

# Электронны в металлах

Я.В. Фоминов

(Dated: 18 ноября 2023)

Это лекционные заметки ко второй части курса лекций «Фононы и электроны в металлах» для студентов 4 курса МФТИ, организованного кафедрой «Проблемы теоретической физики» при ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН. Страница курса находится по адресу <http://chair.itp.ac.ru/index.php?sub=curriculum/ph-el>

**Предупреждение.** Хотя эти записи имеют вид связного текста и могут оказаться полезны (особенно при изучении указанного курса), они не являются полноценным методическим пособием. Некоторые необходимые подробности и пояснения, обсуждаемые на лекциях, в них не отражены. По мере внесения исправлений/дополнений версия заметок может обновляться на странице курса.

Основной материал второй части курса является классическим для этой области науки и поэтому изложен в ряде известных монографий и учебников. В основном изложение будет следовать книге [1], при этом более строгое и полное рассмотрение обсуждаемых вопросов можно найти в книгах [2,3].

Литература по части 2:

- [1] А.А. Абрикосов, «Основы теории металлов», М.: Физматлит, 2009.
- [2] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, «Физическая кинетика» («Теоретическая физика», том X), М.: Физматлит, 2007.
- [3] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, «Статистическая физика. Часть 2.» («Теоретическая физика», том IX), М.: Физматлит, 2004.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |    |
|--|----|
| I. Кинетическое уравнение для электронов в металле                     | 3  |
| II. Проводимость, обусловленная примесями                              | 6  |
| III. Теплопроводность, обусловленная примесями                         | 8  |
| IV. Электрон-электронное рассеяние                                     | 9  |
| А. Без процессов переброса   | 9  |
| В. Роль процессов переброса  | 11 |
| V. Электрон-фононное рассеяние   | 12 |
| VI. Температурная зависимость проводимости и теплопроводности          | 16 |
| VII. Кин.уравнение при наличии магнитного поля                         | 17 |
| VIII. Эффект Холла и магнитосопротивление в слабом магнитном поле      | 21 |
| IX. Эффект Холла в сильном магнитном поле                              | 23 |
| X. Термоэлектрические явления  | 28 |
| XI. Термомагнитные явления в слабом магнитном поле                     | 32 |
| XII. Термомагнитные явления в сильном магнитном поле                   | 33 |
| XIII. Нормальный скин-эффект   | 36 |
| XIV. Аномальный скин-эффект  | 38 |
| XV. Аномальный скин-эффект. Решение кин.уравнения                      | 40 |
| XVI. Квантовые эффекты в магнитной восприимчивости электронной системы | 46 |
| XVII. Эффект де Гааза–ван Альфена                                      | 48 |

## I. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛЕ

Функция распределения в фазовом пространстве:  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Меняется за счёт столкновений электрона с другими электронами, фононами, и дефектами кристалла (примесные атомы, структурные дефекты). Кин.уравнение Больцмана:

$$\frac{df}{dt} = I_{\text{ст}}(f), \quad (1.1)$$

где  $I_{\text{ст}}(f)$  — интеграл столкновений. Поскольку

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}, \quad (1.2)$$

можем написать<sup>1</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{\text{ст}}(f). \quad (1.3)$$

Электроны — это фермионы, поэтому равновесная функция распределения для них имеет вид Ферми–Дирака:

$$f_0(\varepsilon) = \frac{1}{\exp((\varepsilon - \mu)/T) + 1}, \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon$  — энергия,  $\mu$  — хим.потенциал.

Рассмотрим упругое рассеяние на примесях в борновском приближении. Вероятность рассеяния в единицу времени:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \int |V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} V, \quad (1.5)$$

где  $V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$  — матричный элемент энергии взаимодействия электрона с примесями, расположенными в точках  $\mathbf{R}_i$ :

$$V(\mathbf{r}) = \sum_i v_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i). \quad (1.6)$$

Матричный элемент берётся между блоховскими функциями:

$$\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

<sup>1</sup> В случае фононов третье слагаемое в левой части имело вид

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}}$$

и играло роль только в особых случаях крупномасштабной неоднородности решётки.

[здесь  $V$  — объём образца, поэтому периодические функции  $u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$  нормированы на единицу]. Поэтому

$$V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \frac{1}{V} \sum_i \int v_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}/\hbar} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} u_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (1.8)$$

Предположим для простоты, что примеси одинаковы (т.е.  $v_i$  не зависит от индекса  $i$ ) и занимают эквивалентные положения в ячейках кристалла (т.е. расположены случайным образом в некоторых узлах периодической решётки, имеющей ту же периодичность, что и кристаллическая решётка). Тогда можно сдвинуть переменную интегрирования на  $\mathbf{R}_i$  и учесть, что  $u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$  — периодическая функция:

$$V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \frac{1}{V} \sum_i e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{R}_i/\hbar} \int v(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{r}/\hbar} u_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{V} \sum_i e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{R}_i/\hbar} v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}. \quad (1.9)$$

Тогда

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{V} \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \sum_{i,k} e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})(\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_k)/\hbar} \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (1.10)$$

В сумме из-за быстрых осцилляций обратятся в ноль все слагаемые кроме  $i = k$ , поэтому

$$\sum_{i,k} e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})(\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_k)/\hbar} \mapsto N_i, \quad (1.11)$$

где  $N_i$  — число примесей.

В результате

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} n_i \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (1.12)$$

где  $n_i$  — концентрация примесей.

До сих пор мы думали про один электрон. Теперь учтём, что электронов много, они описываются функцией распределения. Для заданного импульса  $\mathbf{p}$  могут быть уходные процессы ( $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}'$ ) и приходные процессы ( $\mathbf{p}' \mapsto \mathbf{p}$ ). Чтобы процесс произошёл, начальное состояние должно быть заполнено, конечное — свободно. Поэтому

$$\begin{aligned} I_{\text{ст}}(f) &= \frac{2\pi}{\hbar} n_i \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 [-f(\mathbf{p})(1 - f(\mathbf{p}')) + f(\mathbf{p}')(1 - f(\mathbf{p}))] \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} n_i \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 [f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p})] \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Чтобы избавиться от дельта-функции, мы бы хотели перейти от интегрирования по импульсу к интегрированию по энергии. Для этого интегрирование в импульсном

пространстве запишем следующим образом. Пусть  $dS$  — элемент изоэнергетической поверхности  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$  в импульсном пространстве. Тогда

$$d^3\mathbf{p} = dS dp_n, \quad (1.14)$$

где  $dp_n$  обозначает интегрирование по нормали к  $dS$ . При этом

$$dp_n = \frac{d\varepsilon}{|\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}|} = \frac{d\varepsilon}{v}. \quad (1.15)$$

Поэтому

$$d^3\mathbf{p} = dS \frac{d\varepsilon}{v}. \quad (1.16)$$

Чуть позже нам понадобится плотность состояний (в расчёте на одну проекцию спина), которую можно записать как

$$\nu(\varepsilon) = \int \frac{dS}{v(2\pi\hbar)^3}. \quad (1.17)$$

Таким образом,

$$I_{\text{ст}}(f) = \frac{2\pi}{\hbar} n_i \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 [f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p})] \frac{dS'}{v(\mathbf{p}')(2\pi\hbar)^3}, \quad (1.18)$$

где интегрирование ведётся по поверхности  $\varepsilon(\mathbf{p}') = \varepsilon(\mathbf{p})$ .

Равновесная функция распределения  $f_0$  зависит только от энергии, поэтому интеграл столкновений зануляется. Это значит, что в него на самом деле входит только отклонение от равновесной функции:

$$f = f_0 + f_1. \quad (1.19)$$

Мы будем рассматривать только ситуации, когда внешнее электрическое поле и градиент температур малы, в этом случае отклонение от равновесной функции также мало:  $|f_1| \ll f_0$ .

В изотропном случае изоэнергетическая поверхность — это сфера, и выражения упрощаются. Матричный элемент  $v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$  зависит только от угла  $\theta$  между  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}$  (которые равны по модулю), а интегрирование по  $dS'$  превращается в интегрирование по телесному углу. Поскольку

$$\nu(\varepsilon) = \int \frac{p^2 d\Omega}{v(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi p^2}{v(2\pi\hbar)^3}, \quad (1.20)$$

можем написать

$$I_{\text{ст}}(f) = \int W(\theta) [f_1(\mathbf{p}') - f_1(\mathbf{p})] \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (1.21)$$

где

$$W(\theta) = \frac{2\pi}{\hbar} n_i |v(\theta)|^2 \nu(\varepsilon). \quad (1.22)$$

Пусть есть слабое электрическое поле (аналогично будет и для малого градиента температуры). Отклонение  $f_1(\mathbf{p})$  должно быть скаляром, линейным по  $\mathbf{E}$  (в первом приближении). Поэтому оно должно иметь вид

$$f_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{E}\eta(\varepsilon). \quad (1.23)$$

Тогда

$$I_{\text{ст}}(f) = pE\eta(\varepsilon) \int W(\theta) \left[ \cos(\widehat{\mathbf{p}'}, \widehat{\mathbf{E}}) - \cos(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{E}}) \right] \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (1.24)$$

Направим полярную ось  $z$  вдоль  $\mathbf{p}$ . Тогда можем написать

$$\mathbf{p}'\mathbf{E} = p'_z E_z + \mathbf{p}'_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}. \quad (1.25)$$

Делим на  $p'E$ , получаем

$$\cos(\widehat{\mathbf{p}'}, \widehat{\mathbf{E}}) = \cos\theta \cos(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{E}}) + \sin\theta \sin(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{E}}) \cos(\widehat{\mathbf{p}'_{\perp}}, \widehat{\mathbf{E}_{\perp}}). \quad (1.26)$$

Интегрирование в (1.24) ведётся по  $\sin\theta d\theta d\varphi$ , где углы определяют направление вектора  $\mathbf{p}'$ . Единственная величина, которая зависит от  $\varphi$  — это  $\cos(\widehat{\mathbf{p}'_{\perp}}, \widehat{\mathbf{E}_{\perp}})$ , и интегрирование по  $d\varphi$  зануляет соответствующее слагаемое. Получаем

$$I_{\text{ст}}(f) = (\mathbf{p}\mathbf{E})\eta(\varepsilon) \int W(\theta) [\cos\theta - 1] \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (1.27)$$

То есть мы получили, что

$$I_{\text{ст}}(f) = -\frac{f_1}{\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \int W(\theta)(1 - \cos\theta) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (1.28)$$

Это пример применимости  $\tau$ -приближения.

## II. ПРОВОДИМОСТЬ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ПРИМЕСЯМИ

Пусть в металле есть постоянное однородное электрическое поле  $\mathbf{E}$ . В кин.уравнении (1.3) исчезают первые два члена, остаётся

$$e\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f_1}{\tau}, \quad (2.1)$$

где в левой части мы заменили  $f$  на равновесную функцию  $f_0$ , т.к. электрическое поле слабое. При этом  $f_0$  зависит только от энергии, поэтому

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (2.2)$$

Это даёт

$$f_1 = -e \mathbf{E} \mathbf{v} \tau \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (2.3)$$

Плотность электрического тока выражается через функцию распределения следующим образом:

$$\mathbf{j} = 2e \int \mathbf{v} f \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (2.4)$$

Функция  $f_0(\varepsilon)$  зануляет интеграл из-за нечётности подынтегрального выражения, поэтому вместо  $f$  можно написать  $f_1$ . Получаем

$$\mathbf{j} = -2e^2 \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{E}) \tau \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \nu(\varepsilon) d\varepsilon \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (2.5)$$

Если функция  $\nu(\varepsilon)$  медленно меняется в окрестности  $\varepsilon = \mu$  ширины  $T$ , то можно считать

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \approx -\delta(\varepsilon - \mu). \quad (2.6)$$

В изотропном случае, интегрируя по углам, получаем результат

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma = \frac{2e^2}{3} [v^2 \tau \nu(\varepsilon)]_{\varepsilon=\mu}. \quad (2.7)$$

Если дополнительно предположить модель свободных электронов (т.е. спектр  $\varepsilon = p^2/2m$ ), то получим

$$\nu(\varepsilon) = \frac{mp}{2\pi^2 \hbar^3} = \frac{m\sqrt{2m\varepsilon}}{2\pi^2 \hbar^3}, \quad (2.8)$$

$$n_e = 2 \int_0^\mu \nu(\varepsilon) d\varepsilon = 2\nu(\mu) \frac{2}{3} \mu, \quad (2.9)$$

что приводит к формуле Друде для проводимости:

$$\sigma = \frac{2e^2}{3} v^2 \tau \frac{3n_e}{4\mu} = \frac{n_e e^2 \tau}{m}. \quad (2.10)$$

### III. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ПРИМЕСЯМИ

В случае металлов в теплопроводность есть как фононный, так и электронный вклад, причём обычно электронный вклад больше (например, он линеен по  $T$  при  $T \rightarrow 0$  в отличие от закона Казимира  $T^3$  для фононов). Рассмотрим электронную теплопроводность.

Для расчёта теплопроводности можно пользоваться моделью свободного электронного газа (как при вычислении проводимости), но мы будем пользоваться моделью квазичастиц и на этом примере познакомимся с кин.уравнением для квазичастиц. Их спектр, заряд и скорость:

$$\varepsilon_{\text{кв}} = |\xi|, \quad \xi = \varepsilon(\mathbf{p}) - \mu, \quad (3.1)$$

$$e_{\text{кв}} = e \operatorname{sgn} \xi, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v}_{\text{кв}} = \frac{\partial |\xi|}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v} \operatorname{sgn} \xi, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m_*}, \quad (3.3)$$

где мы учли, что в рамках теории ферми-жидкости Ландау эффективная масса квазичастиц  $m_*$  может отличаться от массы реальных электронов.

Равновесная функция распределения квазичастиц есть

$$f_0 = \frac{1}{e^{|\xi|/T} + 1}. \quad (3.4)$$

Хим.потенциал для квазичастиц равен нулю — это условие минимума термодинамического потенциала по числу частиц (которое для квазичастиц не задано).

Кин.уравнение Больцмана для квазичастиц имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{sgn} \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \operatorname{sgn} \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (3.5)$$

причём  $\tau$  для квазичастиц такое же, как для электронов, т.к. в него входит квадрат заряда.

В результате решения задачи об электронной теплопроводности получается

$$\mathbf{q} = -\varkappa \nabla T, \quad \varkappa = \frac{2\pi^2}{9} T [v^2 \tau \nu(\varepsilon)]_{\varepsilon=\mu}. \quad (3.6)$$

Сравнивая этот результат с проводимостью (2.7), находим

$$\frac{\varkappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3e^2} \quad (3.7)$$



— закон Видемана–Франца, константа в правой части называется постоянной Лоренца.

Друдевская проводимость определяется концентрацией примесей и не зависит от температуры. Её называют также остаточной проводимостью, т.к. именно она определяет проводимость при  $T = 0$  (остальные вклады обращаются в ноль). Теплопроводность, обусловленная примесями, зависит от температуры линейно.

В анизотропном случае такое же соотношение получится между тензорами теплопроводности и электропроводности. Но это всё для упругого рассеяния. Если же рассеяние электронов перестаёт быть упругим, закон Видемана–Франца не выполняется.

#### IV. ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННОЕ РАССЕЙАНИЕ

##### A. Без процессов переброса

Рассмотрим процесс рассеяния для исходного электрона, находящегося над ферми-морем (более аккуратно называть это электроноподобной квазичастицей). Разберёмся, как устроены импульсы. Электрон 1 рассеивается на электроне 2, получаются электроны 1' и 2'.

