение, а ток тем не менее не течёт.

Во-вторых, мы рассмотрим ситуацию, когда кулоновских эффектов нет, т. к. проводник непрерывный, без отдельных островков, но его поперечные размеры настолько малы, что необходимо учитывать квантование движения в поперечном направлении. При определённых условиях электроны с энергией вблизи энергии Ферми  $E_F$  имеют непрерывный спектр, связанный с движением вдоль контакта (из одного резервуара к другому), но могут занимать лишь несколько дискретных уровней, соответствующих поперечному движению. Каждый дискретный уровень поперечного движения соответствует одномерному «каналу», по которому переносится ток. С каждым каналом связан вполне определённый кондактанс (т. е. обратное сопротивление, или, что то же самое, полная проводимость)  $G_q = e^2/\pi\hbar = 2e^2/h$ , называемый квантовым кондактансом. При расширении проводника дискретный спектр поперечного движения «проседает», и электронам с энергией  $E_F$  становятся доступны новые уровни. Это означает, что открываются дополнительные каналы переноса тока. При открытии каждого такого канала кондактанс увеличивается на величину  $G_q$ , поэтому возникает явление *квантования* кондактанса.

Более широкое изложение обсуждаемых ниже вопросов можно найти в таких учебниках, как [1, 2, 3].

# Глава 1

## Quantum point contacts (QPC).

### 1.1 Ток через квантовый точечный контакт

В проводниках основной вклад в ток дают обычно электроны с энергиями, близкими к энергии Ферми  $E_F$ . Рассмотрим контакт двух проводников. Если ширина контакта  $W$  настолько мала, что в ней укладывается лишь несколько длин волн электронов  $\lambda_F$ , то будем называть такой контакт точечным. В данном разделе мы увидим, к каким особенностям транспорта приводит настолько малая ширина контакта.

В эксперименте типичный точечный контакт реализуется следующим образом: два массивных электрода соединяют слоем двумерного электронного газа (часто используется аббревиатура 2DEG = 2-dimensional electron gas), сформированного в области полупроводникового гетероперехода (рис. 1.1). Затем сверху к двумерному электронному газу подводят пластины затвора (gate). Подавая на затвор потенциал, можно «выдавливает» электроны из областей вблизи затвора, делая эти области недоступными для электронов и тем самым формируя сужение в двумерном электронном газе (это и есть точечный контакт). Чем больше поданное на затвор напряжение, тем больше запрещённая для электронов область и тем уже сужение. Таким образом, с помощью затвора достаточно легко можно менять геометрию контакта.

Для исследования электронного транспорта в мезоскопических контактах широко используется метод матриц рассеяния (также его называют подходом Ландауэра). Зная матрицу рассеяния  $\hat{S}$  (составленную из коэффициентов отражения и прохождения) электронов на потенциальном поле, формирующем контакт, можно найти транспортные свойства контакта: средний ток и корреляторы токов (шум). Матрицу рассеяния можно найти решая уравнение Шрёдингера, описывающее состояние электронов в поле контакта. Подробное изложение этого метода можно найти в книге [3], а также в обзоре [8]. Наше изложение использует некоторые элементы этого подхода; в основном мы будем следовать статье [9].

Рассмотрим мезоскопическую систему, соединяющую резервуары  $N_1$  и  $N_2$ , как показано на рис. 1.2. Резервуары имеют электрохимические потенциалы  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , функции

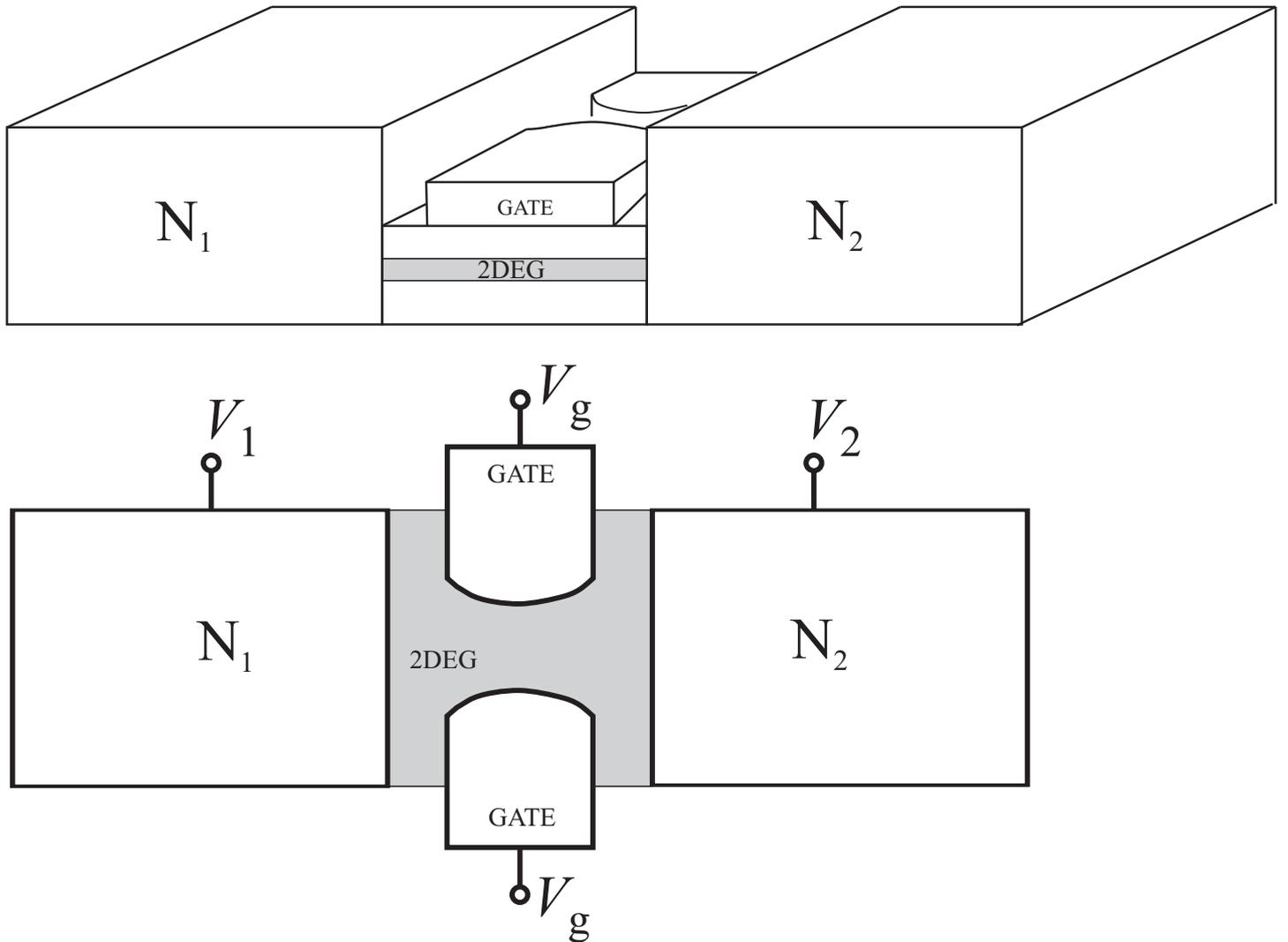


Рис. 1.1: Схема экспериментальной реализации точечного контакта. Два массивных электрода соединены слоем двумерного электронного газа (2DEG), возникающего в полупроводниковой гетероструктуре. Сужение формируется с помощью напряжения  $V_g$ , подаваемого на затвор (gate). Такой способ формирования сужения называется техникой расщеплённого затвора (split-gate technique [11]).

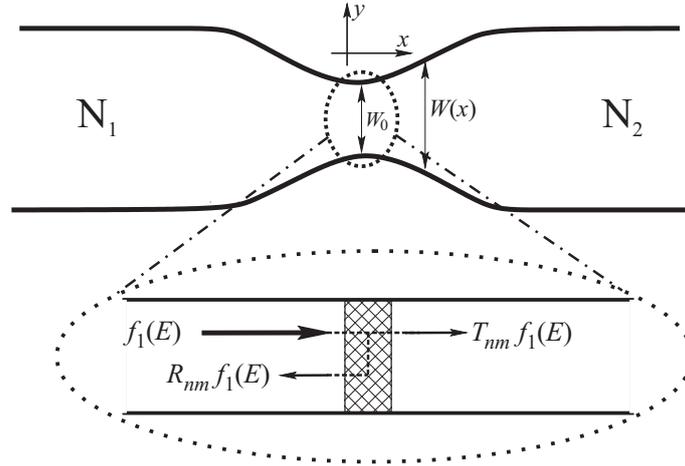


Рис. 1.2: Точечный контакт, имеющий форму сужения. Ширина сужения описывается функцией  $W(x)$  с минимальным значением  $W_0$ . В нижней части рисунка на увеличенном фрагменте показано, что внутри сужения в общем случае может находиться некоторый рассеиватель (например, примесь или туннельный барьер), который характеризуется вероятностями отражения и прохождения  $R_{nm}$  и  $T_{nm}$  из канала  $m$  в канал  $n$ .

распределения электронов в них имеют вид

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu_\alpha)/T] + 1}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.1)$$

Будем считать, что система двумерная, это соответствует стандартной экспериментальной ситуации, показанной на рис. 1.1. Выберем направление осей  $x, y$  так, как это показано на рис. 1.2. Тогда ток течёт вдоль оси  $x$ . Волновые функции стационарных состояний электронов удовлетворяют уравнению Шрёдингера:

$$\hat{H}(x, y)\psi(x, y) = E\psi(x, y). \quad (1.2)$$

Одноэлектронный гамильтониан  $\hat{H}(x, y)$  даётся формулой

$$\hat{H}(x, y) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + U(x, y), \quad (1.3)$$

где  $U(x, y)$  — потенциал, описывающий стенки контакта. Для простоты будем считать, что стенки непроницаемые, при этом расстояние между ними меняется вдоль  $x$  по некоторому закону  $W(x)$ . Тогда волновая функция на стенках, т. е. при  $y = \pm W(x)/2$ , должна обращаться в ноль. Предполагая, что форма контакта достаточно плавная (т. е.  $W(x)$  медленно меняется на расстояниях порядка фермиевской длины волны  $\lambda_F$ ), мы можем записать решение уравнения (1.2) с помощью адиабатического разделения переменных:

$$\psi_n(x, y) = \phi_n(x) \sqrt{\frac{2}{W(x)}} \sin \left[ n\pi \left( \frac{y}{W(x)} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (1.4)$$

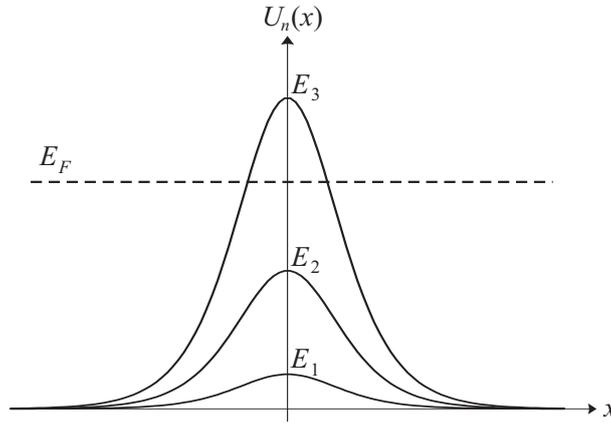


Рис. 1.3: Пример эффективного потенциала  $U_n(x)$ , возникающего в результате влияния стенок контакта. При каждом  $n$  обозначим максимальное значение потенциала (определяемое самым узким местом сужения) как  $E_n$ . Ток обеспечивается электронами, имеющими энергию вблизи энергии Ферми  $E_F$ . Изображённая ситуация соответствует двум «открытым» каналам (каналы 1 и 2, т. к. только для них выполнено соотношение  $E_F > E_n$ ).

где индекс  $n = 1, 2, 3, \dots$  (целые положительные числа), а функция  $\phi_n(x)$  удовлетворяет одномерному уравнению Шрёдингера с эффективным потенциалом  $U_n(x)$ , описывающим влияние стенок контакта:<sup>1</sup>

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_n(x) \right] \phi_n(x) = E \phi_n(x), \quad U_n(x) = \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mW^2(x)}. \quad (1.5)$$

Характерные размеры резервуаров значительно больше длины волны электрона. Поэтому можно считать, что  $W(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Минимальное значение  $W(x)$  обозначим  $W_0$ . Тогда эффективный потенциал (зависящий от поперечного квантового числа  $n$ ) в получившемся уравнении Шрёдингера имеет вид потенциального барьера максимальной высоты

$$E_n = \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mW_0^2}, \quad (1.6)$$

убывающего до нуля при  $x \rightarrow \pm\infty$  (рис. 1.3).

Мы видим, что волновая функция характеризуется номером поперечного квантования  $n$ . Иными словами, поперечное движение электрона должно быть устроено так,

<sup>1</sup>Легко заметить, что в случае  $W = \text{const}$  имеет место точное разделение переменных  $x$  и  $y$  в уравнении Шрёдингера, и соответственно точными оказываются формулы (1.4) – (1.5). В случае же, когда  $W$  зависит от  $x$ , точное разделение переменных уже не имеет места. Однако, если ширина контакта  $W(x)$  мала и является медленной функцией (в соответствии с нашими предположениями), имеет место адиабатическое приближение [10]: на качественном языке, движение вдоль  $y$  гораздо более быстрое, чем вдоль  $x$ , поэтому в своём движении по  $x$  частица чувствует некоторые усреднённые характеристики поперечного движения, и это позволяет разделить переменные. Технически адиабатическое приближение сводится к тому, что в формулы (1.4) – (1.5) вместо постоянного  $W$  теперь надо подставить  $W(x)$ .

чтобы на ширине контакта укладывалось целое число полуволин  $\lambda_F/2$ . Поэтому электроны, пролетающие через контакт, могут иметь либо одну полуволну, укладывающуюся на ширине контакта, либо две, либо три и т. д. Для обозначения таких состояний используется термин *канал*. Например, принято говорить, что электрон в состоянии с волновой функцией  $\psi_n$  находится в  $n$ -м канале.

Ввиду медленности изменения  $W(x)$  можно решить (1.5), используя квазиклассическое приближение. В главном приближении через сужение проникают только электроны с энергиями  $E > E_n$ . Иногда бывает нужно учитывать дополнительное рассеяние электронов в сужении, например, на потенциале примесей или на туннельном барьере. Такой рассеиватель схематично изображён штриховкой на рис. 1.2.

Вычислим электрический ток в сужении слева от рассеивающего потенциала. Электроны с энергией  $E$ , приходящие из левого резервуара  $N_1$ , дают вклад в ток, пропорциональный  $ef_1(E) \sum_n v_n$ , где  $v_n = \sqrt{2(E - E_n)/m}$ . Из-за отражения электронов от рассеивающего потенциала возникает обратный ток, пропорциональный  $-ef_1(E) \sum_{n,m} v_n R_{nm}$ . Здесь  $R_{nm}$  — вероятность того, что летящий на рассеиватель в канале  $m$  из  $N_1$  электрон отразится от рассеивающего потенциала в канал  $n$ . Электроны, летящие из правого резервуара, дадут вклад в ток, пропорциональный  $-ef_2(E) \sum_{n,m} v_n T_{nm}$ , где  $T_{nm}$  — вероятность того, что летящий на рассеиватель в канале  $m$  из  $N_2$  электрон пройдёт через рассеиватель в канал  $n$ .

В результате ток оказывается равным

$$I = 2 \sum_{n,m} \int_0^{\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar v_n} ev_n [f_1(E)(\delta_{nm} - R_{nm}) - f_2(E)T_{nm}], \quad (1.7)$$

где мы учли, что плотность состояний в канале  $n$  равна  $2/2\pi\hbar v_n(E)$  (коэффициент 2 в числителе учитывает спиновое вырождение).<sup>2</sup> Для простоты предполагается, что вероятности рассеяния от энергии не зависят. Аккуратнее можно сказать, что зависимость  $T_{nm}(E)$  и  $R_{nm}(E)$  имеется, но мы интересуемся такими случаями, когда перенос тока осуществляется электронами в непосредственной близости к поверхности Ферми, поэтому можно положить  $E = E_F$ .

### 1.1.1 Дополнительные комментарии

Могут возникнуть вопросы:

1. Почему в наших формулах для подсчёта тока при рассмотрении переходов электронов из одного состояния в другое не появляются выражения вида  $f(1 - f)$ ,

<sup>2</sup>В одномерном случае без учёта спина число состояний в интервале импульсов  $dp$  в расчёте на единицу объёма равно  $dp/(2\pi\hbar)$ , что можно переписать как  $dE/[2\pi\hbar(\partial E/\partial p)]$ . После этого остаётся заметить, что  $\partial E/\partial p = v$ .

которые означали бы, что исходное состояние занято, а конечное свободно?

Ответ: Мы считаем, что запущены волны, налетающие на рассеиватель (in). Поэтому эти состояния заняты. А улетающие каналы (out) свободны — там в результате могут оказаться только рассеянные (прошедшие или отраженные) волны.

2. Почему при рассмотрении улетающих волн мы сложили токи, а не волновые функции (т.е., не выкинули ли мы интерференционные слагаемые)?

Ответ: На самом деле, изначально складываются волновые функции, и в одночастичной квантовой механике это было бы так, и точка. Но при наличии многих электронов нужно учесть статистические свойства системы электронов. Тогда нужно использовать вторичное квантование, и в наших формулах коэффициенты перед базисными волновыми функциями  $e^{\pm ik_{L(R)}x} / \sqrt{v_{L(R)}}$  становятся операторами  $\hat{a}_L, \hat{a}_R, \hat{b}_L, \hat{b}_R$ , которые связаны матрицей рассеяния. После этого подсчитываем ток слева от рассеивателя, получая летящий вправо поток  $\langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L \rangle$  и летящий влево поток  $\langle \hat{b}_L^\dagger \hat{b}_L \rangle$ . Последний с помощью матрицы рассеяния можно выразить через  $\hat{a}_L$  и  $\hat{a}_R$ , после чего «интерференционные» вклады типа  $r^* t' \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R$  обращаются в ноль в результате статистического усреднения,  $\langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R \rangle = 0$ , т.к. левые и правые in-состояния приходят из разных резервуаров, а потому статистически независимы.

Наше рассмотрение в основной части текста было упрощенным с этой точки зрения, но при правильном обращении дало правильный ответ.

**Базис состояний рассеяния.** Все вышеприведенные рассуждения проделаны в базисе in–out (налетающих и улетающих частиц). Но можно работать в базисе так называемых состояний рассеяния. Левое состояние рассеяния  $\Psi_L(x)$  — это собственная функция гамильтониана, определённая при всех  $x$  и содержащая налетающую слева волну с единичной амплитудой, а также отраженные и прошедшие волны. Аналогично, правое состояние рассеяния  $\Psi_R(x)$  — это собственная функция гамильтониана, определённая при всех  $x$  и содержащая налетающую справа волну с единичной амплитудой, а также отраженные и прошедшие волны.

Ответ на вопрос 1 тогда получается такой: При таком способе рассуждения мы не рассматриваем в каждой точке волны, летящие как влево, так и вправо. Наши вклады, пропорциональные 1 и  $R$ , могут происходить только от  $\Psi_L(x)$ , а вклад, пропорциональный  $T$  — только от  $\Psi_R(x)$ . Функции заполнения при таком рассуждении возникают как функции заполнения левых и правых состояний рассеяния.

Ответ на вопрос 2: Во вторичном квантовании в наших формулах коэффициенты при состояниях рассеяния становятся операторами уничтожения:  $\hat{a}_L$  и  $\hat{a}_R$ . Подставляя вторично-квантованный оператор  $\hat{\Psi}(x) = \Psi_L(x)\hat{a}_L + \Psi_R(x)\hat{a}_R$  в формулу для тока, кроме учтённых нами вкладов типа  $|r|^2 \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L$  и  $|t'|^2 \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R$  мы также получим «интерференционные» вклады типа  $r^* t' \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R$ . Но такие вклады дают ноль после статистическо-

го усреднения,  $\langle \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_R \rangle = 0$ , т.к. частицы, прилетающие из левого и правого электрода, статистически независимы

## 1.2 Квантование кондактанса

Найдём теперь линейный кондактанс:  $G = dI/dV$  при  $V \rightarrow 0$ . Будем считать, что  $\mu_1 = E_F$ ,  $\mu_2 = E_F - eV$ . Тогда в пределе нулевой температуры получаем

$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_{n,m} T_{nm}. \quad (1.8)$$

Величина

$$G_q = \frac{e^2}{\pi\hbar} = \frac{2e^2}{h} \approx \frac{1}{12.9 \text{ кОм}} \quad (1.9)$$

называется *квантовым кондактансом*. Это естественная единица измерения кондактанса в мезоскопических системах.

Исследуем важный предельный случай формулы (1.8). Пусть  $T_{nm} = \delta_{nm} \theta(E_F - E_n)$ , где  $\theta$  обозначает функцию Хевисайда — такая зависимость означает, что рассеяния на примесях в сужении нет, каналы не перемешиваются, и открыты (с прозрачностью 1) только каналы, для которых максимум эффективного потенциала (см. рис. 1.3) лежит ниже  $E_F$ . Тогда

$$G = NG_q, \quad N = \sum_n \theta(E_F - E_n), \quad (1.10)$$

где  $N$  — число открытых каналов. Посмотрим, как будет меняться  $G$ , если мы будем менять ширину  $W_0$  сужения, прикладывая напряжение к затвору (рис. 1.3). Если  $W_0 \rightarrow 0$ , то  $E_F < E_1$ , поэтому  $N = 0$  и электроны не могут пройти через сужение. Если  $E_1 < E_F < E_2$ , то открыт один канал и  $G = G_q$ . При  $E_2 < E_F < E_3$  открыто два канала, поэтому  $G = 2G_q$ , и т. д. Таким образом, кондактанс сужения квантуется в единицах  $G_q$  (рис. 1.4).<sup>3</sup> (На экспериментальном графике рис. 1.4б высота ступенек подчиняется правилу квантования с очень хорошей точностью, в то время как их края заметно размыты. Это может быть связано с различными причинами, такими, как конечная температура, конечная вероятность подбарьерного прохождения и надбарьерного отражения и др.)

Разделение каналов на открытые и закрытые очень наглядно видно на рис. 1.3. Эффективная энергия  $U_n(x)$  учитывает влияние стенок сужения, т.е. учитывает поперечное квантование. Для открытия какого-либо канала необходимо, чтобы энер-

<sup>3</sup>В этом идеальном случае  $G_q$  можно назвать квантом кондактанса. Однако, в общем случае, когда имеется отражение от примесей в сужении, кондактанс одного канала будет меньше, чем  $G_q$ , и эта величина теряет смысл кванта кондактанса. Поэтому во избежание недоразумений мы называем её *квантовым кондактансом*.

