1. Каждому ребру квадратной решетки с $N = L^2$ узлами приписан некоторый неотрицательный вес. Требуется найти минимальный возможный вес конфигурации, в которой имеется только один кластер (т.е. все N узлов лежат в одной компоненте связности).

а) Покажите, как это сделать за время $O(N \log N)$.

б) Можно ли справиться за время $O(N)$? *(Ответ: можно.)*

в)* Оцените константы в (ваших) алгоритмах для а) и б). Начиная с каких N асимптотически более эффективный алгоритм станет быстрее и на практике?

2. Рассмотрим перколяцию по ребрам на полном графе K_N (каждая из N вершин соединена со всеми остальными). При наивном определении (каждое ребро открыто с фиксированной вероятностью p) средний размер кластера, содержащего заданную вершину, стремится к бесконечности при $N \to \infty$ и любом $p > 0$; такая модель не отличается содержательностью. Будем считать, что каждое ребро открыто с вероятностью $p/f(N)$, где $p \geq 0$ постоянно, а $f(N)$ – некоторая заданная функция.

Напишите программу, реализующую алгоритм union–find с объединением по рангу и сжатием путей, и найдите эмпирические ответы на следующие вопросы:

а) Как должна вести себя функция $f(N)$, чтобы по величине “доля вершин, принадлежащих максимальному кластеру”, происходил фазовый переход при некотором $p_c > 0$? Оцените p_c для этого $f(N)$.

б) Как должна вести себя функция $f(N)$, чтобы по величине “вероятность того, что вершины 1 и 2 лежат в одной компоненте”, происходил фазовый переход при некотором $p_c > 0$? Оцените p_c для этого $f(N)$.

в) Каковы наблюдаемые при решении задач а) и б) эффективности трех вариантов алгоритма: только с объединением по рангу, только со сжатием путей, полного варианта?

3.** Пусть в дополнение к операциям `join(i,j)` и `find(i,j)` допустима еще операция `cut(i,j)`, стирающая ребро (i, j), если таковое присутствует (иными словами, разрешено рисовать ребро графа, стирать ребро графа, спрашивать о принадлежности двух вершин одной компоненте связности в текущей конфигурации).

Можно ли предъявить алгоритм, обрабатывающий одну команду за время $O(\log^k N)$, где N – число вершин? *(Ответ: можно(!). Это очень сложная задача.)*

Комментарий. В задаче 1б) эффективность $O(N)$ понимается в обычном смысле, т.е. $O(N) \neq O(N\alpha(N))$. Существенно, что речь идет о плоской решетке. В задаче 3 тоже интересно рассмотреть случай, когда допустимые для `join` пары – ребра вложимого в плоскость графа. При этом достижим результат $k = 1$ (но это по-прежнему очень сложная задача).