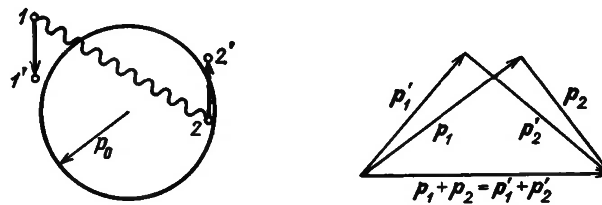


Рис. 1. (Рисунок из книги Абрикосова) Рассеяние электрона на электроне.

Первый электрон — вне ферми-сферы, второй нужно брать внутри. 1' и 2' должны быть вне ферми-сферы, из-за принципа Паули. Сохранение импульса:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad (4.1)$$

$$p_1, p'_1, p'_2 > p_0, \quad p_2 < p_0. \quad (4.2)$$

Обратное время свободного пробега — порядка вероятности рассеяния в единицу времени:

$$\frac{1}{\tau} \propto \int \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}'_1 \quad (4.3)$$

— мы считаем, что квадрат матричного элемента зависит от импульсов несущественно, поэтому для оценок мы его вынесли за интеграл и считаем коэффициентом пропорциональности. Интегрировать по  $\mathbf{p}'_2$  не нужно, т.к. этот импульс фиксируется законом сохранения импульса.

Законы сохранения импульса [(4.1)–(4.2)] и энергии [дельта-функция в формуле (4.3)] при интегрировании по фазовому пространству в (4.3) приводят к ограниченности области интегрирования, в которой рассматриваемый процесс рассеяния возможен. Это вычисление довольно громоздкое, основным результатом его является соотношение

$$\frac{1}{\tau} \propto \xi_1^2, \quad (4.4)$$

где

$$\xi_1 = \varepsilon(p_1) - \mu = \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} \approx v(p_1 - p_0). \quad (4.5)$$

При конечной температуре  $\xi \sim T$ , а для обезразмеривания у нас есть хим.потенциал  $\mu$ .

Поэтому получаем оценку

$$\frac{\hbar}{\tau} \sim \frac{T^2}{\mu}. \quad (4.6)$$

Поэтому ( $e^2 \sim \hbar v$ )

$$\sigma \sim \frac{n_e e^2 \hbar \mu}{m T^2} \sim \left(\frac{p_0}{\hbar}\right)^3 \frac{\hbar^2 v}{m \mu} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \sim \frac{\mu}{\hbar} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2. \quad (4.7)$$

Из закона Видемана-Франца получаем

$$\varkappa = \frac{\pi^2}{3e^2} \sigma T \sim \frac{\mu^2}{\hbar^2 v} \frac{\mu}{T}. \quad (4.8)$$

Вообще-то электрон-электронные столкновения не являются упругими, т.к. электроны обмениваются энергией, поэтому закон Видемана-Франца не обязан быть применим. Но на самом деле его неприменимость связана с тем, что возникают два разных времени  $\tau$  — для импульсной ( $\tau_p$ ) и энергетической ( $\tau_\varepsilon$ ) релаксации. Для электрон-электронных столкновений энергии электронов имеют порядок  $T$ , и передача энергии — того же порядка. Импульсы — порядка  $p_0$ , и передача импульса — того же порядка. Поэтому оба процесса релаксации проходят одинаково эффективно (при каждом столкновении), и  $\tau_p \sim \tau_\varepsilon$ . В задаче о примесях рассеяние было таким же эффективным с точки зрения релаксации импульса, а релаксации энергии не было вообще, т.е.  $\tau_\varepsilon = \infty$ . Теперь же оба времени — одного порядка. Но это означает, что хотя старый результат буквально

неприменим, нового параметра в задаче не возникает, и в результате закон Видемана-Франца работает по порядку величины.

Из формулы (4.6) следует важное условие применимости концепции квазичастиц. В рамках этой концепции мы заменяем взаимодействующие частицы невзаимодействующими квазичастицами. Но теперь мы учли, что на самом деле из-за взаимодействия у этих квазичастиц есть конечное время жизни  $\tau$ , т.е. по соотношению неопределённости их энергия размыта на величину  $\hbar/\tau$ . Чтобы такая картина работала, размытие должно быть много меньше энергии квазичастиц  $|\xi| \sim T$ , откуда получаем условие  $T \ll \mu$ .

Поскольку  $\mu$  в металлах порядка нескольких электрон-вольт, то это означает  $T < T_0 \sim 10^4\text{--}10^5$  К, что в действительности всегда выполняется, т.к.  $T_0$  во всяком случае гораздо больше температур плавления реальных металлов.

### В. Роль процессов переброса

До сих пор мы рассматривали электрон-электронное рассеяние без процессов переброса. Однако в этом случае импульс мог бы лишь перераспределяться внутри электронной системы, тогда как полный импульс электронов оставался бы неизменным. Это означало бы отсутствие сопротивления. Поэтому важно учесть, что на самом деле мы рассматриваем не настоящий импульс, а квазиимпульс, который определён с точностью до вектора обратной решётки, и именно из-за этого возможны электрон-электронные столкновения, в которых (квази)импульс не сохраняется:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 = \hbar\mathbf{b}. \quad (4.9)$$

Чтобы это условие было выполнено (при том, что в рассеянии участвуют электроны вблизи ферми-поверхности), необходимо выполнение условия

$$\max(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) = 4 \max p_0(\mathbf{n}) > \hbar\mathbf{b}_{\min}(\mathbf{n}), \quad (4.10)$$

где  $\mathbf{n}$  — возможные направления векторов  $\mathbf{b}$ .

Очевидно, это соотношение выполняется в случае, если ферми-поверхность доходит до границы зоны Бриллюэна. Но оно выполняется и при более слабых условиях. Например, в важном случае щелочных металлов (металлы первой группы: литий, натрий, калий и др.) ферми-поверхность очень близка к сфере, а поскольку у этих металлов

имеется один валентный электрон на атом, то объём ферми-сферы равен половине объёма зоны Бриллюэна. Поэтому радиус ферми-сферы больше, чем  $1/4$  от периода обратной решётки, и условие (4.10) выполнено.

Также оно может быть выполнено и в более сложных случаях, например, для полуметаллов (типа висмута), у которых ферми-поверхность ограничивает области малого объёма, но этих областей (долин) несколько, и они находятся в разных частях зоны Бриллюэна. Центры этих долин находятся на расстоянии  $\hbar\mathbf{b}/2$ , и этого оказывается достаточно для выполнения условия (4.10) (оказываются возможны междолинные переходы).

Таким образом, во многих случаях процессы переброса оказываются возможны, что и приводит к сопротивлению за счёт электрон-электронного рассеяния.

## V. ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОЕ РАССЕЯНИЕ

При деформации решётки возникает поляризация  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  (сейчас рассматриваем решётку в непрерывном пределе). Плотность поляризационного заряда есть  $\rho_{\text{пол}} = -\text{div } \mathbf{P}$ , а энергия взаимодействия электронов с этим зарядом равна

$$V(\mathbf{r}) = -e \int Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \text{div } \mathbf{P}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (5.1)$$

Без экранирования ядро было бы чистым кулоновским взаимодействием:  $Q = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Однако, из-за экранировки оно становится короткодействующим. Считая атомные расстояния малыми, можем считать ядро дельта-функцией:

$$Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx a^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.2)$$

где  $a$  имеет порядок атомного пространственного масштаба,  $a \sim 10^{-8}$  см  $\sim \hbar/p_0$ , откуда

$$V(\mathbf{r}) \sim -ea^2 \text{div } \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (5.3)$$

Поляризацию можно оценить как  $\mathbf{P} \sim ne\mathbf{u}$ , где  $n$  — плотность атомов (порядка плотности электронов),  $\mathbf{u}$  — смещение. Взаимодействие содержит  $\text{div } \mathbf{P}$ , что в фурье-представлении даст  $iku_{\mathbf{k}}$ , при том что для длинноволновых фононов  $\omega = c_s k$ . В результате

$$V_{\mathbf{k}} \sim -ie^2 a^2 n \frac{\omega}{c_s} u_{\mathbf{k}}. \quad (5.4)$$

Используя формулы квантования фононов, можем записать смещение  $u_{\mathbf{k}}$  через операторы  $a$  и  $a^\dagger$ . В первом порядке теории возмущений есть процессы, соответствующие матричным элементам  $a_{\mathbf{k}}$  и  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ , т.е. процессам с поглощением или испусканием одного фонона. Например, для испускания будет матричный элемент  $\langle n_{\mathbf{k}} + 1 | a_{\mathbf{k}}^\dagger | n_{\mathbf{k}} \rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}} + 1}$ , и мы получим ( $N$  — число элементарных ячеек,  $M$  — масса элементарной ячейки):

$$V_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k},\mathbf{p}} \sim -ie^2 a^2 n \left( \frac{\hbar(n_{\mathbf{k}} + 1)}{NM\omega} \right)^{1/2} \frac{\omega}{c_s} \sim -ina^3 \frac{e^2}{a} \left( \frac{\hbar\omega(n_{\mathbf{k}} + 1)}{N} \right)^{1/2} \frac{1}{c_s \sqrt{M}}. \quad (5.5)$$

Поскольку  $na^3 \sim 1$ ,  $e^2/a \sim p_0^2/m$ ,  $c_s \sqrt{M} \sim v\sqrt{m}$ ,<sup>2</sup> получаем

$$V_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k},\mathbf{p}} \sim -ip_0 \left( \frac{\hbar\omega(n_{\mathbf{k}} + 1)}{Nm} \right)^{1/2}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим теперь предельные случаи высоких и низких температур.

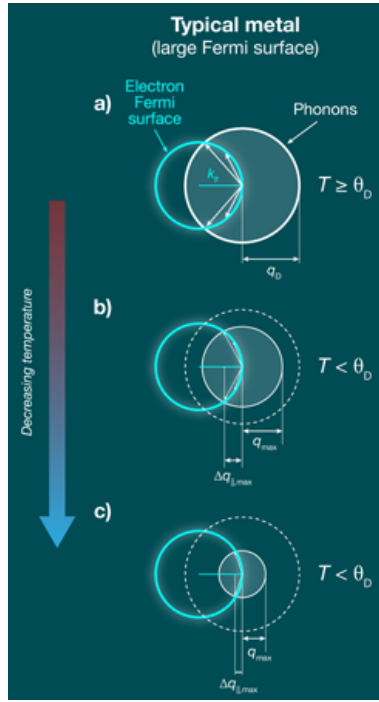


Рис. 2. Электрон-фононное рассеяние при разных температурах: ферми-сфера и «дебай»-сфера.

<sup>2</sup> Последнее соотношение можно пояснить следующим образом. Характеристики электронного спектра в металле выражаются только через межатомное расстояние  $a$  и массу электрона  $m$ . Например,  $p_0 \sim \hbar/a$ ,  $v \sim p_0/m \sim \hbar/ma$  и т.д. Параметры же фононного спектра содержат также массу атомов (которая порядка массы элементарной ячейки  $M$ ). Плотность вещества  $\rho \propto M$ , а скорость звука  $c_s \propto \rho^{-1/2} \propto M^{-1/2}$ . Поэтому отношение  $c_s/v$  нужно сделать безразмерным с помощью электронных характеристик следующим образом:  $c_s/v \sim (m/M)^{1/2}$ .

Кстати, из этих же рассуждений следует, что поскольку  $k_D \sim k_0$ , то  $T_D/\mu \sim c_s/v \sim (m/M)^{1/2}$ .

1. Высокие температуры,  $T \gg \hbar\omega_D$ . Наиболее вероятно испускание и поглощение фононов с большими энергиями, порядка  $\hbar\omega_D$ . Вероятность рассеяния с испусканием фонона равна

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \int |V_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k},\mathbf{p}}|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}) - \hbar\omega(\mathbf{k})) \frac{V d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (5.7)$$

Дельта-функцию в этой формуле можно записать как

$$\delta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})^2}{2m} - \hbar\omega(\mathbf{k})\right) = \delta\left(\frac{\hbar\mathbf{p}\mathbf{k}}{m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \hbar\omega(\mathbf{k})\right) = \frac{m}{\hbar p k} \delta\left(\cos\varphi - \frac{\hbar k}{2p} - \frac{m\omega}{pk}\right), \quad (5.8)$$

где  $\varphi$  — угол между импульсами электрона и фонона. В нашем пределе  $\hbar k/p \sim \hbar k_D/p_0 \sim 1$ . Кроме того,  $m\omega/pk \sim mc_s/p_0 \sim c_s/v \ll 1$ . Поэтому дельта-функция сработает при интегрировании по углам (причём  $\cos\varphi \sim 1$ , т.е. фононы имеют широкое угловое распределение).<sup>3</sup> Интегрирование дельта-функции по  $d^3\mathbf{k}$  в результате даёт множитель порядка

$$\delta(\dots)d^3\mathbf{k} \sim \frac{m}{\hbar p_0} k_D^2 \sim \frac{mp_0}{\hbar^3}. \quad (5.9)$$

В матричном элементе взаимодействия можно взять

$$n_{\mathbf{k}} + 1 \approx n_{\mathbf{k}} \approx \frac{T}{\hbar\omega_D}. \quad (5.10)$$

В результате

$$\frac{1}{\tau} \sim w \sim \frac{1}{\hbar} \frac{p_0^3 T}{\hbar^3 n} \sim \frac{T}{\hbar}. \quad (5.11)$$

Поэтому

$$\sigma \sim \frac{n_e e^2 \tau}{m} \sim \frac{\mu \mu}{\hbar T}. \quad (5.12)$$

Таким образом, при высоких  $T$  получаем  $\rho \propto T$ .

Поскольку  $\hbar\omega_D \ll T$ , энергия электрона при столкновениях почти не меняется, поэтому столкновения почти упругие, и работает закон Видемана-Франца. Отсюда

$$\kappa = \frac{\pi^2}{3e^2} \sigma T \sim \frac{\mu^2}{\hbar^2 v} = \text{const}. \quad (5.13)$$

2. Низкие температуры,  $T \ll \hbar\omega_D$ . Основную роль играют фононы с энергией  $\hbar\omega \sim T$ , поэтому энергия электронов существенно изменяется при каждом столкновении.

<sup>3</sup> Можно ещё обратить внимание на то, что получается  $\cos\varphi > 0$ . Это потому, что мы сейчас рассматриваем процесс с испусканием фонона. Для процесса с поглощением фонона в формуле (5.7) конечная энергия электрона будет  $\varepsilon(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})$ , и это приведёт к изменению знака перед косинусом в формуле (5.8). Для таких процессов будет  $\cos\varphi < 0$ .

Импульс фононов порядка  $\hbar\omega/c_s \sim T/c_s$ , а импульс электронов порядка  $p_0$ , поэтому относительная величина изменения импульса электрона при каждом столкновении есть  $T/c_s p_0 \sim T/\hbar\omega_D \ll 1$ . То есть энергия меняется сильно, а импульс слабо. Поэтому этот случай противоположен упругим столкновениям, при которых, наоборот, энергия меняется слабо, а импульс сильно. Из-за этого применять закон Видемана-Франца нельзя.

