

1. Насколько точной является замена исходного гамильтониана системы на энергию взаимодействия магнитных зарядов?

- а) Из приведенного в статье рисунка 3 ясно, что поправки настолько малы, что увидеть непосредственно из графика их количественную меру проблематично. Представьте этот рисунок в виде таблицы из трех строк (две энергии и их относительное различие в процентах).
- б)\* Аппроксимация гамильтониана приводит к тому, что многократно вырожденное основное состояние расщепляется на большое количество уровней, характерное расстояние между которыми  $\delta$  много меньше расстояния  $\Delta$  до состояния с возбужденными монополями. Верно ли, что отношение  $\delta/\Delta$  имеет порядок вычисленной в а) величины, или оно существенно меньше за счет дополнительных усреднений? Попробуйте численно найти энергии двух каких-нибудь далеких друг от друга по энергии “основных состояний”.
- в) Найдите в литературе характерную для  $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$  величину кристаллического поля, ориентирующего спины вдоль ребер решетки алмаза. Как соотносится поправка от неполной изинговости спинов с найденной выше?

2. Рассмотрим стандартную модель льда на квадратной решетке.

- а) Получите для числа  $M$  основных состояний на решетке  $L \times L$  с периодическими граничными условиями оценку  $M \geq A^{L^2}$  с какой-нибудь константой  $A > 1$ .
- б) Попробуйте оценить точное значение  $c$ , рассматривая задачу на торе  $k \times L$ , где  $k$  фиксировано, а  $L \rightarrow \infty$ . Покажите, что асимптотика числа основных состояний на таком торе имеет вид  $M \sim A(k)^{kL}$ , где  $A(k)$  – наибольшее собственное число некоторой матрицы  $2^k \times 2^k$ . Найдите  $A(k)$  точно для  $k = 2, 3, 4$ .
- в)\* Напишите программу вычисления  $A(k)$  в какой-нибудь среде, поддерживающей нахождение спектров больших матриц. До каких  $k$  удастся добраться? Экстраполируйте ответ на  $k \rightarrow \infty$ . Какова ошибка полученного приближения? Какова ошибка приближения Полинга?

3. В тексте сказано, что “one can show that  $v_0$  is large enough, for the compounds we consider, that it enforces  $Q_\alpha = 0$  everywhere in the ground state”.

- а) Каково пороговое значение  $v_0$  для полной нейтральности основного состояния? Дайте численный ответ на физическом уровне строгости.
- б) Можно ли привести более строгое рассуждение для параметров обсуждавшихся соединений?