

## Лекция 11.

Эффекты температуры и магнитного поля

Изложение по АГД и книге Минеева-Самохина

# 1. Зависимость щели в спектре от температуры.

Исследуем более подробно зависимость величины щели от температуры. Рассмотрим сначала случай низких температур  $T \ll T_c$  и произведем соответствующее разложение условия (34.37). Имеем тождественно:

$$\frac{1}{\zeta} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{V\xi^2 + \Delta^2} - 2 \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{V\xi^2 + \Delta^2} \cdot \frac{1}{\exp(V\xi^2 + \Delta^2/T) + 1}, \quad (36.1)$$

где  $\zeta = |\lambda| \frac{mp_0}{2\pi^2}$

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0\left(\frac{n\Delta}{T}\right) \quad (\text{здесь } \Delta_0 \equiv \Delta(T=0))$$

При низких температурах  $\Delta \gg T$ ,

$$\Delta = \Delta_0 - \sqrt{2\pi T \Delta_0} \left(1 - \frac{T}{8\Delta_0}\right) e^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

Вблизи  $T_c$  величина щели мала,

Разлагаем в ряд по  $\Delta$  у-ние самосогласования

$$1 = \frac{|\lambda| T}{(2\pi)^3} \sum_n \int \frac{dp}{\omega + \xi^2 + \Delta^2}.$$

$$\frac{1}{\zeta} = T \sum_n \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \left\{ \frac{1}{\omega^2 + \xi^2} - \frac{\Delta^2}{(\omega^2 + \xi^2)^2} + \frac{\Delta^4}{(\omega^2 + \xi^2)^3} + \dots \right\}.$$

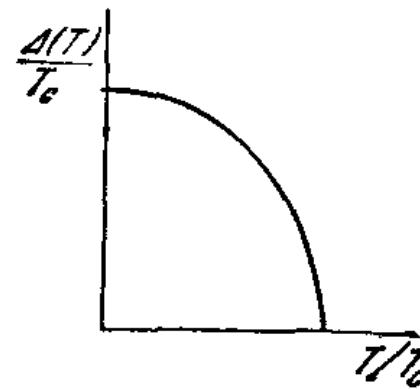
$$\frac{1}{\zeta} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T} - \frac{\Delta^2}{(\pi T)^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{3}{4} \frac{\Delta^4}{(\pi T)^4} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^z} = \frac{2^z - 1}{2^z} \zeta(z).$$

В результате получаем

$$\ln \frac{T}{T_c} = - \frac{7\zeta(3)}{8} \frac{\Delta^2}{(\pi T)^2} + \frac{93\zeta(5)}{128} \frac{\Delta^4}{(\pi T)^4} + \dots$$

$$\Delta = \pi T_c \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \simeq 3,06 T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}.$$



d-wave

$$\Delta(\vec{k}) = \Delta(\tau) g(\vec{k})$$

$$G_D = \begin{pmatrix} -\frac{i\omega_n + \beta_k}{\omega^2 k_x^2 + \beta_k^2 g(\vec{k})} & \frac{\Delta \cdot g(\vec{k})}{-\omega^2 k_x^2} \\ -\frac{\Delta \cdot g(\vec{k})}{\omega^2 k_x^2 + \beta_k^2 g(\vec{k})} & \frac{i\omega_n - \beta_k}{-\omega^2 k_x^2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta g(\vec{k}) = T \sum_{\vec{k}'} f(\vec{k}') \frac{V(\vec{k}, \vec{k}') g(\vec{k}')}{\omega_n^2 + \tilde{\epsilon}_{k'}^2 + \Delta^2 (g(\vec{k}'))^2}$$

$$V(\vec{k}, \vec{k}') \approx 2V_0 \cos 2\theta_{\vec{k}} \cos 2\theta_{\vec{k}'} \quad -(2D \text{ J-wave})$$

$$g(\vec{k}) = \cos 2\theta_{\vec{k}} = (\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2)$$

$$\Delta = 2V_2 N_0 \int_0^{\varepsilon_e} d\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\Delta \cos^2 2\theta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta}} \text{th} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta}}{2T}$$

Hoplungsfaktor  $2V_2$  bei Spannung, zweiter unerst  $\left[ T_c = \frac{2\pi}{\pi} \varepsilon_e e^{-VN_0 V_2} \right]$

$$\text{Hypothese } T \ll T_c : \text{f}_L \frac{\Delta(\omega)}{\Delta(T)} = 2 \int_0^{\infty} d\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\cos^2 2\theta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta}} \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta}}{T}\right) + 1}$$