Но можно ввести разные  $\tau$  для электро- и теплопроводности. Для теплопроводности каждое столкновение эффективно (импульс передаётся слабо, зато энергия передаётся хорошо), поэтому соответствующее  $\tau_t$  можно найти как  $w^{-1}$ , см. формулу (5.7). В дельта-функции (5.8) теперь имеем  $\hbar k/p_0 \ll 1$ , а третье слагаемое по-прежнему мало в меру  $c_s/v \ll 1$ . Поэтому дельта-функция определённо сработает при интегрировании по углам (причём  $\cos\varphi \ll 1$ , т.е. импульс фонона почти перпендикулярен импульсу электрона). Фононная функция распределения  $n_{\mathbf{k}}$  — порядка единицы. В результате остаётся<sup>4</sup>

$$w \sim \frac{1}{\hbar} p_0^2 \frac{T}{Nm} V \frac{m}{\hbar p_0 k} k^3 \sim \frac{p_0 k^2 T}{\hbar^2 n} \sim \frac{p_0}{\hbar^2 (p_0/\hbar)^3} \left( \frac{T}{\hbar c_s} \right)^2 T \sim \left( \frac{T}{\hbar \omega_D} \right)^2 \frac{T}{\hbar}. \quad (5.14)$$

Для вычисления теплопроводности можно использовать  $\tau_t \sim 1/w$ . Поэтому (первое соотношение аналогично тому, что мы получали для фононной теплопроводности)<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \kappa &\sim c_e l v \sim c_e v^2 \tau_t \sim \frac{m p_0}{\hbar^3} T \left( \frac{p_0}{m} \right)^2 \left( \frac{\hbar \omega_D}{T} \right)^2 \frac{\hbar}{T} \sim \frac{p_0^3}{\hbar^2 m} \left( \frac{\hbar \omega_D}{T} \right)^2 \sim \\ &\sim \kappa(T \gg \hbar \omega_D) \left( \frac{\hbar \omega_D}{T} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Теперь подумаем про электропроводность. Когда мы выводили интеграл столкновений для примесей и получали из него время свободного пробега (1.28), фактически использовалось только то, что импульс электрона почти не меняется по модулю при столкновениях. Это и сейчас справедливо, поэтому полученную тогда формулу для  $\tau$

<sup>4</sup> См. Левитов, Шитов, задача 28 (Время жизни квазичастиц). Там нужно вычислить собственно-энергетическую часть для электронов из-за рассеяния на фононах при  $T = 0$ . Её мнимая часть определяет затухание квазичастиц. При  $|\varepsilon| < \omega_D$  получается

$$\text{Im } \Sigma(\varepsilon) = -\frac{\zeta \pi}{12 p_0^2 c_s^2} \varepsilon^3,$$

где  $\zeta$  — безразмерная константа электрон-фононного взаимодействия. В нашем же вычислении затухание квазичастиц — это  $w$ , а чтобы сравнить результаты, вместо  $T$  надо взять энергию квазичастицы (температура, собственно, возникла как характерная величина этой энергии). Видим, что с точностью до численного коэффициента результаты совпадают.

<sup>5</sup> Электронная теплоёмкость может быть записана как

$$c_e = \frac{m p_0}{3 \hbar^3} T.$$

можно применять. В этой формуле учтём, что угол рассеяния  $\theta$  по порядку величины равен отношению импульса фонона к импульсу электрона:

$$\theta \sim \frac{\hbar k}{p_0} \sim \frac{T}{\hbar \omega_D} \ll 1. \quad (5.16)$$

Поэтому (1.28) даёт

$$\frac{1}{\tau_e} \sim \overline{W(\theta)\theta^2} \sim \left( \frac{T}{\hbar \omega_D} \right)^4 \frac{T}{\hbar} \quad (5.17)$$

[в  $W(\theta)$  будет дельта-функция, которая просто даст правильное значение  $\theta$  под знаком усреднения]. Сравнивая этот результат с (5.11), вместо (5.12) можем сразу написать

$$\sigma \sim \sigma(T \gg \hbar \omega_D) \left( \frac{\hbar \omega_D}{T} \right)^4. \quad (5.18)$$

Таким образом, при низких  $T$  получаем  $\rho \propto T^5$  (закон Блоха–Грюнайзена).

Закон Видемана–Франца в этом случае не выполняется, вместо него получаем

$$\frac{\kappa}{\sigma} \sim \frac{T}{e^2} \left( \frac{T}{\hbar \omega_D} \right)^2. \quad (5.19)$$

## VI. ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПРОВОДИМОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Мы рассматривали механизмы рассеяния по-отдельности. Если же они действуют одновременно, то в случае редких процессов можно предположить, что вероятности рассеяния должны складываться (это означает, что мы пренебрегаем интерференцией различных процессов рассеяния). В этом случае должны складываться сопротивления (т.к. они пропорциональны  $1/\tau$ ) — правило Матиссена. Поэтому при низких температурах ( $T < T_D$ ) можно ожидать

$$\rho = A_{\text{imp}} + A_{\text{e-e}}T^2 + A_{\text{e-ph}}T^5, \quad (6.1)$$

где сложены вклады от примесей, электрон-электронного и электрон-фононного рассеяния. Для теплопроводности имеем

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{B_{\text{imp}}}{T} + B_{\text{e-e}}T + B_{\text{e-ph}}T^2. \quad (6.2)$$

Первые два вклада подчиняются закону Видемана-Франца (первый — точно, второй — по порядку величины), третий — нет.



При высоких температурах ( $T > T_D$ ) обычно основной вклад даёт электрон-фононное рассеяние:

$$\rho = C_{\text{e-ph}}T, \quad \varkappa = D_{\text{e-ph}} = \text{const.} \quad (6.3)$$

Электрон-электронное при этом много меньше: сопоставляя (4.7) и (5.12), получаем

$$\frac{\rho_{\text{e-e}}}{\rho_{\text{e-ph}}} \sim \frac{T}{\mu} \ll 1. \quad (6.4)$$

Меру чистоты образца экспериментально часто оценивают с помощью  $RRR$  (residual-resistivity ratio). В идеале — это отношение сопротивления при комнатной температуре и при нуле,

$$RRR = \frac{\rho(300 \text{ K})}{\rho(0 \text{ K})}, \quad (6.5)$$

в реальности берут наименьшую доступную температуру (хотя бы гелиевую, 4.2 K). Чем величина  $RRR$  больше, тем чище образец (т.к. остаточное сопротивление определяется примесями).

В действительности интерференцией различных процессов рассеяния далеко не всегда можно пренебречь, в этом случае уже нельзя просто сложить вклады в сопротивление от различных процессов.

## VII. КИН.УРАВНЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При наличии электрического и магнитного полей динамика электронов существенно зависит от топологии ферми-поверхности. В этом вопросе удобно говорить про всю обратную решётку (не только первую зону Бриллюэна). Энергия зависит от квази-импульса периодически (с периодами, определяемыми векторами обратной решётки). Изоэнергетические поверхности (в частности, ферми-поверхность) также периодичны.

Поскольку динамика связана с движением электрона по ферми-поверхности, важно, является ли ферми-поверхность замкнутой (не доходит до границ первой зоны Бриллюэна) или открытой (доходит до границ и периодически продолжается дальше).

Рассмотрим электрон в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Уравнение движения:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] = \mathbf{F}. \quad (7.1)$$

Изменение энергии:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \mathbf{F} = 0. \quad (7.2)$$

Из этих уравнений следует

$$\varepsilon = \text{const}, \quad p_z = \text{const}, \quad (7.3)$$

где в качестве оси  $z$  выбрано направление магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Таким образом, в импульсном пространстве траектория — это сечение изоэнергетической поверхности  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$  плоскостью  $p_z = \text{const}$ . У замкнутой ферми-поверхности все сечения — замкнутые контуры. Если ферми-поверхность открытая, то сечение может быть как замкнутым, так и открытым (продолжающимся по всей обратной решётке).

Уравнение движения в компонентах:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c} v_y H, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{e}{c} v_x H. \quad (7.4)$$

Возводим в квадрат и складываем:

$$\frac{dp_x^2 + dp_y^2}{dt^2} = \left(\frac{e}{c}\right)^2 (v_x^2 + v_y^2) H^2. \quad (7.5)$$

Обозначая  $dl = \sqrt{dp_x^2 + dp_y^2}$  элемент длины траектории в импульсном пространстве, мы можем написать

$$dt = \frac{c}{eH} \frac{dl}{v_{\perp}}, \quad t = \frac{c}{eH} \int \frac{dl}{v_{\perp}}, \quad (7.6)$$

$$v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (7.7)$$

В случае замкнутой траектории интеграл по замкнутому контуру даёт период движения:

$$T = \frac{c}{eH} \oint \frac{dl}{v_{\perp}}. \quad (7.8)$$

Площадь сечения  $p_z = \text{const}$  даётся интегралом

$$S = \int dp_x dp_y. \quad (7.9)$$

Но удобнее перейти от этих декартовых координат к аналогу полярных, интегрируя в плоскости  $p_z = \text{const}$  вдоль контуров  $\varepsilon = \text{const}$  и по нормали к ним. Кольцо между контурами с  $\varepsilon$ , различающимися на  $d\varepsilon$ , в данном месте имеет ширину

$$\frac{d\varepsilon}{|\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}_{\perp}|} = \frac{d\varepsilon}{v_{\perp}}. \quad (7.10)$$

Чтобы получить площадь кольца, надо взять интеграл по  $dl$ , а площадь сечения в результате равна

$$S = \int d\varepsilon \oint \frac{dl}{v_{\perp}}. \quad (7.11)$$

Сопоставляя с (7.8), получаем

$$T = \frac{c}{eH} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}. \quad (7.12)$$

Определим так называемую «циклотронную массу» (имеет смысл лишь для замкнутых орбит)

$$m_* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}. \quad (7.13)$$

Период движения можно записать через ларморовскую частоту:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{eH}{m_*c}. \quad (7.14)$$

Если внутри орбиты  $\varepsilon = \text{const}$  — область меньшей энергии, то  $m_*$  положительно (электроноподобные носители; например, почти пустая зона). Если наоборот — тогда  $m_*$  отрицательно (дырочноподобные носители; например, почти заполненная зона).

Рис. 3. Случай слабо заполненной и почти заполненной зоны.

От движения в импульсном пространстве можно перейти к движению в координатном пространстве. Уравнение движения перепишем в виде

$$d\mathbf{p} = \frac{e}{c} [d\mathbf{r} \times \mathbf{H}]. \quad (7.15)$$

Это означает, что проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{H}$ , определяется траекторией в импульсном пространстве с точностью до замены

$$x \mapsto -\frac{c}{eH} p_y, \quad y \mapsto \frac{c}{eH} p_x, \quad (7.16)$$

в то время как по  $z$  происходит движение со скоростью  $v_z = \partial\varepsilon/\partial p_z$ . Если сечение ферми-поверхности плоскостью  $p_z = \text{const}$  — замкнутое, то траектория в координатном пространстве — спираль с осью вдоль  $\mathbf{H}$ . Если траектория открыта в импульсном пространстве, то она будет открытой и в координатном пространстве.

В присутствии магнитного поля удобно перейти от  $p_x$  и  $p_y$  к новым независимым переменным — энергии  $\varepsilon$  и «времени движения по траектории»

$$t_1 = \frac{c}{eH} \int \frac{dl}{v_{\perp}}. \quad (7.17)$$

При наличии электрического поля (а ниже мы будем рассматривать такую ситуацию) это уже не истинное время, а некоторая функция  $p_x$  и  $p_y$ , которая находится из вспомогательных уравнений

$$\frac{dp_x}{dt_1} = \frac{e}{c}v_y H, \quad \frac{dp_y}{dt_1} = -\frac{e}{c}v_x H. \quad (7.18)$$

Как мы уже знаем,

$$\int dp_x dp_y = \int d\varepsilon \frac{dl}{v_{\perp}}, \quad (7.19)$$

поэтому в новых переменных интегрирование по импульсному пространству приобретает вид

$$\int dp_x dp_y dp_z = \frac{eH}{c} \int dt_1 d\varepsilon dp_z. \quad (7.20)$$

При наличии постоянных и однородных электрического и магнитного полей кин.уравнение можно написать в виде [раньше у нас было  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ ; теперь явной зависимости от  $t$  нет, зависимости от координаты  $\mathbf{r}$  тоже нет, а от трёх компонент  $\mathbf{p}$  переходим к трём новым переменным]

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} \dot{t}_1 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial p_z} \dot{p}_z = I_{\text{ст}}(f). \quad (7.21)$$

При этом

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (7.22)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + e\mathbf{E}, \quad (7.23)$$

откуда

$$\dot{\varepsilon} = e\mathbf{v}\mathbf{E}, \quad (7.24)$$

$$\dot{p}_z = eE_z. \quad (7.25)$$

Переменная  $t_1$  должна быть определена из вспомогательных уравнений (7.18), которые имеют вид уравнений движения, но без электрического поля. В реальности это отличие почти никогда не важно (если только магнитное поле не экстремально слабое), т.к. обычно  $(v/c)H \gg E$ .<sup>6</sup> Поэтому  $\dot{t}_1 \approx 1$ . В результате получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} e\mathbf{v}\mathbf{E} + \frac{\partial f}{\partial p_z} eE_z = I_{\text{ст}}(f). \quad (7.26)$$

<sup>6</sup> Например, возьмём магнитное поле Земли,  $H_0 \approx 0.5$  Э, и предположим, что  $E = (v/c)H_0$ . Пусть сопротивление при комнатной температуре определяется фононами, см. формулу (5.12). Тогда для

Будем параметризовать отклонение функции распределения от равновесия новой функцией  $\psi$ :

$$f = f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \psi. \quad (7.27)$$

Сейчас мы работаем в независимых переменных  $\varepsilon$ ,  $p_z$  и  $t_1$ , поэтому  $f_0$  нужно считать независимой от  $p_z$  (и от  $t_1$ , само собой). Хотим линеаризовать кин.уравнение по  $\psi$ . Электрическое поле считаем слабым, и вкладом, содержащими произведение  $\psi$  и  $E$ , пренебрегаем. Поэтому получаем

$$-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial t_1} + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} e \mathbf{v} \mathbf{E} = I_{\text{ст}}(f), \quad (7.28)$$

откуда

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_1} - I_1(\psi) = e \mathbf{v} \mathbf{E}, \quad (7.29)$$

где мы обозначили

$$I_1(\psi) = \frac{I_{\text{ст}}(f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \psi)}{-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}}. \quad (7.30)$$

По  $t_1$  должны быть гран.условия. Если траектория электрона замкнутая, то  $\psi$  должна зависеть от  $t_1$  периодически (интервал интегрирования по  $t_1$  в этом случае — один полный период). Если траектория открытая, то функция  $\psi$  должна быть конечной при  $t_1 \rightarrow \pm\infty$ .

## VIII. ЭФФЕКТ ХОЛЛА И МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЕ В СЛАБОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим слабое магнитное поле в рамках изотропной модели с использованием  $\tau$ -приближения. Слабость поля будет означать  $\Omega\tau \ll 1$ , что также можно переписать через ларморовский радиус  $r_L = v/\Omega$  как  $l \ll r_L$ . Это означает, что магнитное поле влияет на движение электронов гораздо слабее, чем рассеяние (в обратном пределе тока мы получим

$$j = \sigma E \sim \frac{\mu}{\hbar} \frac{\mu}{T} \cdot \frac{v}{c} H_0 \sim \frac{1.38 \cdot 10^{-16} \cdot \# \cdot 10^4}{10^{-27}} \cdot \frac{\# \cdot 10^4}{\# \cdot 10^2} \cdot 10^{-2} \cdot 0.5 \frac{\text{Э}}{c}.$$

Чтобы перевести в СИ, надо поделить на коэффициент  $3 \cdot 10^9$ , определяющий переход от единиц заряда СГСЭ к Кл, в результате  $j \sim 10^6$  А/см<sup>2</sup>. При таких плотностях тока металл испарится.

Во избежание путаницы стоит отметить, что если  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  являются компонентами электромагнитной волны, то  $H = E$ , поэтому, наоборот,  $(v/c)H \ll E$ . Мы же сейчас рассматриваем совершенно другую ситуацию — постоянные поля, созданные независимо (например, магнитное поле в соленоиде и электрическое поле за счёт разности потенциалов).

