Московский Физико - Технический институт
(Государственный университет)
Факультет Общей и Прикладной Физики
группа 527б
кафедра "Проблемы теоретической физики"

Игорь Сергеевич Бурмистров
научный руководитель:
к.ф.-м.н. М. А. Баранов
РНЦ "Курчатовский институт"

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДА МЕТАЛЛ-ДИЭЛЕКТРИК В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ ОКОЛО ДВУХ

Дипломная работа
на соискание ученой степени магистра наук

Черноголовка 2001

I. ВВЕДЕНИЕ

Недавно была предложена обобщенная эффективная теория для режима квантового эффекта Холла, описывающая взаимодействующий двумерный электронный газ при наличии беспорядка и сильного магнитного поля[1]. Эта теория включает следующие основные аспекты задачи: беспорядок, кулоновское взаимодействие, магнитное поле и топологическую природу инстантонного вакуума. Большинство результатов, имеющихся на данный момент, по режиму квантового эффекта Холла могут быть получены из обобщенной теории, рассмотрением пределов слабой и сильной связи. В частности, теория в режиме слабой связи воспроизводит метод композитных фермионов для полуцелого квантового эффекта Холла[2]. С другой стороны, теория в режиме сильной связи описывает последовательность Джейна для дробного квантования холловской проводимости[3] и дает нам микроскопическую теорию неупорядоченных киральных краевых состояний [4].

В начале 80-х, была разработана эффективная σ-модель, для задачи о неупорядоченном двумерном электронном газе с кулоновским взаимодействием[5]. Оказалось, что эта теория содержит важную симметрию ($\mathcal{F}$ - инвариантность) - инвариантность при пространственно независящих поворотах матричного поля Q, что позволило включить в нее $U(1)$ калибровочные поля и учесть наличие сильного магнитного поля [1].

В этой работе мы изложим результаты исследования перехода металл-диэлектрик в спин-поляризованном электронном газе с кулоновским взаимодействием в случайном потенциале. Исследование будет основано на изучении линейного отклика системы на внешний вектор-потенциал. Мы будем работать с эффективным действием, описывающем низкоэнергетические диффузионные моды, предполагая, что вклад в куперовский канал подавлен магнитным полем. Необходимо отметить, что это действие является топологически тривиальным сектором обобщенной эффективной теории для режима квантового эффекта Холла[1].

В работе вычислена двухпетлевая β - функция с помощью метода размерной регуляризации, доказана перенормируемость этой эффективной теории на двухпетлевом уровне (а значит, и обобщенной теории для режима квантового эффекта Холла), исследовано поведение системы в металлической фазе в окрестности перехода металл-диэлектрик в пространстве размерности $d = 2 + 2\epsilon$.

Изложение построено следующим образом: в Раз. *II* мы опишем эффективное действие, в Раз. *III* приведем выражение для проводимости через корреляторы полей Q, в Раз. *IV* представим результаты двухпетлевого вычисления проводимости, в Раз. *V* исследуем переход металл-диэлектрик в пространстве размерности $d = 2 + 2\epsilon$, найдем поправку к проводимости в пространстве $d = 2$ и обсудим применение наших результатов к режиму квантового эффекта Холла.

II. ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ

Рассмотрим систему двумерных электронов с кулоновским взаимодействием в случайном потенциале $V(\boldsymbol{r})$, который мы будем предполагать дельта-коррелированным

$$\langle V(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r}')\rangle = \frac{1}{2\pi\nu\tau}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{1}$$

где τ - время свободного пробега электронов, а ν - термодинамическая плотность состояний. Такой случайный потенциал соответствует наличию в системе примесей с короткодействующим потенциалом. Будем предполагать электроны спин-поляризованными, т.е. рассматривать унитарный ансамбль.

Нас интересует эффективная теория для низкоэнергетических диффузных возбуждений, которая описывает длинноволновое поведение системы двумерных взаимодействующих электронов в случайном потенциале. В настоящей работе мы будем игнорировать куперовский канал, считая его вклад, подавленным слабым магнитным полем

$$H > \frac{c}{De\tau}, \tag{2}$$

где D - коэффициент диффузии.

Мы стартуем со следующего эффективного действия, полученного в[1]

$$Z = \int DQ \exp S[Q, A] \tag{3}$$

$$S[Q, A] = S_\sigma[Q, A] + S_F[Q] + S_U[Q, A] \tag{4}$$

$$S_\sigma = -\frac{\sigma^0_{xx}}{8}\mathrm{Tr}[D_a, Q]^2 \tag{5}$$

$$S_F = \pi z_0 T \,(\, \sum_{\alpha n} \int_x \mathrm{tr} I^\alpha_n Q \mathrm{tr} I^\alpha_{-n} Q + 4\mathrm{Tr}\eta Q \,) \tag{6}$$

$$S_U \;=\; -\pi T \sum_{\alpha n} \int_{xx'} U(x,x')\mathrm{tr} I^\alpha_n Q(x) \mathrm{tr} I^\alpha_{-n} Q(x' \tag{7}$$

Различные символы в действии (3)-(7) имеют следующее значение: Q и I^α_n матрицы в пространстве реплик (верхние греческие индексы) размера $N_r \times N_r$ и в матцубаровском пространстве (нижние латинские индексы) размера $2N_{max} \times 2N_{max}$. Репличные индексы идут от 1 до N_r, тогда как частотные индексы от $-N_{max}$ до $N_{max} - 1$. Унитарная матрица Q содержит электроные степени свободы и имеет вид

$$Q = T^{-1}\Lambda T\,,\;\; T \in SU(2N) \tag{8}$$

где $N = N_r n_{max}$ с $n_{max} \ll N_{max}$ и Λ определяется как

$$\Lambda^{\mu\nu}_{ik} = \mathrm{sgn}\, i\, \delta^{\mu\nu}_{ik} \tag{9}$$

Отметим, что матрица Q удовлетворяет следующим условиям

$$\mathrm{tr} Q^2 = 1 \quad , \quad \mathrm{tr} Q = 0 \tag{10}$$

Матрица I^α_n живет в α-ом канале, в то время как, в матцубаровском пространстве это единичная матрица с диагональю, сдвинутой на n позиций:

$$(I^\alpha_n)^{\mu\nu}_{ik} = \delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\alpha}\delta_{i-k,n} \tag{11}$$

Символ D_a обозначает ковариантную производную

$$D_a = \partial_a - i\hat{A}_a\,,\;\; a = x, y \tag{12}$$

где "шляпка"над вектор-потенциалом A_a в (12) обозначает суммирование с матрицами I,

$$\hat{A}_a := \sum_{\beta n} (A_a)^\beta_n I^\beta_n \tag{13}$$

и $(A_a)^\beta_n$ является фурье-образом вектор-потенциала $A^\beta_a(\tau)$, определенного в мнимом времени. Матрица η определяется как

$$\eta^{\mu\nu}_{ik} = i\,\delta^{\mu\nu}_{ik} \tag{14}$$

Обозначение Tr используется для матричного следа tr, соединенного с пространственным интегрированием. Величина σ^0_{xx} - это безразмерная проводимость в приближении самосогласованного поля, и в случае слабого магнитного поля ($\omega_c\tau \ll 1$)[?] они имеют вид[6]

$$\sigma^0_{xx} = \frac{2\pi}{e^2}\frac{e^2\rho D}{1 + (\omega_c\tau)^2} \tag{15}$$

где $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ - циклотронная частота. T обозначает температуру, и $z_0 = \pi\nu/2 + z_0^{'}$ - это синглетная амплитуда взаимодействия, в которой первый член соотвествует статически экранированному кулоновскому взаимодействию, а в $z_0^{'}$ дают вклад неприводимые вершинные части[5].Ядро $U(x, x')$ в импульсном пространстве имеет вид

$$U(q) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\nu^{-1} + U_0(q)} \tag{16}$$

где $U_0(q) = 2\pi e^2/q$ - фурье-образ кулоновского взаимодействия.