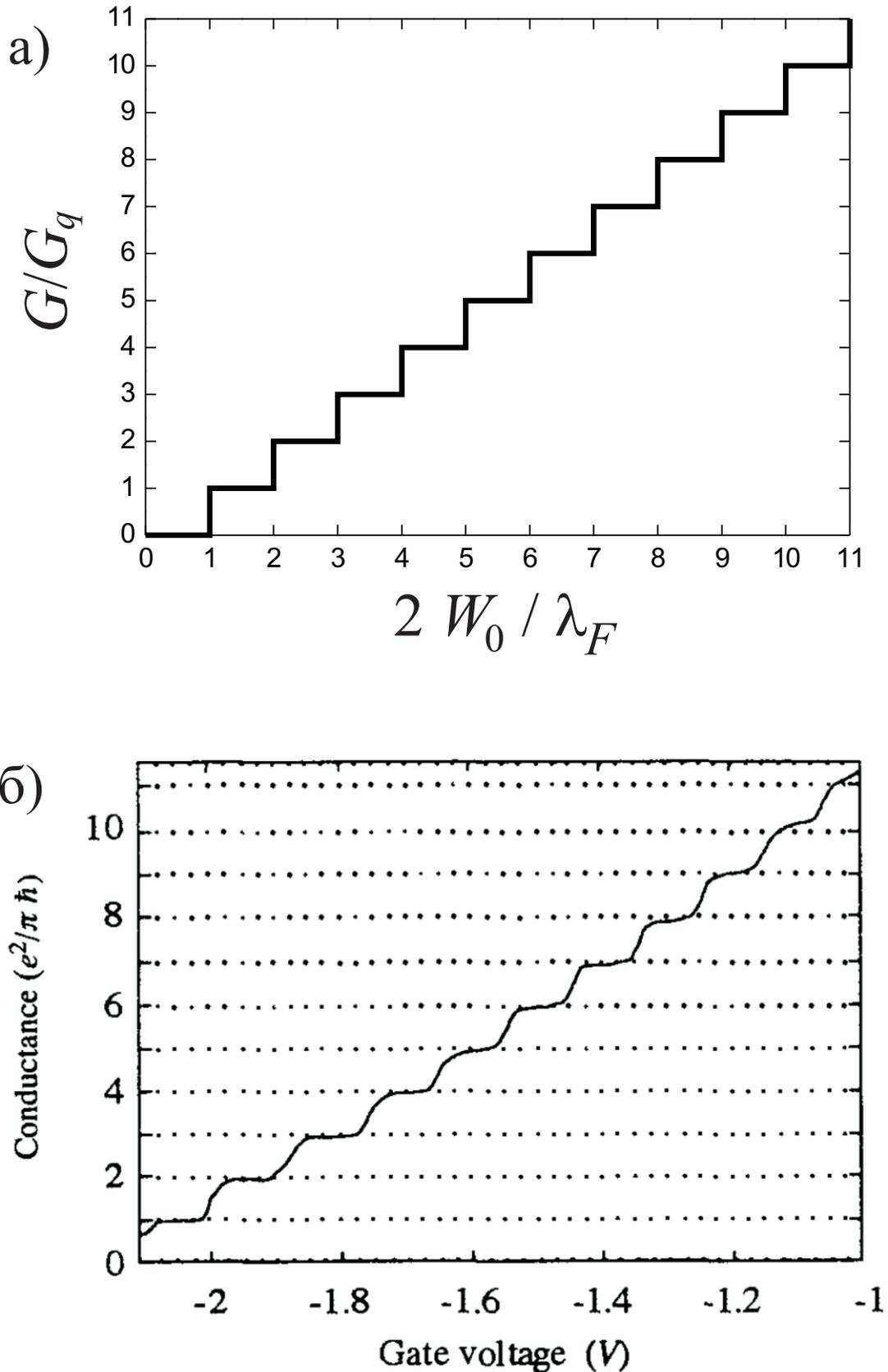


Рис. 1.4: Квантование кондактанса точечного контакта при изменении ширины сужения  $W_0$  напряжением на затворе, (см. рис. 1.1). (а) Кондактанс как функция  $W_0$ . (б) Экспериментальные зависимости кондактанса сужения как функции напряжения на затворе  $V_g$ . С хорошей степенью точности можно считать, что  $W_0$  — линейная функция  $V_g$ . (Первыми экспериментальными работами на эту тему были статьи [11, 12]. График (б) взят из работы [12]).

гия электронов  $E_F$  превысила эффективную энергию, соответствующую этому каналу (т. е. энергия электрона должна превышать энергию поперечного квантования) — тогда электроны проходят. В противном же случае электроны отражаются от барьера (у них «не хватает» энергии на поперечное квантование, и уж тем более не остаётся энергии для движения по  $x$ ), и такой канал закрыт. Если при фиксированном  $E_F$  мы будем увеличивать ширину сужения  $W_0$ , то эффективная энергия будет уменьшаться, и всё большее число каналов будет удовлетворять критерию  $E_n < E_F$ .

### 1.2.1 А где же диссипация?

Может возникнуть естественный вопрос: мы нашли кондактанс, значит и сопротивление. А сопротивление подразумевает диссипацию. Где же она в нашей мезоскопической картине, построенной на основе квантовой механики с сохранением энергии? Ответ на этот вопрос не вполне очевиден, он сводится к следующему: источником сопротивления является мезоскопический контакт, а диссипация происходит за счет неупругих процессов в резервуарах (в которых заданы хим. потенциалы).

### 1.2.2 Элементарный вывод кондактанса одного открытого канала при $T = 0$

Рассматриваем 1D провод. Дифференциал числа состояний:

$$dn = \frac{dp}{2\pi\hbar} = \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar v}, \quad (1.11)$$

поэтому плотность состояний на одну проекцию спина

$$\frac{dn}{d\varepsilon} = \frac{1}{\hbar v}.$$

Ток обусловлен электронами в полосе шириной  $eV$  возле энергии Ферми:

$$I = 2_s e v \cdot \frac{dn}{d\varepsilon} eV = \frac{2e^2}{h} V.$$

### 1.2.3 Элементарное объяснение формулы Шарвина

Электроны, проходящие через дырку в одном или другом направлении получают изменение импульса  $\pm\delta p$ :

$$eV = \frac{(p_F + \delta p)^2}{2m} - \frac{p_F^2}{2m} \approx \frac{p_F \delta p}{m},$$

что соответствует изменению скорости  $\delta v = eV/p_F$ . Соответствующий ток:

$$I = e \cdot \delta v \cdot n \cdot A.$$

Учитывая, что концентрация электронов

$$n = 2 \int_0^{p_F} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

получаем

$$G = \frac{e^2 n A}{p_F} \sim \frac{e^2 A}{p_F} \left( \frac{p_F}{\hbar} \right)^3 \sim \frac{e^2}{h} A k_F^2.$$

Именно такое рассуждение было приведено в статье Шарвина (1965).

Более строго формула выводится из кинетического уравнения Больцмана для функции распределения электронов с граничным условием её равновесности вдали от контакта. В баллистическом пределе (т.е. без примесей) уравнение не содержит интегралов столкновений электронов с примесями, фононами и др.

## 1.2.4 Пояснения к размытию ступеней

Глазман, Лесовик, Хмельницкий, Шехтер (1988) [9]

Квантовость прохождения через эффективный потенциал определяется формой его верхушки. Которая, в свою очередь, определяется формой  $W(x)$  в окрестности сужения. Пусть края сужения имеют кривизны  $R_1$  и  $R_2$ . Обозначим «среднеобратное» значение  $R$ . Тогда в самом узком месте

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R}.$$

Это означает

$$U_{\text{eff}} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mW_0^2} \left( 1 - \frac{2x^2}{W_0 R} \right).$$

Задача о рассеянии на потенциале перевернутой параболы (задача Кембла) имеет точное решение:

$$U = U_0 - \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad D(E) = \frac{1}{1 + \exp(-2\pi\gamma)}, \quad \gamma = \frac{E - U_0}{\hbar\omega}.$$

Без учета квантовости туннелирования было

$$G = G_q [k_F W_0 / \pi],$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Учет квантовости дает

$$\gamma = \frac{\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mW_0^2}}{\hbar \sqrt{\frac{2}{m} \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{mW_0^3 R}}} \approx \frac{k_F W_0 - \pi n}{\sqrt{\frac{2W_0}{R}}},$$

в результате форма ступени дается выражением

$$\delta G = \frac{G_q}{1 + \exp \left[ -\pi \sqrt{\frac{2R}{W_0}} (k_F W_0 - \pi n) \right]}.$$

Эта формула определяет форму ступени при достаточно низких температурах, когда размытие квантовое. В противоположном пределе, при  $T > n\hbar^2/m(RW_0^3)^{1/2}$ , температурное размытие оказывается более сильным. Форма ступени дается аналогичной формулой, в которой фактор  $\sqrt{2R/W_0}$  в экспоненте нужно заменить на  $\hbar^2 n/mW_0^2 T$ .

## 1.3 Full counting statistics

### 1.3.1 Statistics of electron transfers

Characteristic function:

$$\chi(\lambda) = \langle e^{i\lambda N} \rangle \equiv \sum_N P_{t_0}(N) e^{i\lambda N}. \quad (1.12)$$

Property:  $\chi(0) = 1$ .

Moments:

$$\langle N^m \rangle = (\partial_{i\lambda})^m \chi(\lambda)|_{\lambda=0} \quad (1.13)$$

have obvious meaning. Also useful are cumulants which are defined as follows:

$$\langle\langle N^m \rangle\rangle \equiv (\partial_{i\lambda})^m \ln \chi(\lambda)|_{\lambda=0}. \quad (1.14)$$

Several independent contributions: the total characteristic function is the product of partial ones, the total cumulant is the sum of the partial ones. This is why characteristic functions and cumulants are convenient. At the same time, central moments are an important characteristic:

$$\langle\langle (N - \langle N \rangle)^m \rangle\rangle. \quad (1.15)$$

Direct calculations yields

$$\langle\langle N \rangle\rangle = \langle N \rangle, \quad \langle\langle N^2 \rangle\rangle = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle, \quad \langle\langle N^3 \rangle\rangle = \langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle. \quad (1.16)$$

So, at  $m = 2, 3$ , the cumulant coincides with the central moment. This is, however, not a general property, and at  $m \geq 4$  this is not so.

Levitov formula:

$$\ln \chi(\lambda) = 2t_0 \int \frac{dE}{2\pi\hbar} \sum_p \ln \left\{ 1 + T_p(E) (e^{i\lambda} - 1) f_L(E)[1 - f_R(E)] \right. \\ \left. + T_p(E) (e^{-i\lambda} - 1) f_R(E)[1 - f_L(E)] \right\}, \quad (1.17)$$

where

$$f_{L(R)} = \frac{1}{\exp[(E - \mu_{L(R)})/T] + 1}, \quad \mu_L = E_F + eV, \quad \mu_R = E_F. \quad (1.18)$$

It will be convenient for us to consider negative  $V$ , so that electrons move from left to right (and the current  $I$  is also negative).

### 1.3.1.1 Low-temperature limit

In the limit  $T \ll eV$ , only the first of the two  $T_p$ -terms is nonzero:

$$\ln \chi(\lambda) = \frac{2t_0 eV}{2\pi\hbar} \sum_p \ln \left\{ 1 + T_p (e^{i\lambda} - 1) \right\}, \quad (1.19)$$

and  $T_p$  here is taken at  $E = E_F$ . Let us denote the pferactor here as

$$N_{\text{at}} = \frac{t_0 eV}{\pi\hbar}. \quad (1.20)$$

It has the physical meaning of the number of attempts that electrons in a single channel perform during time  $t_0$  trying to go through the scatterer. In order to see it, we consider the average time  $\Delta t$  between electron passages in a single (open) channel:

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{I}{e} = \frac{G_q V}{e} = \frac{eV}{\pi\hbar}. \quad (1.21)$$

So, electrons coming from a single open channel try to get through the scatterer with period  $\Delta t$ . During time  $t_0$ , there will be  $t_0/\Delta t$  attempts — this is exactly the expression in (1.20).

The characteristic function determined by (1.19) can be written as

$$\chi(\lambda) = \prod_p \chi_p(\lambda), \quad \chi_p(\lambda) = [(1 - T_p) + T_p e^{i\lambda}]^{N_{\text{at}}}. \quad (1.22)$$

With the help of Newton's binomial formula, we can rewrite the characteristic function for a single channel as

$$\chi_p(\lambda) = \sum_{N=0}^{N_{\text{at}}} C_{N_{\text{at}}}^N T_p^N (1 - T_p)^{N_{\text{at}}-N} e^{iN\lambda}. \quad (1.23)$$

The inverse Fourier transform yields the *binomial distribution* for probability (probability to win  $N$  times in  $N_{\text{at}}$  attempts):

$$P_p(N) = C_{N_{\text{at}}}^N T_p^N (1 - T_p)^{N_{\text{at}} - N}. \quad (1.24)$$

At  $T_p \ll 1$ ,  $N \ll N_{\text{at}}$ , the binomial distribution turns into the Poisson distribution. Defining  $\langle N \rangle = N_{\text{at}} T_p$ , in this limit we can find

$$\begin{aligned} P_p(N) &= \frac{N_{\text{at}}!}{N!(N_{\text{at}} - N)!} T_p^N (1 - T_p)^{N_{\text{at}} - N} \approx \frac{N_{\text{at}}^N}{N!} T_p^N e^{(N_{\text{at}} - N) \ln(1 - T_p)} \approx \frac{(N_{\text{at}} T_p)^N}{N!} e^{-N_{\text{at}} T_p} \\ &\approx \frac{\langle N \rangle^N}{N!} e^{-\langle N \rangle}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

### 1.3.1.2 Energy-independent transmission eigenvalues

If the transmission eigenvalues do not depend on energy, the energy integral in the Levitov formula can be explicitly taken at an arbitrary relation between  $eV$  and  $T$ . The result is

$$\ln \chi(\lambda) = \frac{t_0 T}{\pi \hbar} \sum_p \left\{ \operatorname{arccosh}^2 \left[ T_p \cosh \left( \frac{eV}{2T} + i\lambda \right) + (1 - T_p) \cosh \left( \frac{eV}{2T} \right) \right] - \left( \frac{eV}{2T} \right)^2 \right\}. \quad (1.26)$$

In the case of fully open channels,  $T_p = 1$ , this formula yields

$$\ln \chi(\lambda) = \frac{t_0 T}{\pi \hbar} \sum_p \left( i\lambda \frac{eV}{T} - \lambda^2 \right), \quad (1.27)$$

which simplifies further in the limit  $T = 0$  to

$$\ln \chi(\lambda) = \sum_p i\lambda \frac{t_0 eV}{\pi \hbar} = \sum_p i\lambda N_{\text{at}}. \quad (1.28)$$

In this transparent limit, we have  $N_{\text{at}} = \langle N \rangle$ , hence the result can be written as

$$\chi(\lambda) = \prod_p e^{i\lambda \langle N \rangle}, \quad (1.29)$$

which clearly corresponds to fully correlated transport in each channel with certain number of passing electrons  $\langle N \rangle$ .

### 1.3.2 Noise

“The noise is the signal”, Rolf Landauer.

Differentiating the Levitov formula (1.17), we find

$$\langle Q \rangle = \langle \langle Q \rangle \rangle = e \left. \frac{\partial \ln \chi}{\partial (i\lambda)} \right|_{\lambda=0} = \frac{et_0}{\pi\hbar} \int dE \sum_p T_p(E) [f_L(E) - f_R(E)] \quad (1.30)$$

(we can recognize here the expression that leads to the Landauer formula for conductance). The second cumulant coincides with the second central moment:

$$\begin{aligned} \langle (Q - \langle Q \rangle)^2 \rangle &= \langle \langle Q^2 \rangle \rangle = e^2 \left. \frac{\partial^2 \ln \chi}{\partial (i\lambda)^2} \right|_{\lambda=0} \\ &= \frac{e^2 t_0}{\pi\hbar} \int dE \sum_p \{ T_p [f_L(1 - f_L) + f_R(1 - f_R)] + T_p(1 - T_p)(f_L - f_R)^2 \}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Note that at equilibrium (without applied voltage bias, i.e., at  $V = 0$ ), while  $\langle Q \rangle$  obviously vanish, the second cumulant (coinciding with  $\langle Q^2 \rangle$  in this case) is finite. Only the first term in the curly brackets survives, and if the transmission eigenvalues do not depend on energy on the scale of the order of  $T$  around energy  $E = E_F$ , then calculating the integrals of the form

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dE f(E)(1 - f(E)) &= T \int_0^\infty d \frac{E - \mu}{T} f(E)(1 - f(E)) \\ &\approx T \int_{-\infty}^\infty dx \frac{1}{e^x + 1} \left( 1 - \frac{1}{e^x + 1} \right) = \frac{T}{4} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\cosh^2(x/2)} = T, \end{aligned} \quad (1.32)$$

we find

$$\langle \langle Q^2 \rangle \rangle_{\text{eq}} = \frac{2e^2 t_0 T}{\pi\hbar} \sum_p T_p(E_F) = 2GTt_0. \quad (1.33)$$

This result can be interpreted if we consider the correlation function of current fluctuations (usually called the *current noise power*):

$$S(\omega) = \langle \hat{I}(t)\hat{I}(t') + \hat{I}(t')\hat{I}(t) - 2\langle \hat{I}(t)\rangle\langle \hat{I}(t')\rangle \rangle_\omega. \quad (1.34)$$

If the observation time  $t_0$  is large enough, it can be shown that the second cumulant of the transmitted charge is related to the zero-frequency noise as

$$\langle \langle Q^2 \rangle \rangle = \frac{S(0)t_0}{2}. \quad (1.35)$$

On the other hand, at equilibrium, correlators like the noise power obey the fluctuation-dissipation theorem (fluctuations represented by the noise are related with dissipation represented by the resistance). For the noise, it states that

$$S(0) = 4TG. \quad (1.36)$$

We see that combining (1.35) and (1.36), we reproduce (1.33). At the same time, the equilibrium current fluctuations are known as the *Johnson–Nyquist noise* (or *thermal noise*), so our result (1.33) (which is proportional to temperature) is a direct consequence of this phenomenon.

In the opposite limit, when  $eV \gg T$ , we obtain the non-equilibrium noise, which is called *shot noise*. In this limit, only the second term in the curly brackets in (1.31) survives, and the result can be written in terms of the zero-frequency noise as

$$S(0) = 2eG_q V \sum_p T_p(1 - T_p). \quad (1.37)$$

Completely closed channels obviously do not contribute to the noise. At the same time, we see that completely open channels ( $T_p = 1$ ) do not contribute to the noise as well. The reason is that in a completely open channel, the transport is fully correlated, as we discussed above. Therefore, the noise (which measures irregularity of transport) is absent. Physically, the shot noise is due to discreteness of the electron charge. Because of that, the flow of charge is not continuous; instead, electron transfers happen one by one.

We see that the shot noise probes transmission properties of the system but in a different manner compared to the conductance. While measuring conductance, we effectively measure  $\sum_p T_p$ , this information is not sufficient to predict the shot noise, which is determined by  $\sum_p T_p(1 - T_p)$ . So, the shot noise contains some information which cannot be deduced from the conductance.

Considering the two simplest limiting cases, we find that

- for open channels, the zero-frequency noise is absent,  $S(0) = 0$ .
- for tunnel junction with  $T_p \ll 1$ , the noise can be written as  $S(0) = 2e\langle I \rangle$  — this *Schottky formula* also follows directly from the Poisson distribution. This Poisson value is the maximum for the shot noise. Due to the factors  $(1 - T_p)$  in (1.37), the shot noise can only be smaller than the Poisson value.

In order to quantify suppression of the noise in comparison to the maximal value, we can define the *Fano factor*:

$$F = \frac{S(0)}{2e\langle I \rangle} = \frac{\sum_p T_p(1 - T_p)}{\sum_p T_p}, \quad 0 \leq F \leq 1. \quad (1.38)$$

In a QPC, all channels are either fully open or fully closed, so there is no shot noise, and  $F = 0$ . In tunnel junctions, the noise is maximized, and  $F = 1$ .

The third important example of the scatterer is a diffusive wire. In this case, using the Dorokhov distribution, we obtain

$$F = \frac{\int_0^1 dT P_D(T) T(1-T)}{\int_0^1 dT P_D(T) T} = \frac{\int_0^1 dT \sqrt{1-T}}{\int_0^1 dT / \sqrt{1-T}} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}. \quad (1.39)$$

In the case of energy-independent transmission eigenvalues, from the general formula (1.31) for the second cumulant, we find (calculating integrals over energy)

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{2}{t_0} \langle\langle Q^2 \rangle\rangle = 2G_q \left( \sum_p T_p \right) \int dE \{2f(1-f) + F(f_L - f_R)^2\} \\ &= 2G \left[ eV F \coth \left( \frac{eV}{2T} \right) + 2T(1-F) \right]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

This result is valid at arbitrary relation between  $eV$  and  $T$ . It is convenient to rewrite the obtained result as<sup>4</sup>

$$\frac{S(0)}{4GT} = Fv \coth v - F + 1, \quad v = \frac{eV}{2T}. \quad (1.41)$$

Limiting cases:

$$\frac{S(0)}{4GT} = \begin{cases} 1, & v \rightarrow 0, \\ Fv + (1-F), & v \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.42)$$

---

<sup>4</sup>One could naively write  $S(0)$  in the l.h.s. of (1.41) in terms of the Fano factor, obtaining  $F = F \coth v + (1-F)/v$ , which seems to be an equation determining  $F$ . However, this is wrong since  $F$  is defined for the shot noise (this is the  $F$  that enters the r.h.s.), while  $S(0)$  in the l.h.s. is defined for arbitrary case. The shot noise corresponds to the  $v \rightarrow \infty$  limit. In this limit, our “quasi-equation” produces trivial result  $F = F$ .

So, (1.41) actually expresses  $S(0)$  for arbitrary noise in terms of  $F$  corresponding to the shot noise.

# Глава 2

## Coulomb blockade.

### 2.1 Coulomb effects in a single-electron transistor (SET)

#### 2.1.1 Toy model: resistively-shunted capacitor

Начнём рассмотрение влияния одноэлектронных кулоновских эффектов на электронный транспорт с простейшей системы: конденсатор с утечкой, имеющий ёмкость  $C$  и шунтированный туннельным сопротивлением  $R$ . В идеальном конденсаторе  $R$  было бы бесконечным, и постоянный ток через него был бы невозможен — это соответствует случаю очень толстого слоя диэлектрика между обкладками конденсатора, туннелирование через который невозможно. В нашем же случае постоянный ток возможен за счёт туннелирования через диэлектрик. Тем не менее ток (точнее говоря, средний по времени ток) в этой системе вовсе не даётся простой формулой

$$\langle I \rangle_t = \frac{V}{R} \quad (2.1)$$

— такая формула должна нарушаться при малых напряжениях, когда ток обеспечивается туннелированием единичных электронов и становится важна дискретность переноса заряда.

Электростатическая энергия конденсатора с ёмкостью  $C$  и зарядами  $Q$  (пусть эта величина положительна) и  $-Q$  на обкладках равна  $Q^2/2C$ , или  $CV^2/2$ , где  $V = Q/C$  — напряжение между обкладками. Поставим следующий вопрос: какое напряжение необходимо приложить к конденсатору, чтобы туннелирование электрона с одной обкладки на другую стало возможным? Если электрон туннелирует с отрицательно заряженного электрода на положительно заряженный электрод, то заряд конденсатора становится равным  $(Q - |e|)$ , поэтому изменение энергии равно

$$\frac{(Q - |e|)^2}{2C} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{e^2 - 2|e|Q}{2C}. \quad (2.2)$$

Чтобы такой процесс был возможен, изменение энергии должно быть отрицательным, что приводит к условию  $V > |e|/2C$ .<sup>1</sup> Таким образом, электронный транспорт невозможен (в случае нулевой температуры  $T = 0$ ) при напряжениях  $|V| < |e|/2C$ . Такое состояние контакта с нулевым туннельным током при конечном напряжении является простейшим примером кулоновской блокады.