$\tau$ -приближение будет неприменимо). В  $\tau$ -приближении

$$I_1(\psi) = -\frac{\psi}{\tau}. \quad (8.1)$$

Кин.уравнение принимает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial t_1} + \frac{\psi}{\tau} = e\mathbf{v}(t_1)\mathbf{E}. \quad (8.2)$$

Это линейное неоднородное уравнение, для его решения используем метод вариации произвольной постоянной:

$$\psi(t_1) = a(t_1)e^{-t_1/\tau}, \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t_1} = e\mathbf{v}(t_1)\mathbf{E}e^{t_1/\tau}, \quad (8.4)$$

в результате решение записывается в виде

$$\psi(t_1) = \int_C^{t_1} e\mathbf{v}(t_2)\mathbf{E}e^{-(t_1-t_2)/\tau} dt_2. \quad (8.5)$$

Константа  $C$  должна находиться из гран.условий. Мы будем рассматривать

- изотропный случай, и
- перпендикулярную ориентацию полей:  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ .

В изотропном случае все орбиты замкнуты (т.к. изоэнергетическими поверхностями являются сферы), поэтому функции  $\psi$  и  $\mathbf{v}$  должны быть периодическими.

В этом случае получается

$$\begin{pmatrix} \dot{j}_x \\ \dot{j}_y \end{pmatrix} = \frac{n_e e^2}{m_*} \cdot \frac{1}{\Omega^2 + \tau^{-2}} \begin{pmatrix} \tau^{-1} E_x + \Omega E_y \\ -\Omega E_x + \tau^{-1} E_y \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Если постановка эксперимента такова, что ток течёт только в  $x$ -направлении, то

$$\dot{j}_y = 0, \quad \dot{j}_x = \frac{n_e e^2 \tau}{m_*} E_x, \quad (8.7)$$

$$E_y = \Omega \tau E_x. \quad (8.8)$$

Таким образом, в нашем приближении магнитное поле не меняет проводимость, но приводит к возникновению электрического поля, перпендикулярного току и магнитному

полю. Это *эффект Холла*. Его характеризует константа Холла, которая определяется следующим образом:

$$R_H = \frac{E_y}{H j_x} = \frac{1}{n_e e c}. \quad (8.9)$$

Если всё-таки интересоваться малой поправкой к проводимости от магнитного поля, то её можно оценить следующим образом. Траектории электронов в магнитном поле искривляются (в слабом поле это слабый эффект), поэтому за время свободного пробега электрон будет проходить расстояние  $l$  вдоль дуги, а вдоль направления тока (т.е. вдоль внешнего поля  $\mathbf{E}$ ) — меньшее расстояние. Поэтому эффективная длина свободного пробега в направлении тока уменьшается, это должно приводить к росту сопротивления.

В магнитном поле в плоскости  $xy$  движение происходит по окружности, имеющей ларморовский радиус

$$r_L = \frac{v}{\Omega} = \frac{c p_0}{e H}. \quad (8.10)$$

Пусть между двумя рассеяниями электрон проходит дугу с угловым размером  $2\varphi$ , тогда  $l = 2r_L\varphi$ . При этом вдоль направления тока он переместится на расстояние, равное длине хорды, на которую опирается дуга. Разность длин дуги и хорды составляет

$$2r_L\varphi - 2r_L \sin \varphi \approx \frac{r_L\varphi^3}{3} \sim l \left( \frac{l}{r_L} \right)^2. \quad (8.11)$$

Таким образом, эффективная длина свободного пробега вдоль направления тока отличается от  $l$  в меньшую сторону на величину, имеющую относительный порядок  $(l/r_L)^2 \sim (\Omega l/v)^2 \sim (\Omega\tau)^2$ . В результате получаем положительное поперечное (т.к. магнитное поле перпендикулярно току) магнитосопротивление

$$\Delta\rho \sim \rho(\Omega\tau)^2. \quad (8.12)$$

## IX. ЭФФЕКТ ХОЛЛА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим предельный случай сильных магнитных полей,  $\Omega\tau \gg 1$ , для случая

- произвольного энергетического спектра,
- произвольной взаимной ориентации полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (направление  $\mathbf{H}$  по-прежнему выбираем за ось  $z$ ).

Наше рассмотрение следует работе [И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956)]. В задаче есть малый параметр  $\gamma = 1/\Omega\tau$ , и мы будем искать решение в виде ряда

$$\psi = \sum_k \psi_k, \quad \psi_k \sim \gamma^k \quad (9.1)$$

методом последовательных приближений. Нам будет важно, что интеграл столкновений  $I_1(\psi)$  линеен относительно  $\psi$ . Сначала мы не будем предполагать замкнутость орбит, хотя позже перейдём именно к этому случаю.

Магнитное поле велико, а  $t_1 \propto 1/H$  [см. (7.17)], поэтому первое слагаемое в кин.уравнении (7.29) больше остальных. Таким образом, в нулевом приближении

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t_1} = 0. \quad (9.2)$$

В первом приближении

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} - I_1(\psi_0) = e\mathbf{v}\mathbf{E}. \quad (9.3)$$

Во втором и последующих приближениях

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t_1} - I_1(\psi_{k-1}) = 0, \quad k = 2, 3, \dots \quad (9.4)$$

Получаем

$$\psi_0 = C_0, \quad (9.5)$$

$$\psi_1 = \int_0^{t_1} [I_1(C_0) + e\mathbf{v}(t_2)\mathbf{E}] dt_2 + C_1 \equiv \tilde{\psi}_1 + C_1, \quad (9.6)$$

$$\psi_k = \int_0^{t_1} I_1(\psi_{k-1}) dt_2 + C_k \equiv \tilde{\psi}_k + C_k, \quad k = 2, 3, \dots \quad (9.7)$$

Константы  $C$  здесь не зависят от  $t_1$ , но могут зависеть от двух других наших независимых переменных,  $\varepsilon$  и  $p_z$ . Их можно найти, усреднив по времени уравнения (9.3)–(9.4).

В силу ограниченности  $\psi$  усреднение производной всегда даёт нуль:

$$\overline{\frac{\partial \psi}{\partial t_1}} = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \frac{\partial \psi}{\partial t_1} dt_1 = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{\psi(T_1) - \psi(0)}{T_1} = 0 \quad (9.8)$$

(в случае открытых орбит нужно интегрировать до бесконечности, как и написано; в случае замкнутых достаточно проинтегрировать по полному периоду). Поэтому полу-



чаем

$$-\overline{I_1(\psi_0)} = e\bar{\mathbf{v}}\mathbf{E}, \quad (9.9)$$

$$-\overline{I_1(\psi_k)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9.10)$$

откуда

$$-I_1(C_0) = e\bar{\mathbf{v}}\mathbf{E}, \quad (9.11)$$

$$-I_1(C_k) = \overline{I_1(\tilde{\psi}_k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.12)$$

Этими уравнениями определяются константы  $C$ .

Теперь от произвольных орбит перейдём к случаю замкнутых орбит (но спектр по-прежнему произвольный). В этом случае  $v_x$  и  $v_y$  периодичны, поэтому  $\overline{v_x} = \overline{v_y} = 0$ . Из уравнения (9.11) получаем, что  $C_0$  может зависеть только от  $\overline{v_z}E_z$ . Поэтому вклады, пропорциональные  $E_x$  и  $E_y$ , могут быть только в  $\psi_1$ . Выражая  $v_x$  и  $v_y$  из уравнений (7.18), получаем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{c}{H} \int_0^{t_1} \left( -\frac{dp_y}{dt_2} E_x + \frac{dp_x}{dt_2} E_y \right) dt_2 + \int_0^{t_1} [I_1(C_0) + ev_z(t_2)E_z] dt_2 + C_1 = \\ &= \frac{c}{H} [-E_x(p_y(t_1) - p_y(0)) + E_y(p_x(t_1) - p_x(0))] + \int_0^{t_1} [I_1(C_0) + ev_z(t_2)E_z] dt_2 + C_1. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Оставшийся интеграл в целом пропорционален  $E_z$ , обозначим его  $\varphi(t_1)E_z$ .

Найдём компоненту тока  $j_x$ :

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int f v_x d^3\mathbf{p} = -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{eH}{c} \left( \int d\varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \int dp_z dt_1 \psi v_x = \\ &= \frac{2e^2 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \int dp_z \int_0^T \psi_1(t_1) v_x(t_1) dt_1 = -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int dp_z \int_0^T \psi_1(t_1) \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 = \\ &= -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int dp_z \left\{ -\frac{c}{H} E_x \int_0^T (p_y(t_1) - p_y(0)) \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 + \frac{c}{H} E_y \int_0^T (p_x(t_1) - p_x(0)) \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 + \right. \\ &\quad \left. + E_z \int_0^T \varphi(t_1) \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 + C_1 \int_0^T \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 \right\} \end{aligned} \quad (9.14)$$

(в первой строке интегрирование по  $\varepsilon$  отделилось, т.к. все величины кроме  $\partial f_0/\partial\varepsilon$  не предполагаются резко зависящими от  $\varepsilon$  в окрестности ферми-поверхности).<sup>7</sup>

Зависимость  $p_y$  от времени периодична:  $p_y(T) = p_y(0)$ . Из-за этого обращаются в ноль: первый интеграл в фигурных скобках, содержащая  $p_x(0)$  часть второго интеграла и четвёртый интеграл. Остаётся

$$j_x = -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int dp_z \left\{ \frac{c}{H} E_y \int_0^T p_x(t_1) \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 + E_z \int_0^T \varphi(t_1) \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 \right\}. \quad (9.15)$$

Рассмотрим  $xy$ -компоненту тензора проводимости:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 H} \int dp_z \int_0^T p_x \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 = -\frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 H} \int dp_z \oint p_x dp_y = \\ &= \frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 H} \int dp_z [S_e(p_z, \mu) - S_h(p_z, \mu)]. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Здесь  $S_e$  и  $S_h$  — это площади сечений ферми-поверхности плоскостью  $p_z = \text{const}$  для случаев, когда внутри контура находится область меньших или бóльших энергий соответственно. Для дырок получается другой знак, т.к. их движение по орбите противоположно движению электрона. Мы предполагаем, что могут быть и электронные, и дырочные участки ферми-поверхности, и металл некомпенсированный ( $n_e \neq n_h$ ).

В результате интегрирования по  $dp_z$  будут получаться объёмы импульсного пространства  $V_F$ , заключённые внутри соответствующей части ферми-поверхности. Они связаны с плотностью соответствующих квазичастиц соотношением

$$n = \frac{2V_F}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (9.17)$$

Поэтому

$$\sigma_{xy} = \frac{ec}{H} (n_e - n_h). \quad (9.18)$$

Эта формула сохраняет смысл также и в случае, когда ферми-поверхность открытая, но при данном направлении поля все её сечения плоскостями  $p_z = \text{const}$  замкнуты. В этом случае под  $V_F$  нужно понимать объём, ограниченный ферми-поверхностью и гранями зоны Бриллюэна (величины  $n_e$  и  $n_h$  тогда могут зависеть от направления поля).

<sup>7</sup> Здесь также можно пояснить, почему вклад в  $j_x$  происходит именно от  $\psi_1$ , а от  $\psi_0$  вклада не будет. Действительно, вклад от  $\psi_0$  в середине этого вычисления привел бы к интегралу вида  $\int C_0 dp_z \int_0^T (dp_y/dt_1) dt_1$ . Интеграл с  $p_y$  здесь отделился, т.к.  $C_0$  зависит от  $v_z$ , и этот интеграл равен нулю из-за периодичности движения.

Формула (9.18) — результат первого порядка по  $\gamma$  (обратите внимание, что  $\tau$  выпало, т.к. первый порядок по  $\gamma$  означает  $\sigma \sim \sigma_0/\Omega\tau$ ).

Ещё одним следствием результата (9.15) для  $j_x$  является то, что в первом порядке по  $\gamma$  мы получили конечный результат для  $\sigma_{xz}$ . В то же время, в рассмотренном нами первом порядке по  $\gamma$  получается  $\sigma_{xx} = 0$ . Поэтому  $\sigma_{xx}$  — по крайней мере второго порядка по  $\gamma$ . Рассматривая уравнения в следующем порядке, можно убедиться, что такой вклад действительно есть. Аналогично получается, что  $\sigma_{yz} \propto \gamma$ ,  $\sigma_{yy} \propto \gamma^2$ . В то же время,  $\sigma_{zz}$  — нулевого порядка.

Таким образом, выделяя явно главные порядки по  $\gamma$ , мы можем записать тензор проводимости в виде

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^2 a_{xx} & \gamma a_{xy} & \gamma a_{xz} \\ \gamma a_{yx} & \gamma^2 a_{yy} & \gamma a_{yz} \\ \gamma a_{zx} & \gamma a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}. \quad (9.19)$$

В пределе  $H \rightarrow \infty$  все компоненты кроме  $\sigma_{zz}$  стремятся к нулю. Физически это связано с локализацией электронов на орбитах, малых по сравнению с длиной свободного пробега; конечность же  $\sigma_{zz}$  связана с тем, что движение вдоль магнитного поля всегда инфинитно.

Для тензора сопротивления (который обратный по отношению к тензору проводимости) в главном порядке по  $\gamma$  получаем

$$\rho_{ik} = \begin{pmatrix} b_{xx} & \gamma^{-1} b_{xy} & b_{xz} \\ \gamma^{-1} b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{pmatrix}, \quad (9.20)$$

где

$$\begin{aligned} b_{xx} &= \frac{a_{yy}a_{zz} - a_{yz}a_{zy}}{a_{xy}a_{yx}a_{zz}}, & b_{xy} &= \frac{1}{a_{yx}}, \\ b_{yy} &= \frac{a_{xx}a_{zz} - a_{xz}a_{zx}}{a_{xy}a_{yx}a_{zz}}, & b_{yx} &= \frac{1}{a_{xy}}, \\ b_{zz} &= \frac{1}{a_{zz}}, & b_{xz} &= \frac{a_{zy}}{a_{xy}a_{zz}}, & b_{yz} &= -\frac{a_{zx}}{a_{yx}a_{zz}}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Холловские компоненты  $\sigma_{xy}$  и  $\rho_{yx}$  в этом приближении оказываются обратными друг другу. В общем случае, конечно, соответствующие компоненты тензоров проводимости и сопротивления не связаны друг с другом таким простым соотношением (т.к. обращать

нужно матрицу). Обратим внимание, что при  $H \rightarrow \infty$  диагональные компоненты  $\rho_{xx}$  и  $\rho_{yy}$  (в отличие от  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ ) выходят на конечные значения.

Для константы Холла получаем:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x H} = \frac{\rho_{yx}}{H} = \frac{1}{\sigma_{xy} H} = \frac{1}{(n_e - n_h) e c}. \quad (9.22)$$

## Х. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Мы уже рассматривали проводимость (отклик на электрическое поле) и теплопроводность (отклик на градиент температуры). Теперь на примере изотропного металла рассмотрим случай, когда одновременно есть и электрическое поле, и градиент температуры:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \beta \nabla T, \quad (10.1)$$

$$\mathbf{q} = \gamma \mathbf{E} + \zeta \nabla T \quad (10.2)$$

(почему написано  $\zeta$ , а не  $-\kappa$ , обсудим чуть позже).