Действие (3)-(7) с равными нулю внешними вектор-потенциалами ($A_a = 0$) имеет важную симметрию ($\mathcal{F}$-инвариантность) , именно, инвариантность при пространственно независящих поворотах матричного поля Q[1]

$$Q \to e^{i\hat{\chi}} Q e^{-i\hat{\chi}} \quad , \quad \chi = \chi(\tau) \tag{17}$$

Отметим, что т.к. мы не можем работать с бесконечными матрицами, то ниже всегда подразумевается, что все вычисления делаются с конечным N_{max} и только в конце вычислений берется предел $N_{max} \to \infty$.

III. ЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК

Рассмотрим действие (3)-(7) в пределе больших длин (малых импульсов). В этом случае удобно работать с более простой теорией, в которой ядро U заменено на δ- функцию в реальном пространстве

$$U(\boldsymbol{r}) = \alpha\delta(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

Действие тогда примет вид[9]

$$S[Q,A] = -\frac{\sigma_0}{8}\mathrm{Tr}[D_a,Q]^2 + \frac{\sigma_0 h_0^2}{4}\mathrm{Tr}\Lambda Q + \frac{\pi z_0}{\beta}\,(\,\sum_{\alpha n}\int\limits_x c_0 \mathrm{tr} I_n^\alpha Q \mathrm{tr} I_{-n}^\alpha Q + 4\mathrm{Tr}\eta Q\,) \tag{2}$$

где мы обозначили σ_{xx}^0 как σ_0 для краткости и ввели параметр $c_0 = 1-\alpha$ такой, что теория непрерывно переходит от кулоновского случая при $\alpha = 0$ (этот предел нас и будет интересовать) до случая свободных частиц при $\alpha = 1$. Также мы добавили $U(N)\times U(N)$ инвариантный регулятор пропорциональный h_0^2.

Мы хотим вычислить перенормированное значение проводимости $\sigma^{'}(n)$, как функцию от внешней частоты $\omega_n = 2\pi T n$. Однако вычисления гораздо легче проводить при нулевой внешней частоте $\omega_n = 0$, но при не нулевом h_0. Известно, что перенормировка регулятора h_0 определяется выражением[9]

$$\sigma_0 h_0^2 \langle Q\rangle = \sigma^{'}(h^{'})^2\Lambda \tag{3}$$

Т.к. ненулевое значение α в действии (2) нарушает $\mathcal{F}$-инвариантность теории, и величина $\langle Q\rangle$ не является $\mathcal{F}$-инвариантной, то $h^{'}$ будет содержать расходимости в пределе $\alpha\to 0$. Но физически правильной является зависимость $\sigma^{'}$ от $h^{'}$, в которой уже никаких расходимостей при $\alpha\to 0$ содержаться не будет. Таким образом, нашей целью будет вычислить зависимость $\sigma^{'}(h^{'})$ и затем из нее найти зависимость $\sigma^{'}(n)$.

Эффективное действие для внешнего вектор-потенциала определяется согласно

$$\exp S_{eff}[A] = \int DQ \exp S[Q,A] \tag{4}$$

квадратичная часть которого имеет вид

$$S_{eff}^{(2)}[A] = \int\limits_x \sum_{\alpha,n>0} \sigma^{'}(n) n (A_a(x))_n^\alpha (A_a(x))_{-n}^\alpha \tag{5}$$

Величина $\sigma^{'}(n)$ играет роль эффективной проводимости и может быть выражена через корреляторы полей Q

$$\sigma^{'}(n) = \langle O_1\rangle + \langle O_2\rangle \tag{6}$$

где среднее определено по отношению к действию (2) при нулевых внешних потенциалах ($A_a = 0$) и операторы определены как

$$O_1 = -\frac{\sigma_0}{4n}\mathrm{Tr}[I_n^\alpha, Q(x)][I_{-n}^\alpha, Q(x)] \tag{7}$$

$$O_2 = \frac{\sigma_0^2}{16nd}\mathrm{Tr}[I_n^\alpha, Q(x)]\nabla Q(x)\mathrm{Tr}[I_{-n}^\alpha, Q(x^{'})]\nabla Q(x^{'}) \tag{8}$$

Здесь мы держим репличный канал фиксированным[?] . На классическом уровне $Q=\Lambda$, соотношения (6)-(8) дают $\sigma^{'} = \sigma_0$ как это и должно быть.

IV. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ $d = 2+2\epsilon$

A. Формализм

Корреляторы матричных полей Q (6)-(8), определяющие проводимость, могут быть вычислены по теории возмущений. Для этого мы используем стандартную корневую параметризацию поля Q

$$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{1-qq^\dagger} & q^\dagger \\ q & -\sqrt{1-q^\dagger q}\end{pmatrix} \tag{1}$$

Тогда теория может быть представлена в виде бесконечного степенного ряда от независимых матричных полей $q^{\mu\nu}_{n_1 n_2}$ и $[q^\dagger]^{\mu\nu}_{n_4 n_3}$. Мы предполагаем, что матцубаровские частоты с нечетными нижними индексами $n_1, n_3, ...$ принимают только неотрицательные значения, а с четными нижними индексами $n_2, n_4, ...$ - только отрицательные. Функция Грина для матричных полей q и $q^\dagger$ может быть получена из анализа квадратичной части действия (2) и имеет вид[9,10]

$$\langle q^{\alpha\beta}_{n_1 n_2}(p)[q^\dagger]^{\gamma\delta}_{n_4 n_3}(-p)\rangle = \frac{4}{\sigma_0}\delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma}\delta_{n_{12},n_{34}} D_p(n_{12})\,(\,\delta_{n_1 n_3} + \delta^{\alpha\beta}\kappa^2 z_0 c_0 D^c_p(n_{12})\,) \tag{2}$$

где

$$[D_p(n_{12})]^{-1} = p^2 + h_0^2 + \kappa^2 z_0 n_{12} \ , \ \ [D^c_p(n_{12})]^{-1} = p^2 + h_0^2 + \alpha\kappa^2 z_0 n_{12} \tag{3}$$

$$\kappa^2 = \frac{8\pi T}{\sigma_0} \tag{4}$$

Здесь мы обозначили для краткости $n_{12} = n_1 - n_2$.

Ранее, статическая ($n = 0$) проводимость в пределе $\alpha \to 0$ была найдена только в однопетлевом приближении[9]

$$\sigma^{'} = \sigma_0 + \frac{4\Omega_d h_0^{2\epsilon}}{\epsilon} \ , \ \Omega_d = \frac{S_d}{2(2\pi)^d} \tag{5}$$

где $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ -это поверхность d-мерной сферы.

B. Двухпетлевое приближение

Рассматривая неквадратичную часть действия (2) как возмущение, мы получаем три различных члена, которые мы должны принять во внимание

$$S^{(3)}_{int} = -\frac{a\sigma_0}{8}\int\limits_x \sum_{\beta, m>0} \{\, \mathrm{tr} I^\beta_m q^\dagger \,\mathrm{tr} I^\beta_{-m}[q,q^\dagger] + \mathrm{tr} I^\beta_{-m} q \,\mathrm{tr} I^\beta_m [q,q^\dagger]\,\} \tag{6}$$

$$S^{(4)}_{int} = \frac{a\sigma_0}{16}\int\limits_x \{ \sum_{\beta, m>0} \mathrm{tr} I^\beta_{-m}[q,q^\dagger]\,\mathrm{tr} I^\beta_m[q,q^\dagger] + 2\sum_\beta (\mathrm{tr} I^\beta_0[q,q^\dagger])^2 \,\} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} S^{(4)}_0 \ &= \ \frac{\sigma_0}{32}\int\limits_p \delta(\sum_{i=1}^4 p_i) \sum^{\beta\gamma\delta\mu}_{n_1 n_2 n_3 n_4} q^{\beta\gamma}_{n_1 n_2}(p_1)(q^\dagger)^{\gamma\delta}_{n_2 n_3}(p_2) q^{\delta\mu}_{n_3 n_4}(p_3)(q^\dagger)^{\mu\beta}_{n_4 n_1}(p_1) \\ &\times \ \{\, (p_1+p_2)(p_3+p_4) + (p_2+p_3)(p_1+p_4) - \kappa^2 z_0(n_{12}+n_{34}) - 2h_0^2 \,\} \end{aligned} \tag{8}$$

где мы обозначили $a = \kappa^2 z_0 c_0$ и верхний индекс у S обозначает число полей q, которые содержатся в этой части действия.