Необходимо удовлетворить двум требованиям, чтобы кулоновская блокада могла наблюдаться: (1)  $E_c$  должно превышать  $T$ ,<sup>2</sup> чтобы эффект «не замылся» температурными флуктуациями, и (2) сопротивление  $R$  должно превосходить так называемое квантовое сопротивление  $R_q = \pi\hbar/e^2 = h/2e^2 \approx 12.9$  кОм, чтобы эффект «не замылся» квантовыми флуктуациями. Дело в том, что при наличии шунтирующего сопротивления конденсатор будет разряжаться за время  $\Delta t \sim RC$ , поэтому в соответствии с принципом неопределённости его энергия определена с точностью до величины  $\Delta E \sim \hbar/\Delta t \sim \hbar/RC$ . Поэтому кулоновская энергия  $e^2/2C$  приведёт к наблюдаемым эффектам только в случае, если она будет превышать величину  $\Delta E$ . Отсюда и получается условие на сопротивление (по порядку величины, за коэффициентами не следим).

### 2.1.2 SET

Довольно трудно изготовить контакт, удовлетворяющий обоим этим требованиям, поэтому кулоновская блокада в одиночных туннельных контактах даже при очень низких температурах обычно не наблюдается. Поэтому, чтобы наблюдать эффекты кулоновской блокады, обычно исследуют не туннельные контакты, а мезоскопические металлические островки или гранулы, у которых собственная ёмкость довольно маленькая и которые связаны с массивными металлическими берегами туннельными контактами с сопротивлением, много большим квантового сопротивления.<sup>3</sup>  $I - V$  характеристика этой системы имеет ступенчатые особенности на напряжениях, соответствующих изменению среднего числа электронов на островке на единицу. Такие ступенчатые особенности принято называть кулоновской лестницей. Часто контакты такого типа называют *одноэлектронными транзисторами*. Ниже мы будем использовать этот термин для обозначения рассматриваемого контакта через островок.

Для того чтобы разобраться в физической природе данного эффекта, рассмотрим эквивалентную схему контакта через островок (рис. 2.1а). Островок связан с двумя проводниками, напряжение между которыми равно  $V = V_2 - V_1$ , туннельными контактами с ёмкостями  $C_1$  и  $C_2$  и сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , а также через ёмкость  $C_g$  — с

<sup>1</sup>Записывая это условие через заряд, получим  $Q > |e|/2$ . Это, конечно, не означает буквально «половину» электрона на обкладке конденсатора, т. к. заряд обкладки возникает в результате многочастичного эффекта, связанного с перераспределением заряда в цепи.

<sup>2</sup>Мы будем везде подразумевать, что температура записана в энергетических единицах, поэтому константа Больцмана нигде в формулах не возникает.

<sup>3</sup>Одними из первых теоретических работ на эту тему были работы [4].

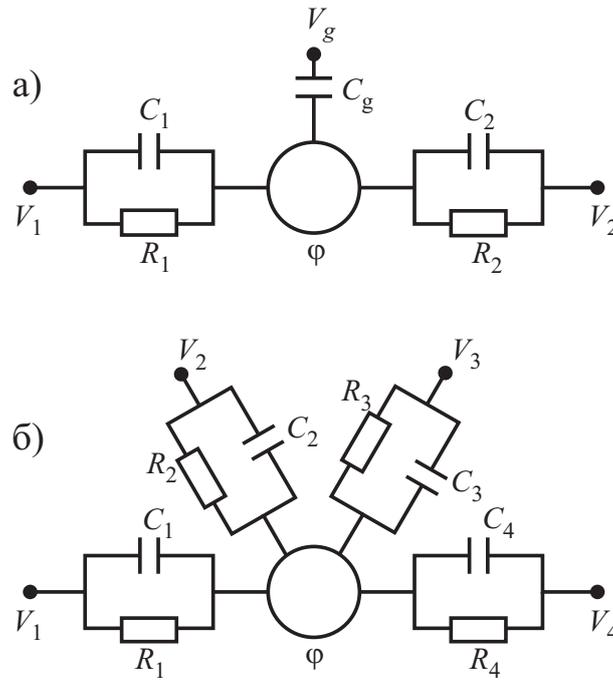


Рис. 2.1: (а) Эквивалентная схема контакта, состоящего из островка, граничащего с двумя проводниками через туннельные контакты и связанного ёмкостной связью с затвором. (б) Эквивалентная схема контакта островка с несколькими проводниками. В обоих случаях  $R$  — это туннельное сопротивление.

затвором, имеющим потенциал  $V_g$ .<sup>4</sup> При этом связь с затвором мы будем считать чисто ёмкостной, так что туннельное сопротивление этого контакта равно бесконечности и непосредственный перенос заряда через него невозможен. Типичные экспериментальные параметры таковы, что  $C_1 \sim C_2 \sim 10^{-16}$  Ф, в то время как  $C_g \ll C_{1(2)}$ . Из рис. 2.1а становится ясно происхождение термина *одноэлектронный транзистор* — так же, как и в обычном полупроводниковом транзисторе, в этой системе может течь ток между двумя резервуарами, и этот ток управляется с помощью напряжения на затворе.

Для симметричности изложения удобно начать рассмотрение с более общей схемы одноэлектронного транзистора (рис. 2.1б), где островок соединён ёмкостями  $C_i$  и туннельными сопротивлениями  $R_i$  с несколькими проводниками, имеющими потенциалы  $V_i$ . Точка отсчёта потенциалов проводников может быть выбрана любой; ниже мы будем выбирать её из соображений удобства. The island serves as the internal plate of all the capacitors, and denoting its electric potential as  $\mathcal{V}$ , we can write the potential difference on capacitor  $i$  as  $(\mathcal{V} - V_i)$ . So, the charge on the island can be written as the sum of the charges on the internal plates of all the capacitors: [insert Fig. with capacitor and signs of the charges]

$$\sum_i C_i (\mathcal{V} - V_i) = ne, \quad (2.3)$$

<sup>4</sup>Индекс  $g$  — от английского слова gate (затвор).

which yields the potential of the island

$$\mathcal{V} = \frac{\sum_i C_i V_i + ne}{C_\Sigma}. \quad (2.4)$$

Here  $n$  — число избыточных электронов на островке (при  $n = 0$  островок электронейтрален; число  $n$  может быть как положительным, так и отрицательным, что соответствует добавлению электронов на островок или удалению их с островка), и  $C_\Sigma = \sum_i C_i$ . (Важно помнить, что буква « $e$ » учитывает отрицательный заряд электрона.) Зная потенциал островка, мы можем легко найти электростатическую энергию системы:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i C_i (V_i - \mathcal{V})^2. \quad (2.5)$$

Подставляя в эту формулу  $\mathcal{V}$  из (2.4), найдём выражение для  $U$  через удобные независимые переменные  $V_i$  и  $n$ :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_i C_i \left( V_i - \frac{\sum_j C_j V_j + ne}{C_\Sigma} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i C_i \left( \frac{\sum_j C_j (V_i - V_j) - ne}{C_\Sigma} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2C_\Sigma^2} \sum_i C_i \left[ \left( \sum_j C_j (V_i - V_j) \right)^2 - 2ne \sum_j C_j (V_i - V_j) + (ne)^2 \right]. \end{aligned}$$

The middle term here disappears due to antisymmetry of  $\sum_{ij} C_i C_j (V_i - V_j)$  under permutation  $i \leftrightarrow j$ . So,

$$U = \frac{1}{2C_\Sigma^2} \sum_{ijk} C_i C_j C_k (V_i - V_j)(V_i - V_k) + \frac{(ne)^2}{2C_\Sigma}.$$

Transforming the first term as

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} C_i C_j C_k (V_i - V_j)(V_i - V_k) &= \sum_{ijk} C_i C_j C_k (V_i - V_j) V_i = C_\Sigma \sum_{ij} C_i C_j (V_i^2 - V_i V_j) \\ &= \frac{C_\Sigma}{2} \sum_{ij} C_i C_j (V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j) = \frac{C_\Sigma}{2} \sum_{ij} C_i C_j (V_i - V_j)^2, \end{aligned}$$

we can finally write the electrostatic energy in the form

$$U = \frac{1}{2C_\Sigma} \sum_i \sum_{j>i} C_i C_j (V_i - V_j)^2 + \frac{(ne)^2}{2C_\Sigma}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) даёт кулоновскую энергию для произвольных  $n$  и  $V_i$ . В это выражение входит работа, выполняемая источниками напряжения (поддерживающими

потенциалы резервуаров), когда  $n$  на островке меняется при туннелировании электронов с островка или на островок. Когда электрон туннелирует на островок, потенциал островка, according to (2.4), меняется на  $\delta\mathcal{V} = e/C_\Sigma$ , и при этом эффективный заряд на ёмкостях, равный  $C_i(\mathcal{V} - V_i)$ , меняется на  $C_i\delta\mathcal{V} = eC_i/C_\Sigma$ . Работа, произведённая источником напряжения с номером  $k$ , поставляющим заряд на островок, будет равна  $(1 - C_k/C_\Sigma)eV_k$ , все остальные ЭДС произведут работу  $-eV_iC_i/C_\Sigma$ . Разность кулоновской энергии  $U$  и работ ЭДС  $W$  мы назовём свободной энергией:  $F = U - W$ . Сумма произведённых работ ЭДС равна

$$\begin{aligned} W_k &= \left(1 - \frac{C_k}{C_\Sigma}\right) eV_k - \sum_{i \neq k} \frac{eV_i C_i}{C_\Sigma} = \frac{e}{C_\Sigma} \left[ (C_\Sigma - C_k) V_k - \sum_{i \neq k} C_i V_i \right] \\ &= \frac{e}{C_\Sigma} \left[ C_\Sigma V_k - \sum_i C_i V_i \right] = \frac{e}{C_\Sigma} \sum_i C_i (V_k - V_i). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Эта работа не зависит от  $n$ , то есть работа по добавлению одного электрона на островок не зависит от того, сколько уже электронов находится на островке. В то же время важно отметить, что эта работа зависит от того, через какой именно контакт произошло добавление заряда (т. е. от номера  $k$ ). Работа источников при инжектировании  $n_k$  электронов через контакт с номером  $k$ , очевидно, равна  $n_k W_k$ .

## 2.2 Single-electron transistor at thermodynamic equilibrium

Вернёмся теперь к изучению электрической цепи, показанной на рис. 2.1a. In this case, the summation index takes three possible values:  $i = 1, 2, g$ . Для начала рассмотрим случай, когда система находится в равновесии:  $V_1 = V_2 = 0$  (диссипативный ток не течёт). В этом случае работа источников по добавлению  $n$  электронов на островок определена однозначно и не зависит от того, через какие контакты электроны туннелировали на островок ( $k = 1$  or  $k = 2$ ). Эта работа равна  $W = -neV_g C_g / C_\Sigma$ . После вычитания работы из кулоновской энергии найдём свободную энергию:

$$F = U - W = \frac{(C_1 + C_2)C_g V_g^2 + 2neC_g V_g + (ne)^2}{2C_\Sigma} = \frac{(C_g V_g + ne)^2}{2C_\Sigma} + F_0, \quad (2.8)$$

где  $F_0 = (1 - 2C_g/C_\Sigma)C_g V_g^2/2$ . Величина  $F_0$  не зависит от  $n$ , следовательно является константой и может быть опущена из (2.8) без ограничений общности, поскольку не влияет на перенос заряда. Минимизируя свободную энергию по отношению к  $n$ , мы

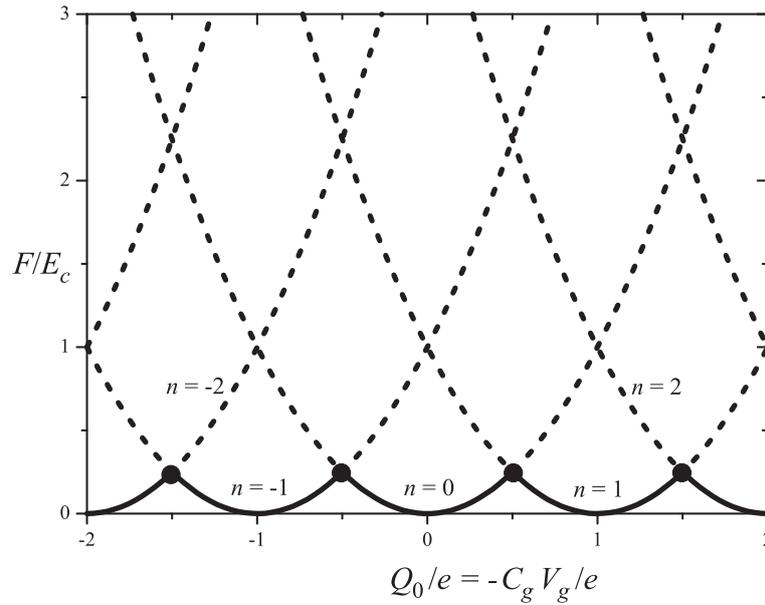


Рис. 2.2: Зависящая от  $n$  часть свободной энергии (2.8) при  $T = 0$  как функция заряда  $Q_0 = -C_g V_g$ , наведённого затвором на островке (константа  $F_0$ , не зависящая от  $n$ , отброшена). При каждом  $n$  свободная энергия  $F$  имеет вид параболы. Минимум свободной энергии достигается выбором подходящего числа  $n$  избыточных электронов на островке, в результате реализуется кривая, изображённая сплошной линией. Минимальная свободная энергия оказывается периодической функцией  $Q_0$ , что отражает дискретность числа электронов на островке. Точками обозначены так называемые точки вырождения, в которых одинаковой свободной энергией обладают состояния с отличающимся на единицу количеством электронов на островке.

формально получим  $n = -C_g V_g/e$ , что соответствует заряду  $Q_0 = -C_g V_g$ , наведённому затвором на островке.<sup>5</sup>

Однако, поскольку  $n$  — целое число, оно в общем случае не может быть в точности равно  $Q_0/e$ . На самом деле минимум свободной энергии достигается при целом  $n$ , ближайшем к  $Q_0/e$ , т. е. лежащем в диапазоне

$$\frac{Q_0}{e} - \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{Q_0}{e} + \frac{1}{2}. \quad (2.9)$$

Другими словами, формула (2.8) порождает семейство парабол, каждая из которых описывает зависимость свободной энергии от наведённого заряда при заданном значении  $n$ , как показано на рис. 2.2. Для достижения минимума свободной энергии при

<sup>5</sup>На практике случайно расположенные около островка заряженные примеси сдвигают наведённый заряд на случайную величину  $Q_{00}$ , которая не зависит от  $V_g$ , но может изменяться во времени. Чтобы учесть эти эффекты, надо переопределить  $Q_0$ :

$$Q_0 = Q_{00} - C_g V_g.$$

изменении  $Q_0$  система сама будет подстраивать  $n$  так, чтобы всегда иметь наименьшую возможную свободную энергию [эта подстройка числа избыточных электронов  $n$  и описывается формулой (2.9)].

Поэтому будет реализовываться зависимость  $F(Q_0)$ , показанная на рис. 2.2 сплошной линией. Таким образом, свободная энергия оказывается периодической функцией  $Q_0$ , что отражает дискретность числа электронов на островке. Важно отметить, что параболы для  $n$  и  $n + 1$  пересекаются в точке

$$Q_0 = \left( n + \frac{1}{2} \right) e \quad (2.10)$$

— такие точки называют точками вырождения (показаны на рис. 2.2), свободная энергия в них равна  $e^2/8C_\Sigma = E_c/4$ , где  $E_c = e^2/2C_\Sigma$  — естественная единица зарядовой энергии данной системы. В этих точках состояние системы вырождено, т. к. два разных состояния (с избыточным числом электронов  $n$  и  $n + 1$ ) имеют одинаковую энергию. При изменении  $V_g$  в каждой точке вырождения один электрон туннелирует с окружающих проводников на островок (или наоборот), и число избыточных электронов на островке меняется с  $n$  на  $n + 1$  (или на  $n - 1$ ). При конечных температурах переход  $n \rightarrow n \pm 1$  будет, конечно, размыт температурными флуктуациями переменной  $n$ .

Важная роль вырождения состояний системы в точках пересечений парабол, соответствующих разным  $n$ , проявляется также при приложении бесконечно малого напряжения  $V_2 - V_1$ . Когда  $V_g$  проходит через точки вырождения (полуцелые  $Q_0$ ), электронам не требуется проходить какой-либо энергетический барьер при движении от резервуара 1 к резервуару 2 через островок (даже при  $T = 0$ ), и через контакт в этом случае начинает течь постоянный электрический ток.  $I - V_g$  характеристика системы имеет, таким образом, пики в точках вырождения. [нарисовать  $\frac{dI}{dV}|_{V=0}$  vs.  $V_g$ ]

## 2.3 Single-electron transistor at finite voltage bias

### 2.3.1 Zero temperature

Рассмотрим, при каких условиях через одноэлектронный транзистор может протекать электрический ток при конечных напряжениях. Начнём со случая  $T = 0$ . Чтобы кулоновские эффекты не блокировали электронный транспорт, необходимо, чтобы туннелирование электрона через систему было энергетически выгодным. В терминах свободной энергии  $F$  это означает, что ток через систему потечёт, если изменения  $F$ , соответствующие переносу заряда, будут отрицательны. Рассмотрим это подробнее.

Используя (2.7), найдём работу, выполненную электрическим полем при переносе одного электрона с электрода 1 или 2 на островок (при фиксированных  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_g$ ):

$$W_1 = \frac{e[(C_2 + C_g)V_1 - C_2V_2 + Q_0]}{C_\Sigma}, \quad (2.11a)$$

$$W_2 = \frac{e[(C_1 + C_g)V_2 - C_1V_1 + Q_0]}{C_\Sigma}. \quad (2.11b)$$

In both the cases, the change of the electrostatic energy  $U$  due to the change of electron number on the island  $n \rightarrow n \pm 1$  is only due to the last term in (2.6) and equals

$$\Delta U^\pm = \frac{e^2}{2C_\Sigma} [(n \pm 1)^2 - n^2] = \frac{e^2}{C_\Sigma} \left( \frac{1}{2} \pm n \right). \quad (2.12)$$

Отсюда по формулам

$$\Delta F_1^\pm = \Delta U^\pm \mp W_1, \quad \Delta F_2^\pm = \Delta U^\pm \mp W_2 \quad (2.13)$$

найдем  $\Delta F_1^\pm(n)$  — изменение  $F$  при туннелировании одного электрона с первого электрода на островок (знак  $+$ ) или с островка на первый электрод (знак  $-$ ), и аналогично  $\Delta F_2^\pm$  — изменение  $F$  при туннелировании одного электрона со второго электрода на островок или с островка на второй электрод. В результате

$$\Delta F_1^\pm(n) = \frac{e^2}{C_\Sigma} \left[ \frac{1}{2} \pm n \mp \frac{(C_2 + C_g)V_1 - C_2V_2 + Q_0}{e} \right], \quad (2.14a)$$

$$\Delta F_2^\pm(n) = \frac{e^2}{C_\Sigma} \left[ \frac{1}{2} \pm n \mp \frac{(C_1 + C_g)V_2 - C_1V_1 + Q_0}{e} \right]. \quad (2.14b)$$

Здесь нам будет удобно воспользоваться свободой выбора начала отсчёта потенциалов, выбрав потенциалы резервуаров 1 и 2 антисимметричным образом, так что  $V_1 = -V/2$ ,  $V_2 = V/2$ .<sup>6</sup> В результате формулы (2.14) переписутся в более простом виде, который вместо потенциалов двух резервуаров содержит лишь разность потенциалов между ними:

$$\Delta F_1^\pm(n) = 2E_c \left\{ \frac{1}{2} \pm \left( n - \frac{Q_0}{e} \right) \pm \frac{(C_2 + C_g/2)V}{e} \right\}, \quad (2.15a)$$

$$\Delta F_2^\pm(n) = 2E_c \left\{ \frac{1}{2} \pm \left( n - \frac{Q_0}{e} \right) \mp \frac{(C_1 + C_g/2)V}{e} \right\}. \quad (2.15b)$$

<sup>6</sup>Конечно, от выбора *общего* начала отсчёта всех трёх потенциалов величины  $\Delta F$  зависеть не должны. Именно поэтому, если сохранить среднее значение потенциалов  $V_1$  и  $V_2$  ненулевым, то эта величина  $V_0 = (V_1 + V_2)/2$  войдёт в формулы в комбинации  $(V_0 - V_g)$ .

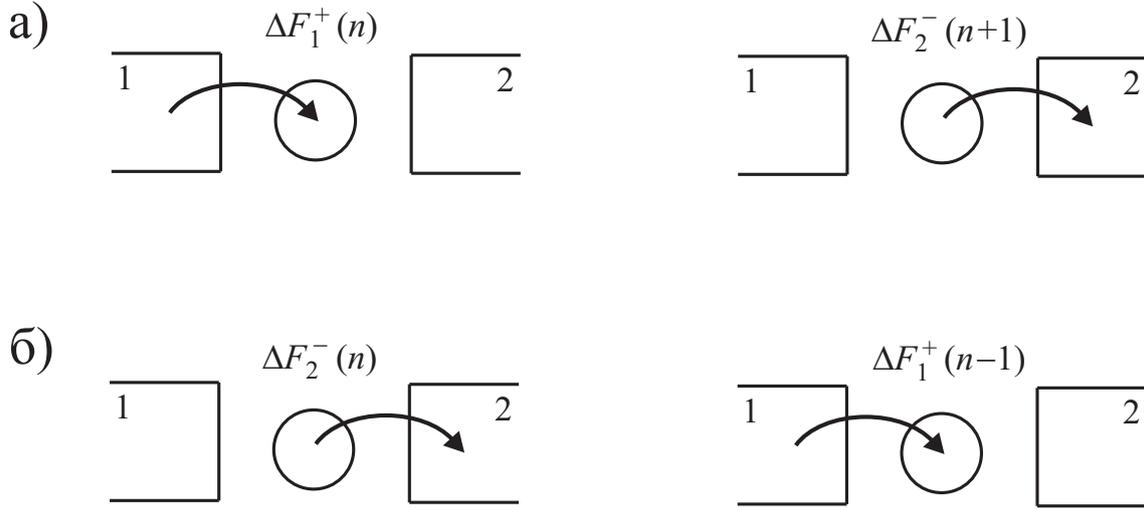


Рис. 2.3: Два типа переноса заряда при  $V > 0$ , в каждом случае процесс состоит из двух шагов (левый рисунок — первый шаг, правый — второй). Начальное число электронов на островке  $n$ , промежуточное равно  $(n + 1)$  в случае (а), и  $(n - 1)$  в случае (б), окончательное число электронов снова равно  $n$ . Поэтому процесс может повторяться снова и снова. Процессы, показанные на рисунках (а) и (б), имеют различные пороговые значения напряжения (которые соответствуют выполнению условия  $\Delta F_1^+(n) < 0$  в первом случае и  $\Delta F_2^-(n) < 0$  — во втором), и кулоновская блокада при  $T = 0$  имеет место до тех пор, пока напряжение  $V$  не достигнет меньшего из двух пороговых значений.