# Термодинамика сверхпроводника.

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \lambda} = \frac{1}{\lambda} \langle H_{int} \rangle = -\frac{1}{\lambda^2} |\Delta|^2. \quad \Omega_s - \Omega_n = \int_0^\Delta \left( \frac{d \frac{1}{|\lambda|}}{d \Delta} \right) \Delta^2 d\Delta.$$

При учете связи

$$\frac{1}{\zeta} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} = 2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \cdot \frac{1}{\exp(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/T) + 1},$$

Воспользовавшись соотношением (36.2), согласно которому

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{mp_0}{2\pi^2} \left\{ \ln \frac{2\omega_D}{\Delta} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0 \left( \frac{n\Delta}{T} \right) \right\}, \quad \text{получим}$$

$$F_s - F_n = - \left( \frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \left\{ \frac{\Delta^2}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{T^2}{n^2} \int_0^{\frac{n\Delta}{T}} K_1(x) x^2 dx \right\}.$$

При низких температурах  $\Delta/T \gg 1$ .

$$\int_0^{\frac{n\Delta}{T}} K_1(x) x^2 dx = 2 - \int_{\frac{n\Delta}{T}}^{\infty} K_1(x) x^2 dx.$$

Последний интеграл

нужно вычислить лишь для  $n = 1$ , воспользовавшись для этого асимптотическим разложением функции  $K_1(x)$ .

Остающийся ряд по  $n$  легко суммируется. В результате находим:

$$F_s - F_n = \frac{mp_0 T^2}{6} - \frac{mp_0}{2\pi^2} \left[ \frac{\Delta^2}{2} + \sqrt{2\pi\Delta_0^3 T} \left( 1 + \frac{15}{8} \frac{T}{\Delta_0} \right) e^{-\Delta_0/T} \right].$$

где

$$\Delta = \Delta_0 - \sqrt{2\pi T \Delta_0} \left( 1 - \frac{T}{8\Delta_0} \right) e^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

$$C_n = \frac{mp_0 T}{3}$$

Энтропия сверхпроводящей фазы:

$$S_s = \frac{mp_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^3}{T}} e^{-\frac{\Delta_0}{T}},$$

а теплоемкость равна

$$C_s = \frac{mp_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^3}} e^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

$$C_s = 2N_0 \Delta_0 \sqrt{\frac{2\pi \Delta_0^3}{T^3}} e^{-\Delta_0/T}$$

5) Априори предположение о квазистационарном

процессе  $\phi(T) : i\omega \rightarrow \varepsilon + i\sigma$   $\varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$

Черное-дым квазистационарный с дисперсией

$$S = -2 \sum_{k \text{ мин}} f_k \ln f_k + (1-f_k) \ln(1-f_k); \quad f_k = \frac{1}{e^{\varepsilon_k/T} + 1}$$

$$C = \frac{\partial S}{\partial T} = 2 \sum_k E_k \frac{\partial f_k}{\partial T} = 2 N_0 \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty \xi \frac{\partial f_k}{\partial T} \varepsilon_k \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{e^{\varepsilon_k/T} + 1} \right)$$

$$\text{S-wave: } C_s = 2 N_0 \int_0^\infty d\xi \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{e^{(\xi^2 + \Delta^2)/T} + 1} \right) \underset{T \ll \Delta}{\approx} 2 N_0 \frac{\Delta^2}{T^2} \sqrt{2\pi T \Delta_0} e^{-\Delta/T}$$

### 3. Computed capacitance

$$\xi_{K\alpha} = \xi_\alpha + \mu_0 H \quad \Sigma_{K\alpha} = \Sigma_\alpha + \mu_0 H$$

Constitutive maps in Eqn. 3 normal

$$M = \mu_0 \sum_k (f(\xi_{K\alpha}) - f(\xi_{\alpha})) \quad \text{q. 1002}$$

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -2\mu_0^2 \sum_k \frac{\partial f}{\partial \xi} = 2\mu_0^2 N_0 Y(T) = \text{occurred}$$

$$Y(T) = \sum_{R=0}^{\infty} Y(R, T); \quad Y(k, T) = \frac{1}{kT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{e^{\xi/kT}} =$$



$$= \frac{1}{kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\cosh^2 \left[ \frac{s^2 + \Delta^2}{2T} \right]}$$

$$\underline{X_n = e^{\mu_n^2 N_0}} ; \quad \underline{X_S = Z_h Y(t)}$$

если  $T \ll T_c$   $X_n/X_m \sim e^{-\Delta T}$  для S-волны

[исследование Al  
 $\approx 1560$ ]

