1. В этой и следующих задачах $\Theta(G)$ – шенноновская емкость графа G, $\theta(G)$ – тэта-функция Ловаса графа G.

а) Найдите $\Theta(G_1)$, $\Theta(G_2)$, $\Theta(G_3)$ для графов рис. 1. Имеет ли для них место равенство $\Theta(G) = \theta(G)$?

б) Найдите $\theta(G_4)$ для восьмивершинного графа G_4.

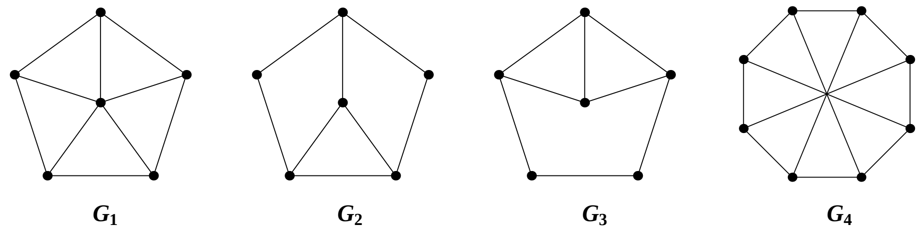

Рис. 1: Графы к задаче 1.

2. Определим несвязное объединение графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ с $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ как граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

а) Покажите, что $\Theta(G_1 \cup G_2) \geq \Theta(G_1) + \Theta(G_2)$.

б) Хотя на первый взгляд это может показаться странным, в общем случае $\Theta(G_1 \cup G_2) \neq \Theta(G_1) + \Theta(G_2)$. Покажите, что если G_1 покрывается $\alpha(G_1)$ кликами, то все же $\Theta(G_1 \cup G_2) = \Theta(G_1) + \Theta(G_2)$.

в) Приведите пример графа, шенноновская емкость которого не имеет вид $\sqrt[k]{m}$ с целыми k, m. В частности, для таких графов G верхняя грань $\sqrt[n]{\alpha(G^n)}$ не достигается при конечных n.

3. В тексте статьи приводятся две оценки, основанные на дробных вершинных упаковках:

(FVP) Присвоим каждой вершине x графа G неотрицательный вес $w(x)$ так, чтобы сумма весов вершин в каждой клике G не превосходила 1. Максимум $\sum_{x \in V(G)} w(x)$ по всем таким конфигурациям будет оценкой сверху для $\Theta(G)$.

(FVP*) Присвоим каждой клике C графа G неотрицательный вес $q(C)$ так, чтобы для каждой вершины графа сумма весов содержащих ее клик была не меньше 1. Минимум $\sum_{C \in C(G)} q(C)$ по всем таким конфигурациям будет оценкой сверху для $\Theta(G)$.

а) Докажите FVP (или найдите и разберите какое-нибудь доказательство).

б) Покажите, что оценки FVP и FVP* для любого графа совпадают.