Чтобы такие процессы туннелирования стали возможны при  $T = 0$ , необходимо, чтобы соответствующие  $\Delta F$  были отрицательными. Если электрон проходит, например, с первого электрода на второй через островок (см. рис. 2.3а), то сумма соответствующих  $\Delta F$  равна  $eV$ . Действительно, в этом процессе

$$\Delta F_1^+(n) + \Delta F_2^-(n + 1) = eV, \quad (2.16)$$

как следует из (2.15), поэтому во всяком случае должно быть выполнено очевидное условие  $V > 0$ . При этом, чтобы был возможен каждый из двух шагов процесса переноса электрона (рис. 2.3а), достаточно потребовать того, что возможен первый шаг: можно проверить, что если  $\Delta F_1^+(n) < 0$  (туннелирование электрона на островок с первого электрода энергетически выгодно), то  $\Delta F_2^-(n + 1) < 0$  «автоматически».<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Действительно, пусть мы стартуем с равновесной ситуации, тогда при  $V = 0$  число электронов на островке удовлетворяет условию (2.9), следовательно величина  $(n + 1/2 - Q_0/e)$  положительна. Если мы теперь прикладываем напряжение, то, как видно из формулы (2.15а), условие  $\Delta F_1^+(n) < 0$  выполнится при определённом положительном  $V$  (напомним, что  $e < 0$ ). Отсюда сразу ясно, что величина

$$\Delta F_2^-(n + 1) = -\frac{e^2}{C_\Sigma} \left\{ \left( n + \frac{1}{2} - \frac{Q_0}{e} \right) + \frac{[C_1 + C_g/2]V}{|e|} \right\}$$

в этих условиях является отрицательной.

Similarly, for the second mechanism

$$\Delta F_2^-(n) + \Delta F_1^+(n-1) = eV, \quad (2.17)$$

and if the first step of the process is allowed, the second one is allowed automatically.

Note that changes of the free energies for the reversed processes are opposite to each other:

$$\Delta F_1^+(n) = -\Delta F_1^-(n+1), \quad (2.18)$$

$$\Delta F_2^+(n) = -\Delta F_2^-(n+1). \quad (2.19)$$

Из (2.15) следует, что основные параметры, определяющие транспортные свойства системы при заданных ёмкостях, — это  $Q_0$  (т. е. потенциал затвора  $V_g$ , выраженный в единицах наведённого заряда) и разность потенциалов  $V$  между резервуарами 1 и 2. Выпишем пороговые напряжения  $V$ , при которых  $\Delta F_{1,2}^\pm$  зануляются:<sup>8</sup>

$$V_{\text{th},1}^\pm = \mp \frac{e}{C_2 + C_g/2} \left[ \frac{1}{2} \pm \left( n - \frac{Q_0}{e} \right) \right], \quad (2.20a)$$

$$V_{\text{th},2}^\pm = \pm \frac{e}{C_1 + C_g/2} \left[ \frac{1}{2} \pm \left( n - \frac{Q_0}{e} \right) \right]. \quad (2.20b)$$

Очевидно, что при фиксированных  $n$  и  $Q_0$  справедливы соотношения  $V_{\text{th},1}^+(n) = V_{\text{th},1}^-(n+1)$  и  $V_{\text{th},2}^+(n) = V_{\text{th},2}^-(n+1)$ .

В термодинамическом равновесии, т. е. при  $V = 0$  (это соответствует штриховой линии на рис. 2.4), число электронов  $n$  принимает целое значение, определяемое формулой (2.9), так как  $ne$  старается принять значение, наиболее близкое к индуцированному заряду  $Q_0$ . Если  $Q_0 = 0$ , то  $n = 0$ . Если же теперь на одноэлектронный транзистор подавать напряжение  $V$ , то электрический ток при этом  $Q_0$  потечёт, когда  $V$  достигнет одного из значений  $V_{\text{th},1}^\pm = \mp \frac{e}{2C_2+C_g}$  или  $V_{\text{th},2}^\pm = \pm \frac{e}{2C_1+C_g}$ . С другой стороны, при полуцелом  $Q_0$  получаем  $V_{\text{th}} = 0$ , поэтому кулоновской блокады нет при  $V = 0$  в полном соответствии с нашими выводами про кулоновскую блокаду в равновесном случае, приведёнными в разделе 2.2. Пример такой ситуации показан чёрным кружком на рис. 2.4 (аналогично и для других точек пересечения граничных кривых  $V_{\text{th}}$  и штриховой линии  $V = 0$ ) — это соответствует нахождению контакта в одной из точек вырождения, что означает возможность изменения заряда островка даже в отсутствие приложенного напряжения.

В общем случае, электронный транспорт блокирован при данном  $Q_0$ , пока напряжение  $V$  не достигнет одного из пороговых напряжений  $V_{\text{th}}(Q_0)$ , как это проиллюстрировано на рис. 2.4, где серая область соответствует кулоновской блокаде (нет одноэлектронного туннелирования), а наклонные линии — пороговым напряжениям  $V_{\text{th}}$ ,

<sup>8</sup>Индекс th — от английского слова threshold (порог).

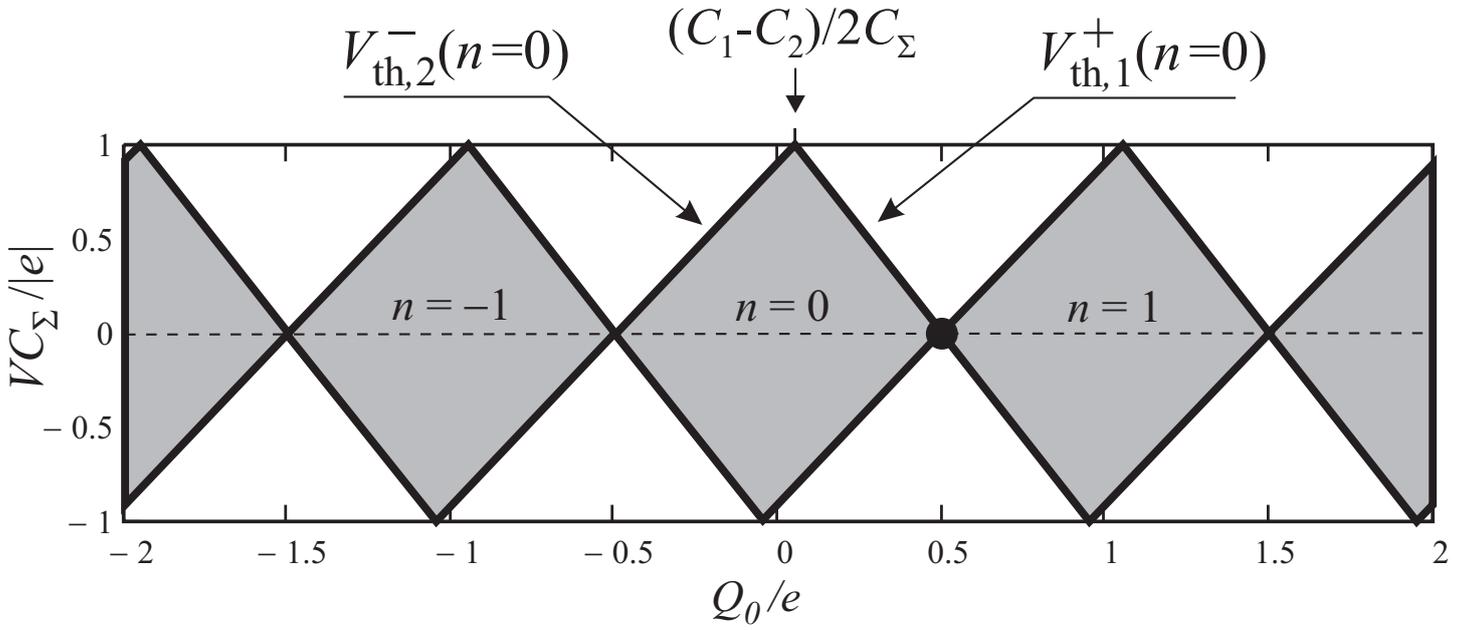


Рис. 2.4: Кулоновская блокада в координатах  $V_g - V$ . В данном случае значение напряжения на затворе  $V_g$  выражено в единицах  $Q_0 = -C_g V_g$  — заряда, который затвор наводит на островке. Одноэлектронный транспорт блокирован при данном  $Q_0$ , пока напряжение  $V$  не достигнет одного из пороговых напряжений  $V_{th}(Q_0)$ . Серая область соответствует кулоновской блокаде, а наклонные линии — пороговым напряжениям  $V_{th}$ , при которых перенос заряда становится возможным. Выбраны следующие параметры:  $C_1 = 0.3C_\Sigma$ ,  $C_2 = 0.2C_\Sigma$  и  $C_g = 0.5C_\Sigma$ . Из-за некоторого сходства фигур, ограниченных линиями  $V_{th}$ , с кристаллами алмаза подобные графики принято называть *кулоновскими алмазами* (Coulomb diamonds). Внутри каждого «алмаза» указано равновесное значение числа избыточных электронов  $n$ .

при которых перенос заряда между резервуарами 1 и 2 становится возможным. Например, если напряжение  $V$  положительно и вначале имеется состояние с  $n$  электронами на островке, перенос заряда между резервуарами 1 и 2 возможен, если  $\Delta F_1^+(n) < 0$  или  $\Delta F_2^-(n) < 0$ . В первом случае (рис. 2.3а) электрон будет туннелировать из первого электрода на островок, меняя его заряд с  $n$  на  $n + 1$ , а затем туннелировать дальше во второй электрод, возвращая заряд островка к исходному значению  $n$ . Во втором случае (рис. 2.3б) транспорт происходит немного по-другому: *сначала* электрон будет туннелировать с островка во второй электрод, в результате чего заряд островка станет равным  $n - 1$ , а уже затем на место этого электрона придёт другой из первого электрода. В обоих случаях описанный цикл возвращает систему в исходное состояние с  $n$  электронами на островке, поэтому цикл может повторяться дальше и дальше, перенося электроны один за одним. Два описанных цикла имеют различные пороговые значения напряжения, и кулоновская блокада имеет место до тех пор, пока напряжение  $V$  не достигнет меньшего из двух пороговых значений.

- В ситуации, изображённой на рис. 2.4, с увеличением  $V$  перенос заряда, отвечающий первому типу (рис. 2.3а), возникнет, например, если  $0.05 < Q_0/e < 0.5$ , а перенос заряда по второму механизму (рис. 2.3б) — если, например,  $-0.5 < Q_0/e < 0.05$ . Значение  $Q_0/e$ , разграничивающее эти две ситуации, в общем случае равно  $(C_1 - C_2)/2C_\Sigma$  для центрального «алмаза» (что и даёт 0.05 для рис. 2.4). Именно несовпадением  $C_1$  и  $C_2$  объясняется «перекос» кулоновских алмазов (на рис. 2.4 они слегка наклонены вправо).
- Также в случае  $C_1 \neq C_2$  вольт-амперная характеристика  $I(V)$  будет, очевидно, асимметричной [в том смысле, что,  $I(-V) \neq -I(V)$ ] — это ясно уже хотя бы из того, что пороговые напряжения, при которых возникает ненулевой ток, для случаев положительного и отрицательного  $V$  отличаются по модулю (см. рис. 2.4).

### 2.3.2 Finite temperatures

В данном разделе мы рассмотрим случай конечных температур и найдём электрический ток в системе. Обратите внимание, что до сих пор речи о вычислении непосредственно электрического тока не было — мы лишь обсуждали, есть он или нет, а также какими процессами переноса заряда обеспечивается, но не вычисляли его величину.

При конечных температурах ситуация сложнее, чем при  $T = 0$ , т. к. помимо вышеописанных процессов переноса заряда возникают дополнительные возможности. Дело в том, что теперь система не обязана находиться в основном состоянии (в частности, теперь число электронов на островке может быть не равно тому, которое получается из условия минимума свободной энергии, как на рис. 2.2 и в формуле (2.9)) и необходимо учитывать тот факт, что любое состояние может быть занято с некоторой вероятностью, и поэтому есть вероятности перехода между различными парами состояний (и не только в точках вырождения). Электрический ток, текущий через одноэлектронный транзистор, может быть найден с помощью подхода, использующего дискретный вариант кинетического уравнения (master equation), описывающий вероятности нахождения системы в состояниях с различными  $n$  на островке.

Вероятность туннелирования электрона из первого резервуара на островок в единицу времени можно найти с помощью золотого правила Ферми [5, 6]:

$$\Gamma_{n \rightarrow n+1}^{(1)} = 2 \cdot \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_0 \rho_1(\epsilon_1) \rho_0(\epsilon_0) f_1(\epsilon_1) [1 - f_0(\epsilon_0)] \delta(\Delta F_1^+(n) + \epsilon_0 - \epsilon_1), \quad (2.21)$$

где  $M$  — матричный элемент гамильтониана взаимодействия первого резервуара и островка, энергии  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_0$  мы будем отсчитывать от энергии Ферми,<sup>9</sup>  $\rho_1(\epsilon)$  и  $\rho_0(\epsilon)$  —

<sup>9</sup>Вообще-то при таком определении энергии нижние пределы интегрирования в формуле (2.21) должны

плотность одноэлектронных состояний в первом резервуаре и на островке соответственно,  $f_1(\epsilon)$  и  $f_0(\epsilon)$  — функция распределения электронов в первом резервуаре и на островке соответственно. Множитель 2, выделенный в правой части, учитывает две возможные проекции спина. Множитель  $f_1(\epsilon_1)[1 - f_0(\epsilon_0)]$  определяет вероятность того, что электрон с энергией  $\epsilon_1$  имеется в электроде, а состояние с энергией  $\epsilon_0$  не занято на островке (так учитывается ферми-статистика электронов, т. е. принцип запрета Паули). Закон сохранения энергии при туннелировании обеспечивает  $\delta$ -функция в (2.21).

Упростим выражение (2.21), предполагая распределение электронов в резервуарах и на островке равновесным фермиевским (the chemical potentials are not shifted because the voltage bias  $V$  is taken into account through  $\Delta F$  and energy conservation):

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\exp(\epsilon/T) + 1}. \quad (2.22)$$

Последнее допущение (про островок) справедливо, если характерные размеры островка много больше, чем неупругая длина пробега электрона. Для простоты мы будем считать, что характерное расстояние  $\delta E$  между уровнями энергии островка много меньше, чем температура — в этом случае спектр уровней можно считать непрерывным (обобщение на случай дискретного спектра можно найти в специальной литературе [5]). Тогда в формуле (2.21) мы можем заменить плотности состояний в первом резервуаре и на островке на константы (это хорошее приближение в металле вблизи поверхности Ферми), что даёт

$$\Gamma_{n \rightarrow n+1}^{(1)} = \frac{1}{e^2 R_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_0 f(\epsilon_1) [1 - f(\epsilon_0)] \delta(\Delta F_1^+(n) + \epsilon_0 - \epsilon_1), \quad (2.23)$$

где  $R_1$  — сопротивление контакта между первым электродом и островком, которое мы нашли бы, если бы все ёмкости на рис. 2.1 были бесконечными (т. е. не было бы кулоновских эффектов — we will check this below):

$$\frac{1}{R_1} = \frac{e^2}{\hbar} 4\pi \rho_0 \rho_1 |M|^2. \quad (2.24)$$

Используя соотношение  $\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon f(\epsilon)[1 - f(\epsilon - E)] = -E/[1 - \exp(E/T)]$ , найдём

$$\Gamma_{n \rightarrow n\pm 1}^{(1)} = \frac{1}{e^2 R_1} \cdot \frac{-\Delta F_1^{\pm}(n)}{1 - \exp(\Delta F_1^{\pm}(n)/T)} \quad (2.25a)$$

быть равны  $-E_F$ , что соответствует дну «ферми-моря». Однако электроны с такими энергиями не дают вклада в транспорт (транспорт обеспечивается электронами из окрестности энергии Ферми, что соответствует  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_0$  вблизи нуля), поэтому можно заменить нижние пределы на  $-\infty$ .

— формула с нижним знаком получается аналогично вышеописанному и соответствует переносу электрона из островка в первый резервуар. При  $T = 0$  это выражение сводится к нулю при  $\Delta F_1^\pm > 0$  (что согласуется с результатами раздела 2.3.1) и к  $|\Delta F_1^\pm|/e^2 R_1$  при  $\Delta F_1^\pm < 0$ . Наглядный физический смысл величины  $\Gamma$  в последнем случае таков:  $\Gamma = 1/\tau$ , где  $\tau$  — время, в течение которого один электрон переносится из резервуара на островок (знак  $+$ ) или обратно (знак  $-$ ).

Аналогично получают вероятности туннелирования в единицу времени из второго резервуара на островок и обратно, нужно лишь везде в формуле (2.25a) индекс 1 заменить на 2:

$$\Gamma_{n \rightarrow n \pm 1}^{(2)} = \frac{1}{e^2 R_2} \cdot \frac{-\Delta F_2^\pm(n)}{1 - \exp(\Delta F_2^\pm(n)/T)}. \quad (2.25b)$$

- We can now check the physical meaning of  $R_1$  and  $R_2$ . Consider, for example,  $R_1$ . In the absence of Coulomb effects, we have  $\Delta F_1^+(n) = eV$ , then

$$\Gamma_{n \rightarrow n+1}^{(1)} = \frac{1}{e^2 R_1} \cdot \frac{|e|V}{1 - \exp(-|e|V/T)}. \quad (2.26)$$

The meaning of this result becomes obvious in the limit of  $T = 0$ , when at  $V > 0$  we can write

$$\Gamma_{n \rightarrow n+1}^{(1)} = \frac{V}{|e|R_1}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{I}{|e|}. \quad (2.27)$$

We see that our definition of  $R_1$  provides the correct Ohm's law  $I = V/R_1$ .

Поскольку мы будем интересоваться стационарной ситуацией (установившийся режим), средний ток из первого резервуара на островок равен среднему току с островка во второй резервуар и может быть написан следующим образом:<sup>10</sup>

$$I(V) = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) \left[ \Gamma_{n \rightarrow n-1}^{(1)} - \Gamma_{n \rightarrow n+1}^{(1)} \right] = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) \left[ \Gamma_{n \rightarrow n+1}^{(2)} - \Gamma_{n \rightarrow n-1}^{(2)} \right], \quad (2.28)$$

где  $p(n)$  — вероятность нахождения  $n$  электронов на островке, лежащая в интервале  $0 \leq p(n) \leq 1$ . Определив

$$\Gamma_{n \rightarrow n+1} \equiv \Gamma_{n \rightarrow n+1}^{(1)} + \Gamma_{n \rightarrow n+1}^{(2)}, \quad (2.29a)$$

$$\Gamma_{n \rightarrow n-1} \equiv \Gamma_{n \rightarrow n-1}^{(1)} + \Gamma_{n \rightarrow n-1}^{(2)} \quad (2.29b)$$

— полные вероятности соответствующих изменений числа электронов на островке в единицу времени (при этом неважно, через какой из двух контактов пришёл или ушёл

<sup>10</sup>Знаки выбраны таким образом, что формула (2.28) определяет ток, текущий справа налево (из резервуара 2 в резервуар 1). Именно поэтому ток у нас будет положительным при  $V = V_2 - V_1 > 0$ .

электрон), мы можем записать кинетическое уравнение, которому  $p(n)$  удовлетворяет в общем случае:

$$\frac{dp(n)}{dt} = p(n+1)\Gamma_{n+1 \rightarrow n} + p(n-1)\Gamma_{n-1 \rightarrow n} - p(n)(\Gamma_{n \rightarrow n+1} + \Gamma_{n \rightarrow n-1}). \quad (2.30)$$

Точнее говоря, это уравнение нужно записать при каждом  $n$ , что даёт сцепленную систему уравнений. Правая часть уравнения (2.30) содержит приходные члены (из соседних состояний) и уходные члены (соответствующие переходам в соседние состояния).

В стационарном режиме (режиме установившегося тока)  $p(n)$  не зависит от времени, тогда производная в левой части (2.30) равна нулю, и мы получаем разностное уравнение, из которого можно найти  $p(n)$ :

$$p(n+1)\Gamma_{n+1 \rightarrow n} + p(n-1)\Gamma_{n-1 \rightarrow n} - p(n)(\Gamma_{n \rightarrow n+1} + \Gamma_{n \rightarrow n-1}) = 0 \quad (2.31)$$

с условием нормировки  $\sum_n p(n) = 1$  и с граничными условиями  $p(n \rightarrow \pm\infty) = 0$  (the latter follows from the normalization condition, since the series must be convergent). Equation (2.31) actually follows from a more general statement known as the *detailed balance condition*:

$$p(n)\Gamma_{n \rightarrow n+1} = p(n+1)\Gamma_{n+1 \rightarrow n} \quad (2.32)$$

— это соотношение говорит о том, что в стационарном режиме между двумя соседними состояниями в среднем переходов нет (т.к. переходы туда и обратно происходят с одинаковой частотой).

Далее, в принципе, задачу можно решать численно:

1. Находим изменения свободной энергии  $\Delta F_{1(2)}^{\pm}(n)$  по формулам (2.15).
2. Находим скорости переходов  $\Gamma$  по формулам (2.29) и (2.25).
3. Находим вероятности  $p(n)$  из уравнений детального равновесия (2.32) с граничными условиями и условием нормировки.
4. Вычисляем ток  $I(V)$  по формуле (2.28).

Изложенный метод вычисления тока в одноэлектронном транзисторе обычно называют *ортодоксальным методом* (orthodox theory). Подробное изложение этого метода можно найти в обзорах [7].

Вблизи точки вырождения, при  $V \rightarrow 0$ , можно найти аналитическое решение разностных уравнений (2.32). Для определённости будем искать решение вблизи точки ( $Q_0/e = 1/2$ ,  $V = 0$ ), отмеченной чёрным кружком на рис. 2.4. Будем предполагать, что температура мала по сравнению с кулоновской энергией:  $T \ll E_c$  (где

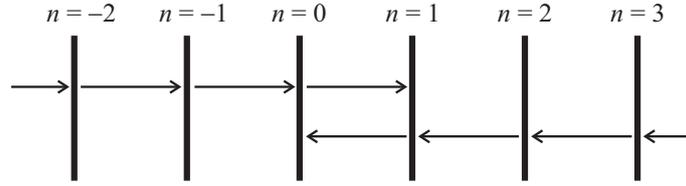


Рис. 2.5: Состояния системы с различным  $n$  — числом избыточных электронов на островке. Стрелками показаны переходы, которые при  $T \ll E_c$  не имеют экспоненциальной малости в силу  $\exp(-2E_c/T) \ll 1$ . Остальные переходы экспоненциально подавлены.

$E_c = e^2/2C_\Sigma$ ). Близость к точке вырождения означает, что отклонение наведённого заряда от точки вырождения, определяемое как

$$\delta Q_0 = Q_0 - \frac{e}{2}, \quad (2.33)$$

малó:  $|\delta Q_0/e| \ll 1$ . Тогда формулы (2.15) при  $n \neq 0$  дают

$$\Delta F_1^+(n) \approx \Delta F_2^+(n) \approx 2nE_c, \quad n \neq 0, \quad (2.34a)$$

а при  $n \neq 1$  получается

$$\Delta F_1^-(n) \approx \Delta F_2^-(n) \approx 2(1-n)E_c, \quad n \neq 1 \quad (2.34b)$$

— все эти величины по модулю во всяком случае не меньше  $2E_c$ , следовательно много больше температуры.