Кроме этого, мы должны учесть следующие члены раложения по полям q корреляторов матричных полей Q в выражении для проводимости (6)

$$O^{(2)}_1 = -\frac{\sigma_0}{2}\mathrm{Tr}\,\{\, I^\alpha_n q^\dagger I^\alpha_{-n} q + I^\alpha_{-n} q^\dagger I^\alpha_n q - 2(I^\alpha_n \Lambda I^\alpha_{-n} + I^\alpha_{-n}\Lambda I^\alpha_n)[q,q^\dagger]\,\} \tag{9}$$

$$O^{(3)}_1 = \frac{\sigma_0}{4}\mathrm{Tr}\,\{\, I^\alpha_n (q+q^\dagger) I^\alpha_{-n} q q^\dagger - I^\alpha_{-n}(q+q^\dagger) I^\alpha_n q^\dagger q\,\} \tag{10}$$

$$O^{(4)}_1 = \frac{\sigma_0}{16}\mathrm{Tr}\,\{\, (I^\alpha_n \Lambda I^\alpha_{-n} + I^\alpha_{-n}\Lambda I^\alpha_n)[qq^\dagger q, q^\dagger] - 2I^\alpha_n[q,q^\dagger] I^\alpha_{-n}[q,q^\dagger]\,\} \tag{11}$$

$$O_2^{(4)} = \frac{\sigma_0^2}{4d}\mathrm{Tr}I_n^\alpha(q\nabla q^\dagger + q^\dagger\nabla q)\mathrm{Tr}I_{-n}^\alpha(q\nabla q^\dagger + q^\dagger\nabla q) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} O_2^{(5)} &= \frac{\sigma_0^2}{8d}\{\ \mathrm{Tr}I_n^\alpha(q\nabla q^\dagger + q^\dagger\nabla q)\mathrm{Tr}I_{-n}^\alpha q(\nabla q^\dagger)q \\ &+ \ \mathrm{Tr}I_{-n}^\alpha(q\nabla q^\dagger + q^\dagger\nabla q)\mathrm{Tr}I_n^\alpha q^\dagger(\nabla q)q^\dagger\ \} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} O_2^{(6)} &= \frac{\sigma_0^2}{16d}\{\ \mathrm{Tr}I_n^\alpha\Lambda q^\dagger(\nabla q)q^\dagger)\mathrm{Tr}I_{-n}^\alpha\Lambda q(\nabla q^\dagger)q) \\ &+ \ \mathrm{Tr}I_n^\alpha(q\nabla q^\dagger + q^\dagger\nabla q)\mathrm{Tr}I_{-n}^\alpha(qq^\dagger\nabla(qq^\dagger) + q^\dagger q\nabla(q^\dagger q)) \\ &+ \ \mathrm{Tr}I_{-n}^\alpha(q\nabla q^\dagger + q^\dagger\nabla q)\mathrm{Tr}I_n^\alpha(qq^\dagger\nabla(qq^\dagger) + q^\dagger q\nabla(q^\dagger q))\ \} \end{aligned} \tag{14}$$

Выражение для двухпетлевого вклада в проводимость может быть получено стандартным способом, разлагая функцию e^S в ряд и принимая во внимание диаграммы с двумя петлями (см. Таблицы). Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma'_{two}(n) &= \langle O_1^{(4)} + O_1^{(3)}S_{int}^{(3)} + O_1^{(2)}(S_{int}^{(4)} + S_0^{(4)} + \frac{1}{2}(S_{int}^{(3)})^2) \\ &+ \ O_2^{(6)} + O_2^{(5)}S_{int}^{(3)} + O_2^{(4)}(S_{int}^{(4)} + S_0^{(4)} + \frac{1}{2}(S_{int}^{(3)})^2)\rangle \end{aligned} \tag{15}$$

C. Вычисление средних

Вычисления в (15) прямые, но утомительные.Поэтому мы представим только окончательный результат для каждого члена в выражении (15) для случая статического предела $n = 0$

$$\langle O_1^{(4)}\rangle = \frac{2}{\sigma_0}(\int_p D_p(0))^2 + \frac{2a^2}{\sigma_0}(\sum_{m>0}\int_p DD_q^c(m))^2 = \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0\epsilon^2}(2 + 2\log^2\alpha) \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \langle O_1^{(3)}S_{int}^{(3)}\rangle &= -\frac{8a}{\sigma_0}\int_{pq}\{\ \sum_{k>0} D_{p+q}^c(0)D_q(k)D_p(k) \\ &+ \ a\sum_{k,m>0} D_p^c(m)DD_q^c(k)D_{p+q}(k+m)\ \} \\ &= \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0\epsilon}(\ 4S_0 + 4A_{00}^0\ ) \\ &= \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0\epsilon^2}[\ -4 - 4\log^2\alpha + \epsilon(8 + 4\zeta(3))\ ] \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \langle O_1^{(2)}(S_{int}^{(4)} \ &+ \ S_0^{(4)} + \frac{1}{2}(S_{int}^{(3)})^2)\rangle = \frac{4a}{\sigma_0}\int_{pq}\{\ D_{p+q}^c(0)\sum_{k>0} D_q(k)D_p(k) \\ &+ \ a\sum_{k,m>0} D_p^c(m)D_q^c(k)D_{p+q}^2(k+m) \\ &+ \ a\sum_{k,m>0}(1 + amD_p^c(m))DD_q^c(k)D_{p+q}^2(k+m)\ \} \\ &= \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0\epsilon}(\ -2S_0 - 2D_1 - 2T_{01} - 2A_{1,0}^0\ ) \\ &= \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0\epsilon^2}[\ 2 + 2\log^2\alpha - \epsilon(4 + 2\zeta(3) + 2\pi^2/3)\ ] \end{aligned} \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
\langle O_2^{(6)} \rangle \; &= \; -\frac{4}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq} p^2 \, \{ \; D_p(0) D_q(0) D_{p+q}(0) \\
&- \; 4a^2 \sum_{k,m>0} D^2 D_p^c(m) \hat{S}_m D D_q^c(k) \\
&- \; a^2 \sum_{k,m>0} [\; D_p(k+m) D D_q^c(m) D D_{p+q}^c(k) \\
&+ \; 2 D D_p^c(k+m) D D_q^c(m) D_{p+q}(k) \;] \; \} \\
&= \; \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0 \epsilon} \, (\; S_1 + 4(\frac{2\log\alpha}{\epsilon} + B_1) + C_{01} + 2C_{00} \;) \\
&= \; \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0 \epsilon^2} \, [\; 16\log\alpha - 2 + \epsilon(-4\log\alpha - \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{2}\log 2 + \frac{\pi^4}{12} \\
&+ \; \frac{11\zeta(3)}{2} + \frac{\pi^2}{3}\log^2 2 - \frac{1}{3}\log^4 2 - 7\zeta(3)\log 2 - 8Li_4(\frac{1}{2})) \;]
\end{aligned} \tag{19}
$$