Перекрёстные коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  связаны соотношением, следующим из принципа симметрии кинетических коэффициентов Онзагера. Принцип заключается в следующем. Пусть к системе приложены обобщённые силы  $F_1, \dots, F_n$ , под влиянием которых в системе возникают обобщённые токи  $J_1, \dots, J_n$ , связанные с силами соотношениями

$$J_i = - \sum_k \gamma_{ik} F_k. \quad (10.3)$$

Пусть при этом силы и токи определены таким образом, что производная энтропии системы по времени записывается в виде

$$\dot{S} = - \sum_i J_i F_i. \quad (10.4)$$

Тогда принцип Онзагера утверждает, что матрица коэффициентов симметрична:

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}. \quad (10.5)$$

В нашем случае изменение энтропии во времени происходит по двум причинам. За счёт работы электрического поля в единице объёма в единицу времени диссипирует

энергия  $\mathbf{j}\mathbf{E}$ . Кроме того, из-за теплового потока из единицы объёма за единицу времени уходит количество теплоты  $\operatorname{div} \mathbf{q}$ . Учитывая, что  $\delta Q = TdS$ , получаем

$$\dot{S} = \int \frac{\mathbf{j}\mathbf{E}}{T} d^3\mathbf{r} - \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} d^3\mathbf{r}. \quad (10.6)$$

Взяв по частям второй интеграл, получаем

$$\dot{S} = \int \frac{\mathbf{j}\mathbf{E}}{T} d^3\mathbf{r} + \int \mathbf{q}\nabla \left( \frac{1}{T} \right) d^3\mathbf{r} \quad (10.7)$$

(при интегрировании по частям возникает также поверхностный вклад, но он определяется граничными условиями на границе образца; мы же сейчас интересуемся тем, что происходит в произвольной точке  $\mathbf{r}$  *внутри* объёма образца). Возьмём в качестве обобщённых токов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{q}$  — тогда, согласно (10.4), обобщёнными силами являются  $-\mathbf{E}/T$  и  $-\nabla(1/T) = (\nabla T)/T^2$ . Переписывая (10.1)–(10.2) в виде

$$\mathbf{j} = -\sigma T \left( -\frac{\mathbf{E}}{T} \right) + \beta T^2 \left( \frac{\nabla T}{T^2} \right), \quad (10.8)$$

$$\mathbf{q} = -\gamma T \left( -\frac{\mathbf{E}}{T} \right) + \zeta T^2 \left( \frac{\nabla T}{T^2} \right), \quad (10.9)$$

из соотношения (10.5) получаем

$$\gamma = -\beta T. \quad (10.10)$$

В реальном эксперименте легче контролировать электрический ток, чем электрическое поле внутри образца. Поэтому перепишем соотношения в виде

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + Q \nabla T, \quad (10.11)$$

$$\mathbf{q} = \Pi \mathbf{j} - \varkappa \nabla T, \quad (10.12)$$

где

$$\rho = \frac{1}{\sigma}, \quad Q = -\frac{\beta}{\sigma}, \quad \Pi = \frac{\gamma}{\sigma}, \quad \varkappa = \frac{\gamma\beta}{\sigma} - \zeta. \quad (10.13)$$

Из соотношения (10.10) следует, что

$$\Pi = QT, \quad \varkappa = -\frac{\beta^2 T}{\sigma} - \zeta. \quad (10.14)$$

Для реальных металлов первое слагаемое в формуле для  $\varkappa$  всегда много меньше второго (в этом мы убедимся ниже). Именно поэтому, вместо действительного вычисления  $\varkappa$  (в постановке задачи с отсутствующим электрическим током), мы раньше на

самом деле вычисляли  $-\zeta$  (т.е. рассматривали задачу без электрического поля — на самом деле, оно есть, но его влиянием можно пренебречь).

Из уравнения (10.11) следует, что при наличии градиента температуры даже в отсутствие электрического тока будет возникать электрическое поле  $\mathbf{E} = Q\nabla T$  — эффект Зеебека, возникает термо-э.д.с. Если записать  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , то получаем формулу для дифференциальной термо-э.д.с.:

$$-\frac{d\varphi}{dT} = Q. \quad (10.15)$$

Найдём дифференциальную термо-э.д.с. (коэффициент  $Q$ ) для изотропного металла в предположении упругости столкновений. Как и при вычислении теплопроводности, будем работать в представлении квазичастиц, поэтому пишем кин.уравнение в форме (3.5):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{sgn} \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{E} \operatorname{sgn} \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (10.16)$$

причём  $\tau$  для квазичастиц такое же, как для частиц, т.к. в него входит квадрат заряда.

Предположим, что есть слабое электрическое поле и слабый градиент температуры ( $f = f_0 + f_1$ ,  $f_1 \ll f_0$ ). Тогда в левой части кин.уравнения остаются второй и третий члены (в которых функцию распределения нужно взять равновесную, соответствующую локальной температуре  $T(\mathbf{r})$ ), которые имеют вид<sup>8</sup>

$$\mathbf{v} \operatorname{sgn} \xi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{v} \operatorname{sgn} \xi \left( \frac{\partial f_0}{\partial T} \right) \nabla T = -\frac{|\xi|}{T} \left( \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} \right) \operatorname{sgn} \xi (\mathbf{v} \nabla T) = -\frac{\xi}{T} \left( \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} \right) (\mathbf{v} \nabla T), \quad (10.17)$$

$$e\mathbf{E} \operatorname{sgn} \xi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = e\mathbf{E} \operatorname{sgn} \xi \left( \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} \right) \frac{\partial |\xi|}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} \right) e\mathbf{E} \mathbf{v}. \quad (10.18)$$

Поэтому кин.уравнение принимает вид

$$\left( \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} \right) \left[ e\mathbf{E} \mathbf{v} - \frac{\xi}{T} (\mathbf{v} \nabla T) \right] = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (10.19)$$

<sup>8</sup> Напоминалка:

$$f_0 = \frac{1}{e^{|\xi|/T} + 1}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial T} = -\frac{|\xi|}{T} \left( \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} \right); \quad \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}.$$

Плотность электрического тока:<sup>9</sup>

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} &= 2 \int (e \operatorname{sgn} \xi) (\mathbf{v} \operatorname{sgn} \xi) f_1 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = 2e \int \mathbf{v} f_1 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \\
&= -2e^2 \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{E}) \tau \nu(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} d\xi \frac{d\Omega}{4\pi} + 2e \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla T) \tau \nu(\varepsilon) \frac{\xi}{T} \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} d\xi \frac{d\Omega}{4\pi} = \\
&= -\frac{2e^2}{3} \mathbf{E} \int v^2 \tau \nu(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} d\xi + \frac{2e}{3} \nabla T \int v^2 \tau \nu(\varepsilon) \frac{\xi}{T} \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} d\xi.
\end{aligned} \tag{10.20}$$

Правая часть здесь содержит коэффициенты  $\sigma$  и  $\beta$ , см. (10.1).

Поскольку

$$\frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} = -\frac{1}{4T} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\xi}{2T}} \tag{10.21}$$

при  $T \rightarrow 0$  даёт  $-\delta(\xi)$ , для  $\sigma$  получаем уже известный нам результат [см. формулу (2.7)]

$$\sigma = \frac{2e^2}{3} (v^2 \tau \nu)_\mu. \tag{10.22}$$

Формула для  $\beta$  при наличии электрон-дырочной симметрии ( $\xi \leftrightarrow -\xi$ ) даёт нуль из-за нечётности подынтегрального выражения по  $\xi$ . Поэтому нужно учитывать слабую асимметрию:

$$(v^2 \tau \nu)_\varepsilon \approx (v^2 \tau \nu)_\mu + \xi \frac{d}{d\mu} (v^2 \tau \nu)_\mu. \tag{10.23}$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{2e}{3T} \frac{d(v^2 \tau \nu)_\mu}{d\mu} \int \xi^2 \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} d\xi = -\frac{2e}{3T} \frac{d(v^2 \tau \nu)_\mu}{d\mu} \cdot 2T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{2e}{3T} \frac{d(v^2 \tau \nu)_\mu}{d\mu} \cdot 2T^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \\
&= -\frac{2\pi^2}{9} eT \frac{d(v^2 \tau \nu)_\mu}{d\mu}.
\end{aligned} \tag{10.24}$$

В результате

$$Q = -\frac{\beta}{\sigma} = \frac{\pi^2 T}{3e} \cdot \frac{d \ln(v^2 \tau \nu)_\mu}{d\mu}. \tag{10.25}$$

Для случая, когда мы рассматриваем свободные электроны, рассеивающиеся на примесях, зависимость от  $\mu$  под производной следующая:

$$\tau = \frac{l}{v}, \quad l \propto \operatorname{const}, \quad v \propto \nu \propto \sqrt{\mu}. \tag{10.26}$$

<sup>9</sup> Используем

$$\frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \nu(\varepsilon) d\xi \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Поэтому

$$\frac{d \ln(v^2 \tau \nu)_\mu}{d\mu} = \frac{1}{\mu}. \quad (10.27)$$

Тогда получаем

$$Q = \frac{\pi^2}{3e} \cdot \frac{T}{\mu}. \quad (10.28)$$

Теперь можно вернуться к формуле (10.14) и объяснить, почему мы считали  $\varkappa \approx -\zeta$ . Согласно закону Видемана-Франца, вычислявшаяся нами  $\varkappa$  (которая, на самом деле,  $-\zeta$ ), имеет порядок

$$\varkappa \sim \frac{1}{e^2} \sigma T. \quad (10.29)$$

В то же время, согласно (10.14), мы пренебрегли следующей величиной:

$$\frac{\beta^2 T}{\sigma} \sim Q^2 \sigma T \sim \frac{1}{e^2} \sigma T \left( \frac{T}{\mu} \right)^2, \quad (10.30)$$

что оправдано в силу малого параметра  $T/\mu$ .

Малость термоэлектрических явлений по этому параметру — общее явление. Обычно бывает так, что при наличии электрон-дырочной симметрии эффект зануляется, а учёт слабой асимметрии даёт именно такую малость.

Это всё было для изотропного металла. В общем же случае вместо формул (10.11)–(10.12) будут аналогичные выражения с тензорными коэффициентами:

$$E_i = \sum_k \rho_{ik} j_k + \sum_k Q_{ik} \nabla_k T, \quad (10.31)$$

$$q_i = \sum_k \Pi_{ik} j_k - \sum_k \varkappa_{ik} \nabla_k T. \quad (10.32)$$

Принцип симметрии кинетических коэффициентов в этом случае сообщает, что

$$\rho_{ik} = \rho_{ki}, \quad \varkappa_{ik} = \varkappa_{ki}, \quad \Pi_{ik} = T Q_{ki}. \quad (10.33)$$

## XI. ТЕРМОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СЛАБОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если к металлу приложено магнитное поле, то уравнения (10.31)–(10.32) сохраняют свой вид, но коэффициенты начинают зависеть от магнитного поля. При выводе принципа симметрии кинетических коэффициентов используется симметрия уравнений механики по отношению к обращению времени, поэтому нужно учесть, что при таком обращении магнитное поле меняет знак. В результате, вместо (10.33) получается

$$\rho_{ik}(\mathbf{H}) = \rho_{ki}(-\mathbf{H}), \quad \varkappa_{ik}(\mathbf{H}) = \varkappa_{ki}(-\mathbf{H}), \quad \Pi_{ik}(\mathbf{H}) = T Q_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (11.1)$$



Наличие магнитного поля приводит к анизотропии даже в случае изотропного металла, поэтому соотношения остаются тензорными. В то же время, некоторое упрощение возникает, если ограничиться линейными по  $\mathbf{H}$  членами, учитывая, что  $\mathbf{H}$  — аксиальный вектор, тогда как  $\mathbf{E}$ ,  $\nabla T$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{j}$  — полярные. Поэтому в правых частях уравнений (10.11)–(10.12) могут лишь появиться члены  $[\mathbf{H} \times \mathbf{j}]$  и  $[\mathbf{H} \times \nabla T]$ :

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + R[\mathbf{H} \times \mathbf{j}] + Q \nabla T + N[\mathbf{H} \times \nabla T], \quad (11.2)$$

$$\mathbf{q} = \Pi \mathbf{j} + B[\mathbf{H} \times \mathbf{j}] - \varkappa \nabla T + L[\mathbf{H} \times \nabla T]. \quad (11.3)$$

Из принципа симметрии кинетических коэффициентов следует, что  $B = NT$ . Относительный порядок новых вкладов в этих уравнениях определяется малым параметром  $\Omega\tau$  (где  $\Omega$  — циклотронная частота). Например,  $RH/\rho \sim \Omega\tau$ .

Здесь заключено много разных эффектов. Например, пусть  $\mathbf{H}$  смотрит по  $z$ , а ток течёт вдоль  $x$ . Вторым член в (11.2) — это эффект Холла (при условии  $\nabla_y T = 0$ ) [обратите внимание: раньше мы получали соотношения  $R = 1/\sigma_{xy}H$ ,  $\sigma_{xy} \sim \sigma_0/\Omega\tau$ , откуда следует приведённая выше оценка  $RH/\rho_0 \sim \Omega\tau$ ]. А если поставить условие  $q_y = 0$ , то это будет так называемый адиабатический эффект Холла:

$$q_y = BHj_x - \varkappa \nabla_y T = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_y T = \frac{BHj_x}{\varkappa}, \quad (11.4)$$

поэтому

$$E_y \approx RHj_x + Q \nabla_y T = \left( R + \frac{QB}{\varkappa} \right) Hj_x. \quad (11.5)$$

Поле по оси  $y$  может быть создано не только током по  $x$  (эффект Холла), но и градиентом температуры по  $x$ . При условии  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\nabla_y T = 0$  из (11.2) получаем

$$E_y = NH \nabla_x T. \quad (11.6)$$

Это называется эффектом Нернста.

## XII. ТЕРМОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В разделе IX, посвящённом эффекту Холла в сильном магнитном поле, мы вычисляли тензоры  $\sigma_{ik}$  и  $\rho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$  в пределе  $\Omega\tau \gg 1$ . Можно вычислить и другие тензорные коэффициенты в уравнениях (10.31)–(10.32) в этом пределе. Условие  $\Omega\tau \gg 1$  подразумевает большую длину свободного пробега, поэтому естественно рассмотреть случай

низких температур, когда рассеяние электронов определяется примесями. При этом столкновения упругие.

Поступая аналогично выводу (10.19), можем привести общую запись (3.5) кин.уравнения для квазичастиц к виду

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_1} - I_{\text{ст}}(f_1) = - \left[ e\mathbf{E}\mathbf{v} - \frac{\xi}{T}(\mathbf{v}\nabla T) \right] \frac{\partial f_0}{\partial|\xi|}. \quad (12.1)$$

В  $f_1$  должны быть вклады от  $\mathbf{E}$  и  $\nabla T$ , поэтому будем искать её в виде

$$f_1 = - \sum_i eE_i\psi_i \frac{\partial f_0}{\partial|\xi|} + \sum_i (\nabla_i T)\varphi_i \frac{\xi}{T} \frac{\partial f_0}{\partial|\xi|}. \quad (12.2)$$

Поскольку столкновения упругие и энергия сохраняется, в интеграле столкновений множители, зависящие от энергии, выносятся за знак интеграла. В результате,  $\psi_i$  и  $\varphi_i$  удовлетворяют одинаковым уравнениям вида

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t_1} - I_{\text{ст}}(\psi_i) = v_i. \quad (12.3)$$

Так как граничные условия для обеих функций одинаковы, получается, что функции просто равны друг другу,

$$\psi_i = \varphi_i. \quad (12.4)$$

Если от формул для  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{q}$  перейти к записи (10.31)–(10.32), в которой выражены  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{q}$ , то получается связь между тензорами линейного отклика:

$$\rho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}, \quad Q_{ik} = - \sum_l \rho_{il}\beta_{lk}, \quad (12.5)$$

$$\Pi_{ik} = \sum_l \gamma_{il}\rho_{lk}, \quad \varkappa_{ik} = \sum_{l,m} \gamma_{il}\rho_{lm}\beta_{mk} - \zeta_{ik}. \quad (12.6)$$

Как и в разделе про термоэлектрические явления, можно показать, что первое слагаемое в правой части формулы для  $\varkappa_{ik}$  мало по параметру  $(T/\mu)^2$ , поэтому

$$\varkappa_{ik} = -\zeta_{ik} = \frac{\pi^2 T}{3e^2} \sigma_{ik}. \quad (12.7)$$

Таким образом, закон Видемана-Франца для случая упругих столкновений имеет место и при наличии сильного магнитного поля.