Из формул (2.25) и (2.29) тогда следует, что  $\Gamma_{n \rightarrow n+1}$  экспоненциально подавлены при  $n > 0$  в силу  $\exp(-2E_c/T) \ll 1$ , а  $\Gamma_{n \rightarrow n-1}$  экспоненциально подавлены таким же множителем при  $n < 1$  (рис. 2.5). Тогда из уравнения детального равновесия (2.32) следует, что все  $p(n)$ , кроме  $p(0)$  и  $p(1)$ , малы в силу того же самого экспоненциального множителя: действительно, если между какой-либо парой соседних уровней на рис. 2.5 имеется лишь одна стрелка, это означает, что  $\Gamma$  обратного перехода экспоненциально мала, и тогда в условии детального равновесия (2.32) экспоненциально малую  $\Gamma$  в одной стороне необходимо компенсировать экспоненциально малым  $p$  в другой стороне.

Таким образом, нужно учитывать только  $p(0)$  и  $p(1)$  (т. к. между уровнями 0 и 1 на рис. 2.5 имеются стрелки в обоих направлениях). Из (2.32) и условия нормировки получаем

$$p(0)\Gamma_{0 \rightarrow 1} = p(1)\Gamma_{1 \rightarrow 0}, \quad (2.35)$$

$$p(0) + p(1) = 1. \quad (2.36)$$

То, что задача при низких температурах сводится только к двум состояниям системы, наглядно видно из рис. 2.2, т. к. в окрестности рассматриваемой нами точки вырождения близки энергии именно состояний с  $n = 0$  и  $n = 1$ , а все остальные состояния

лежат выше по энергии, по крайней мере, на  $2E_c$ . Решение этой системы уравнений даётся формулами

$$p(0) = \frac{\Gamma_{1 \rightarrow 0}}{\Gamma_{0 \rightarrow 1} + \Gamma_{1 \rightarrow 0}}, \quad p(1) = \frac{\Gamma_{0 \rightarrow 1}}{\Gamma_{0 \rightarrow 1} + \Gamma_{1 \rightarrow 0}}. \quad (2.37)$$

Сюда нужно подставлять величины  $\Gamma$ , определённые по формулам (2.25) и (2.29) с помощью выражений для изменений свободной энергии (2.15):

$$\Delta F_1^+(0) = -\Delta F_1^-(1) = -2E_c \cdot \frac{\delta Q_0 - (C_2 + C_g/2)V}{e}, \quad (2.38a)$$

$$\Delta F_2^+(0) = -\Delta F_2^-(1) = -2E_c \cdot \frac{\delta Q_0 + (C_1 + C_g/2)V}{e} \quad (2.38b)$$

— именно эти величины не вошли в формулы (2.34), т. к. малы по сравнению с  $E_c$ , и именно эти величины определяют выражения в формулах (2.37).

Теперь легко найти электрический ток, воспользовавшись формулой (2.28):

$$I(V) = e \frac{\Gamma_{0 \rightarrow 1}^{(2)} \Gamma_{1 \rightarrow 0}^{(1)} - \Gamma_{0 \rightarrow 1}^{(1)} \Gamma_{1 \rightarrow 0}^{(2)}}{\Gamma_{0 \rightarrow 1} + \Gamma_{1 \rightarrow 0}}. \quad (2.39)$$

Отсюда можно получить простую формулу для кондактанса<sup>11</sup>  $G = dI/dV$  при  $V \rightarrow 0$ . Для этого надо разложить числитель (2.39) до первого порядка по  $V$ , а знаменатель достаточно взять в нулевом приближении. В результате находим линейный кондактанс:<sup>12</sup>

$$G = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{e \delta Q_0 / C_\Sigma T}{\sinh(e \delta Q_0 / C_\Sigma T)}. \quad (2.40)$$

Легко показать, что эта формула в действительности справедлива вблизи любой точки вырождения, если под  $\delta Q_0$  понимать отклонение от соответствующего полуцелого значения:

$$\delta Q_0 = Q_0 - (2k + 1) \frac{e}{2}. \quad (2.41)$$

Максимальное значение кондактанса в формуле (2.40) определяется туннельными сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ . Характерные величины этого максимального кондактанса вблизи точек вырождения в реальных экспериментах могут составлять десятые доли квантового кондактанса  $G_q$ , т. е. по порядку величины примерно  $10^{-5} \text{ Ом}^{-1}$ .

<sup>11</sup>Эту величину можно называть проводимостью (или, точнее, дифференциальной проводимостью), однако мы будем использовать термин *кондактанс*, в последнее время устоявшийся в русскоязычной литературе.

<sup>12</sup>Удобные переменные для этого вычисления:

$$q = \frac{e \delta Q_0}{C_\Sigma T}, \quad v_{1(2)} = \frac{e(C_{1(2)} + C_g/2)V}{C_\Sigma T}.$$

В рамках наших предположения  $q$  может быть произвольным (как большим, так и маленьким), а  $v_{1(2)} \rightarrow 0$ .

### 2.3.3 More general cases

Обсудим теперь вкратце более общие ситуации.

На рис. 2.6а показана зависимость линейного кондактанса  $G$  от потенциала затвора (иными словами, от  $Q_0$ ) при разных температурах. Увеличение температуры соответствует переходу к более высоколежащим кривым. Пики соответствуют точкам вырождения и при низких температурах описываются формулой (2.40), откуда видно, что ширина пика уменьшается с уменьшением температуры. Параметры, при которых построен график 2.6а, соответствуют  $E_c \approx 9$  К, поэтому формула (2.40) применима для трёх нижних кривых (для которых выполнено условие  $T \ll E_c$ ) — в частности, высота пика в единицах графика примерно равна  $h/4e^2(R_1 + R_2) \approx 0.05$  в соответствии с предсказанием формулы (2.40). Для самой верхней кривой ( $T = 4$  К) расхождение с формулой уже заметное, т. к. условие  $T \ll E_c$  выполняется хуже.

На рис. 2.6б оттенками серого показан дифференциальный кондактанс  $G = dI/dV$  в зависимости от потенциала затвора  $V_g$  и напряжения между резервуарами  $V$ . Кулоновская блокада имеет место в центральном горизонтальном ряду «алмазов». В остальных рядах «алмазов» блокады уже нет, однако видна сложная структура, состоящая из «алмазов» с ненулевым кондактансом. Эта структура связана с открытием и закрытием каналов переноса заряда при пересечении линий пороговых напряжений, соответствующих различным  $n$ .

Влияние конечного расстояния  $\delta E$  между уровнями островка на кулоновскую блокаду проиллюстрировано на рис. 2.7. До сих пор мы обсуждали так называемый металлический предел, когда  $\delta E \ll T$ , поэтому спектр уровней островка можно считать непрерывным, как в обычном металле. Именно этот предел показан на рис. 2.7а (здесь, в отличие от предыдущего рисунка, кулоновской блокаде соответствуют белые области, а конечной проводимости — тёмные, так что принципиальных различий между рис. 2.7а и рис. 2.6б нет). Рис. 2.7б показывает противоположный предел,  $\delta E \gg T$ , в котором электроны в островке могут находиться лишь на нескольких дискретных уровнях. Необходимо отметить, что «алмазы», внутри которых имеет место кулоновская блокада, сохраняются, а внутри проводящих областей кондактанс увеличивается не непрерывно, а только когда дополнительный дискретный уровень начинает участвовать в транспорте. Именно с этим и связаны белые участки внутри проводящих областей — в них ток конечен, но *дифференциальный* кондактанс (который и показан на рисунке) равен нулю.

### 2.3.4 The case of $R_2 \gg R_1$ at $T = 0$

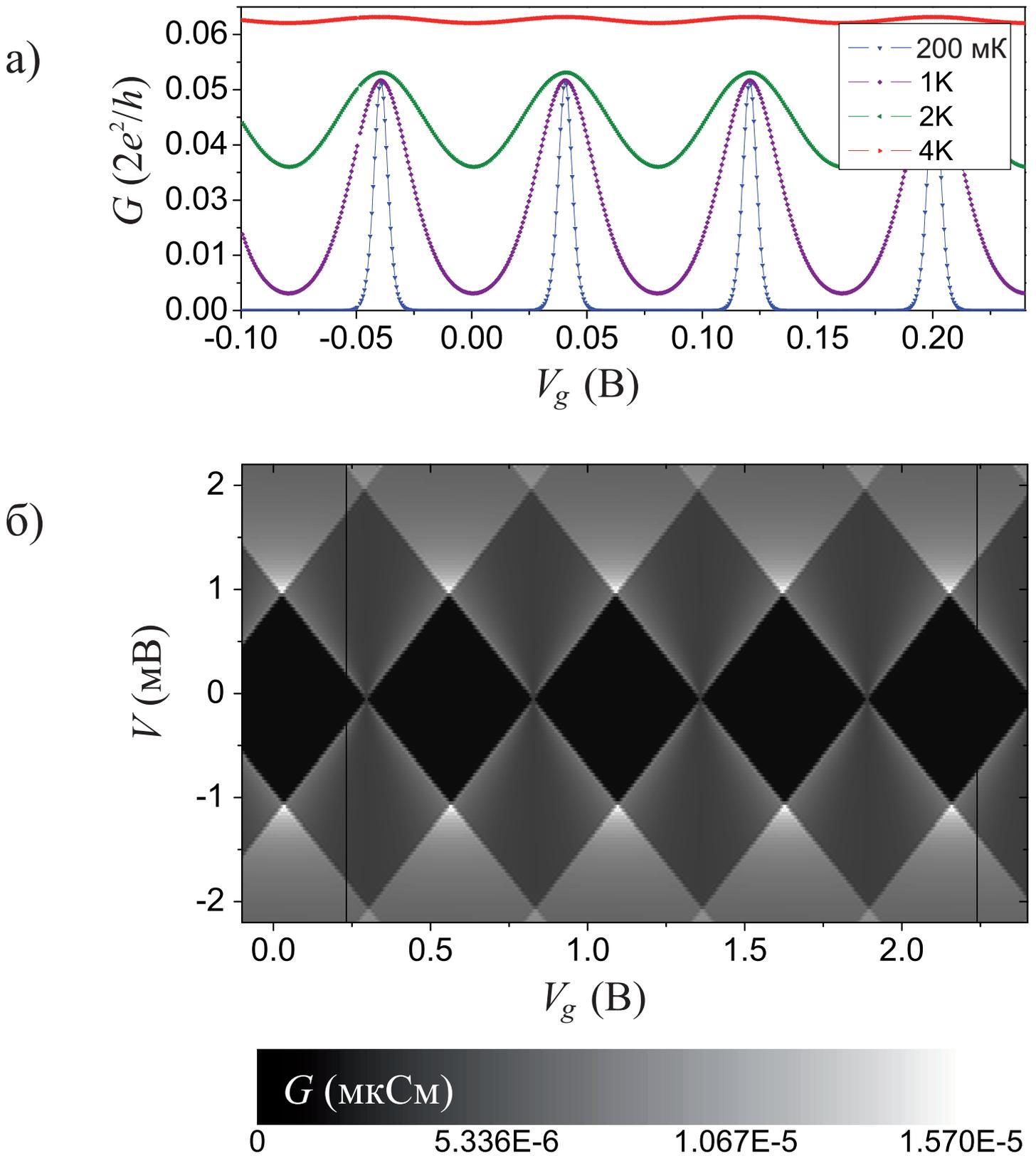


Рис. 2.6: (а) Линейный кондактанс ( $G = dI/dV$  при  $V \rightarrow 0$ ) в зависимости от потенциала затвора при разных температурах. Увеличение температуры соответствует переходу к более высоколежащим кривым. (б) Оттенками серого показан дифференциальный кондактанс  $G = dI/dV$  в зависимости от потенциала затвора  $V_g$  и напряжения между резервуарами  $V$ . Нулевой кондактанс обозначен чёрным (центральный горизонтальный ряд «алмазов»), более светлые тона обозначают конечный кондактанс. Оба графика построены при параметрах, близких к реальным экспериментам:  $R_1 = R_2 = 60$  кОм,  $C_1 = C_2 = 50 \cdot 10^{-18}$  Ф,  $C_g = 2 \cdot 10^{-18}$  Ф. [Графики взяты из диссертации E. Pallecchi (Регенсбург, 2009)].

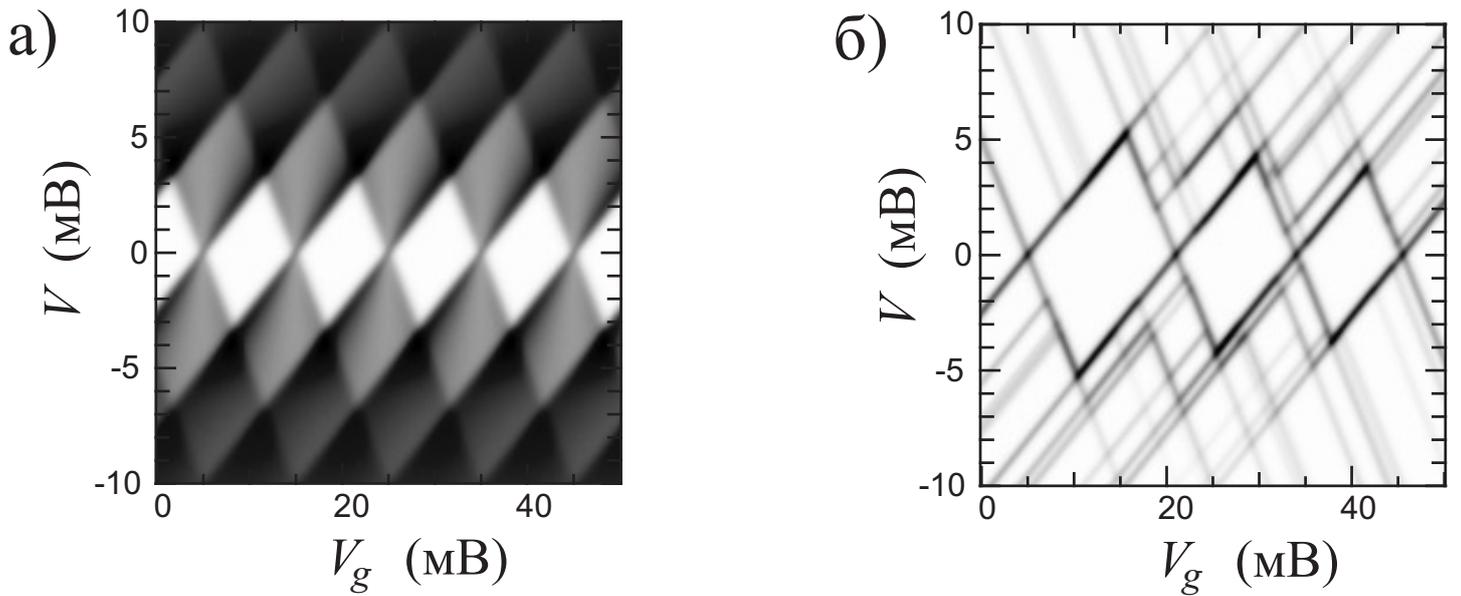


Рис. 2.7: Дифференциальный кондактанс  $G$  в координатах  $V_g - V$ . Белые области соответствуют нулевому  $G$ , тёмные — конечным  $G$ . Чем темнее оттенок, тем больше кондактанс. (а) Металлический предел, пренебрежимо малое расстояние между уровнями энергии островка (непрерывный спектр):  $\delta E \ll T$ , в то же время  $T \ll E_c$ . (б) Случай дискретного спектра островка,  $\delta E \gg T$ . Остальные параметры те же, что и для графика (а). [Графики взяты из диссертации М. Hofheinz (Гренобль, 2006)]

## Часть II

# Superconducting systems

# Глава 3

## Andreev reflection

### 3.1 Josephson current carried by Andreev bound states

$$E_A = \Delta \sqrt{1 - \mathcal{T} \sin^2(\varphi/2)}$$

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= \frac{e\Delta}{2\hbar} \sum_i \frac{\mathcal{T}_i \sin \varphi}{\sqrt{1 - \mathcal{T}_i \sin^2(\varphi/2)}} [n_F(-E_A) - n_F(E_A)] \\ &= \frac{e\Delta}{2\hbar} \sum_i \frac{\mathcal{T}_i \sin \varphi}{\sqrt{1 - \mathcal{T}_i \sin^2(\varphi/2)}} \tanh \frac{E_A}{2T}, \quad n_F(E) = \frac{1}{\exp(E/T) + 1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

The current–phase relation is generally non-sinusoidal. At the same time, the obtained result may be used to illustrate the *general statement*:  $I(\varphi)$  becomes sinusoidal in two limitings cases:

- At  $\mathcal{T}_i \rightarrow 0$  (low-transparency junction, tunneling limit), the square root in the denominator is approximately 1, and we obtain

$$I(\varphi) = I_c \sin \varphi, \quad I_c = \frac{e\Delta}{2\hbar} \tanh \frac{\Delta}{2T} \left( \sum_i \mathcal{T}_i \right) = \frac{\pi\Delta}{2e} \cdot \tanh \frac{\Delta}{2T} \cdot G_N.$$

- At  $T \rightarrow T_c$ , the order parameter becomes small ( $\Delta \rightarrow 0$ ), and expanding the hyperbolic tangent, we find

$$I(\varphi) = I_c \sin \varphi, \quad I_c = \frac{e\Delta^2}{4\hbar T_c} \sum_i \mathcal{T}_i = \frac{\pi\Delta^2}{4eT_c} G_N.$$

Later we will again obtain the Josephson effect with only one harmonic from the Ginzburg-Landau equations.

Note that in both the cases, expression for the normal-state conductance  $G_N = G_q \sum_i \mathcal{T}_i$  is the same, however, the values of  $G_N$  may strongly differ from each other (in particular, in the case of  $T \rightarrow T_c$ , transparencies can be arbitrary).

Higher harmonics are important at low temperatures and high transparencies (their amplitudes are of higher order with respect to transparency).

An interesting limiting case is that of zero temperature ( $T = 0$ ) and of ideal junction ( $\mathcal{T}_i = 1$ ). The general expression (3.1) then yields

$$I(\varphi) = I_c \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{sgn} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \right), \quad I_c = \frac{e\Delta}{\hbar} \sum_i 1 = \frac{\pi\Delta}{e} G_N.$$

# Глава 4

## Stationary Josephson effect

### 4.1 Feynman's derivation of the Josephson relations

Two condensates are described by two (macroscopic) wave functions:

$$\psi_L = \sqrt{n_L} e^{i\varphi_L}, \quad \psi_R = \sqrt{n_R} e^{i\varphi_R}.$$

At voltage bias  $V$ , the energy difference between the two superconductors is  $2eV$  (since the charge of Cooper pairs is  $2e$ ). The Schrödinger equation for the two-state system:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sqrt{n_L} e^{i\varphi_L} \\ \sqrt{n_R} e^{i\varphi_R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eV & K \\ K & -eV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n_L} e^{i\varphi_L} \\ \sqrt{n_R} e^{i\varphi_R} \end{pmatrix},$$

where  $K$  describes how the two condensates talk to each other [here,  $K$  is real while complex  $K$  would imply breaking of TRS and shift of the  $\varphi$  phase in expressions below].

Introducing the phase difference  $\varphi = \varphi_R - \varphi_L$ , we write the first equation as

$$\dot{\sqrt{n_L}} + i\sqrt{n_L}\dot{\varphi}_L = -\frac{i}{\hbar}(eV\sqrt{n_L} + K\sqrt{n_R}e^{i\varphi}).$$

The real and imaginary parts of this equation yield

$$\begin{aligned} \dot{\sqrt{n_L}} &= \frac{K}{\hbar} \sqrt{n_R} \sin \varphi, \\ \sqrt{n_L}\dot{\varphi}_L &= -\frac{1}{\hbar}(eV\sqrt{n_L} + K\sqrt{n_R} \cos \varphi), \end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned} \dot{n}_L &= \frac{2K}{\hbar} \sqrt{n_L n_R} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi}_L &= -\frac{1}{\hbar} \left( eV + K \sqrt{\frac{n_R}{n_L}} \cos \varphi \right). \end{aligned}$$

Similarly, for the right superconductor, we find

$$\begin{aligned}\dot{n}_R &= -\frac{2K}{\hbar}\sqrt{n_L n_R}\sin\varphi, \\ \dot{\varphi}_R &= \frac{1}{\hbar}(eV - K\sqrt{\frac{n_L}{n_R}}\cos\varphi).\end{aligned}$$

Let us assume that the two materials are equivalent, hence the junction is symmetric in this sense, and the superfluid densities are nearly equal,  $n_L = n_R = n_0$ . At the same time, time derivatives  $\dot{n}_L$  and  $\dot{n}_R$  demonstrate how the densities would like to change (if the superfluid densities were not maintained by external reservoirs). The time derivative of the density is proportional to current, so we obtain

1. The first Josephson relation:  $I(t) = I_c \sin\varphi(t)$ .
2. The second Josephson relation:  $\dot{\varphi} = 2eV(t)/\hbar$ .

The case of nonzero  $V$  is called the non-stationary Josephson effect. The case of  $V = 0$ , when  $\varphi$  does not vary in time, is the stationary Josephson effect, and below we will consider this situation. Note that the first Josephson relation implies time-independent supercurrent (determined by the phase difference) in this case.

## 4.2 Введение

Термин *эффект Джозефсона* в настоящее время относится к совокупности явлений, имеющих место в контактах двух сверхпроводников через слабую связь. В 1962 году появилась короткая теоретическая работа английского физика Б. Д. Джозефсона [13], где исследовался туннельный переход (контакт сверхпроводников через прослойку диэлектрика) и было предсказано два эффекта: 1) через контакт в отсутствие приложенного напряжения может течь постоянный сверхпроводящий ток и 2) при конечном напряжении  $V$  через контакт помимо обычного постоянного тока будет также течь переменный сверхпроводящий ток частоты  $\omega = 2eV/\hbar$ .

Это предсказание было весьма необычным и вызвало серьёзные споры, в которых некоторые учёные, в том числе весьма именитые, ставили предсказанные эффекты под сомнение. Независимые вычисления других теоретиков, однако, показали правильность результатов Джозефсона, а затем они были подтверждены и экспериментом. В 1973 году Джозефсон получил за своё открытие Нобелевскую премию.

Дальнейшие исследования показали, что эффект Джозефсона весьма общий и проявляется не только в туннельных переходах, но и при соединении двух сверхпроводников через слабую связь любого вида (например, нормальный металл, ферромагнетик, геометрическое сужение и др.).

Одной из мотиваций, приведших Джозефсона к открытию, являлось желание выяснить, имеет ли какие-либо наблюдаемые следствия фаза параметра порядка. Действительно, как известно, сверхпроводник описывается комплексным параметром порядка  $\Delta = |\Delta|e^{i\varphi}$ . Модуль параметра порядка  $|\Delta|$  определяет как бы «силу» сверхпроводимости, в частности сверхпроводящую щель в одночастичном спектре. А фаза  $\varphi$ ? На что она влияет? Что будет, например, если привести в контакт два сверхпроводника с одинаковыми по модулю, но разными по фазе параметрами порядка? Именно из этих вопросов и возникла работа Джозефсона.