где оператор $\hat{S}_m$ действует только на частоту k, согласно правилу $\hat{S}_m f(k) = f(k) + f(k+m)$. Затем,

$$
\begin{aligned}
\langle O_2^{(5)} S_{int}^{(3)} \rangle \; &= \; \frac{16a}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq} p(p-q) \sum_{k>0} D_{p+q}^c(0) D_p^2(k) D_q(k) \\
&+ \; \frac{16a^2}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq} p^2 \sum_{k,m>0} D_{p+q}^c(m) \, [\; D_p^2(k+m) D D_q^c(k) \\
&+ \; D^2 D_p^c(k+m) D_q(k) \;] \\
&- \; \frac{16a^2}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq} (pq) \sum_{k,m>0} \{\; D D_p^c(m) \hat{T}_m D D_{p+q}^c(k) D_q(k+m) \\
&+ \; D_{p+q}^c(m) D^2 D_p^c(k+m) D_q(k+2m) \; \} \\
&= \; \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0 \epsilon} \, (\; -4S_{00} - 4A_{01}^1 - 4H_0 - 4C_0 - 4A_0 \;) \\
&= \; \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0 \epsilon^2} \, [\; -8\log\alpha + 4 + \epsilon(4\log^2\alpha + 20\log\alpha \\
&- \; 12 + 4\zeta(3) + 4\pi^2/3 - 4A_0 + 4C_0^{'}) \;]
\end{aligned} \tag{20}
$$

где оператор $\hat{T}_m$ действует только на частоту k согласно следующему правилу $\hat{T}_m f(k) = f(k) - f(k+m)$. И наконец,

$$
\begin{aligned}
\langle O_2^{(4)} S_0^{(4)} \rangle \; &= \; \frac{8a^2}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq} p^2 \sum_{k,m>0} \{\; 3D^3 D_p^c(m) \hat{S}_m D_q^c(k) + 3D^2 D_p^c(m) \hat{S}_m D D_q^c(k) \\
&+ \; 2akD^2 [D_p^c]^2(m) \hat{T}_m [D_p(m) D_q^c(k) + D D_q^c(k)] \; \} \\
&= \; \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0 \epsilon} \, (\; -3T_{10}^0 - 3T_{11}^0 - \frac{12\log\alpha}{\epsilon} - 6B_1 - 2T_{20}^0 \\
&+ \; 2T_{21}^0 - 4T_{10}^1 + 4B_2 \;) = \frac{\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0 \epsilon^2} \, [\; 4(\log\alpha - 1)^2 - 2 \\
&+ \; \epsilon(\frac{2}{\alpha} - 2\log^2\alpha + \log\alpha + 44/3) \;]
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle O_2^{(4)}(S_{int}^{(4)} &+ \frac{1}{2}(S_{int}^{(3)})^2)\rangle = \frac{16a^2}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq}(pq)\sum_{k>0}kD_{p+q}(0)D_p^2(k)D_q^2(k) \\
&- \frac{16a}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq}p^2\sum_{k>0}[\ 2akD_{p+q}^c(0)D_p^3(k)D_q(k)-D_p^3(k)D_q(k)\ ] \\
&+ \frac{16a}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq}(pq)\sum_{k,m>0}\{\ 2(1+amD_q(k)) \\
&\times\ D_{p+q}^c(m)D_p^2(k+m)DD_q^c(k) \\
&-\ DD_q^c(k)DD_p^c(m)D_{p+q}(k+m)\ \} \\
&- \frac{16a^2}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq}p^2\sum_{k,m>0}\{\ (1+amD_{p+q}^c(m)) \\
&\times\ [\ (2+\hat{T}_m+ak\hat{T}_mD_p^c(k))D^3D_p^c(k)D_q(k+m) \\
&+\ \frac{1}{2}D_q(k)D_p^3(k+m)(3D_q^c(k)+D_p^c(k+m))\ ] \\
&+\ \frac{3}{2}D_q^c(m)D_{p+q}^c(k)D_p^3(k+m) \\
&+\ (1+\hat{T}_m+2ak\hat{T}_mD_p^c(k))D_{p+q}^c(m)D^2D_p^c(k)D_q(k+m) \\
&+\ ak\hat{T}_mD[D_p^c(m)]^2DD_q^c(k)D_{p+q}(k+m)\ \} \\
&=\ \frac{\Omega_d^2h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0\epsilon}(\ 4S_{11}+4S_{01}+\frac{2}{\epsilon}+8A_{01}+8A_{11}-4C_{11} \\
&+\ 4T_{02}+4A_{10}+2T_{12}+2A_1+3T_{01}+3A_{11}^1+\alpha T_{10}^0 \\
&-\ T_{02}+H_1+3D_2+4C_1+8A_2+8A_{00}-4A_3\ ) \\
&=\ \frac{\Omega_d^2h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0\epsilon^2}[\ -4\log^2\alpha-4+\epsilon(-\frac{2}{\alpha}-2\log^2\alpha \\
&-\ 25\log\alpha+55/2-2\zeta(3)-\frac{8}{3}\pi^2+12\log^2 2 \\
&-\ 44\log 2-4C_0^{'}+4A_0+16G-8Li_2(\frac{1}{2})\ ]
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Определения и значения всех интегралов представленны в приложении.

D. Результаты вычисления

Окончательный результат для полюсных членов в ϵ-разложении двухпетлевого вклада в статическую проводимость имеет вид

$$
\sigma_{two}^{'}(0) = \frac{16\Omega_d^2h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0\epsilon}(\ A-\frac{2+\log\alpha}{2}\ ) \tag{23}
$$

где константа A имеет вид

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{16}[\ 50+\frac{1}{6}-3\pi^2+\frac{19}{2}\zeta(3)+16\log^2 2 \\
&-\ 44\log 2+\frac{\pi^2}{2}\log 2+16G+\frac{\pi^4}{12}+\frac{\pi^2}{3}\log^2 2 \\
&-\ \frac{1}{3}\log^4 2-7\zeta(3)\log 2-8Li_4(\frac{1}{2})\ ]\approx 1.64
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Здесь $G = 0.915...$ обозначает постоянную Каталана, $\zeta(x)$ обозначает дзета-функцию Римана, и $Li_4(1/2) = 0.517...$ связан с полилогарифмическими функциями

$$
Li_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^n} \tag{25}
$$

Мы положили $\alpha = 0$ везде, где это возможно. Необходимо подчеркнуть, что значительные сокращения членов, имеющих расходимости при $\alpha \to 0$, имели место при получении выражения (23), см. Таблицы. Отметим, что α-зависимость двухпетлевого вклада в проводимость такая же как и для двухпетлевого вклада в "свободную энергию"[?] и согласуется с однопетлевой перенормировкой h_0^2, которая может быть получена стандартным образом[9]. Объединяя (5) и (23), получаем

$$\sigma^{'} = \sigma_0 \left(1 + \frac{h^{'2\epsilon} t_0}{\epsilon} + A \frac{h^{'4\epsilon} t_0^2}{\epsilon} \right) \tag{26}$$

где $t_0 = 4\Omega_d/\sigma_0$. При получении этого выражения мы воспользовались однопетлевой перенормировкой h_0^2

$$h_0^2 \to h^{'2} = h_0^2 \left(1 - \frac{2 + \log\alpha}{2} \frac{h_0^{2\epsilon} t_0}{\epsilon} \right) \tag{27}$$

E. β- и γ- функции

Определим параметры ренормированной теории t и z, согласно соотношениям

$$t_0 = L^{2\epsilon} t Z_1(t)\ ,\ z_0 = L^{-2\epsilon} z Z_2(t) \tag{28}$$

где Z_1 и Z_2 - это ренормализационные константы[?] . Тогда получаем

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \frac{t}{\epsilon} + \frac{t^2}{\epsilon^2}(1 + \epsilon A) \\ Z_2 &= 1 - \frac{t}{2\epsilon} - \frac{t^2}{4\epsilon^2} \left(\frac{1}{2} + \epsilon (\frac{\pi^2}{6} + 2) \right) \end{aligned} \tag{29}$$

где мы воспользовались полученным ранее в работе[9] выражением для константы Z_2. Ренормализационные β- и γ-функции находятся стандартным образом

$$\beta = \frac{dt}{d\log L} = -\frac{2\epsilon t}{1 + t\frac{d\log Z_1}{dt}} \tag{30}$$

$$\gamma = \frac{d\log z}{d\log L} = -\beta \frac{d\log Z_2}{dt} \tag{31}$$

откуда для них получаются выражения

$$\beta = -2\epsilon t + 2t^2 + 4At^3\ ,\ \gamma = -t - (\frac{\pi^2}{6} + 3)t^2 \tag{32}$$

Нужно подчеркнуть существенное различие между β- и γ- функциями для задачи с кулоновским взаимодействием и для задачи о свободных электронах[11]. В то время как, в задаче о свободных электронах β-функция начинается только с члена t^3, а γ- функция вообще тождественно равна нулю, в случае кулоновского взаимодействия в β- функция появляется член t^2, а γ- функция приобретает зависимость от t.