Поэтому зависимость от магнитного поля у  $\varkappa_{ik}$  такая же, как у  $\sigma_{ik}$  — см. формулу (9.19), которую мы получили, рассматривая эффект Холла в сильном магнитном поле.

В частности, компоненты  $\varkappa_{xx}$  и  $\varkappa_{yy}$  (для случая, когда  $z$  направлено по магнитному полю) для замкнутых траекторий убывают как  $1/H^2$ . Поэтому магнитным полем можно подавить электронный вклад в теплопроводность, выделив, таким образом, фононную теплопроводность (которая от магнитного поля не зависит). А выключив поле, можно увидеть добавку от электронов.

Теперь рассмотрим тензор термо-э.д.с.  $Q_{ik}$ , который выражается через  $\rho_{ik}$  и  $\beta_{ik}$ . Тензор  $\beta_{ik}$ , согласно формуле из ДЗ, зависит от магнитного поля так же, как  $\sigma_{ik}$  — см. формулу (9.19):

$$\beta_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^2 c_{xx} & \gamma c_{xy} & \gamma c_{xz} \\ -\gamma c_{xy} & \gamma^2 c_{yy} & \gamma c_{yz} \\ -\gamma c_{xz} & -\gamma c_{yz} & c_{zz} \end{pmatrix} \quad (12.8)$$

— здесь мы учли антисимметрию недиагональных элементов по перестановке индексов (следствие принципа Онзагера и линейности по магнитному полю). Домножаем слева на  $-\rho_{ik}$  [случай замкнутых траекторий на поверхности Ферми в некомпенсированном металле, см. формулу (9.20)], получаем

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} d_{xx} & \gamma d_{xy} & d_{xz} \\ \gamma d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ \gamma d_{zx} & \gamma d_{zy} & d_{zz} \end{pmatrix} \quad (12.9)$$

При этом

$$d_{xx} = b_{xy} c_{xy}, \quad (12.10)$$

$$d_{yy} = -b_{yx} c_{xy}, \quad (12.11)$$

и учитывая антисимметрию  $b_{yx} = -b_{xy}$ , получаем

$$Q_{xx} = Q_{yy} = b_{xy} c_{xy}. \quad (12.12)$$

У нас

$$c_{xy} = \frac{\beta_{xy}}{\gamma} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\pi^2 T}{3e} \frac{\partial}{\partial \mu} \sigma_{xy}(\mu), \quad (12.13)$$

а  $b_{xy}$  связано с соответствующим коэффициентом в тензоре  $\sigma_{ik}$  [см. формулы (9.19), (9.21)], в результате чего

$$b_{xy} = \frac{1}{a_{yx}} = -\frac{1}{a_{xy}} = -\frac{1}{\sigma_{xy}/\gamma}. \quad (12.14)$$

Таким образом,

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{\pi^2 T}{3e} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sigma_{xy}(\mu). \quad (12.15)$$

А поскольку в случае замкнутых траекторий в некомпенсированном металле у нас получалась формула (9.18) для холловской проводимости, находим окончательно

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{\pi^2 T}{3e} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln[n_e(\mu) - n_h(\mu)]. \quad (12.16)$$

В результате, поперечная термо-э.д.с. изотропна, не зависит от времени свободного пробега и определяется только энергетическим спектром. Производная, входящая в эту формулу, характеризует спектр (а полученная формула даёт способ определить эту характеристику из эксперимента).

### ХIII. НОРМАЛЬНЫЙ СКИН-ЭФФЕКТ

Рассмотрим металл в высокочастотном электромагнитном поле. Оказывается, что при этом поле проникает только в приповерхностный слой металла — это называется скин-эффект.

Рассмотрим сначала случай локального соотношения между полем и током,  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  (этот случай называется нормальным скин-эффектом; для простоты считаем металл изотропным). Уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (13.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}. \quad (13.2)$$

Токами смещения пренебрегли (в металлах это хорошее приближение при не слишком больших частотах).

Предполагаем следующую геометрию: металл занимает полупространство  $x > 0$ , волна падает по нормали, причём  $\mathbf{E}$  направлено по  $y$ , а  $\mathbf{H}$  — по  $z$ .

Будем искать решение, в котором  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  пропорциональны  $\exp(ikx - i\omega t)$ . Подставим, получаем

$$ikE_y = \frac{i\omega}{c} H_z, \quad (13.3)$$

$$-ikH_z = \frac{4\pi}{c} \sigma E_y. \quad (13.4)$$

Подставляя одно в другое, находим волновой вектор:

$$k^2 = \frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2}, \quad k = k_1 + ik_2 = \sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c^2}}(1 + i). \quad (13.5)$$

Глубина проникновения поля в металл (толщина скин-слоя):

$$\delta = \frac{1}{k_2} = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega}}. \quad (13.6)$$

Свойства металла в высокочастотном электромагнитном поле характеризует поверхностный импеданс  $Z$  (комплексная величина):

$$Z = \frac{E_y(0)}{\int_0^\infty j_y(x) dx} = R - iX. \quad (13.7)$$

$R$  — активная часть импеданса,  $X$  — реактивная. Для их определения можно измерять амплитуду и фазу волны, отражённой от поверхности металла. Или измерять изменение свойств резонатора при помещении в него образца конечных размеров (добротность резонатора позволяет найти  $R$ , частота резонатора позволяет найти  $X$ ). Активная часть  $R$  также может быть найдена по выделению тепла в металле, т.к. она определяет потери энергии волны при отражении.

Это определение поверхностного импеданса можно преобразовать к другому виду с помощью уравнения Максвелла (13.2):

$$Z = \frac{E_y(0)}{-\frac{c}{4\pi} \int_0^\infty \nabla_x H_z dx} = \frac{4\pi}{c} \frac{E_y(0)}{H_z(0)}. \quad (13.8)$$

А с помощью уравнения Максвелла (13.1) теперь можно написать

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{E_y(0)}{H_z(0)} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\omega}{k}. \quad (13.9)$$

Обратите внимание, что формулы (13.8) и (13.9) справедливы при любой связи между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ .

В случае же локальной связи, подставляя (13.5), находим

$$Z = \sqrt{\frac{4\pi\omega}{ic^2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{c^2\sigma}}(1 - i). \quad (13.10)$$

Таким, образом в случае нормального скин-эффекта имеем

$$R = X = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{c^2\sigma}}. \quad (13.11)$$

#### XIV. АНОМАЛЬНЫЙ СКИН-ЭФФЕКТ

Из формул (13.6) видно, что глубина скин-слоя  $\delta$  должна уменьшаться с уменьшением температуры (из-за роста  $\sigma$ ), а также с увеличением частоты поля. С другой стороны, при понижении температуры растёт длина свободного пробега  $l$ . Поэтому при низких температурах и высоких частотах  $\delta$  может стать меньше  $l$ . В этом случае локальная связь тока с полем  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , основанная на предположении однородного поля, перестаёт работать, т.к. поле становится неоднородным на масштабе длины свободного пробега.

Рассмотрим предел  $\delta \ll l$  — этот случай называется аномальным скин-эффектом. Проведём упрощённое рассуждение, которое затем подтвердится расчётом на основе кин.уравнения. Будем считать, что в скин-эффекте участвуют лишь электроны, движущиеся почти параллельно границе, а следовательно долго находящиеся под действием электрического поля и таким образом отбирающие у волны часть её энергии. Те же электроны, которые движутся под конечным (не малым) углом к границе, быстро покидают область скин-слоя, и мы будем считать, что в скин-эффекте они не участвуют (неэффективны).

Доля таких электронов в случае изотропного спектра равна доле телесного угла, в котором лежат их импульсы. Выберем сферическую систему координат так, что поверхность — это экваториальная плоскость. Если импульс электрона почти параллелен плоскости, он остаётся таковым на длине свободного пробега (затем электрон рассеивается под, вообще говоря, большим углом). Поэтому такие электроны занимают интервал  $d\theta \sim \delta/l$  при  $\theta \approx \pi/2$ , а значит

$$d\Omega \sim 2\pi \sin \theta d\theta \sim 2\pi \delta/l. \quad (14.1)$$

Плотность эффективных (участвующих в скин-эффекте) электронов тогда есть

$$n_{\text{эфф}} \sim n_e \frac{d\Omega}{4\pi} \sim \frac{\delta}{l} n_e. \quad (14.2)$$

Поскольку проводимость пропорциональна числу электронов, эффективная проводимость также должна быть подавлена:

$$\sigma_{\text{эфф}} \sim \frac{\delta}{l} \sigma \sim \frac{\sigma}{k_2 l}. \quad (14.3)$$

Из честного решения (см. раздел XV) оказывается, что можно записать

$$\sigma_{\text{эфф}} = ia \frac{\sigma}{kl}, \quad (14.4)$$

где  $a \sim 1$  — действительный коэффициент. Замена  $k_2$  на  $k$  справедлива по порядку величины (так было в нормальном скин-эффекте, так окажется и в аномальном). Поэтому нетривиальность формулы (14.4) в том, что комплексная структура  $\sigma_{\text{эфф}}$  такая же, как у комбинации  $i/k$ . Это нельзя угадать, это берётся из честного решения (позже мы это получим).

Возьмём теперь формулу (13.5) для  $k^2$  и подставим в неё  $\sigma_{\text{эфф}}$  вместо  $\sigma$ . Получается уравнение на  $k$ , которое даёт

$$k = \left( \frac{4\pi a \sigma \omega}{c^2 l} \right)^{1/3} e^{i\pi/3}. \quad (14.5)$$

Здесь мы определённым образом выбрали кубический корень из  $-1$ . Это было сделано из условия убывания решения при  $x \rightarrow \infty$ . Обратим внимание, что по порядку величины  $k_1$  и  $k_2$  совпадают.

Глубина скин-слоя — величина, обратная мнимой части  $k$ , поэтому

$$\delta = \left( \frac{c^2 l}{4\pi a \sigma \omega} \right)^{1/3} \frac{1}{\sin(\pi/3)}. \quad (14.6)$$

В то же время, подставляя  $k$ , для поверхностного импеданса получаем

$$Z = \frac{4\pi \omega}{c^2 k} = \left( \frac{4\pi \omega}{c^2} \right)^{2/3} \left( \frac{l}{a\sigma} \right)^{1/3} e^{-i\pi/3} = \left( \frac{2}{a} \right)^{1/3} \left( \frac{\pi \omega}{c^2} \right)^{2/3} \left( \frac{l}{\sigma} \right)^{1/3} (1 - i\sqrt{3}). \quad (14.7)$$

Важные следствия:

- $Z \propto \omega^{2/3}$  (а при нормальном скин-эффекте было  $Z \propto \omega^{1/2}$ )
- $X = \sqrt{3}R$  (а при нормальном скин-эффекте было  $X = R$ )
- Комбинация  $\sigma/l = n_e e^2 / p_0$ , а значит и  $Z$  в целом, не зависит от температуры и определяется только электронным спектром (а при нормальном скин-эффекте было  $Z \propto 1/\sigma^{1/2}(T)$ )

Можно построить график зависимости  $R^{-1}$  от  $\sigma^{1/2}$ . Он должен начинаться линейным участком (нормальный скин-эффект, высокие температуры) а затем выходить на

константу (аномальный скин-эффект, низкие температуры). Такая зависимость действительно наблюдается в эксперименте.

Оценим, при каких частотах можно наблюдать аномальный скин-эффект. Возьмём формулу (13.6) для  $\delta$  и потребуем  $\delta < l$ . Это даёт

$$\omega > \frac{c^2}{2\pi\sigma l^2} = \frac{c^2 p_0}{2\pi n_e e^2 l^3} = \frac{c^2 \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3}}{2\pi n_e e^2 l^3} = \frac{137}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{c}{n_e^{2/3} l^3}. \quad (14.8)$$

Взяв  $n_e \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , получаем в правой части примерно

$$\frac{137}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{c}{n_e^{2/3} l^3} \sim 200 \frac{10^{10}}{(10^{22})^{2/3} l^3} \frac{\text{см}^3}{\text{с}} \sim \frac{10^{-2}}{l^3} \frac{\text{см}^3}{\text{с}}. \quad (14.9)$$

Для случая  $l \sim 10^{-3} \text{ см}$  (такой, например, может быть длина свободного пробега в области остаточного сопротивления в весьма чистом металле), получаем  $\omega > 10^7 \text{ с}^{-1}$ .

## XV. АНОМАЛЬНЫЙ СКИН-ЭФФЕКТ. РЕШЕНИЕ КИН.УРАВНЕНИЯ

10

Будем рассматривать предел  $\delta \ll l$  и при этом считать металл анизотропным (т.е. поля и токи лежат в плоскости  $yz$ , но не обязательно направлены вдоль определённых осей). На самом деле, ещё нам понадобится условие  $\delta \ll v_F/\omega$ . Случай выполнения этих двух условий называется предельно аномальным.

Сложность аномального случая обусловлена тем, что связь тока и поля перестаёт быть локальной. Найдём эту связь (отклик тока на слабое электрическое поле).

Функцию распределения ищем в виде

$$f = f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \psi, \quad (15.1)$$

тогда<sup>11</sup>

$$j_\alpha = 2e \int v_\alpha f \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^3} = \frac{2e}{(2\pi \hbar)^3} \int v_\alpha \psi \frac{dS}{v}, \quad (15.2)$$

где мы учли, что  $\partial f_0 / \partial \varepsilon \approx -\delta(\varepsilon - \mu)$ , и осталось интегрирование по ферми-поверхности.

У  $j_\alpha$  есть только компоненты  $y$  и  $z$ .

<sup>10</sup> В этом разделе подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу.

<sup>11</sup> Напомним преобразование интеграла по импульсам к интегралу по изоэнергетической поверхности и по энергии [см. (1.16)]:

$$d^3 \mathbf{p} = dS \frac{d\varepsilon}{v}.$$



Кин.уравнение напишем в той же форме, как мы писали раньше для случая рассеяния на примесях:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f - f_0}{\tau}. \quad (15.3)$$

На самом деле писать интеграл столкновений в такой форме для анизотропного металла нельзя. Но! Во-первых, оказывается, что в нашем случае интеграл столкновений действительно имеет такую форму, только  $\tau$  зависит от  $\mathbf{p}$ . А во-вторых, в предельно аномальном случае ответ вообще не будет зависеть от  $\tau$ .

Подставляя сюда  $f$ , получаем кин.уравнение в виде (у  $E_\alpha$  есть только компоненты  $y$  и  $z$ ; от времени всё зависит как  $e^{-i\omega t}$ )

$$i\omega\psi - v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + eE_\alpha v_\alpha = \frac{\psi}{\tau}. \quad (15.4)$$

Делим на  $v_x$ , переписываем в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\psi}{L_x} = eE_\alpha \frac{v_\alpha}{v_x}, \quad \frac{1}{L_x} = \frac{1}{v_x} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right). \quad (15.5)$$

Метод вариации произвольной постоянной:

$$\psi(x) = A(x)e^{-x/L_x}, \quad A'e^{-x/L_x} = eE_\alpha \frac{v_\alpha}{v_x}. \quad (15.6)$$

В результате находим решение

$$\psi(x) = e^{-x/L_x} \int_C^x eE_\alpha(x_1) \frac{v_\alpha}{v_x} e^{x_1/L_x} dx_1. \quad (15.7)$$

Константу  $C$  нужно находить из гран.условий при  $x = \infty$  и  $x = 0$ . Во-первых,  $\psi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Во-вторых, должно быть гран.условие на свободной поверхности, которое зависит от типа поверхности.

