

1. Пусть $Z = \sum_{N=1}^{\infty} Z_N z^N$ – статистическая сумма модели разветвленных полимеров в $d = 3$ измерениях.

- а) Прямым вычислением найдите Z_N для $N = 1, 2, 3$.
- б) Пусть $W = \sum_{N=1}^{\infty} W_N z^N$ – статистическая сумма модели одномерного газа твердых шаров (отрезков единичной длины) на окружности длины L . Найдите W_N в явном виде.
- в) В условиях пункта б) свободная энергия на единицу объема равна

$$F = \sum_{N=1}^{\infty} F_N z^N = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln W.$$

Найдите F_N в явном виде (удобно сначала выразить z через F). Перейдите от F к плотности n , получите явные выражения для Z_N и сравните с результатами пункта а).

2. Цель этой задачи – прояснить смысл индекса σ “плотности нулей Ли-Янга” и его связь с рассмотренными в статье моделями.

- а) Рассмотрим одномерную модель Изинга в магнитном поле

$$H = -J \sum_{k=1}^N \sigma_k \sigma_{k+1} - h \sum_{k=1}^N \sigma_k, \quad \sigma_k = \pm 1.$$

Найдите ее статистическую сумму Z для произвольного N в случае периодических граничных условий (например, выписав сначала рекуррентное соотношение для перехода от N к $N + 1$ в модели с открытыми граничными условиями и фиксированными значениями спинов на концах – аналогично задаче 2 к статье о спиновом льде).

- б) Пусть в условиях пункта а) магнитное поле h принимает чисто мнимые значения, $h = ib$. Для заданного N найдите все нули статсуммы $B_N = \{b : b \geq 0, Z(b) = 0\}$. Какова нижняя грань b_c множества B_N в пределе $N \gg 1$?
- в) Пусть N конечно, но очень велико (больше любого другого параметра). Покажите, что число нулей, попадающих в интервал $[b_c, b]$, ведет себя при $b \rightarrow b_c$ как $(b - b_c)^{1+\sigma_1}$, и найдите σ_1 .
- г) Нульмерная модель Изинга – это просто один спин во внешнем магнитном поле. Перенесите предыдущие рассуждения на этот случай и найдите аналогичный показатель σ_0 .

Согласно гипотезе Паризи–Сурласа, фазовый объем разветвленного полимера в $(d + 2)$ -мерном пространстве ведет себя как $N^{-2-\sigma_d} \mu^N$, где σ_d аналогичным образом вычисляется по модели Изинга в соответствующей размерности.