V. ДИНАМИЧЕСКИЙ СКЕЙЛИНГ

A. Соотношение между $h^{'}$ и ω_s

Перенормировка величины z_0 получается из вычисления производной "свободной энергии"F по логарифму температуры T. Результат двухпетлевых вычислений имеет вид

$$\frac{dF}{d\log T} = 2\sum_{s>0} \omega_s z_0 M_b(t_0, h_s^2) \tag{1}$$

где

$$M_b(t_0,h_s^2)=1+\frac{h_s^{2\epsilon}t_0}{2\epsilon}+\frac{h_s^{4\epsilon}t_0^2}{\epsilon^2}\left(-\frac{1}{8}+\epsilon(\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{24})\right) \tag{2}$$

и частота $\omega_s=2\pi Ts$ входит через величину $h_s^2=\kappa^2 z_0 s$. Зависимость перенормированной проводимости от частоты можно представить в виде

$$\sigma^{'}(s)=\frac{4\Omega_d}{t_0}R_b(t_0,h_s^2) \tag{3}$$

$$R_b(t_0,h_s^2)=1+\frac{h_s^{2\epsilon}t_0}{\epsilon}+(A-1/2)\frac{h_s^{4\epsilon}t_0^2}{\epsilon} \tag{4}$$

Можно проверить, что выражения (1)-(4) приводят к тем же самым выражениям (29) для констант Z_1 и Z_2, а значит и к таким же β- и γ- функциям. Таким образом, выражения (3) - (4) определяют искомую зависимость полюсных членов перенормированной проводимости $\sigma^{'}$ от частоты ω_s. Необходимо отметить, что конечные при $\epsilon\to 0$ члены в зависимостях $\sigma^{'}(\omega_s)$ и $\sigma^{'}(h^{'})$ безусловно разные, но они не представляют интереса.

Используя выражения (1) - (4), мы можем получить соотношение между $h^{'}$ и ω_s

$$h^{'2}=h_s^2\frac{M_b(t_0,h_s^2)}{R_b(t_0,h_s^2)} \tag{5}$$

B. Металлическая фаза

1. *Проводимость на переменном токе и теплоемкость*

Мы можем видеть из (32), что для системы неупорядоченных взаимодействующих электронов существует переход металл-диэлектрик в размерности $d=2+2\epsilon$. Существует критическая точка $t_c=O(\epsilon)$, которая отделяет металлическую фазу ($t<t_c$) от диэлектрической фазы ($t>t_c$). До второго порядка по ϵ мы имеем

$$t_c=\epsilon-2A\epsilon^2\approx\epsilon-3.28\epsilon^2 \tag{6}$$

Выразим теперь соотношения (1) - (4) через ренормированные величины t и z. Тогда мы можем представить результат в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\log T} &= 2\sum_{s>0}L^{-2\epsilon}\omega_s zM(t,\omega_s z)\\ \sigma^{'}(s) &= L^{-2\epsilon}\frac{4\Omega_d}{t}R(t,\omega_s z)\end{aligned} \tag{7}$$

где выражения теперь конечны при $\epsilon\to 0$. Проводимость на переменном токе получается из $\sigma^{'}(s)$ заменой мнимых частот $i\omega_s$ на действительную частоту ω. С другой стороны, теплоемкость электронного газа может быть представлена в виде[9]

$$c_v=\int_0^\infty d\omega\frac{\partial f}{\partial T}\omega\rho_{qp}(\omega) \tag{8}$$

где

$$f=\frac{1}{e^{\omega/T}-1} \tag{9}$$

и плотность состояний бозонных квазичастиц равна

$$\rho_{qp}(\omega)=\frac{z}{\pi}\left(M(t,i\omega z)+M(t,-i\omega z)\right) \tag{10}$$

2. Скейлинговое поведение

Функции M и R могут быть записаны в скейлинговом виде с помощью метода характеристик

$$\begin{aligned} M(t,\omega_s z) &= M_0(t) g(\omega_s z \xi^d M_0(t)) \\ R(t,\omega_s z) &= R_0(t) h(\omega_s z \xi^d R_0(t)) \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $g(x)$ и $h(x)$ произвольные функции. Функции $M_0(t) = M(t,0)$ и $R_0(t) = R(t,0)$ имеют смысл $\rho_{qp}(0)$ и проводимости на постоянном токе и удовлетворяют следующим уравнениям

$$(\beta\partial_t + \gamma)M_0(t) = 0\ ,\ \ M_0(0) = 1 \tag{12}$$

$$(\beta\partial_t - 2\epsilon - \beta/t)R_0(t) = 0\ ,\ \ R_0(0) = 1 \tag{13}$$

а ξ является корреляционной длиной и определяется из уравнения

$$(L\partial_L + \beta\partial_t)\xi = 0 \tag{14}$$

Мы можем проинтегрировать уравнения (12)-(14) около перехода металл-диэлектрик в металлической фазе $(t < t_c)$

$$R_0(t) = (1 - t/t_c)^{2\epsilon\nu}\ ,\ \ M_0(t) = (1 - t/t_c)^{\beta_0} \tag{15}$$

$$\xi = L t^{1/2\epsilon}(1 - t/t_c)^{-\nu} \tag{16}$$

где критические индексы определены как

$$\nu^{-1} = \beta^{'}(t_c)\ ,\ \ \beta_0 = -\nu\gamma(t_c) \tag{17}$$

Вычисления до второго порядка по ϵ дают следующие выражения для критических индексов

$$\nu^{-1} = 2\epsilon(1 + 2A\epsilon) \approx 2\epsilon(1 + 3.28\epsilon) \tag{18}$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2}\left(1 + (\pi^2/6 + 3 - 4A)\epsilon\right) \approx 0.50 - 0.96\epsilon \tag{19}$$

Стоит отметить, что неупорядоченный электронный газ с кулоновским взаимодействием имеет аналогию с физикой Гейзенберговского ферромагнетика. Переход металл-диэлектрик для взаимодействующих электронов характеризуется настоящим параметром порядка, роль которого играет M_0. Тот факт, что $\beta_0 \neq 0$ приводит к сингулярному поведению теплоемкости [9].