4. Параметрический метод

#### 4. Параметрический метод

$$T=0 : \chi_s(H) = 0$$

$$F_s(B, H) = -\frac{N_0}{2} \Delta^2$$

$$F_n(H) = -\frac{\chi_n H^2}{2} = -N_0 \mu_B^2 H^2$$

$$\mu_p^2 = \frac{\Delta^2}{2\mu_B^2}$$

$$\boxed{H_p = \frac{\Delta}{\mu_B \sqrt{2}}}$$

например: Al  $T_c \approx 1.2 \text{ K}$   
 $\Delta \approx 2 \text{ K}$

$$H_p = \frac{\Delta}{\sqrt{2}\mu_B} \approx \frac{2 \cdot 1.36 \cdot 10^{-10}}{1.4 \cdot 10^{-20}} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ A} = 2 \pi$$

⇒ при  $H_p$  и  $B = 0$ ,  
мы имеем  $F_s(B, H) \approx F_n(H)$

Изобразим  $F_s$  от  $H$  — это также кривая  $T=0$ !

## 5. Диакогнический эффект

$$\frac{\vec{K}^2}{2m} \rightarrow (-i\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 \frac{1}{2m}$$

В электрическом поле имеется зерно

$$\frac{e}{c} \vec{V}_R \cdot \vec{A} \bar{\psi} \psi + \frac{e^2}{c^2} \frac{\vec{A}^2}{2m} \bar{\psi} \psi$$

$$\vec{j} = c \frac{\delta F}{\delta \vec{A}} \Rightarrow \boxed{\vec{j}_{\vec{q}} = Q(\vec{p}) \vec{A}_{\vec{q}}}$$

$$\text{зде } \vec{V}_R = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{p}}$$

показано используя

$$\vec{q} \cdot \vec{A}_{\vec{q}} = 0 \quad (\vec{p} \cdot \vec{A} = 0)$$

$$Q(\vec{q}) = Q_1(\vec{q}) - \frac{e^2}{mc} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_n$$

Matsubara  $\hat{M}$  =  $\begin{pmatrix} -i\omega + \frac{3}{2}\kappa & \Delta \\ -\Delta & i\omega + \frac{3}{2}\kappa \end{pmatrix}$  noesgzaat  $\Delta$  d'ab' (cy)

$$\mathcal{L}\hat{M}(\vec{A}') = \frac{e}{c} \vec{V}_q \vec{A} \times \hat{i}$$

$$Q_{ij} = -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 c^2} \frac{e^2}{c^2} V_i(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) V_j(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}) \times G_{\alpha\beta}(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}, i\omega_n) \times G_{\beta\alpha}(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}, i\omega_n)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 c^2} \frac{e^2}{c^2} V_i(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) V_j(\vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}) \times \left\{ F(i\omega_n, \vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) \times G(i\omega_n, \vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}) + F(i\omega_n, \vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}) F^*(i\omega_n, \vec{k} - \frac{\vec{q}}{2}) \right\} =$$

$$= -\frac{e^2}{3} T \sum_n N_0 \int d\vec{z} \int \frac{d\vec{k}_R}{4\pi} \frac{\bar{k} + \bar{q}/2}{m} \cdot \frac{\bar{k} - \bar{q}/2}{m} \frac{(\xi_{k+} - i\omega_n)(\xi_{k-} - i\omega_n) + \Delta^2}{(\omega_n^2 + \xi_{k+}^2 + \Delta^2)(\omega_n^2 + \xi_{k-}^2 + \Delta^2)}$$

$$Q_1^{ij}(q) = \delta_{ij} Q_1(q)$$

S-wave

$$Q_1(q) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{e^2 N_0}{m^2 c} T \sum_n \int d\vec{z} \xi_k \frac{\xi_{k+} \xi_{k-} + \Delta^2 - \omega_n^2}{(\omega_n^2 + \xi_{k+}^2 + \Delta^2)(\omega_n^2 + \xi_{k-}^2 + \Delta^2)}$$