Оказалось, что величина сверхпроводящего тока через контакт (джозефсоновского тока) определяется именно разностью фаз параметров порядка с двух сторон. Параметр порядка  $\Delta$  можно рассматривать как волновую функцию сверхпроводящего конденсата (куперовских пар электронов), поэтому эффект Джозефсона — квантовый эффект. С другой стороны, конденсат куперовских пар состоит из огромного количества электронов, и в джозефсоновском токе участвует огромное число электронов, поэтому эффект Джозефсона — одновременно и макроскопический эффект. Он явился очень важным шагом в понимании природы сверхпроводящего состояния. Кроме того, он нашёл значительное и растущее число применений для создания уникальных измерительных приборов.

Ниже мы пытаемся на основе простых примеров объяснить физику эффекта Джозефсона и основные явления, связанные с ним. Различные подходы к описанию эффекта Джозефсона можно найти также в таких популярных учебниках, как [14, 15, 1, 16]. Мы надеемся, что читатель, усвоив приведённый ниже материал, сможет продолжить разбираться в деталях эффекта Джозефсона, используя эти учебники, а также более специальную литературу, например [17, 18, 19].

### 4.3 Теория Гинзбурга–Ландау

Существенная часть нашего рассмотрения будет построена на описании сверхпроводимости в рамках теории Гинзбурга–Ландау. Подробное изложение этой теории можно найти, например, в учебниках [14, 15, 1, 16]. Здесь мы напомним основные положения теории Гинзбурга–Ландау, которые понадобятся нам для обсуждения эффекта Джозефсона.

Полная теория, описывающая поведение сверхпроводника, довольно сложна. Ситуация, однако, существенно упрощается в области температур вблизи точки сверхпроводящего перехода  $T_c$ . Здесь оказывается возможным построить систему относительно простых уравнений. В общей теории Ландау фазовых переходов второго рода отличие «несимметричной» фазы от «симметричной» описывается параметром порядка, обращающимся в точке перехода в нуль (см., например, [20], § 142 и [14], § 45). Для сверхпроводящей фазы естественным таким параметром является конденсатная вол-

новая функция (её ещё иногда называют волновой функцией куперовских пар).

Отправным пунктом теории Гинзбурга–Ландау (ГЛ) является выражение для свободной энергии сверхпроводника как функционала от параметра порядка. В соответствии с общими положениями теории Ландау, оно получается разложением плотности свободной энергии по степеням малого (вблизи точки перехода) параметра порядка и его производных по координатам. Во избежание излишних (с принципиальной точки зрения) усложнений будем считать, что сверхпроводящее состояние — спин-синглетное (полный спин куперовской пары  $S = 0$ ) и  $s$ -волновое (полный орбитальный момент куперовской пары  $L = 0$ , т. е. состояние изотропное). Это наиболее часто встречающаяся в приложениях ситуация (общий случай построения теории ГЛ можно найти, например, в [21]). Параметр порядка в этом случае сводится к комплексному скаляру.

Тогда разложение свободной энергии для сверхпроводника в магнитном поле имеет вид

$$F[\Delta(\mathbf{r})] = F_{n0} + \int d\mathbf{r} \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} + a \int d\mathbf{r} \Delta^* \left[ \frac{\hbar}{\tau_{\text{GL}}} - \hbar D \left( \nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{b}{2T_c} |\Delta|^2 \right] \Delta, \quad (4.1)$$

где  $F_{n0}$  — свободная энергия в нормальном состоянии в отсутствие магнитного поля,  $\Delta$  — параметр порядка,  $e$  — заряд электрона,  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$  и  $T_c$  — критическая температура сверхпроводника.<sup>1</sup> Обратите внимание на дополнительный (по сравнению с обычным выражением для импульса в магнитном поле) коэффициент 2 перед векторным потенциалом — это есть прямое следствие того, что в сверхпроводимости участвуют *пары* электронов. Интегрирование ведётся по объёму образца.

Теперь обсудим коэффициенты в разложении свободной энергии (4.1). Величина  $\tau_{\text{GL}}$  имеет размерность времени и меняет знак в точке сверхпроводящего перехода, так что

$$\frac{\hbar}{\tau_{\text{GL}}} = \alpha(T - T_c), \quad (4.2)$$

где  $T$  — температура. Удобно нормировать параметр порядка так, чтобы его модуль совпадал с щелью в квазичастичной плотности состояний объёмного образца. Коэффициенты  $a$ ,  $\alpha$ ,  $D$  и  $b$  слабо зависят от температуры, и их можно найти из модели сверхпроводимости Бардина–Купера–Шриффера (БКШ). Мы будем в основном интересоваться так называемым грязным пределом (реализующимся, например, в сверхпроводящих сплавах с примесями), когда длина свободного пробега электрона  $l$  много меньше, чем  $\xi_0 = \sqrt{\hbar D / T_c}$  (характерный размер куперовской пары при  $T = 0$ ), — именно такая ситуация чаще всего реализуется в эксперименте. В этом случае  $D$  совпадает с коэффициентом диффузии электрона на уровне Ферми (т. е.  $D = v_F l / 3$ , где

<sup>1</sup>Мы будем везде подразумевать, что температура записана в энергетических единицах, поэтому константа Больцмана нигде в формулах не возникает.

$v_F$  — скорость Ферми), а остальные коэффициенты имеют следующие значения [22]:

$$a = \frac{\pi\nu}{8T_c}, \quad \alpha = \frac{8}{\pi}, \quad b = \frac{7\zeta(3)}{\pi^3}, \quad (4.3)$$

где  $\nu = mp_F/2\pi^2\hbar^3$  — плотность состояний электрона на уровне Ферми в нормальном состоянии,  $p_F$  — импульс Ферми,  $\zeta(3) \approx 1.2$  — дзета-функция Римана [ $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^n$ ].<sup>2</sup>

Условие применимости разложения (4.1) — малость параметра порядка  $\Delta$  по сравнению с его значением  $\Delta(0)$  при  $T \ll T_c$ . Для сверхпроводника  $\Delta(0) \sim T_c$  и  $\Delta \sim \sqrt{\hbar T_c/\tau_{GL}} \sim \sqrt{(T_c - T)T_c}$ , откуда следует условие  $|T - T_c| \ll T_c$ . Кроме того,  $\Delta$  должна меняться в пространстве не слишком быстро, а именно на расстояниях много больших  $\xi_0$ . Именно это позволяет оставить в уравнении (4.1) основные вклады по параметру порядка и его производным, в то время как отброшенные члены имеют более высокий порядок малости (при этом удерживать член четвёртого порядка по  $\Delta$  рядом с квадратичным необходимо, т. к. коэффициент при квадратичном члене очень мал; вклады нечётного порядка по  $\Delta$  отсутствуют, т. к. параметр порядка определён с точностью до общего фазового множителя, в результате чего энергия не должна меняться при изменении знака  $\Delta$ ).

Из условия минимума свободной энергии можно найти уравнения, которым удовлетворяет параметр порядка. Приравнявая вариацию  $F$  по  $\Delta^*$  и  $\mathbf{A}$  нулю, найдём

$$\left[ \frac{\hbar}{\tau_{GL}} - \hbar D \left( \nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{b}{T_c} |\Delta|^2 \right] \Delta = 0, \quad (4.4)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{j}_s = 4eaD \text{Im } \Delta^* \left( \nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta, \quad (4.6)$$

где  $\mathbf{j}_s$  — плотность сверхпроводящего тока. Обратите внимание, что если сделать замену  $D \rightarrow \hbar/4m$  и  $\sqrt{a}\Delta \rightarrow \psi$  в (4.6), то выражение для тока примет такой же вид, как ток в квантовой механике одной частицы с волновой функцией  $\psi(\mathbf{r})$ , зарядом  $2e$  и массой  $2m$ . Квадрат модуля волновой функции имеет размерность плотности вероятности, как и должно быть в квантовой механике, и равен плотности куперовских пар (это и есть «частицы» с зарядом  $2e$  и массой  $2m$ ). Плотность сверхпроводящих электронов  $n_s$  по определению в два раза больше плотности куперовских пар, поэтому  $|\psi(\mathbf{r})|^2 = n_s/2$  (см. [14]). Заметим также, что (4.5) — одно из уравнений Максвелла.

<sup>2</sup>В то же время чистый случай отличается лишь значениями коэффициентов в выражении (4.1) для свободной энергии:  $a = 7\zeta(3)n/8\pi^2T_c^2$ ,  $\alpha = 6\pi^2T_c/7\zeta(3)E_F$ ,  $D = \hbar/4m$ ,  $b = 3T_c/4E_F$ , где  $n = p_F^3/3\pi^2\hbar^3$  — плотность электронов,  $E_F = p_F^2/2m$  — энергия Ферми,  $m$  — масса электрона [14, 22].

В однородном сверхпроводнике в отсутствие магнитного поля градиентный член в (4.4) равен нулю. В этом случае находим

$$|\Delta| \equiv \Delta_0 = \sqrt{-\frac{\hbar T_c}{\tau_{\text{GL}} b}} = \sqrt{\frac{\alpha T_c (T_c - T)}{b}}. \quad (4.7)$$

При наличии градиентного члена из самого вида уравнения (4.4) ясно, что возникает характерная длина

$$\xi(T) = \sqrt{D|\tau_{\text{GL}}|} = \sqrt{\frac{\hbar D}{\alpha|T - T_c|}}. \quad (4.8)$$

Эту длину можно трактовать как размер куперовской пары при температурах, близких к критической.

Очень важной особенностью формулы (4.6) для тока является то, что в отсутствие векторного потенциала сверхпроводящий ток возникает только в случае изменения в пространстве *фазы* параметра порядка. Например, если модуль параметра порядка постоянен, т. е.  $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ , мы получаем

$$\mathbf{j}_s \propto \Delta_0^2 \nabla_{\mathbf{r}} \varphi. \quad (4.9)$$

А вообще — калибровочно-инвариантной величиной является комбинация

$$2m\mathbf{v}_s = \nabla\varphi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A},$$

которая пропорциональна скорости конденсата  $\mathbf{v}_s$ .

В квантовой механике ток

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{m} \text{Im} \psi^* \left( \nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi = \frac{e\hbar}{m} |\psi|^2 \left( \nabla_{\mathbf{r}} \varphi - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)$$

Сверток:

$$\mathbf{j}_s \propto |\Delta_0|^2 \left( \nabla_{\mathbf{r}} \varphi - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right).$$

Система уравнений (4.4) – (4.6) станет замкнутой после того, как будут сформулированы граничные условия для  $\Delta$ . На границе, совершенно непроницаемой для электронов (граница сверхпроводника с вакуумом или, например, толстый слой окисла), граничные условия имеют вид

$$\mathbf{n} \cdot \left( \nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta = 0, \quad (4.10)$$



Рис. 4.1: Граница с сопротивлением  $R$  между двумя сверхпроводниками с параметрами порядка  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности. Уравнение (4.10) можно вывести из условия равенства нулю интегралов по поверхности в вариации свободной энергии (4.1). Отсюда следует, в частности, отсутствие тока через непроницаемую границу.

Общие граничные условия на границе между двумя сверхпроводниками (см. рис. 4.1) должны находиться, вообще говоря, из микроскопических соображений, исходя из поведения параметра порядка на расстояниях  $\lesssim l$  вблизи границы. Однако уже на расстоянии порядка  $\xi_0$  вблизи границы уравнения ГЛ неприменимы, поэтому невозможно решить уравнения по разную сторону границы, опираясь только на феноменологическую теорию ГЛ. Для вывода граничных условий необходимо обратиться к более общим уравнениям Горькова. Это было сделано в [23], а затем обобщено с помощью полностью микроскопических расчётов в [24].

Уравнение ГЛ (4.4) имеет второй порядок по градиентам, как и уравнение Шрёдингера. Поэтому естественно, что на границе возникают два граничных условия на значения параметров порядка и их производных с двух сторон:<sup>3</sup>

$$\mathbf{n} \cdot \left( \nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta_1 = \mathbf{n} \cdot \left( \nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta_2 = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Lambda}. \quad (4.11)$$

Вид правой части можно было бы угадать, исходя из требования линейности по  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  (так как параметр порядка мал), а также из того, что при перестановке местами полупространств 1 и 2 ток должен менять направление — поэтому должна войти разность  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ .

Параметр  $\Lambda$  имеет размерность длины и равен  $\Lambda = \sigma R \mathcal{A} \sim l / \mathcal{T}$ , где  $\sigma = 2e^2 \nu D$  — проводимость сверхпроводника в нормальном состоянии (при нагревании выше  $T_c$ ),  $R$  и  $\mathcal{A}$  — сопротивление и площадь границы,  $l$  — длина свободного пробега, а  $\mathcal{T} < 1$  — вероятность туннелирования электрона с энергией порядка энергии Ферми через

<sup>3</sup>Для простоты мы предполагаем, что материальные параметры веществ, находящихся с двух сторон контакта (проводимость, коэффициент диффузии и плотность состояний на уровне Ферми в нормальном состоянии), одинаковы. Константы электрон-электронного взаимодействия предполагаются близкими, но тем не менее могут отличаться, так что в некотором диапазоне температур одна из сторон может быть в сверхпроводящем состоянии, а другая — в нормальном (такие системы будут рассмотрены ниже). Кроме того, естественно, могут быть различными (произвольными) фазы параметров порядка с двух сторон.

границу между сверхпроводниками при  $T > T_c$ . Обратите внимание на следующую связь между формулой (4.6) для тока в объёме сверхпроводника и граничным условием (4.11): обе формулы показывают, что сверхпроводящий ток связан с изменением параметра порядка в пространстве (градиент в объёме и разность параметров порядка с двух сторон границы соответственно).

Используя (4.6), мы можем записать граничные условия (4.11) через ток на границе:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_{s1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_{s2} = \frac{\pi}{4eT_c R \mathcal{A}} \text{Im}(\Delta_1^* \Delta_2). \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) — одно из самых важных для объяснения в рамках приближения ГЛ эффекта интерференции волновых функций конденсатов двух близких сверхпроводников (эффект Джозефсона).

## 4.4 Общие свойства джозефсоновского тока

Из симметричных соображений можно определить многие свойства джозефсоновского тока. Подобно тому как внутри сверхпроводников ток определяется градиентом фазы конденсатной волновой функции (см. (4.9)), так величина протекающего через контакт сверхпроводящего тока  $I_s$  связана с разностью значений  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  фаз параметра порядка в двух берегах контакта.

Поскольку значения фаз, отличающиеся на целое кратное от  $2\pi$ , физически тождественны, ясно, что ток  $I_s$  должен быть в общем случае периодической функцией разности фаз с периодом  $2\pi$ :

$$I_s(\varphi + 2\pi n) = I_s(\varphi) \quad (4.13)$$

(мы предполагаем, что влиянием на ток со стороны собственного магнитного поля токов внутри контакта можно пренебречь — в противном случае вместо разности сверхпроводящих фаз должно было бы фигурировать калибровочно инвариантное выражение, включающее в себя векторный потенциал).

Операция обращения времени меняет знак тока  $I_s$  и в то же время меняет знак фаз (поскольку волновые функции заменяются своими комплексно-сопряжёнными). Это значит, что ток  $I_s$  должен быть нечётной функцией разности фаз и обращаться в нуль при разности фаз, равной нулю:

$$I_s(-\varphi) = -I_s(\varphi), \quad I_s(0) = 0. \quad (4.14)$$

Кроме того, поскольку сверхпроводящий ток может течь лишь в присутствии градиента фазы параметра порядка, ток через слабую связь будет отсутствовать не только при  $\varphi = 0$ , но и при  $\varphi = \pi$  (этот случай соответствует изменению знака за счёт прохождения параметра порядка через ноль, а не за счёт непрерывного изменения фазы).

В результате мы можем утверждать, что

$$I_s(\pi n) = 0. \quad (4.15)$$

Вообще, это свойство является прямым следствием двух предыдущих, пояснения тут требует только случай нечётных  $n$ . Из свойства (4.13) следует  $I_s(-\pi) = I_s(\pi)$ , а из свойства (4.14) следует  $I_s(-\pi) = -I_s(\pi)$ , поэтому  $I_s(\pi) = -I_s(\pi) = 0$ .

Будучи, разумеется, ограниченной, функция  $I_s$  имеет свои максимальное и минимальное значения, между которыми она и меняется при изменении разности фаз, а в силу нечётности функции эти значения одинаковы по абсолютной величине; обозначим их через  $I_c$ :

$$I_c = \max_{\varphi} I_s(\varphi) = -\min_{\varphi} I_s(\varphi). \quad (4.16)$$

Важно не путать критический ток  $I_c$  джозефсоновского контакта с током распаривания, при котором рвутся куперовские пары в объёмном сверхпроводнике. Поскольку джозефсоновский контакт — это слабая связь, его критический ток может быть много меньше тока распаривания в берегах. Тогда при таких токах разрушения сверхпроводимости в берегах не происходит. Просто  $I_c$  — это максимальный сверхток, который может течь через контакт. Если же через контакт пустить ток  $I > I_c$ , то в дополнение к сверхтоку возникнет также и нормальный ток, а значит — напряжение и диссипация (это режим нестационарного эффекта Джозефсона).

Обратите внимание, что эти свойства не зависят от типа слабой связи и являются общими для всех видов джозефсоновских контактов.

## 4.5 Стационарный эффект Джозефсона

### 4.5.1 Эффект Джозефсона в туннельном SIS-контакте

Рассмотрим простейший (и исторически первый) тип джозефсоновского контакта — два сверхпроводника (S), разделённых тонким слоем диэлектрика (I), — такой контакт называют туннельным, или SIS-контактом. Для электронов слой диэлектрика представляет собой потенциальный барьер, и если слой достаточно тонок, то существует конечная вероятность их проникновения через него путём квантового туннелирования. Даже если коэффициент пропускания барьера мал, его отличие от нуля имеет принципиальное значение: оба сверхпроводника становятся единой системой, описываемой единой конденсатной волновой функцией. Это обстоятельство и приводит к эффекту Джозефсона. Единство конденсатной волновой функции системы означает, что через контакт между двумя сверхпроводниками может течь, даже в отсутствие приложенной извне разности потенциалов, сверхпроводящий ток (например, в системе, изображённой на рис. 4.2).

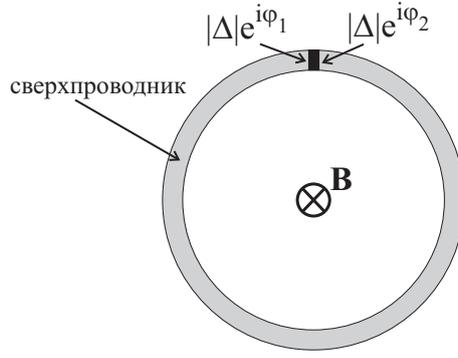


Рис. 4.2: Сверхпроводящее кольцо с джозефсоновским контактом. Разность фаз  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  на контакте наводится за счёт магнитного поля  $\mathbf{B}$ , пронизывающего кольцо

Если граница малопрозрачна, то модули параметров порядка с двух сторон от границы совпадают со своими значениями (4.7) в объёме, и параметры порядка отличаются только фазами:  $\Delta_{1(2)} = \Delta_0 e^{i\varphi_{1(2)}}$ . Используя граничные условия (4.12), легко получаем, что плотность тока на границе равна

$$j_s = \frac{\pi \Delta_0^2}{4eT_c R \mathcal{A}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.17)$$

Умножив (4.17) на площадь поверхности контакта  $\mathcal{A}$ , получим полный ток:

$$I_s = I_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad I_c = \frac{\pi \Delta_0^2}{4eT_c R}. \quad (4.18)$$

С учётом (4.7) получаем линейную зависимость критического тока от температуры:

$$I_c = C \frac{T_c - T}{R_N}, \quad C = \frac{2\pi^3}{7\zeta(3)e} \approx 635 \frac{\text{мкВ}}{\text{К}}. \quad (4.19)$$

## 4.5.2 Простейший сквид

Рассмотрим сверхпроводящее кольцо, сделанное из толстого сверхпроводящего провода, замкнутое через джозефсоновский контакт (см. рис. 4.2). Пусть толщина провода много больше мейснеровской глубины проникновения магнитного поля  $\lambda$  (см., например, [14]), тогда ток внутри провода равен нулю (т. к. магнитное поле заэкранировано поверхностными мейснеровскими токами), и модуль параметра порядка постоянен, в то время как фаза может зависеть от координаты. Подставляя  $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\varphi(\mathbf{r})}$  в формулу (4.6) для тока и интегрируя от стороны контакта 1 до стороны контакта 2 по контуру  $\mathcal{C}$ , проходящему внутри провода, получаем

$$0 = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{j}_s d\mathbf{l} \propto \int_{\mathcal{C}} \left( \nabla_{\mathbf{r}} \varphi - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) d\mathbf{l} = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2e}{\hbar c} \Phi, \quad (4.20)$$

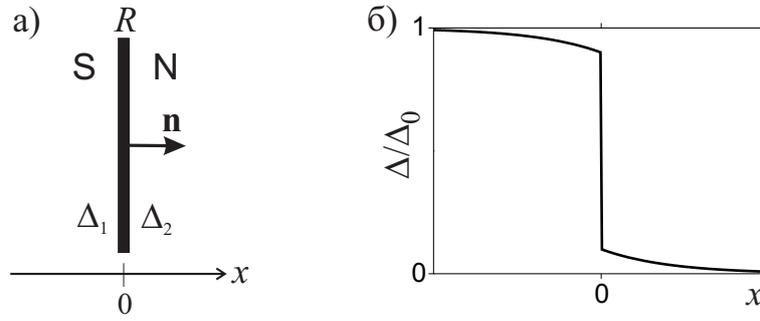


Рис. 4.3: а) SIN-контакт. б) Схематическая зависимость параметра порядка от координаты

где  $\Phi = \int_c \mathbf{A} d\mathbf{l} \approx \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$  — магнитный поток внутри кольца. В результате

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (4.21)$$

где введён квант магнитного потока  $\Phi_0 = \pi \hbar c / e \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ , и окончательно

$$I_s = I_c \sin \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (4.22)$$

Таким образом, джозефсоновский ток весьма чувствителен к величине магнитного поля (т. к.  $\Phi_0$  мало). Используя это свойство эффекта Джозефсона, можно измерять магнитное поле с высокой точностью. Кольцо с джозефсоновским контактом, рассмотренное выше, является простейшим примером сквида (от английского сокращения SQUID — superconducting quantum interference device, т. е. сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство) — прибора, измеряющего магнитное поле с высокой точностью.

### 4.5.3 Эффект близости в SIN-контакте

Рассмотрим теперь контакт сверхпроводник–диэлектрик–нормальный металл (сокращённо SIN). Сверхпроводящий параметр порядка, вообще говоря, не равен нулю в нормальном металле вблизи границы со сверхпроводником. Такое «индуцирование» сверхпроводимости в нормальный металл называют эффектом близости.

Количественно эффект близости в системе, где сверхпроводник занимает полупространство  $x < 0$ , а нормальный металл — полупространство  $x > 0$  (см. рис. 4.3а), может быть описан в рамках теории Гинзбурга–Ландау. Поскольку теория ГЛ применима при температурах, близких к критической, необходимо, чтобы нормальный металл был в действительности нормальным состоянием сверхпроводника, имеющего более низкую критическую температуру  $T'_c$ . Тогда в интервале температур  $T'_c < T < T_c$

(и в случае выполнения условия  $T_c - T'_c \ll T_c$ ) система будет представлять собой SIN-контакт, в котором применима теория ГЛ.