3. Уравнения состояния

Наконец, мы можем определить поведение величин M и R во всей металлической фазе. До второго порядка по ϵ они подчиняются следующим "уравнениям состояния"[12]

$$\frac{\omega_s z t}{M^\delta} = \left(\frac{t_c}{t}\right)^{1/\epsilon}\left(1 + (2\epsilon\nu - 1)(1 - \frac{t}{t_c}) - 2\epsilon\nu\frac{1 - t/t_c}{M^{1/\beta_0}}\right)^{1/\epsilon}$$

$$\frac{\omega_s z t}{R^\kappa} = \left(\frac{t_c}{t}\right)^{1/\epsilon}\left(1 - \frac{1 - t/t_c}{R^{1/2\epsilon\nu}}\right)^{1/\epsilon} \tag{20}$$

Для критических индексов δ и κ, определяющих поведение в критической точке, мы получаем

$$\delta^{-1} = \frac{\epsilon}{2}\left(1 - (2A - \pi^2/6 - 5/2)\epsilon\right) \approx \frac{\epsilon}{2}(1 + 0.86\epsilon) \tag{21}$$

$$\kappa^{-1} = \epsilon(1 - \epsilon/2) \tag{22}$$

Нужно указать, что критические индексы удовлетворяют соотношениям

$$d\nu = \beta_0(\delta + 1)\ ,\ 2\epsilon\nu\kappa = \beta_0\delta \tag{23}$$

Из "уравнений состояния"(20) мы можем найти поведение в точке перехода металл-диэлектрик

$$M(t_c, \omega_s z) = (\omega_s z t_c)^{1/\delta}\ ,\ R(t_c, \omega_s z) = (\omega_s z t_c)^{1/\kappa} \tag{24}$$

Из анализа размерностей и скейлинговых соотношений, можно получить зависимость проводимости в металлической фазе от частоты ω и температуры T в критической области

$$\sigma \sim [max(\omega, T)]^{1/\kappa} \tag{25}$$

а также зависимость теплоемкости в металлической фазе от температуры в критической области[9]

$$c_v \sim T^{1+1/\delta} \tag{26}$$

Отметим, что "уравнения состояния"(20)-(20) не могут быть аналитически продолжены в область $t > t_c$ и использованны для получения информации о диэлектрической фазе. Она определяется другими операторами в теории и имеет другие температурную и частотную зависимости величин.

Подчеркнем, что наши результаты для перехода металл-диэлектрик справедливы только в размерности $2+2\epsilon$. Однако, существует большое желание положить $2\epsilon = 1$, как это обычно делается, чтобы оказаться в физически интересной размерности $d = 3$. В теории, которая учитывает кулоновское взаимодействие, мы имеем обычное Вигнеровское скейлинговое поведение[13] для проводимости с индексом $s = 2\epsilon\nu$ и равным $s = 1$ в $d = 2$. Однако, про размерность $d = 3$ сказать ничего нельзя, т.к. численные коэффициенты в ϵ разложении для индекса проводимости не являются численно малыми как это иногда случается. Если вычислить индекс проводимости из выражения (19) для размерности $d = 3$, получится значение $s \approx 0.38$, которое нарушает ограничение[14] $s \geq 2(d-2)/d$, подразумевающее, что $s \geq 2/3$ в размерности $d = 3$.

4. *Уравнения ренорм-группы в* $d = 2$

Теперь мы рассмотрим случай физически интересной размерности $d = 2^?$. Уравнения ренорм-группы имеют вид

$$\frac{dt}{d\log L} = 2t^2 + 4At^3\ ,\ \frac{d\log z}{d\log L} = -t - (\frac{\pi^2}{6} + 3)t^2 \tag{27}$$

и описывают систему полностью спин-поляризованных неупорядоченных электронов с кулоновским взаимодействием. Как и должно быть в размерности $d = 2$ переход металл-диэлектрик отсутствует. Уравнения (27) могут быть решены и результат имеет вид

$$\log\frac{L}{L_0} = \frac{\pi}{2}\ (\ \sigma_0 - \sigma + g\log\frac{\sigma_0 + g}{\sigma + g}\ ) \tag{28}$$

$$\frac{z}{z_0} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{(1+2a)/2}\left(\frac{\sigma + g}{\sigma_0 + g}\right)^{-a} \tag{29}$$

где константы $g = 2A/\pi \approx 1.04$, $a = \frac{\pi^2/6+3-2A}{4A} \approx 0.21$ и $L(\sigma_0) = L_0$, $z(\sigma_0) = z_0$ начальные условия.

Заметим, что зависимость в выражении (28) в случае $g = 0$, т.е., однопетлевого результата, совпадает с хорошо известным результатом Аронова-Альтшулера[15]. Можно получить следующую зависимость поправки к проводимости около начальной точки σ_0 из выражения (28)

$$\delta\sigma = \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{g}{\sigma_0}\right)\log T\tau \tag{30}$$

где мы воспользовались тем, что $[T] = L^{-2}$. Двухпетлевая поправка мала для больших $\sigma_0 \gg g$. Однако, для малых $\sigma_0 \sim g$, двухпетлевая поправка существенна.

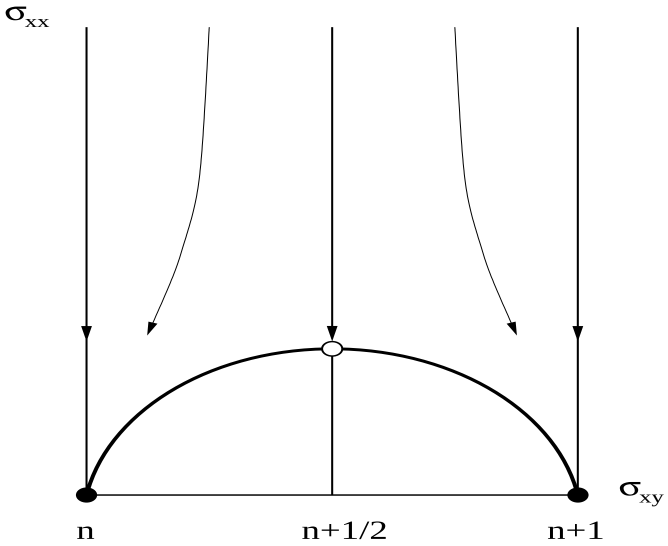

Рис. 1: Диаграмма ренормализационной группы для проводимости. Стрелочки указывают движение в сторону больших длин.

C. Переходы между плато в режиме квантового эффекта Холла

В этом разделе мы кратко коснемся вопроса о том, как результаты этой работы могут быть применены для описания переходов между плато в режиме квантового эффекта Холла. Для электронов, находящихся в сильном магнитном поле, эффективное действие будет иметь вид

$$S[Q,A] \to S[Q,A] + \frac{\sigma^0_{xy}}{8}\varepsilon_{ab}\mathrm{Tr}Q[D_a,Q][D_b,Q] \tag{31}$$

где σ^0_{xy} - это безразмерная холловская проводимость в приближении самосогласованного поля.

В дополнение к пертурбативному вкладу от топологически тривиального сектора теории, который мы обсуждали выше, существуют непертурбативные поправки от топологически нетривиальных секторов теории (инстантоны), которые ответственны за квантовый эффект Холла[16]. Результаты для случая кулоновского взаимодействия[8] имеют туже структуру, что и для теории свободных электронов[16]. Уравнения ренорм-группы в случае квантового эффекта Холла могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{xx}}{d\log L} &= \beta_{xx}(\sigma_{xx},\sigma_{xy})\\ \frac{d\sigma_{xy}}{d\log L} &= \beta_{xy}(\sigma_{xx},\sigma_{xy})\\ \frac{d\log z}{d\log L} &= \gamma(\sigma_{xx},\sigma_{xy})\end{aligned} \tag{32}$$

Наиболее физически интересена область $\sigma_{xx}\sim 1$, где происходит переход от режима слбой локализации к режиму квантового эффекта Холла (рис. 1).

Уравнения ренорм-группы указывают (рис. 1), что холловская проводимость не перенормируется на линиях $\sigma_{xy}=\{n,\ n+1/2\}$, где n целое. Фиксированные точки $(\sigma_{xx},\sigma_{xy})=(0,n)$ соответствуют режиму сильной связи и не будут здесь обсуждаться[4]. Фиксированные точки $(\sigma_{xx},\sigma_{xy})=(\sigma^*_{xx},n+1/2)$ могут быть описаны в приближении слабой связи. В работе[8] были вычислены вклады в β- и γ- функции: пертурбативный на уровне одной петли, и непертурбативный от инстантонных конфигураций с топологическим зарядом $|q|=1$ и гауссовых флуктуаций на их фоне (это соответствует приближению разряженного инстантонного газа). Если проанализировать уравнения ренорм-группы в этом приближении, то можно найти нуль β_{xx}- функции[8] равный $\sigma^*_{xx}\sim 1$, отвечающий переходу между холловскими плато. Учет двухпетлевого вклада в пертурбативную часть приводит к исчезновению нуля β_{xx}- функции и возникает необходимость вычисления инстантонных поправок в следующих порядках. Вычисление следующих инстантонных поправок и следующих членов петлевого разложения в топологически тривиальном секторе теории для β- и γ- функций остается задачей на будущее, решение которой по-видимому не возможно аналитически, но вероятно может быть осуществленно численными методами и может быть позволит получить более хорошее согласие между теорией и экспериментом в значениях для критических индексов для перехода между холловскими плато.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы представили результаты анализа линейного отклика на основе метода ренорм-группы в рамках двухпетлевого приближения в режиме слабой связи ($\sigma_{xx}^{-1} \ll 1$). Мы аналитически вычислили двухпетлевой вклад в проводимость σ_{xx} и окончательно установили перенормируемость эффективной теории, описывающей двумерный спин-поляризованный электронный газ с кулоновским взаимодействием, находящийся в случайном потенциале и слабом магнитном поле.