Мы будем предполагать, что свободная поверхность зеркальная. Тогда в изотропном металле при отражении  $p_y$  и  $p_z$  сохранялись бы, а  $p_x$  меняло бы знак. В анизотропном случае всё несколько сложнее. Поскольку поверхность трансляционно инвариантна в плоскости  $yz$ , компоненты  $p_y$  и  $p_z$  по-прежнему сохраняются. А вот вместо изменения знака  $p_x$  теперь надо требовать сохранения энергии. Обозначив отражённое значение за  $p'_x$ , мы требуем

$$\varepsilon(p_x, p_y, p_z) = \varepsilon(p'_x, p_y, p_z). \quad (15.8)$$

В изотропном случае было бы  $p'_x = -p_x$ , но в общем случае это не так.

Воспользуемся тем, что в предельно аномальном случае нам важны почти касательные траектории, у которых  $v_x \approx 0$ . Это значит, что

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_x} = v_x = a(p_y, p_z) (p_x - q(p_y, p_z)), \quad (15.9)$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{a(p_y, p_z)}{2} (p_x - q(p_y, p_z))^2 + \epsilon(p_y, p_z). \quad (15.10)$$

Из сохранения  $p_y$  и  $p_z$  при отражении следует примерное сохранение  $v_y \approx \partial \varepsilon / \partial p_y$  и  $v_z \approx \partial \varepsilon / \partial p_z$ . Что же касается  $v_x$ , сохранение энергии при переходе от  $v_x < 0$  к некоторому  $v_x > 0$  означает, что при этом комбинация  $(p_x - q(p_y, p_z))$  просто меняет знак. Следовательно,  $v_x = a(p_y, p_z) (p_x - q(p_y, p_z))$  также просто меняет знак. Функция распределения при отражении не меняется, поэтому на зеркальной границе должно быть

$$\psi(v_x, v_y, v_z) = \psi(-v_x, v_y, v_z). \quad (15.11)$$

Гран.условие при  $x \rightarrow \infty$  определяет константу  $C$  при  $v_x < 0$ . Действительно, в этом случае  $e^{-x/L_x}$  растёт на бесконечности, поэтому необходимо брать  $C = \infty$ :

$$\psi_{v_x < 0} = \int_{\infty}^x e E_{\alpha}(x_1) \frac{v_{\alpha}}{v_x} e^{(x_1-x)/L_x} dx_1. \quad (15.12)$$

При  $v_x > 0$  экспонента  $e^{-x/L_x}$  убывает на бесконечности. А константа  $C$  должна определяться из гран.условия при  $x = 0$ :

$$\int_C^0 e E_{\alpha}(x_1) \frac{v_{\alpha}}{v_x} e^{x_1/L_x} dx_1 = - \int_{\infty}^0 e E_{\alpha}(x_1) \frac{v_{\alpha}}{v_x} e^{-x_1/L_x} dx_1, \quad (15.13)$$

где в правой части мы написали падающие на границу частицы (они соответствуют  $-v_x < 0$ , и мы это учли, в частности, изменив знак  $L_x$ ). Мы имеем дело с некоторым распределением поля  $E_{\alpha}(x_1)$  внутри образца, т.е. при  $x_1 > 0$ . Давайте отобразим это распределение симметричным образом на область  $x_1 < 0$  и сделаем замену  $x_1 \mapsto -x_1$  в интеграле в правой части. При этом мы получим точно такой же интеграл, как и слева, только интегрирование идёт от  $-\infty$ . Поэтому  $C = -\infty$ , и в результате

$$\psi_{v_x > 0}(x) = \int_{-\infty}^x e E_{\alpha}(x_1) \frac{v_{\alpha}}{v_x} e^{(x_1-x)/L_x} dx_1. \quad (15.14)$$

Подставляем найденные при разных знаках  $v_x$  решения в формулу для тока и обозначаем  $n_\alpha = v_\alpha/v$ :

$$j_\alpha = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \int_{n_x > 0} dS \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} \int_{-\infty}^x E_\beta(x_1) e^{-(x-x_1)/L_x} dx_1 - \int_{n_x < 0} dS \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} \int_x^{\infty} E_\beta(x_1) e^{-(x-x_1)/L_x} dx_1 \right\}. \quad (15.15)$$

В последнем интеграле изменим знаки всех скоростей, тем самым приведя его к интегралу по  $n_x > 0$ :

$$\begin{aligned} j_\alpha &= \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} dS \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} \left[ \int_{-\infty}^x E_\beta(x_1) e^{-(x-x_1)/L_x} dx_1 + \int_x^{\infty} E_\beta(x_1) e^{(x-x_1)/L_x} dx_1 \right] = \\ &= \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} dS \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} \int_{-\infty}^{\infty} E_\beta(x_1) e^{-|x-x_1|/L_x} dx_1. \end{aligned} \quad (15.16)$$

Это выражение можно переписать в виде свёртки с ядром:

$$j_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(x-x_1) E_\beta(x_1) dx_1, \quad (15.17)$$

$$K_{\alpha\beta}(x) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} dS \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} e^{-|x|/Ln_x}, \quad \frac{1}{L} \equiv \frac{n_x}{L_x} = \frac{1}{v} \left( \frac{1}{\tau} - i\omega \right). \quad (15.18)$$

Рассмотрим фурье-образ ядра:<sup>12</sup>

$$K_{\alpha\beta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(x) e^{-ikx} dx = \frac{4e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} dS \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} \cdot \frac{Ln_x}{1 + (Ln_x k)^2}. \quad (15.19)$$

Для описания скин-эффекта важны  $k \sim 1/\delta$ . При этом предельно аномальный случай соответствует тому, что  $|L|/\delta \gg 1$ . Значит, избежать большой величины в знаменателе можно только при  $|n_x| \ll 1$ . Это как раз соответствует нашей качественной картине, связанной с важностью почти касательных траекторий.

Перейдём от интеграла по ферми-поверхности к интегралу по углам, определяющим направление нормали к этой поверхности (это направление совпадает с направлением скорости  $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ ), взяв в качестве полярной оси ось  $x$ . Можем написать

$$dS = \frac{d\Omega}{\varkappa(\theta, \varphi)}, \quad (15.20)$$

<sup>12</sup> В случае  $\text{Re } \gamma > 0$  имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \gamma|x|} dx = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + k^2}.$$

где мы ввели гауссову кривизну ферми-поверхности в точке, где направление нормали есть  $(\theta, \varphi)$ ; она обратна произведению главных радиусов кривизны в этой точке:  $\varkappa = 1/R_1 R_2$ . В результате получается

$$K_{\alpha\beta}(k) = \frac{4e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \cdot \frac{n_\alpha n_\beta}{\varkappa(\theta, \varphi)} \cdot \frac{L}{1 + (Lk \cos\theta)^2}. \quad (15.21)$$

Ограничение  $n_x > 0$  здесь учтено тем, что по  $\theta$  мы интегрируем только до  $\pi/2$ .

Из-за  $|L|k \gg 1$  при характерных  $k \sim 1/\delta$ , мы можем сразу сказать, что существенны лишь малые значения  $\cos\theta$ , поэтому можно заменить

$$\varkappa(\theta, \varphi) \mapsto \varkappa(\varphi) \equiv \varkappa(\pi/2, \varphi). \quad (15.22)$$

Остаётся следующий интеграл по  $\cos\theta$ :<sup>13</sup>

$$\int_0^1 \frac{Ld\mu}{1 + (Lk\mu)^2} = \frac{1}{|k|} \int_0^{L|k|} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{|k|} \operatorname{arctg} L|k| \approx \frac{\pi}{2|k|}. \quad (15.23)$$

Поэтому получается

$$K_{\alpha\beta}(k) = \frac{4e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\pi}{2|k|} \cdot \frac{n_\alpha n_\beta}{\varkappa(\varphi)} = \frac{e^2 B_{\alpha\beta}}{4\pi^2 \hbar^3 |k|}, \quad (15.24)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \int_0^{2\pi} \frac{n_\alpha n_\beta}{\varkappa(\varphi)} d\varphi \quad (15.25)$$

— симметричный тензор в плоскости  $yz$ , в котором содержится вся информация о форме ферми-поверхности. Обратим внимание, что ядро  $K$  не зависит от характеристик рассеяния (буква  $\tau$  из него вылетела).

Итак, мы выразили ток через поле и теперь можем обратиться к уравнениям Максвелла. Обычным образом из уравнений Максвелла получилось бы

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (15.26)$$

<sup>13</sup> Комплексность величины  $L$  не мешает последнему соотношению. Проще всего в этом убедиться, воспользовавшись логарифмическим представлением для арктангенса:

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}.$$

Вектор  $\mathbf{E}$  зависит от координаты  $x$ , но не имеет одноимённой компоненты, поэтому  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Поскольку наше решение зависит от времени как  $e^{-i\omega t}$ , можем написать

$$\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial x^2} = -\frac{4\pi i\omega}{c^2} j_\alpha. \quad (15.27)$$

Но нам ещё нужно учесть, что при выводе выражения для тока через поле мы продолжили поле симметричным образом в область  $x < 0$ . Это значит, что на границе получился излом, и производная скачет от  $-E'(0)$  к  $E'(0)$ . То есть таким трюком мы добавили во вторую производную поля по координате лишнюю дельта-функцию  $2E'(0)\delta(x)$ . Её надо компенсировать при подстановке нашего решения в формулу (15.27):

$$E''_\alpha(x) - 2E'_\alpha(0)\delta(x) = -\frac{4\pi i\omega}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(x-x_1)E_\beta(x_1)dx_1. \quad (15.28)$$

После фурье-преобразования получаем

$$-k^2 E_\alpha(k) - 2E'_\alpha(x=0) = -\frac{ie^2\omega}{\pi\hbar^3 c^2} \frac{B_{\alpha\beta}}{|k|} E_\beta(k). \quad (15.29)$$

Это система двух уравнений (т.к. здесь  $\alpha, \beta = y, z$ ). Выберем оси в плоскости  $yz$  вдоль главных осей тензора  $B_{\alpha\beta}$  (поскольку тензор симметричен, его главные оси ортогональны). Тогда уравнения расцепляются на два совершенно аналогичных: одно для  $E_y$  и  $B_1$ , другое — для  $E_z$  и  $B_2$ . Каждое имеет вид

$$-k^2 E(k) - 2E'(x=0) = -\frac{ie^2\omega}{\pi\hbar^3 c^2} \frac{B}{|k|} E(k), \quad (15.30)$$

откуда

$$E(k) = -\frac{2E'(x=0)}{k^2 - ib/|k|}, \quad b = \frac{e^2\omega B}{\pi\hbar^3 c^2}. \quad (15.31)$$

Поскольку  $E(k)$  чётно по  $k$ , можем написать

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} E(k) = 2 \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \cos(kx) E(k) = -\frac{2E'(0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k \cos kx}{k^3 - ib} dk, \quad (15.32)$$

откуда находим поле на поверхности:

$$E(0) = -\frac{2E'(0)}{\pi b^{1/3}} \int_0^{\infty} \frac{k}{k^3 - i} dk = -\frac{2E'(0)}{\pi b^{1/3}} \cdot \frac{2\pi e^{i\pi/6}}{3^{3/2}}. \quad (15.33)$$

Таким образом,

$$\frac{E(0)}{E'(0)} = -\frac{4e^{i\pi/6}}{3^{3/2} b^{1/3}}. \quad (15.34)$$

Теперь вспоминаем одну из формул для поверхностного импеданса и уравнение Максвелла:

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{E_y(0)}{H_z(0)}, \quad \frac{dE_y}{dx} = \frac{i\omega}{c} H_z, \quad (15.35)$$

откуда

$$Z = \frac{4\pi i\omega}{c^2} \frac{E_y(0)}{E'_y(0)} = \frac{8\pi}{3^{3/2}} (1 - i\sqrt{3}) \frac{\omega}{c^2 b^{1/3}} = \frac{8\pi^{4/3}}{3^{3/2}} (1 - i\sqrt{3}) \frac{\hbar\omega^{2/3}}{e^{2/3} c^{4/3} B^{1/3}}. \quad (15.36)$$

В целом  $Z$  — тензор в плоскости  $(y, z)$ , главные значения которого выражаются через главные значения тензора  $B_{\alpha\beta}$  по найденной формуле.

Ответ зависит только от характеристик ферми-поверхности, но не от свойств рассеяния. Поэтому измерение поверхностного импеданса можно использовать для выяснения ферми-характеристик.

## XVI. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЫ

Уровни Ландау для свободных электронов:

$$\varepsilon = \mu_B H(2n + 1) + \frac{p_z^2}{2m}, \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (16.1)$$

Кратность вырождения пропорциональна  $H$ . Число состояний в интервале  $dp_z$  равно (спиновое вырождение здесь не учитываем)<sup>14</sup>

$$\frac{eH}{c} \frac{V dp_z}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (16.2)$$

Рассматривая поправки порядка  $(\mu_B H/\mu)^2$  к термодинамическому потенциалу  $\Omega$ , получаем (спиновый) парамагнетизм Паули и (орбитальный) диамагнетизм Ландау:

$$\frac{\chi_{\text{диа}}}{\chi_{\text{пара}}} = -\frac{1}{3}, \quad \chi_{\text{пара}} = \mu_B^2 \nu(\mu). \quad (16.3)$$

Если же чуть обобщить задачу, взяв изотропный спектр  $\varepsilon = p^2/2m_*$ , то в диамагнетизм Ландау будет входить масса  $m_*$ , связанная с орбитальным движением. А спиновый магнетизм определяется магнетонем Бора, содержащим массу свободного электрона

<sup>14</sup> Можно записать уровни энергии для движения в плоскости через ларморовскую частоту  $\omega_H = eH/mc$  как  $\hbar\omega_H(n + 1/2)$ . Если же ввести магнитную длину  $a_H = \sqrt{\hbar/m\omega_H}$ , то с точностью до коэффициента 2 кратность вырождения может быть посчитана как  $L_x L_y / \pi a_H^2$ .

(плотность состояний при этом определяется спектром и содержит  $m_*$  в обоих случаях).

В результате

$$\frac{\chi_{\text{диа}}}{\chi_{\text{пара}}} = -\frac{1}{3} \left( \frac{m}{m_*} \right)^2. \quad (16.4)$$

Так можно простейшим образом объяснить, почему существуют диамагнитные металлы ( $m_*$  может быть достаточно мала).

Если сравнить расстояние между уровнями  $\mu_B H$  с хим.потенциалом, то для характерных значений магнитного поля порядка 1 Тл получается

$$\frac{\mu_B H}{\mu} \sim 10^{-4}. \quad (16.5)$$

Квантовые эффекты связаны с дискретностью уровней, поэтому должны содержать степени этого отношения (степень зависит от конкретного рассматриваемого эффекта). Наиболее существенны должны быть высоколежащие уровни, для которых работает квазиклассика.