Будем предполагать, что магнитное поле отсутствует ( $\mathbf{A} = 0$ ), тогда фазу параметра порядка в SIN-контакте можно выбрать равной нулю, поэтому параметр порядка вещественен. Задача теперь сводится к решению уравнения (4.4) с граничными условиями (4.11). В случае непрозрачной границы параметр порядка слева давался бы выражением (4.7), а справа был бы равен нулю. В случае же слабопрозрачной границы параметр порядка можно представить в виде

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_0 + \Delta_{1S}(x), & x < 0, \\ \Delta_{1N}(x), & x > 0, \end{cases} \quad (4.23)$$

где  $|\Delta_1(x)| \ll \Delta_0$ . Линеаризуя уравнения по  $\Delta_1(x)$ , получаем

$$\left[ -2\alpha(T - T_c) - \hbar D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Delta_{1S} = 0, \quad x < 0, \quad (4.24)$$

$$\left[ \alpha(T - T'_c) - \hbar D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Delta_{1N} = 0, \quad x > 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta_1(x = \pm 0) = -\frac{\Delta_0}{\Lambda}, \quad \Delta_1(x \rightarrow \pm\infty) = 0. \quad (4.26)$$

Решая эти уравнения получим, что

$$\Delta_1(x) = \begin{cases} -\frac{\Delta_0}{\Lambda \kappa_S} e^{\kappa_S x}, & x < 0, \\ \frac{\Delta_0}{\Lambda \kappa_N} e^{-\kappa_N x}, & x > 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

где  $\kappa_S = \sqrt{2\alpha(T_c - T)/\hbar D}$  и  $\kappa_N = \sqrt{\alpha(T - T'_c)/\hbar D}$ . Схематическая зависимость параметра порядка от координаты приведена на рис. 4.3б.

Легко увидеть, что  $1/\kappa_{S(N)} \sim \xi_{S(N)}(T)$  примерно равно размеру куперовской пары в сверхпроводнике (нормальном металле). Следовательно, условие малости  $|\Delta_1(x)| \ll \Delta_0$ , т.е.  $\Lambda \kappa_{S(N)} \gg 1$ , означает, что куперовская пара должна быть много меньше  $\Lambda$ , что может реализоваться при малой прозрачности границы между сверхпроводником и нормальным металлом.

Когда это условие не выполняется, линеаризация уравнений ГЛ неприменима и необходимо решать общие нелинейные уравнения. Аналитическое решение в таком случае тоже можно найти (см. [15, 16]).

#### 4.5.4 Эффект Джозефсона в SINIS-контакте

Эффект Джозефсона связан с тем, что в системе устанавливается единый параметр порядка. В туннельном контакте параметр порядка проникал через туннельный барьер.

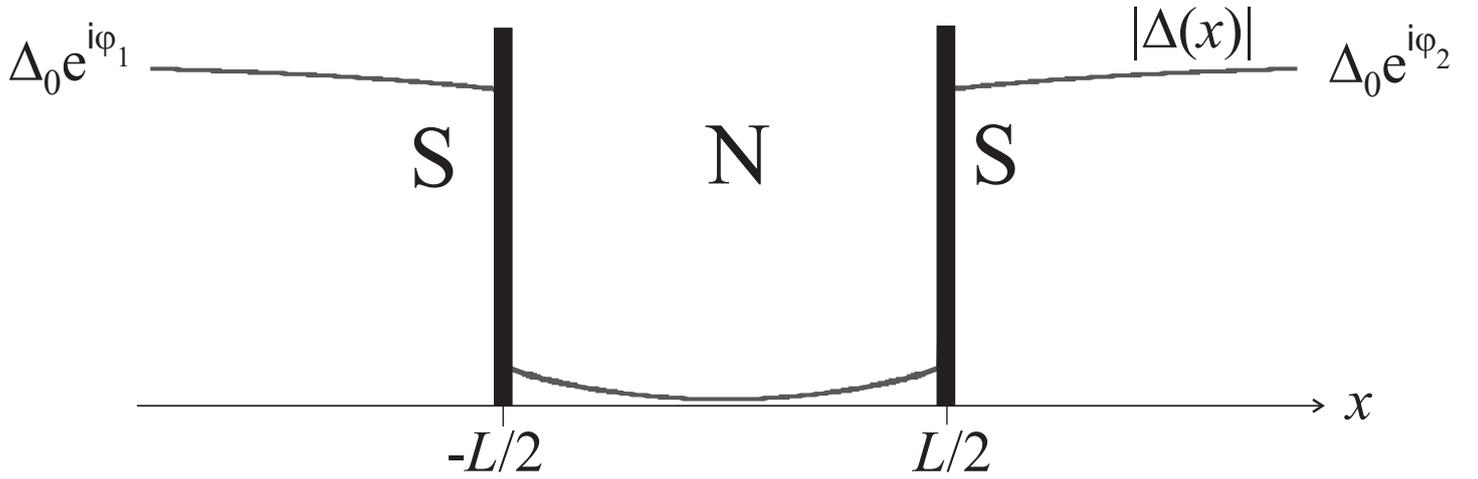


Рис. 4.4: SINIS-контакт. В глубине двух сверхпроводников их параметры порядка отличаются фазами. Показана пространственная зависимость модуля параметра порядка в контакте

В предыдущем разделе мы убедились в том, что параметр порядка может проникать в нормальный металл. Это означает, что эффект Джозефсона возможен в системе SINIS (контакт двух сверхпроводников через нормальный металл с диэлектрическими прослойками на границах), где он весьма наглядно проявляется в виде интерференции параметров порядка, приходящих от двух берегов.

Количественно эффект Джозефсона в системе SINIS (см. рис. 4.4) может быть описан в рамках теории ГЛ в тех же предположениях, что и в предыдущем разделе. В отличие от предыдущего раздела необходимо учесть разные фазы в глубине сверхпроводников:  $\Delta(x \rightarrow \mp\infty) = \Delta_0 e^{i\varphi_{1(2)}}$ . Мы найдём решение в нормальной части контакта и затем вычислим ток.

В граничные условия теперь добавляются фазы:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta_{1N} |_{x=-L/2+0} = -\frac{\Delta_0 e^{i\varphi_1}}{\Lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \Delta_{1N} |_{x=L/2-0} = \frac{\Delta_0 e^{i\varphi_2}}{\Lambda}. \quad (4.28)$$

Решение уравнения ГЛ при  $|x| < L/2$  будем искать в виде линейной комбинации решений, приходящих от двух берегов:

$$\Delta_{1N}(x) = c_1 e^{-\kappa_N x} + c_2 e^{\kappa_N x}. \quad (4.29)$$

Из граничных условий (4.28) находим

$$c_1 = \frac{\Delta_0 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)/2} \cosh\left(\frac{\kappa_N L - i\varphi}{2}\right)}{\Lambda \kappa_N \sinh(\kappa_N L)}, \quad c_2 = \frac{\Delta_0 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)/2} \cosh\left(\frac{\kappa_N L + i\varphi}{2}\right)}{\Lambda \kappa_N \sinh(\kappa_N L)}, \quad (4.30)$$

где  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

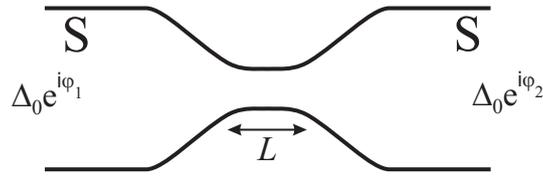


Рис. 4.5: Слабая связь в виде сужения между двумя сверхпроводниками,  $L$  — характерная длина слабой связи

Подставляя полученное решение в формулу (4.6) для тока (при  $\mathbf{A} = 0$ ), найдём

$$j_s = 8eaD\kappa_N \operatorname{Im}[c_1^*c_2] = j_c \sin \varphi, \quad j_c = \frac{4eaD\Delta_0^2}{\Lambda^2\kappa_N \sinh(\kappa_N L)} \quad (4.31)$$

— ток не зависит от точки, в которой мы его вычисляем, как и должно быть. Интерференция параметров порядка, приходящих от двух берегов, приводит к возникновению комбинации  $\Im[c_1^*c_2]$ . Обратите внимание, что в пределе длинного контакта, т. е. при  $\kappa_N L \gg 1$ , критический ток экспоненциально мал:  $j_c \propto \exp(-\kappa_N L)$ .

#### 4.5.5 Теория Асламазова и Ларкина

До сих пор мы рассматривали туннельные контакты, контакты через нормальный металл, а теперь рассмотрим ещё один тип слабой связи — геометрическое сужение (рис. 4.5). Проанализируем случай короткого и грязного сужения:

$$l \ll L \ll \xi(T), \lambda(T), \quad (4.32)$$

где  $\lambda(T)$  — мейсснеровская глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник (см., например, [14]). Основа понимания того, как происходит эффект Джозефсона в таких слабых связях, была заложена теорией Асламазова и Ларкина [25].

Малость  $L$  позволяет существенно упростить уравнения ГЛ. Во-первых, соотношение  $L \ll \lambda$  даёт возможность в векторном потенциале  $\mathbf{A}$ , который должен в принципе рассчитываться из уравнений Максвелла совместно с (4.4), пренебречь вкладом от токов через слабую связь. Оставшуюся часть  $\mathbf{A}_0$ , отражающую вклад удалённых источников поля, можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции (т. к. для удалённых источников  $\operatorname{rot} \mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$  в области контакта). Но поскольку величина  $\mathbf{A}$  всегда определена с точностью до такого градиента, мы можем выбрать калибровку  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 = 0$ , включая тем самым влияние внешних полей в фазу  $\Delta$ . Во-вторых, при  $L \ll \xi$  можно пренебречь в уравнении (4.4) всеми членами, кроме градиентного, поскольку его величина имеет порядок  $\hbar D \Delta_0 / L^2$  (т. к. в сужении  $\Delta$  меняется на длине  $L$  на величину порядка  $\Delta_0$ ), в то время как остальные члены порядка  $\alpha |T - T_c| \Delta_0$ . Это означает, что по порядку величины градиентный член больше

остальных в  $(\xi/L)^2$  раз. Таким образом, уравнение (4.4) сводится просто к уравнению Лапласа:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \Delta = 0, \quad (4.33)$$

что позволяет решить задачу до конца даже при произвольной форме слабой связи. Условие больших градиентов физически следует из того, что большие куперовские пары с размерами порядка  $\xi$  должны “подстроиться” под сверхпроводник с другим параметром порядка, пройдя лишь очень малое расстояние  $L$ .

Это уравнение нужно решать с граничными условиями:

$$\Delta = \begin{cases} \Delta_0 e^{i\varphi_1}, & \text{в глубине берега 1,} \\ \Delta_0 e^{i\varphi_2}, & \text{в глубине берега 2,} \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Delta|_{\Gamma} = 0, \quad (4.35)$$

где  $\Gamma$  — граница слабой связи,  $\mathbf{n}$  — нормаль к этой поверхности. Последнее условие есть частный случай (4.12). Как было замечено в работе Асламазова–Ларкина и можно убедиться прямой подстановкой, решение (единственное) краевой задачи (4.33)–(4.35) имеет вид

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\varphi_1} (1 - f(\mathbf{r})) + \Delta_0 e^{i\varphi_2} f(\mathbf{r}), \quad (4.36)$$

где  $f(\mathbf{r})$  — действительная функция координат, удовлетворяющая следующей краевой задаче:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 f = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f|_{\Gamma} = 0, \quad (4.37)$$

$$f = \begin{cases} 0, & \text{в глубине берега 1,} \\ 1, & \text{в глубине берега 2.} \end{cases} \quad (4.38)$$

Подставляя решение (4.36) в (4.6), получаем для плотности сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = 4eaD \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) \Delta_0^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.39)$$

Таким образом, плотность тока в каждой точке слабой связи и, следовательно, полный ток пропорциональны  $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$  — аналогично случаю туннельного контакта.

Выражение (4.39) для плотности сверхпроводящего тока содержит функцию  $f(\mathbf{r})$ , которую при произвольной форме границы найти нельзя. Однако, даже не зная эту функцию, можно выразить полный сверхпроводящий ток через сопротивление контакта в нормальном состоянии. Для этого заметим, что через функцию  $f(\mathbf{r})$  выражается также ток  $\mathbf{j}_N$  через ту же самую слабую связь в нормальном состоянии. Обозначим скалярный потенциал буквой  $\phi$ . Согласно уравнениям Максвелла, он удовлетворяет уравнению Пуассона  $\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi = -4\pi\rho$ , где  $\rho$  — плотность заряда в проводнике. В проводниках с большой точностью выполняется закон электронейтральности (заряд электронов компенсируется зарядом ионов), поэтому  $\rho = 0$  и  $\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi = 0$  в каждой точке проводника,

даже когда течёт ток. Очевидно, что решение краевой задачи для скалярного потенциала  $\phi$ :

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi|_{\Gamma} = 0, \quad (4.40)$$

$$\phi = \begin{cases} \phi_1, & \text{в глубине берега 1,} \\ \phi_2, & \text{в глубине берега 2,} \end{cases} \quad (4.41)$$

записывается аналогично (4.36) с той же самой функцией  $f(\mathbf{r})$ :

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_1(1 - f(\mathbf{r})) + \phi_2 f(\mathbf{r}), \quad (4.42)$$

и поэтому ток в нормальном состоянии:

$$\mathbf{j}_N(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\sigma \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) = \sigma V \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}), \quad (4.43)$$

где  $V = \phi_1 - \phi_2$ . Для вычисления полного тока через контакт мы можем проинтегрировать это выражение по любому поперечному сечению  $\mathcal{S}$ :

$$I_N = \sigma V \int_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d\mathcal{S}, \quad (4.44)$$

что должно совпадать с обычным законом Ома:  $I_N = V/R_N$ , следовательно, мы получаем формулу для сопротивления контакта в нормальном состоянии:

$$\frac{1}{R_N} = \sigma \int_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d\mathcal{S}. \quad (4.45)$$

Теперь интегрируя (4.39) по тому же самому сечению  $\mathcal{S}$ , мы можем записать результат в виде  $I_s = I_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$  с критическим током, имеющим такой же вид, как и в туннельном контакте (формула (4.18)):

$$I_c = \frac{\pi \Delta_0^2}{4eT_c R_N}. \quad (4.46)$$

Заметим, что теория Асламазова–Ларкина не только описывает эффект Джозефсона в слабых связях, но и даёт возможность очень ясно усмотреть его физическое происхождение. Действительно, формула (4.36) показывает, что в области слабой связи (где  $0 < f < 1$ ) параметр порядка есть линейная суперпозиция двух членов, каждый из которых пропорционален значению  $\Delta$  в одном из берегов и координатному множителю, плавно спадающему при удалении от данного берега вглубь слабой связи. Таким образом, внутри слабой связи происходит интерференция двух волновых функций, источниками которых являются конденсаты куперовских пар в сверхпроводящих берегах. Такая интерференция немедленно даёт ток  $j_s \propto \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ , т.е. эффект Джозефсона.

### 4.6 GL with exchange field

GL with exchange

Standard GL:  $F = a |\Delta|^2 + \gamma |\vec{\nabla} \Delta|^2 + \frac{\beta}{2} |\Delta|^4$

~~also~~  $a, \gamma, \beta$  - depend on  $T$  and  $h$   
 $\gamma$  can change sign due to  $h$ !

Generalized GL:  $F_a = a(h, T) |\Delta|^2 + \gamma(h, T) |\vec{\nabla} \Delta|^2 + \frac{\eta(h, T)}{2} |\vec{\nabla}^2 \Delta|^2 + \frac{\beta(h, T)}{2} |\Delta|^4$

$\eta$ -term is needed since  $\gamma$  can vanish  
 $(h, T)$  dependence of  $\eta$  and  $\beta$  is not essential.

~~GL~~  $\frac{\delta F_a}{\delta \Delta^*} = 0 \Rightarrow a \Delta - \gamma \vec{\nabla}^2 \Delta + \frac{\eta}{2} \vec{\nabla}^4 \Delta + \beta |\Delta|^2 \Delta = 0$

~~GL~~  $(\vec{\nabla}^2 \Delta^*) (\vec{\nabla}^2 \Delta)$

$\Delta = \Delta_0 e^{i \vec{q} \cdot \vec{z}} \Rightarrow a + \gamma q^2 + \frac{\eta}{2} q^4 + \beta \Delta_0^2 = 0$

$a = \alpha (T - T_{c0})$

$\Delta_0^2 = \frac{\alpha (T_{c0} - T) - \gamma q^2 - \frac{\eta}{2} q^4}{\beta}$

If  $\gamma > 0 \Rightarrow$  largest  $\Delta_0$  - at  $q=0$   $\rightarrow$  Heinego

If  $\gamma < 0 \Rightarrow$

~~GL~~ Critical temperature: neglect  $\beta \Delta_0^2$

$\Rightarrow \alpha (T_c - T_{c0}) + \gamma q^2 + \frac{\eta}{2} q^4 = 0$

$\Rightarrow T_c = T_{c0} - \frac{\gamma q^2 + \frac{\eta}{2} q^4}{\alpha}$

If  $\gamma > 0 \Rightarrow$  Largest  $T_c$  - at  $q=0$

If  $\gamma < 0 \Rightarrow$  Largest  $T_c$  - ~~at~~ at  $q_0$  such that  $|\gamma| - \eta q_0^2 = 0$

$\Rightarrow q_0^2 = \frac{|\gamma|}{\eta}$

- nonuniform LOFF  
 (Larkin, Ovchinnikov, (1964)  
 Fulde, Ferrell)

## 4.7 $\pi$ junction

# Глава 5

## Phase slips

Источники:

[1] Абрикосов, § 22.9.

[2] Шмидт, §§ 54, 57, 58.3.

[3] Tinkham, § 11.6.

### 5.1 Critical current in thin superconducting wires (whiskers)

Simple explanation is presented below.

Consider the condensate moving with some velocity  $v_s$ . Taking the GL order parameter to be  $n_s$  (the density of superconducting electrons), we obtain the density of the free energy as

$$F_s = F_n + \alpha'(T - T_c)n_s + \frac{b'}{2}n_s^2 + n_s\frac{mv_s^2}{2}. \quad (5.1)$$

The last term is the kinetic energy of superconducting electrons.

Minimizing this with respect to  $n_s$ , we find

$$\frac{\partial F_s}{\partial n_s} = \alpha'(T - T_c) + b'n_s + \frac{mv_s^2}{2} = 0 \quad \implies \quad n_s = \frac{\alpha'(T_c - T) - mv_s^2/2}{b'}. \quad (5.2)$$

The current density is

$$j_s = en_s v_s. \quad (5.3)$$

Plotting this versus  $v_s$  (see Fig. 5.1), we see that  $j_s$  has a maximum. This means that there is depairing (breaking of Cooper pairs) due to current, and the maximal supercurrent is the optimal product of decreasing  $n_s$  and increasing  $v_s$ . Larger current density cannot be maintained by superconducting electrons, therefore, also the normal current must arise. At the same time, superconductivity in the wire is not completely destroyed at this moment ( $n_s$  is still finite).

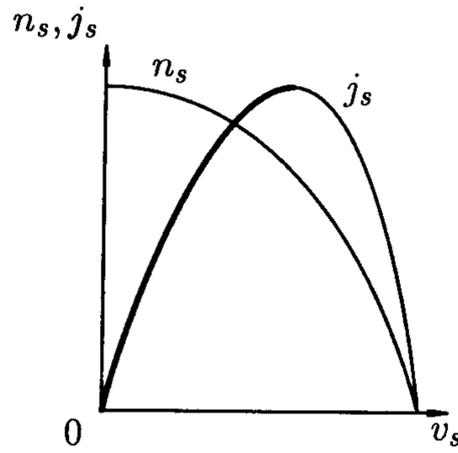


Figure 5.1: Figure 18.2 from Schmidt's book.

The critical current density  $j_c$  characterizes the superconducting material and does not depend on the radius  $R$  of the wire. However, the consideration here is not universal and is actually valid for thin wires only. The point is that the current in the wire creates magnetic field, which we have neglected. At fixed current density, the magnetic field at the surface of the cylindrical wire is

$$H = \frac{2J}{cR} = \frac{2\pi j}{c}R. \quad (5.4)$$

So, this can be neglected only when  $R$  is small enough (the magnetic field at the surface must be much smaller than the critical field).

## 5.2 Experiment and basic idea of phase-slip centers

For a thin superconducting wire, there is a maximal superconducting current  $J_c$  that can flow through the wire. Naively, one can expect that at  $J > J_c$ , there is a phase transition into the normal state. However, experiments demonstrate that this is not so (Figs. 22.19 and 22.20 from Abrikosov). Instead, the transition to the normal state occurs in a number of consecutive voltage steps, and after each step the resistance of the wire is increased. So, at  $J > J_c$  superconductivity still persists in some form.

Thin wires in our case means that  $d < \xi(T), \lambda(T)$  — the superconductivity then is effectively one-dimensional in the sense that the order parameter is constant in each cross section, and only depends on  $x$  along the wire. At the same time, the critical current corresponds to the physical mechanism described above. The model of resistive states in such wires was proposed by Skocpol, Beasley, and Tinkham (1974) [the rigorous theory was proposed by Ivlev and Kopnin (1984)]. The main idea is creation of phase-slip centers inside the wire.

Let us assume that at some point within the wire, the critical current is slightly smaller than everywhere else. Then, upon increasing current, this will be the first place where the

для джозерсоновского контак-  
токазывает, что сверхпроводни-  
в каком-то виде сохраняется и  
личии электрического поля.  
первый взгляд такое заклю-  
кажется парадоксальным.

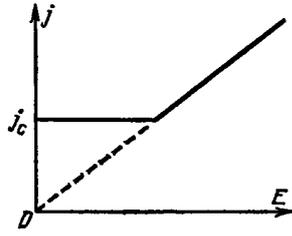


Рис. 22.19

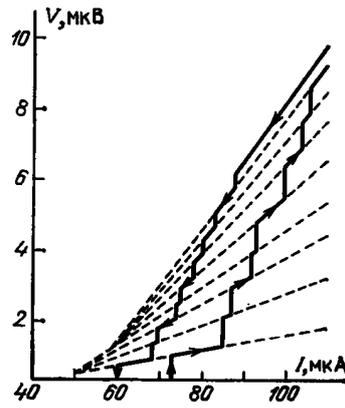


Рис. 22.20

Figure 5.2: (From Abrikosov's book).

critical value of the current is reached. Then, normal electrons must participate in the transport, and electric field appears. Superconducting electrons are still there, they move without resistance, hence they are constantly accelerated by the electric field. At some moment, the depairing takes place,  $\Delta$  turns to zero at this point, and the whole current is carried only by the normal electrons, which are now slowed down due to resistance. However, formation of Cooper pairs in the wire is still energetically favorable, hence  $\Delta$  appears again, a part of the current is again carried by the supercurrent, and the whole process repeats itself.

At each such cycle, the phase difference across such a point is changed by  $2\pi$ , hence such places are called phase-slip centers. Changing of phase by  $2\pi$  is allowed when the order parameter turns to zero. The characteristic size of a phase-slip center is  $2\xi(T)$ . This process is illustrated by Fig. 5.3.