Мы получили выражение для двухпетлевой β- функции и исследовали скейлинговое поведение системы в окрестности перехода металл-диэлектрик со стороны металлической фазы для пространства размерности $d = 2+2\epsilon$. Благодаря наличию кулоновского взаимодействия, поведение системы в критической области оказывается иным, чем для ситемы электронов без взаимодействия или с короткодействующим взаимодействием. В работе были вычислены во втором порядке по ϵ критические индексы, описывающие переход металл-диэлектрик.

Двухпетлевые выражения для β- и γ- функций, вычисленные в этой работе, оказываются частью β- и γ-функций для режима квантового эффекта Холла, соответствующей вкладу от топологически тривиального сектора теории. По-видимому, дальнейшие вычисления как следующих членов петлевого разложения, так и следующих инстантонных вкладов, в ренорм-групповые функции могут быть произведены только с помощью численных методов.

VII. ПРИЛОЖЕНИЕ А

В этом приложении мы представим окончательное выражение для интегралов в (16)-(22). Пример типичного вычисления будет дан в следующем приложении. Результаты приведены только для членов ϵ^{-1} и ϵ^0, и мы берем предел $\alpha \to 0$ везде, где это возможно.

A. A - интегралы

Ниже мы определим интегралы, которые содержат одно дополнительное интегрирование по фейманновским переменным. Все из них получаются из выражений, содержащих функции Грина с суммированием по импульсам и частотам.

Во-первых, определим интегралы, зависящие от трех индексов,

$$A^{\nu}_{\mu\eta} = \int_{\alpha}^{1} dz \int [] \frac{x_2 x_3^{1+\mu}(x_1+x_2)^{\nu}(x_i x_j)^{-1-\nu-\epsilon}}{(zx_2+x_3)(\alpha x_1+x_3)^{1+\mu}} \tag{1}$$

затем интегралы, зависящие от двух индексов,

$$A_{\nu\mu} = \int_{\alpha}^{1} dz (z-\alpha)^{1+\nu-\mu} \int [] \frac{x_1^{\mu} x_2^{2+\nu-\mu} x_3^{\mu}(x_1+x_3)^{1-\mu}(x_i x_j)^{-2-\epsilon}}{(\alpha x_1+x_3)^{1+\nu}(zx_2+x_3)} \tag{2}$$

и, наконец, четыре интеграла, зависящие от одного индекса,

$$A_0 = \int_{\alpha}^{1} dz (z-\alpha) \int [] \frac{x_2^2 x_1 (x_i x_j)^{-2-\epsilon}}{(x_3+zx_2)(zx_2+\alpha x_1+2x_3)} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} A_1 \; &= \int_{\alpha}^{1} dz (z-\alpha)^2 \int [] \frac{x_2^3(x_1+x_3)(x_2+x_3)}{(zx_2+x_3)^2} \\ &\times \; (x_i x_j)^{-2-\epsilon} \Big(\frac{1}{(\alpha x_1+x_3)^2} - \frac{1}{(zx_2+\alpha x_1+2x_3)^2} \Big) \end{aligned} \tag{4}$$

$$A_2 = \int\limits_{\alpha}^{1} dz(z-\alpha)(1-z)\int[]\frac{x_2^3(x_1+x_3)(x_ix_j)^{-2-\epsilon}}{(zx_2+x_3)(\alpha x_1+x_3)(zx_2+\alpha x_1+2x_3)} \qquad (5)$$

$$A_3 = \int\limits_{\alpha}^{1} dz(z-\alpha)\int[]\frac{x_2^2(x_1+x_3)(x_ix_j)^{-2-\epsilon}}{(\alpha x_1+zx_2+2x_3)(zx_2+x_3)} \qquad (6)$$

Здесь и ниже мы будем использовать следующие обозначения

$$\begin{aligned}\int[] &:= \int\limits_0^1 dx_1\int\limits_0^1 dx_2\int\limits_0^1 dx_3\delta(x_1+x_2+x_3-1)\\ x_ix_j &:= x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\end{aligned} \qquad (7)$$

Вычисление интегралов прямое, но утомительное. Поэтому мы представим только окончательные результаты вычислений

$$\begin{aligned}
A^0_{00} &= -\frac{\log^2\alpha}{\epsilon}+\zeta(3)\\
A^0_{10} &= -\frac{\log^2\alpha+\log\alpha}{\epsilon}-\frac{\log^2\alpha}{2}+\frac{\pi^2}{6}+\zeta(3)\\
A^1_{01} &= \frac{\log\alpha}{\epsilon}-\frac{\log^2\alpha}{2}-2\log\alpha-\frac{\pi^2}{3}+1\\
A^1_{11} &= \frac{\log\alpha}{\epsilon}-\frac{\log^2\alpha}{2}-2\log\alpha-\frac{\pi^2}{3}\\
A_{00} &= \frac{\log\alpha}{\epsilon}+\frac{\log^2\alpha}{2}+2\log\alpha+\frac{\pi^2}{3}-1\\
A_{10} &= -\frac{1}{\alpha}-\frac{2\log\alpha+3}{\epsilon}-\log^2\alpha-5\log\alpha-\frac{2\pi^2}{3}+3\\
A_{01} &= -\log\alpha-\frac{\pi^2}{6}+1\\
A_{11} &= \frac{\log\alpha+2}{\epsilon}+\frac{\log^2\alpha}{2}+3\log\alpha+\frac{\pi^2}{2}
\end{aligned} \qquad (8)$$

Интеграл A_0 можно не вычислять, т.к. он полностью сокращается в окончательном результате. Затем,

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{2}{\alpha}+\frac{2\log^2\alpha+4\log\alpha}{\epsilon}-3\log^2\alpha\\
&+ 8\log 2\log\alpha-\frac{17}{2}\log\alpha+4K_1(\alpha)+8J_3^{'}(\alpha)\\
&- \pi^2-2\zeta(3)-6\log^2 2+10\log 2-\frac{1}{2}
\end{aligned} \qquad (9)$$

где мы использовали следующие обозначения для интегралов

$$\begin{aligned}
K_1(\alpha) &= \int\limits_{\alpha}^{1} dz\int[]\frac{x_2(x_1(x_2+x_3)+x_3^2)(x_ix_j)^{-2-\epsilon}}{(zx_2+x_3)(\alpha x_1+zx_2+2x_3)}\\
J_3^{'}(\alpha) &= \alpha\int\limits_{\alpha}^{1}\frac{dz}{z}\int[]\frac{x_2(x_1(x_2+x_3)+x_3^2)(x_ix_j)^{-2-\epsilon}}{(\alpha x_1+zx_2+2x_3)^2}
\end{aligned} \qquad (10)$$

Отметим, что нам не нужно вычислять интегралы $K_1(\alpha)$ и $J_3^{'}(\alpha)$, т.к. они полностью сокращаются в окончательном ответе.

$$
\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{\log^2\alpha + 2\log\alpha}{\epsilon} - 2\log\alpha - 3\log 2\log\alpha \\
&- J_1(\alpha) - K_1(\alpha) - 2J_3^{'}(\alpha) + A_0 - \frac{\pi^2}{6} \\
&+ 1 + \zeta(3) + 3\log^2 2 - 3\log 2 - 3Li_2(1/2)
\end{aligned} \tag{11}
$$

где

$$
J_1(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{1} dz \int [] \frac{x_1(x_1+x_3)(x_2+x_3)(x_i x_j)^{-2-\epsilon}}{(zx_1+x_3)(zx_1+\alpha x_2+2x_3)} \tag{12}
$$

и наконец

$$
A_3 = A_0 - 2Li_2(\frac{1}{2}) + \frac{\pi^2}{6} \tag{13}
$$

B. B - интегралы

Ниже мы определим интегралы, которые не содержат дополнительных интегрирований по фейманновским переменным. Все из них получаются из выражений, содержащих функции Грина с суммированием только по частотам.