Квазиклассическое квантование уровней можно рассмотреть для произвольного спектра. В присутствии магнитного поля импульсы  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  заменяются на

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (16.6)$$

Взяв  $A_y = Hx$ ,  $A_x = A_z = 0$ , получаем

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad P_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} Hx. \quad (16.7)$$

Обозначив  $Y = (c/eH)P_x$ , обнаруживаем, что эта величина играет роль координаты, канонически сопряжённой импульсу  $P_y$ :

$$[P_y, Y] = -i\hbar. \quad (16.8)$$

Для замкнутых орбит работает правило квантования Бора-Зоммерфельда:

$$\oint P_y dY = 2\pi\hbar(n + \gamma), \quad |\gamma| \leq \frac{1}{2}. \quad (16.9)$$

То есть

$$\oint P_y dP_x = \frac{2\pi e\hbar H}{c} (n + \gamma). \quad (16.10)$$

Интеграл в левой части — это площадь, ограниченная траекторией электрона. А траектория ( $p_z = \text{const}$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ) — это сечение поверхности постоянной энергии плоскостью  $p_z = \text{const}$ . Поэтому

$$S(\varepsilon, p_z) = \frac{2\pi e\hbar H}{c} (n + \gamma). \quad (16.11)$$

Сколько состояний приходится на один уровень и интервал  $dp_z$ ? Вообще, число состояний определяется интегралом

$$\frac{V dp_z}{(2\pi\hbar)^3} \int dP_x dP_y. \quad (16.12)$$

Интеграл здесь — это площадь в плоскости  $p_z = \text{const}$ . На один уровень приходится площадь  $\Delta S = 2\pi e\hbar H/c$ .

Поэтому искомое число состояний даётся такой же формулой (16.2), как и для свободных электронов.

## XVII. ЭФФЕКТ ДЕ ГААЗА–ВАН АЛЬФЕНА

Парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау — эффекты порядка  $(\mu_B H/\mu)^2$  в термодинамическом потенциале. Теперь мы изучим следующую поправку в случае произвольного спектра. Она меньше, но быстро осциллирует с магнитным полем, поэтому её производная по  $H$  может превзойти вклад от монотонной части магнитного момента. Теоретически этот эффект был предсказан Ландау (1930) и экспериментально обнаружен де Гаазом и ван Альфеном (1930). Случай произвольного спектра был рассмотрен в работе И.Лифшица и Косевича (1955).

Термодинамический потенциал:

$$\Omega = -T \sum_i \ln [1 + e^{(\mu - \varepsilon_i)/T}], \quad (17.1)$$

где сумма берётся по всем состояниям. Учитывая кратность вырождения уровней и переходя к интегрированию по  $dp_z$ , получаем

$$\Omega = -\frac{VT}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH}{c} \sum_{n,\sigma} \int \ln [1 + e^{(\mu - \varepsilon_\sigma(n,p_z))/T}] dp_z, \quad (17.2)$$

где  $\sigma = \pm 1$  — проекция спина,  $\varepsilon_\sigma = \varepsilon(n, p_z) + \sigma \mu_B H$ .

Дальше применим формулу Пуассона [для вещественной функции  $f(n)$ ]:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) = \int_a^{\infty} f(n) dn + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{\infty} f(n) e^{2\pi i k n} dn, \quad (17.3)$$

где  $a$  — число, лежащее между целыми значениями  $n_0 - 1$  и  $n_0$ . Эту формулу можно



доказать следующим образом. Возьмём формулу пересуммирования Пуассона<sup>15</sup>

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}, \quad (17.4)$$

умножим на  $f(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от  $a$  до  $\infty$ . Первый член справа соответствует  $k = 0$ , а во втором объединены вклады от  $k$  и  $-k$ .

Применим формулу Пуассона к сумме по  $n$ , которая стоит в термодинамическом потенциале  $\Omega$ . Осциллирующая часть  $\tilde{\Omega}$  возникает из второго интеграла, будем рассматривать только его:

$$\tilde{\Omega} = -2 \operatorname{Re} \sum_{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} I_{k\sigma}, \quad I_{k\sigma} = \frac{VTeH}{(2\pi\hbar)^2 c} \int_a^{\infty} dn \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \ln [1 + e^{(\mu_{\sigma} - \varepsilon(n, p_z))/T}] e^{2\pi i k n}. \quad (17.5)$$

Здесь вместо  $\mu - \varepsilon_{\sigma}(n, p_z)$  мы написали  $\mu_{\sigma} - \varepsilon(n, p_z)$ , где  $\mu_{\sigma} = \mu + \sigma \mu_B H$ .

От интегрирования по  $dn$  перейдём к  $d\varepsilon$ :

$$I_{k\sigma} = \frac{VTeH}{(2\pi\hbar)^2 c} \int_0^{\infty} d\varepsilon \ln [1 + e^{(\mu_{\sigma} - \varepsilon)/T}] \int_{p_z \min(\varepsilon)}^{p_z \max(\varepsilon)} \frac{\partial n(\varepsilon, p_z)}{\partial \varepsilon} e^{2\pi i k n(\varepsilon, p_z)} dp_z. \quad (17.6)$$

Нижний предел интегрирования по энергии положен равным нулю, но это неважно, т.к. существенна окажется лишь окрестность ферми-поверхности.

В интеграле по  $dp_z$  множитель  $e^{2\pi i k n(\varepsilon, p_z)}$  — быстроосциллирующая функция (квазиклассика,  $n$  велико), поэтому основной вклад будет от окрестностей экстремумов аргумента, и мы будем использовать метод перевала (метод перевала здесь работает по параметру  $\mu/\mu_B H$  — именно такой порядок имеет  $n$ ). Пусть  $n$  достигает экстремума при  $p_z = p_{zm}$ :

$$n(\varepsilon, p_z) = n_m(\varepsilon) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right)_{p_{zm}} (p_z - p_{zm})^2. \quad (17.7)$$

Вблизи экстремума интеграл по  $dp_z$  превращается в

$$\left( \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \right)_m e^{2\pi i k n_m} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ i\pi k \left( \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right)_m x^2 \right] dx. \quad (17.8)$$

<sup>15</sup> Рассмотрим правую часть. При  $x = n$  справа получается бесконечность. При  $x \neq n$  можем сдвинуть переменную суммирования  $k \mapsto k + k_1$ , что даёт

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} = e^{2\pi i k_1 x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}.$$

Поскольку  $e^{2\pi i k_1 x} \neq 1$  при  $x \neq n$ , это означает, что  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} = 0$ . При этом правая часть периодична по  $x$  с периодом 1. Осталось проверить нормировку. Проинтегрируем правую часть по малому интервалу вокруг нуля:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k \varepsilon}{\pi k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k \varepsilon}{\pi k} dk = 1.$$

Интеграл легко взять, повернув контур интегрирования в комплексной плоскости. В случае  $(\partial^2 n / \partial p_z^2)_m > 0$  делаем замену  $x = e^{i\pi/4} z$ , а в случае  $(\partial^2 n / \partial p_z^2)_m < 0$  — замену  $x = e^{-i\pi/4} z$ . В результате

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ i\pi k \left( \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right)_m x^2 \right] dx = e^{\pm i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\pi k \left| \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right|_m z^2 \right] dz = e^{\pm i\pi/4} \left( k \left| \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right|_m \right)^{-1/2}. \quad (17.9)$$

Это даёт<sup>16</sup>

$$I_{k\sigma} = \frac{VT eH}{(2\pi\hbar)^2 c} \sum_m \int_0^{\infty} d\varepsilon \ln [1 + e^{(\mu_\sigma - \varepsilon)/T}] e^{\pm i\pi/4} \cdot \frac{dn_m}{d\varepsilon} \cdot e^{2\pi i k n_m} \left( k \left| \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right|_m \right)^{-1/2}, \quad (17.10)$$

где сумма берётся по всем экстремумам функции  $n(\varepsilon, p_z)$ . Применим интегрирование по частям, написав

$$\frac{dn_m}{d\varepsilon} \cdot e^{2\pi i k n_m} d\varepsilon = \frac{1}{2\pi i k} d e^{2\pi i k n_m}. \quad (17.11)$$

Проинтегрированная часть (вклад с подстановкой) не приводит к осцилляционной зависимости от поля. Опуская её и учитывая, что  $|\partial^2 n / \partial p_z^2|_m$  — медленная функция от  $\varepsilon$  (так что дифференцировать нужно только логарифм), получаем

$$\tilde{I}_{k\sigma} = \frac{VeH}{(2\pi\hbar)^2 c \cdot 2\pi i k^{3/2}} \sum_m e^{\pm i\pi/4} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{e^{2\pi i k n_m}}{e^{(\varepsilon - \mu_\sigma)/T} + 1} \left| \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right|_m^{-1/2}. \quad (17.12)$$

В числителе стоит функция  $e^{2\pi i k n_m}$ , быстрые осцилляции которой делают интеграл по  $d\varepsilon$  очень малым везде кроме области  $\varepsilon - \mu_\sigma \sim T$ , в которой быстро меняется знаменатель. Сама же функция  $n_m(\varepsilon)$  в этой области меняется плавно, поэтому можем написать

$$n_m(\varepsilon) = n_m(\mu_\sigma) + \left( \frac{\partial n_m}{\partial \varepsilon} \right)_{\mu_\sigma} (\varepsilon - \mu_\sigma). \quad (17.13)$$

В результате получаем интеграл<sup>17</sup>

$$\int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{e^{2\pi i k n_m}}{e^{(\varepsilon - \mu_\sigma)/T} + 1} = T e^{2\pi i k n_m(\mu_\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{2\pi i k x T (\partial n_m / \partial \varepsilon)_{\mu_\sigma}}}{e^x + 1} = T e^{2\pi i k n_m(\mu_\sigma)} \frac{-i\pi}{\text{sh} [2\pi^2 k T (\partial n_m / \partial \varepsilon)_{\mu_\sigma}]}. \quad (17.14)$$

Тогда

$$\tilde{I}_{k\sigma} = -\frac{VT eH}{2(2\pi\hbar)^2 c k^{3/2}} \sum_m e^{\pm i\pi/4} \frac{e^{2\pi i k n_m(\mu_\sigma)}}{\text{sh} [2\pi^2 k T (\partial n_m / \partial \varepsilon)_{\mu_\sigma}]} \left| \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right|_{m, \mu_\sigma}^{-1/2}. \quad (17.15)$$

<sup>16</sup> Мы можем заменить  $\partial n(\varepsilon, p_z) / \partial \varepsilon$  на  $dn_m / d\varepsilon$ , т.к. в точке экстремума  $\partial n / \partial p_z = 0$ .

<sup>17</sup> При переходе к интегрированию по  $x$  нижний предел, равный  $-\mu_\sigma / T$ , можно заменить на  $-\infty$ .

Теперь нужно подставлять это выражение в  $\Omega$ -потенциал (17.5) и суммировать по  $\sigma$ . Поскольку мы считаем  $\mu_B H \ll \mu$ , во все части формулы кроме быстроосциллирующего множителя  $e^{2\pi i k n_m(\mu_\sigma)}$  мы можем подставить  $\mu_\sigma \approx \mu$ . А для этого множителя можем написать

$$\sum_{\sigma} e^{2\pi i k n_m(\mu_\sigma)} = e^{2\pi i k n_m(\mu)} \sum_{\sigma} e^{2\pi i k (\partial n_m / \partial \varepsilon)_{\mu} \sigma \mu_B H} = e^{2\pi i k n_m(\mu)} \cdot 2 \cos [2\pi k (\partial n_m / \partial \varepsilon)_{\mu} \mu_B H]. \quad (17.16)$$

Из формулы (16.11) находим

$$n_m \approx \frac{c S_m}{2\pi e \hbar H}, \quad (17.17)$$

где  $S_m$  — площадь экстремального сечения ферми-поверхности плоскостью  $p_z = \text{const}$ .

Получаем

$$\sum_{\sigma} \tilde{I}_{k\sigma} = -\frac{V T e H}{(2\pi \hbar)^2 c k^{3/2}} \sum_m \frac{e^{2\pi i k n_m(\mu) \pm i\pi/4} \cos [2\pi k \mu_B H \frac{c}{e \hbar H} m_*]}{\text{sh} [2\pi^2 k T \frac{c}{e \hbar H} m_*]} \left| \frac{c}{2\pi e \hbar H} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_{m,\mu}^{-1/2}, \quad (17.18)$$

где мы использовали определение эффективной массы

$$m_* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}. \quad (17.19)$$

Окончательно, собирая всё вместе, находим

$$\tilde{\Omega} = \frac{V}{2^{3/2} \pi^{7/2} \hbar^3} \left( \frac{e \hbar H}{c} \right)^{5/2} \sum_m \frac{1}{m_*(\mu, p_z m)} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_{m,\mu}^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{k^{3/2} \text{sh}(k\lambda)} \cos \left[ k \frac{c S_m}{e \hbar H} \pm \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[ \pi k \frac{m_*}{m_e} \right], \quad (17.20)$$

$$\lambda = \frac{2\pi^2 T c m_*}{e \hbar H}.$$

Буквой  $m_e$  мы здесь обозначили массу электрона (чтобы отличать её от индекса суммирования  $m$  по экстремальным сечениям ферми-поверхности).

Отсюда получаем осциллирующую часть намагниченности:

$$\tilde{M} = -\frac{1}{V} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial H}. \quad (17.21)$$

Дифференцировать нужно наиболее быстро меняющиеся множители — косинусы. Поэтому

$$\tilde{M} = -\frac{1}{2^{3/2} \pi^{7/2} \hbar^3} \left( \frac{e \hbar}{c} \right)^{3/2} H^{1/2} \sum_m \frac{S_m}{m_*} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_{m,\mu}^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{k^{1/2} \text{sh}(k\lambda)} \sin \left[ k \frac{c S_m}{e \hbar H} \pm \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[ \pi k \frac{m_*}{m_e} \right]. \quad (17.22)$$

Получилась сложная функция магнитного поля, содержащая вклады различной периодичности. Вклады от экстремальных сечений ферми-поверхности имеют каждый свой период по  $1/H$ , равный

$$\Delta \frac{1}{H} = \frac{2\pi e\hbar}{cS_m}. \quad (17.23)$$

Эти периоды не зависят от температуры.

Температурная зависимость амплитуд осцилляций определяется множителем  $\lambda/\text{sh}(k\lambda)$ . При  $\lambda \gg 1$  (высокие температуры) в сумме достаточно сохранить лишь член с  $k = 1$ , и осцилляции имеют экспоненциально малую амплитуду  $\propto e^{-\lambda}$ . При  $\lambda \ll 1$  (низкие температуры) имеем  $\lambda/\text{sh}(k\lambda) \sim 1/k$ , т.е.  $\lambda$  выпадает. Оценим результат в этом случае.

Для оценок возьмём  $m_* \sim m_e$ ,  $S \sim p_0^2$ . Тогда

$$\tilde{M} \sim \frac{1}{\hbar^3} \left( \frac{e\hbar}{c} \right)^{3/2} H^{1/2} \mu. \quad (17.24)$$

Неосциллирующая часть намагниченности имеет порядок

$$M_0 \sim \mu_B^2 \nu(\mu) H \sim \mu_B^2 \frac{m_e p_0}{\hbar^3} H. \quad (17.25)$$

Поэтому<sup>18</sup>

$$\frac{\tilde{M}}{M_0} \sim \left( \frac{\mu}{\mu_B H} \right)^{1/2} \gg 1. \quad (17.26)$$

Таким образом, при низких температурах осциллирующая часть даёт основной вклад в намагниченность. Это связано с высокой частотой осцилляций, которая сильно увеличивает эффект при дифференцировании.

Осцилляции такого же типа имеют место в кинетических явлениях. Например, осцилляции проводимости — эффект Шубникова–де Гааза (1930).

<sup>18</sup> При этом

$$\frac{\tilde{\Omega}}{\Omega_0} \sim \left( \frac{\mu_B H}{\mu} \right)^{5/2} \ll 1.$$