When  $\Delta = 0$ , the phase-slip center is in the normal state, there is electric field, and this field penetrates the adjacent superconducting regions. The corresponding penetration length is denoted by  $\lambda_Q$  and is also called the charge imbalance relaxation length. This is because electrons coming from the normal region (with energies above the gap), cause imbalance between population of electron and hole spectrum branches in the superconducting regions. This imbalance relaxes at length  $\lambda_Q$  within the superconducting regions, and this charge imbalance is just another side of penetrating electric field.

Relaxation of charge actually happens due to relaxation of energy (and charge can relax because there is exchange of charge between quasiparticles and condensate). Energy relaxation is due to electron-phonon collisions, and for the corresponding times we can write

$$\tau_Q \sim \frac{T_c}{\Delta(T)} \tau_{e-ph}. \quad (5.5)$$

This means that actually  $\tau_Q > \tau_{e-ph}$  — not all e-ph collisions are effective for the charge relaxation. Note that  $\tau_Q$  diverges at  $T \rightarrow T_c$ , because in the normal state charge cannot

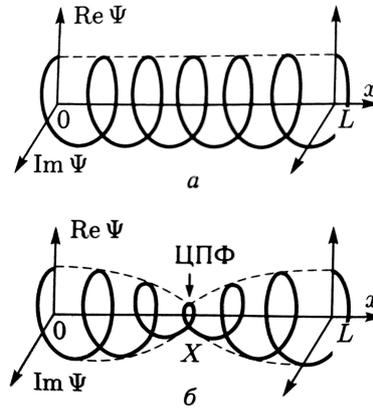


Figure 5.3: (Fig. 22.21 from Abrikosov) The supercurrent is basically given by the following quantity:  $j_s \propto |\Delta|^2 \partial\varphi/\partial x$ . Plotting  $\text{Re } \Delta$  and  $\text{Im } \Delta$ , we obtain a spiral in space. Due to presence of electric field, the current grows, hence the spiral is squeezed (the number of spiral turns grows). Then the current reaches  $j_c$ , and the spiral cannot squeeze any more. It is now necessary to get rid of one spiral turn. This can be done due to collapse of spiral at some point, which means that total phase rotation along the wire is decreased by  $2\pi$ .

relax.

So, due a phase-slip center, a resistance  $\rho \cdot 2\lambda_Q/S$  arises in the wire (here  $\rho$  is the resistivity of the material and  $S$  is the cross-section area). The voltage drop at this resistance is due to the normal component of the current,

$$J_n(t) = J - J_s(t). \quad (5.6)$$

The external current  $J$  is fixed, while  $J_s$  oscillates between 0 and  $J_c$ . We do not know the form of these oscillations, but let us assume that the time average is  $\bar{J}_s = \beta J_c$  with  $\beta \approx 0.5$ . Then the average voltage bias (which is measured experimentally) is

$$\bar{V} = \frac{2\lambda_Q\rho(J - \beta J_c)}{S}. \quad (5.7)$$

Despite the above simplifications, this formula provides reasonable description of experimental data.

As the current is increased, additional phase-slip centers appear one by one. Each time, there is a jump of full voltage bias along the wire, and the slope of the voltage-current dependence increases since new resistive sections of the wire are turned on. This corresponds to experimental plots.

### 5.3 TDGL

For further discussion, we will need the generalization of the GL theory to nonstationary and nonequilibrium case. This is called time-dependent Ginzburg-Landau (TDGL) equation.

During derivation of the GL equation, we required the equilibrium condition

$$\frac{\delta F}{\delta \Delta^*} = 0. \quad (5.8)$$

Out of equilibrium, this variation is nonzero. We can expect that when the system deviates from equilibrium, it wants to return, and  $\partial \Delta / \partial t$  is proportional to  $-\delta F / \delta \Delta^*$ . This is almost so, with one important addition.

The point is that we should take care about gauge invariance of our equations. The fields

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.9)$$

are invariant if we change the gauge as

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \phi \mapsto \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (5.10)$$

In our equations,  $\mathbf{A}$  enters together with the gradient in the following combination:

$$\left( \nabla - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta, \quad (5.11)$$

and the gauge transformation is compensated by the shift of the order parameter phase as

$$\Delta \mapsto \Delta e^{i \frac{2e}{\hbar c} \chi}. \quad (5.12)$$

The time derivative should therefore enter in the combination, which is also invariant under the above gauge transformations:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{2e}{\hbar} \phi \right) \Delta. \quad (5.13)$$

Finally, the TDGL equation can be written as

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{2e}{\hbar} \phi \right) \Delta = -\gamma \frac{\delta F}{\delta \Delta^*} \quad (5.14)$$

with some constant  $\gamma$ .

## 5.4 Details of derivation

### 5.4.1 Boundary conditions

Let us assume that the ends of the wire are attached to bulk superconductors. For bulk superconductors, the current through the wire is small, so they are in equilibrium. The r.h.s. of (5.14) is then equal to zero. Writing  $\Delta = |\Delta| e^{i\varphi}$  we thus obtain in the l.h.s.:

$$\frac{\partial |\Delta|}{\partial t} + i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{2e}{\hbar} \phi \right) |\Delta| = 0. \quad (5.15)$$

Considering the real and imaginary part, we find

$$\frac{\partial|\Delta|}{\partial t} = 0, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{2e}{\hbar}\phi = 0. \quad (5.17)$$

These equations are the boundary conditions for the thin wire. The second one is the general Josephson relation.

### 5.4.2 One phase-slip center

Equation (5.17) can be interpreted as equality of the chemical potentials for normal electrons ( $\mu_n = e\phi$ ) and Cooper pairs ( $\mu_s = -(\hbar/2)\partial\varphi/\partial t$ ). Let us denote

$$\eta = \mu_n - \mu_s = e\phi + \frac{\hbar}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad (5.18)$$

then  $\eta = 0$  in the bulk superconductor. At the same time, similarly to the magnetic field in the Meissner effect, this quantity cannot vanish abruptly, and has some finite penetration depth. We will be interested in the time-averaged quantity  $\bar{\eta}$ . Similarly to the London equation which described the Meissner effect, we now have

$$\frac{\partial^2\bar{\eta}}{\partial x^2} - \frac{\bar{\eta}}{\lambda_Q^2} = 0. \quad (5.19)$$

Let the contacts between the wire and the bulk superconductors be at  $x = 0$  and  $x = L$ . Then  $\eta$  must turn to zero at these points. The left boundary condition yields

$$\bar{\eta}(x) = C_1 \sinh \frac{x}{\lambda_Q}, \quad (5.20)$$

while the right one yields

$$\bar{\eta}(x) = C_2 \sinh \frac{x-L}{\lambda_Q}. \quad (5.21)$$

In the absence of phase-slip centers, the only possible solution in the whole wire is  $\bar{\eta}(x) = 0$ . This can be realized only at  $j < j_c$ .

If  $j > j_c$ , a phase-slip center appears. Let  $X$  denote its position, then

$$\bar{\eta}(X-0) = C_1 \sinh \frac{X}{\lambda_Q}, \quad (5.22)$$

$$\bar{\eta}(X+0) = C_2 \sinh \frac{X-L}{\lambda_Q}. \quad (5.23)$$

At the phase-slip center, the derivative  $\partial\varphi/\partial t$  experiences a jump:<sup>1</sup>

$$\Delta \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} = \frac{\overline{\partial\Delta\varphi}}{\partial t} = \frac{2\pi}{t_0}. \quad (5.24)$$

The characteristic time  $t_0$  here is the period of the process (the phase jumps by  $2\pi$  during each period  $t_0$ ). According to 5.18, the above jump should correspond to the jump of  $\eta$ . So,

$$C_2 \sinh \frac{X-L}{\lambda_Q} - C_1 \sinh \frac{X}{\lambda_Q} = \frac{\pi\hbar}{t_0}. \quad (5.25)$$

Experimentally measurable quantities are time averages. The average electric field at  $0 < x < X$  is

$$\overline{E} = -\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial x}. \quad (5.26)$$

According to (5.18), we can rewrite it as

$$\overline{E} = -\frac{1}{e} \frac{\overline{\partial\eta}}{\partial x} + \frac{\hbar}{2e} \frac{\overline{\partial(\partial\varphi/\partial x)}}{\partial t}. \quad (5.27)$$

Since we do not consider the point  $x = X$ , we have no problem with derivative of  $\varphi$ . Now we note that  $\partial\varphi/\partial x \propto v_s$ , and the superfluid density  $v_s$  is a bounded function (the overall growth of  $\varphi$  in time disappears after differentiating wrt  $x$ ). Hence, the second term in the above expression vanishes, and we obtain

$$\overline{E} = -\frac{1}{e} \frac{\overline{\partial\eta}}{\partial x} = -\frac{C_1}{e\lambda_Q} \cosh \frac{x}{\lambda_Q} \quad (5.28)$$

at  $0 < x < X$ .

Similarly, at  $X < x < L$ , we have

$$\overline{E} = -\frac{C_2}{e\lambda_Q} \cosh \frac{x-L}{\lambda_Q}. \quad (5.29)$$

In the phase-slip center, the supercurrent oscillates between 0 and  $j_c$ , so that

$$\overline{j}_s(X) = \beta j_c, \quad \beta < 1. \quad (5.30)$$

We assume that the total current  $j = j_s + j_n$  is fixed, so

$$\overline{j}_s(X) = j - \overline{j}_n(X) = j - \sigma \overline{E}(X) = \beta j_c. \quad (5.31)$$

---

<sup>1</sup>Note that at each point  $\overline{\partial\varphi/\partial t}$  is nonzero since  $\varphi$  is not a bounded function due to applied voltages (electric potentials).

Substituting here (5.28) and (5.29), we find

$$C_1 = -\frac{(j - \beta j_c)e\lambda_Q}{\sigma \cosh[X/\lambda_Q]}, \quad C_2 = -\frac{(j - \beta j_c)e\lambda_Q}{\sigma \cosh[(L - X)/\lambda_Q]}, \quad (5.32)$$

The period  $t_0$  is related to the average voltage difference  $V$ . Since  $\eta = 0$  in the bulk superconductors, we may write

$$\phi(0) - \phi(L) = \frac{\hbar}{2e} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_L - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_0 \right]. \quad (5.33)$$

Averaging over time the time derivatives in the r.h.s., we find nonzero result only due to the  $2\pi/t_0$  jump, so

$$\bar{V} = \bar{\phi}(0) - \bar{\phi}(L) = \frac{\pi \hbar}{et_0}. \quad (5.34)$$

Substituting this to the r.h.s. of (5.25), and  $C_1$  and  $C_2$  from (5.32) — to the l.h.s. of (5.25), we find

$$\bar{V} = (j - \beta j_c) \frac{\lambda_Q}{\sigma} \left( \tanh \frac{X}{\lambda_Q} + \tanh \frac{L - X}{\lambda_Q} \right). \quad (5.35)$$

In a homogeneous wire, due to symmetry, we expect the phase slip to be located in the center, at  $X = L/2$ , then

$$\bar{V} = 2(j - \beta j_c) \frac{\lambda_Q}{\sigma} \tanh \frac{L}{2\lambda_Q}. \quad (5.36)$$

Now, what is the range of currents, for which this formula is applicable? According to (5.28) and (5.29), the average electric field  $\bar{E}$ , and hence the normal current grow when we move from the edges to the center of the wire. The supercurrent is then maximal at the edges. At the same time, it cannot exceed  $j_c$ . This leads to the condition

$$\bar{j}_s(0) = \bar{j}_s(L) = j - \sigma \bar{E}(0) = j - \sigma \bar{E}(L) = j - \frac{j - \beta j_c}{\cosh(L/2\lambda_Q)} \leq j_c. \quad (5.37)$$

At the same time, we assume  $j \geq j_c$  from the beginning. Then

$$j_c \leq j \leq j_c \frac{1 - \beta / \cosh(L/2\lambda_Q)}{1 - 1 / \cosh(L/2\lambda_Q)}. \quad (5.38)$$

So, as we increase  $j$ , at  $j = j_c$ ,  $\bar{V}$  jumps from zero to

$$V_1 = 2j_c(1 - \beta) \frac{\lambda_Q}{\sigma} \tanh \frac{L}{2\lambda_Q}. \quad (5.39)$$

Then it grows linearly with  $j$  according to (5.36) until  $j$  reaches the upper limit for the current, as given by (5.38). At this point the voltage is

$$V'_1 = 2j_c(1 - \beta) \frac{\lambda_Q}{\sigma} \frac{\tanh(L/2\lambda_Q)}{1 - 1 / \cosh(L/2\lambda_Q)}. \quad (5.40)$$

### 5.4.3 Two phase-slip centers

If the current is even larger, two phase-slip centers occur. It is natural to expect that their locations are such that  $j_n$  is symmetric with respect to each of them. This is possible if they are at  $X_1 = L/4$  and  $X_2 = 3L/4$ . The solution is then

$$\eta = C_1 \sinh[x/\lambda_Q], \quad 0 < x < X_1, \quad (5.41)$$

$$\eta = C_2 \sinh[(x - L/2)/\lambda_Q], \quad X_1 < x < X_2, \quad (5.42)$$

$$\eta = C_3 \sinh[(x - L)/\lambda_Q], \quad X_2 < x < L. \quad (5.43)$$

The solution consists of two previous solutions, each of which is squeezed into one half of the wire. The result for the coefficients is the same as before up to substitution  $L \mapsto L/2$ :

$$C_1 = C_2 = C_3 = -\frac{(j - \beta j_c)e\lambda_Q}{\sigma \cosh[L/4\lambda_Q]}. \quad (5.44)$$

In expressions for the voltage, there is one more modification: the coefficient arising from the  $2\pi$  phase jump, is now two times larger since the total jump becomes  $4\pi$ . The linear part of the voltage dependence instead of (5.36) now becomes

$$\bar{V} = 4(j - \beta j_c) \frac{\lambda_Q}{\sigma} \tanh \frac{L}{4\lambda_Q}. \quad (5.45)$$

This is valid from the upper limit of (5.38) and until the maximal supercurrent (at  $x = 0$ ,  $L/2$ , and  $L$ ) reaches  $j_c$ . The corresponding interval is as follows:

$$j_c \frac{1 - \beta / \cosh(L/2\lambda_Q)}{1 - 1 / \cosh(L/2\lambda_Q)} \leq j \leq j_c \frac{1 - \beta / \cosh(L/4\lambda_Q)}{1 - 1 / \cosh(L/4\lambda_Q)}. \quad (5.46)$$

At the lower limit of this interval, voltage jumps from  $V'_1$  to

$$V_2 = 4j_c(1 - \beta) \frac{\lambda_Q}{\sigma} \frac{\tanh(L/4\lambda_Q)}{1 - 1 / \cosh(L/2\lambda_Q)}. \quad (5.47)$$

The upper limit of the linear dependence corresponds to

$$V'_2 = 4j_c(1 - \beta) \frac{\lambda_Q}{\sigma} \frac{\tanh(L/4\lambda_Q)}{1 - 1 / \cosh(L/4\lambda_Q)}. \quad (5.48)$$

As  $j$  is increased further, more and more phase-slip centers appear.

### 5.4.4 Continuous limit

The number of phase-slip centers also grows if we increase  $L$ . The intervals of the current, where the current-voltage characteristics is linear [(5.38), (5.46), and all subsequent intervals], become narrow if  $L \gg \lambda_Q$ , and the whole  $\bar{V}(j)$  dependence becomes continuous. Let us find this dependence.

In the case of  $k$  phase-slip centers, the linear part of the CVC is

$$\bar{V}_k = 2k(j - \beta j_c) \frac{\lambda_Q}{\sigma} \tanh \frac{L}{2k\lambda_Q}, \quad (5.49)$$

the upper limit for the current is

$$j_k = j_c \frac{1 - \beta / \cosh(L/2k\lambda_Q)}{1 - 1 / \cosh(L/2k\lambda_Q)}, \quad (5.50)$$

and the value of the voltage bias at this limit is

$$V'_k \equiv V_k(j_k) = 2kj_c(1 - \beta) \frac{\lambda_Q}{\sigma} \frac{\tanh(L/2k\lambda_Q)}{1 - 1 / \cosh(L/2k\lambda_Q)}. \quad (5.51)$$

At  $k \rightarrow \infty$ , we may consider this integer as a continuous variable. Introducing  $z = L/2k\lambda_Q$  and recalling that  $\bar{V}/L = \bar{E}$ , we can represent (5.50) and (5.51) as

$$\frac{j - j_c}{j_c(1 - \beta)} = \frac{1}{\cosh z - 1}, \quad (5.52)$$

$$\frac{\sigma \bar{E}}{j_c(1 - \beta)} = \frac{\sinh z}{z} \frac{1}{\cosh z - 1}. \quad (5.53)$$

These equations parametrically determine the  $\bar{E}(j)$  dependence.

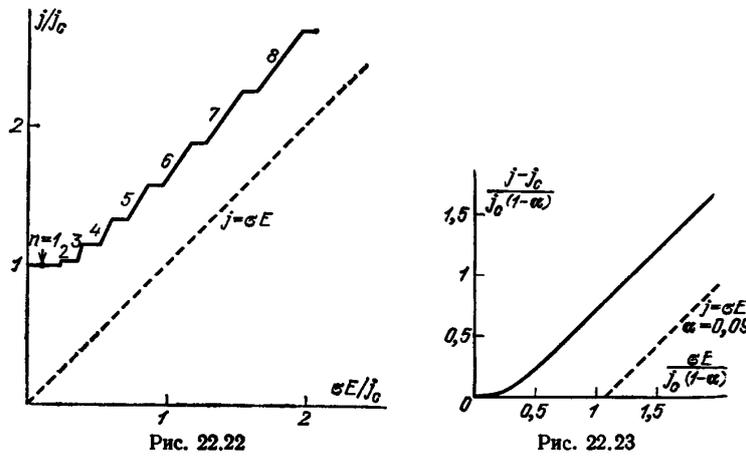


Figure 5.4: (From Abrikosov's book).

Large current  $j \gg j_c$  must correspond to  $z \ll 1$  (due to large number of phase-slip centers  $k$ ). Then  $\sinh z/z \approx 1$  in the r.h.s. of (5.53), it coincides with the r.h.s. of (5.52), and we simply obtain

$$j = \sigma \bar{E} + j_c. \quad (5.54)$$

This corresponds to excess current  $j_c$ .

In the opposite limit of  $z \gg 1$  (realized when the number of phase-slip centers  $k$  is not large), we obtain

$$\frac{j - j_c}{j_c(1 - \beta)} = 2e^{-z}, \quad (5.55)$$

$$\frac{\sigma \bar{E}}{j_c(1 - \beta)} = \frac{1}{z}, \quad (5.56)$$

hence

$$\frac{j - j_c}{j_c} = 2(1 - \beta) \exp \left[ -\frac{j_c(1 - \beta)}{\sigma \bar{E}} \right]. \quad (5.57)$$

$\bar{V}(j)$  then has infinite derivative at  $j \rightarrow j_c$ .

# Литература

- [1] Tinkham M. Introduction to superconductivity (second edition). — McGraw-Hill, 1996.
- [2] Имри Й. Введение в мезоскопическую физику. — М.: Физматлит, 2002.
- [3] Datta S. Electronic transport in mesoscopic systems. — Cambridge University Press, 1995.
- [4] Шехтер Р. И. Нулевые аномалии сопротивления туннельного контакта, содержащего металлические включения в оксидном слое // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 63. — С. 1410–1416.  
Кулик И. О., Шехтер Р. И. Кинетические явления и эффекты дискретности заряда в гранулированных средах // ЖЭТФ. — 1975. — Т. 68. — С. 623–640.
- [5] Grabert H., Devoret M. H. (editors). Single charge tunneling: Coulomb blockade phenomena in nanostructures, volume 294 of NATO ASI series B: Physics. — Plenum Press, 1992.
- [6] Бурштейн Э., Лундквист С. Туннельные явления в твёрдых телах. — М.: Мир, 1973.
- [7] Averin D. V., Likharev K. K. Single Electronics: Correlated Transfer of Single Electrons and Cooper Pairs in Systems of Small Tunnel Junctions // in B. L. Altshuler, P. A. Lee and R. A. Webb (editors), “Mesoscopic Phenomena in Solids”, Chapter 6. — Amsterdam, Elsevier, 1991.  
Likharev K. K. Single-electron devices and their applications // in Proceedings of the IEEE, volume 87, pages 606–632. IEEE, April 1999.
- [8] Blanter Ya. M., Büttiker M. Shot noise in mesoscopic conductors // Physics Reports. — 2000. — V. 336. — P. 1–166.
- [9] Глазман Л. И., Лесовик Г. Б., Хмельницкий Д. Е. и др. Безотражательный квантовый транспорт и фундаментальные ступени баллистического сопротивления в микросужениях // Письма в ЖЭТФ. — 1988. — Т. 48. — С. 218–220.

- [10] Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике. Ч. 1, гл. 8, § 6. — М.: УРСС, 2001.
- [11] Wharam D. A., Thornton T. J., Newbury R. et al. One-dimensional transport and the quantization of the ballistic resistance // J. Phys. C. — 1988. — V. 21. — P. L209–L214.
- [12] Wees B. J. van, Houten H. van, Beenakker C. W. J. et al. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas // Phys. Rev. Lett. — 1988. — V. 60. — P. 848–850.
- [13] Josephson B. D. Possible new effects in superconductive tunnelling // Phys. Lett. — 1962. — V. 1. — P. 251–253.
- [14] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Курс теоретической физики. Т. IX. Статистическая физика (часть 2). — М.: Физматлит, 2004.
- [15] Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. — М.: МЦНМО, 2000.
- [16] Жен П. де. Сверхпроводимость металлов и сплавов. — М.: Мир, 1968.
- [17] Кулик И. О., Янсон И. К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. — М.: Наука, 1970.
- [18] Свидзинский А. В. Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости. — М.: Наука, 1982.
- [19] Likharev K. K. Superconducting weak links // Rev. Mod. Phys. — 1979. — V. 51. — P. 101–159.
- [20] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. V. Статистическая физика (часть 1). — М.: Физматлит, 2005.
- [21] Минеев В. П., Самохин К. В. Введение в теорию необычной сверхпроводимости. — М.: МФТИ, 1998.
- [22] Kopnin N. B. Theory of Nonequilibrium Superconductivity. — Oxford: Oxford University Press, 2001.
- [23] Зайцев Р. О. О решении уравнений сверхпроводимости для системы сверхпроводящего и нормального металлов // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — С. 644–651.  
Зайцев Р. О. Граничные условия для уравнений сверхпроводимости при температурах, близких к критической // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — С. 1759–1771.

- [24] Зайцев А. В. Квазиклассические уравнения теории сверхпроводимости для контактирующих металлов и свойства микроконтактов с сужением // ЖЭТФ. — 1984. — Т. 86. — С. 1742–1758.  
Куприянов М. Ю., Лукичѳв В. Ф. Влияние прозрачности границ на критический ток грязных  $SS'S$  структур // ЖЭТФ. — 1988. — Т. 94. — С. 139–149.
- [25] Асламазов Л. Г., Ларкин А. И. Эффект Джозефсона в точечных сверхпроводящих контактах // Письма в ЖЭТФ. — 1969. — Т. 9. — С. 150–154.
- [26] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. II. Теория поля. — М.: Физматлит, 2006.
- [27] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Физматлит, 2004.
- [28] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. I. Механика. — М.: Физматлит, 2004.
- [29] A. E. Hanna and M. Tinkham, Phys. Rev. B **44**, 5919(R) (1991).