Decs boson with  $\vec{q} \rightarrow 0$

$$Q(0) = Q_1(0) - \frac{e^2 n}{mc} \equiv -\frac{e^2 n s}{mc}$$

$$n_0 - n_s = -\frac{2}{3} \frac{N_0 P_F^2}{m} T \sum_n \int d\zeta \frac{\zeta^2 + \Delta^2 - \omega_n^2}{(\zeta^2 + \Delta^2 + \omega_n^2)^2} \quad (1)$$

$\Pi_{\mu\nu}$   $\Delta = 0$   $n_s = 0$ , T. e.

$$n = -\frac{2}{3} \frac{N_0 P_F^2}{m} T \sum_n \int d\zeta \frac{\zeta^2 - \omega_n^2}{(\zeta^2 + \omega_n^2)^2} \quad (2)$$

(1) - (2) :

$$n_s = \frac{2}{3} \frac{N_0 P_F^2}{m} T \sum_n \int d\zeta \left[ \frac{\zeta^2 + \Delta^2 - \omega_n^2}{(\zeta^2 + \Delta^2 + \omega_n^2)^2} - \frac{\zeta^2 - \omega_n^2}{(\zeta^2 + \omega_n^2)^2} \right]$$

Tenere mosehne füge  $\int d\zeta$  :

$$n_s = \frac{2 N_0 p_F^3}{3 m} T \sum_n \frac{\pi \Delta^2}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^{3/2}}$$

a)  $T \rightarrow 0$ :  $n_s = \frac{2 N_0 p_F^3}{3 m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi \Delta^2}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = \frac{2 N_0 p_F^3}{3 m} = \frac{p_F^3}{3 T^2} = \kappa$

b)  $T \rightarrow T_c$ :  $\frac{n_s}{\kappa} = T \sum_n \frac{\pi \Delta^2}{[\pi T(2n+1)]^3} = \frac{2 \Delta^2}{\pi^2 T^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^3} =$   
 $= \frac{7 \Delta^2 \zeta(3)}{4 \pi^2 T_c^2} = 2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$

максимум, возрастает снизу

Термодинамический изотропический тензор  $Q(q)$  для  $q \neq 0$ :

$$Q(q) = -\frac{e^2}{mc} \times \underbrace{\frac{2}{3} \frac{N_0 \rho F^2}{m}}_n \times \frac{3\pi}{4} T \sum_n \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \frac{\Delta^2}{\omega_n^2 + \Delta^2 + \frac{V^2 q^2}{4} \cos^2 \theta}$$

$$\frac{3\pi}{4} T \sum_n \int_0^1 \frac{(1-\mu^2) \mu \Delta^2}{\omega_n^2 + \Delta^2 + \frac{V^2 q^2}{4} \mu^2} \times \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}$$

$\eta \mu$

$Vq \gg T_c$

нестабильный

$\mu \ll 1$

$$Q(q) = -\frac{e^2}{mc} h \times \frac{3\pi^2}{2Vq} T \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \Delta^2}$$

$$= -\frac{e^2}{mc} h \times \frac{3\pi^2}{4Vq} \Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}$$

Пунктир

## Difrakcionnyj koefitsient $n_s$

$$n_s = n - n_n \quad n_n - nazyvaetsja \text{ top malykh volk} \\ \text{ fazifitel'noj}$$

Clopoet spektra  $\vec{W}$  sverstvuyet kompliktsion

$$\epsilon_k(w) = \epsilon_k - \vec{W} \vec{K}$$

$$\text{umnyjabc} \quad \vec{P} = 2 \sum_{\vec{k}} \vec{K} f(\epsilon_k(w)) = -2 \int \frac{1^3 \epsilon}{(2\alpha)^3} \vec{K}(\vec{k} \vec{W}) \frac{\partial f}{\partial \epsilon} =$$

$$= \frac{2}{3} \vec{W} \cdot N_0 P_F \int \frac{d\epsilon}{4\pi} \int d\vec{z} \frac{1}{4T \sinh^2 \left( \frac{1}{2T} \sqrt{\vec{z}^2 + \Delta_k^2} \right)} =$$

$$= \vec{W} \cdot \underbrace{n \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(k, \vec{t})}_{n_m}$$

$$n_s = n \left[ 1 - \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(k, \vec{t}) \right]$$

Ограничение метода:  
Trebyuem transm. uchast. (top malykh volk)  
 $n_s(0) = n$