

1. Рассмотрим стандартный антиферромагнитный одномерный гейзенберговский гамильтониан для спина S

$$H = |J| \sum_{k=1}^N \mathbf{S}_k \mathbf{S}_{k+1}$$

с периодическими граничными условиями ($N + 1 = 1$).

- а) Найдите спектр H для $N = 2, 3, 4$.
- б)* Найдите энергии основного и первого возбужденного состояний для $S = 1/2$ и $S = 1$ при $N = 5$, при необходимости – численно.
- в) Попробуйте экстраполировать полученные в пунктах а) и б) ответы для энергии основного состояния в расчете на одну связь E_0/N и для щели $\Delta = E_1 - E_0$ в область $N \gg 1$. Видно ли качественное различие в поведении Δ при $S = 1/2$ и $S = 1$?

2. Пусть ψ_N – основное состояние модели AKLT ($S = 1$)

$$H = |J| \sum_{k=1}^N \mathbf{S}_k \mathbf{S}_{k+1} + \frac{1}{3} (\mathbf{S}_k \mathbf{S}_{k+1})^2$$

с периодическими граничными условиями ($N + 1 = 1$).

- а) Выведите формулу (4) статьи AKLT для перекрытия волновых функций VBS-состояний с открытыми граничными условиями.
- б) Получите из формулы пункта а) основной результат статьи – выражение для спинового коррелятора в ψ_N ,

$$\langle \psi_N | S_0^a S_k^b | \psi_N \rangle \rightarrow \frac{4}{3} (-1)^k 3^{-k} \delta^{ab}, \quad N \rightarrow \infty; \quad a, b \in \{x, y, z\}.$$

- в) Совпадает ли ψ_N с основным состоянием модели из задачи 1 при $N = 2, 3, 4, 5$? Какова энергия в расчете на одну связь $e_N = \langle \psi_N | H | \psi_N \rangle / N$ состояния ψ_N как вариационной волновой функции модели Гейзенберга в этих случаях? Из результата пункта б) следует, что $e_N \rightarrow -\frac{4}{3}|J|$ при $N \rightarrow \infty$. Какую следует ожидать скорость сходимости по N ?

3. Рассмотрим модель Majumdar–Ghosh ($S = 1/2$)

$$H = |J| \sum_{k=1}^N \mathbf{S}_k \mathbf{S}_{k+1} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_k \mathbf{S}_{k+2}$$

с периодическими граничными условиями ($N + 1 = 1$).

- а) Покажите, что при четном N любое основное состояние будет линейной комбинацией двух полностью димеризованных состояний.
- б)* Как обстоит дело при нечетном N ?