1. Приведите пример распределения, которое не является ни дискретным, ни абсолютно непрерывным.

2. Существует ли распределение состояний системы из n пронумерованных частиц, находящихся в точках с целочисленными координатами внутри (не на границе) квадрата с вершинами $(0,0)$, $(N,0)$, $(0,N)$, (N,N), для которого выполнено следующее свойство? Две частицы системы не могут находиться в одной и той же точке, и для любого $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ при заданных положениях любых i частиц вероятность нахождения любой другой $i+1$-ой частицы в точке x (x — произвольная точка, отличная от i зафиксированных) обратно пропорциональна расстоянию до начала координат. Если да, то опишите это распределение.

3. Найдите плотность распределения суммы двух независимых нормальных (с различными параметрами) случайных величин.

4. Пусть ξ, η — стандартные нормальные случайные величины. Верно ли, что $\xi + \eta$ — нормальная случайная величина?

5. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые стандартные нормальные случайные величины. Найдите распределение величины $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$.

6. Существует способ моделирования нормального распределение с помощью равномерного. Пусть ξ, η — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на $[0,1]$. Приведите пример функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такой, что $f(\xi, \eta)$ имеет стандартное нормальное распределение. Докажите полученное утверждение.

7. Пусть ξ, η — независимые абсолютно непрерывные случайные величины. Придумайте формулу для вычисления плотности $\xi\eta$ с помощью известных плотностей ξ и η.

8. Пусть ξ — положительная случайная величина, $a < b$ — произвольные положительные числа. Докажите, что если существует конечное $\mathsf{E}\xi^b$, то и конечно $\mathsf{E}\xi^a$.

9. Рассматривается модель Изинга. Пусть h, T — некоторые положительные числа. Пусть, кроме того, $\mathcal{S}$ — последовательность длины N, состоящая из случайных величин $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_N$, принимающих значения -1 и 1. Пусть, кроме того, вероятность каждой из 2^N "конфигураций" (значений) этой системы (последовательности) задается Гиббсовским весом:

$$\mathsf{P}(\mathcal{S} = S) = Z^{-1} \exp(-E\{S\}/T),$$

где энергия

$$E\{S\} = -\sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1} - h\sum_{i=1}^{N} S_i,$$

а Z — нормировочный множитель, называемый статистической суммой, т.е.

$$Z = \sum_{S} \exp(-E\{S\}/T).$$

Найдите $\mathsf{E}\mathcal{S}_k$ узла $k \in \{1, \dots, N\}$. В предположениях, что $1 \ll N$ и что узел k находится вдали от обоих краев цепочки, т.е. $1 \ll k$, и $1 \ll N - k$, а также что $T \ll 1$ и $h \ll 1$, найдите асимптотику этого математического ожидания.