Мы определим интегралы, зависящий от одного индекса,

$$
B_\mu = \int\limits_{\alpha}^{1} \frac{dz}{z^\mu} \int [] \frac{x_1^{\mu-1} x_2 x_3^{-\mu-\epsilon}(x_1+x_2)^{-\mu-\epsilon}}{(\alpha x_2 + z x_3 + x_1)} \tag{14}
$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\log\alpha}{\epsilon} + \frac{\log^2\alpha}{2} + \log\alpha \\
B_2 &= -\frac{1}{\alpha} + \frac{\log^2\alpha}{\epsilon} + \frac{2\log\alpha}{\epsilon} - 2\log\alpha - 2
\end{aligned} \tag{15}
$$

C. C - интегралы

Ниже мы определим интегралы, которые содержат два дополнительных интегрирования по фейманновским переменным. Все из них получаются из выражений, содержащих функции Грина с суммированием по импульсам и частотам.

Мы определим интегралы, зависящие от двух индексов,

$$
C_{\mu\nu} = \int\limits_{\alpha}^{1} dz \int\limits_{\alpha}^{1} dy \int [] \frac{x_1^{\mu} x_2 x_3 (x_2+x_3)^{1-\mu}(x_i x_j)^{-2-\epsilon}}{(zx_3+x_1)(yx_2+x_1)^{\nu}(zx_3+yx_2)^{1-\nu}} \tag{16}
$$

и интегралы, зависящие от одного индекса,

$$
C_\nu = \int\limits_{\alpha}^{1} dz(1-z)^{\nu} \int\limits_{\alpha}^{1} dy \int [] \frac{x_2^{2-\nu} x_3^{1+\nu}(x_1+x_2)^{\nu}(x_i x_j)^{-2-\epsilon}}{(zx_3+x_1)(yx_2+x_1)^{\nu}(zx_3+yx_2+2x_1)} \tag{17}
$$

Вычисление интегралов прямое, но утомительное

$$
\begin{aligned}
C_{00} &= \frac{\log\alpha}{\epsilon} - \frac{\log^2\alpha}{2} - 2\log\alpha + \frac{\pi^2}{4}\log 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{15}{4}\zeta(3) \\
&- \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^2}{6}\log^2 2 + \frac{1}{6}\log^4 2 + \frac{7}{2}\zeta(3)\log 2 + 4Li_4(\frac{1}{2}) \\
C_{01} &= \frac{2\log\alpha}{\epsilon} - \log^2\alpha - 4\log\alpha - 2 - \zeta(3) \\
C_{11} &= \zeta(3) \\
C_0 &= \frac{\log\alpha}{\epsilon} - \frac{\log^2\alpha}{2} - 2\log\alpha - 1 - \zeta(3) - C_0^{'} \\
C_1 &= 4\log 2\log\alpha + 2J_1(\alpha) - C_0^{'} - 2 - \frac{\zeta(3)}{2} - 4\log 2 - \frac{\pi^2}{6} + 4G
\end{aligned} \tag{18}
$$

где

$$
C_0^{'} = \int\limits_\alpha^1 dz \int\limits_\alpha^1 dy \int [] \frac{x_1 x_2^2 (x_i x_j)^{-2-\epsilon}}{(x_3 + y x_2)(z x_1 + y x_2 + 2x_3)} \tag{19}
$$

и $G = 0.915...$ постоянная Каталана.

D. D - интегралы

Ниже мы определим интегралы, которые не содержат дополнительных интегрирований по фейманновским переменным. Все из них получаются из выражений, содержащих функции Грина с суммированием по импульсам и частотам.

Определим интегралы, зависящие от одного индекса,

$$
D_\nu = \int [] \frac{x_3^\nu (x_1 + x_2)^{\nu-1} (x_i x_j)^{-\nu-\epsilon}}{(\alpha x_1 + x_3)(\alpha x_2 + x_3)} \tag{20}
$$

Вычисляя интегралы, находим

$$
\begin{aligned}
D_1 &= -\log^2\alpha - \frac{\pi^2}{6} \\
D_2 &= -2\log\alpha
\end{aligned} \tag{21}
$$

E. H - интегралы

Ниже мы определим интегралы, которые содержат одно дополнительное интегрирование по фейманновским переменным. Все из них получаются из выражений, содержащих функции Грина с суммированием по импульсам и частотам.

Определим интегралы, зависящие от одного индекса,

$$
H_\nu = \int\limits_\alpha^1 dz (z-\alpha)^{2\nu} \int [] \frac{x_2^{2+\nu}(x_1 + x_3)(x_i x_j)^{-2-\epsilon}}{(\alpha x_1 + z x_2)(z x_2 + x_3)} \tag{22}
$$

Соответственно находим

$$
\begin{aligned}
H_0 &= -\log\alpha + 1 \\
H_1 &= -\log\alpha
\end{aligned} \tag{23}
$$

F. S - интегралы

Ниже мы определим интегралы, которые не содержат дополнительных интегрирований по фейманновским переменным и не содержат α. Все из них получаются из выражений, содержащих функции Грина с суммированием по импульсам и частотам.

Определим интегралы, зависящие от двух индексов,

$$S_{\mu\nu} = \int [] \frac{x_1^{\mu} x_2^{1+\nu-\mu}((2-\nu-\mu)x_1 + x_3)(x_i x_j)^{-2-\epsilon}}{(x_2+x_3)^{1+\nu}} \tag{24}$$

и интегралы, зависящие от одного индекса,

$$S_{\nu} = \int [](x_1+x_2)^{-1+2\nu}(x_i x_j)^{-1-\nu-\epsilon} \tag{25}$$

После вычислений, получаем

$$\begin{aligned} S_{00} &= -\frac{1}{\epsilon} + 2 \\ S_{01} &= -\frac{1}{3\epsilon} + \frac{8}{9} \\ S_{11} &= -\frac{1}{6\epsilon} + \frac{1}{9} \\ S_{0} &= -\frac{1}{\epsilon} + 2 \\ S_{1} &= -\frac{2}{\epsilon} + 2 \end{aligned} \tag{26}$$

G. T - интегралы

Ниже мы определим интегралы, которые не содержат дополнительных интегрирований по фейманновским переменным. Все из них получаются из выражений, содержащих функции Грина с суммированием только по частотам.

Определим интегралы, зависящие от трех индексов,

$$T^{\eta}_{\mu\nu} = \frac{(1-\alpha)^{\eta}}{\alpha^{\mu}} \int [] \frac{x_1^{2-\eta} x_2^{\mu+\eta-1} x_3^{-1-\mu-\epsilon}(x_1+x_2)^{-2-\epsilon}}{(\alpha x_2 + \nu\alpha x_3 + x_1)} \tag{27}$$

и от двух индексов,

$$T_{\mu\nu} = \int [] \frac{x_1^{2\nu-2}(x_1+x_2)^{-\nu-\epsilon}(x_1+x_3+(\alpha+\mu)x_2)}{x_3^{\nu+\epsilon}(\alpha x_2 + (1+\mu)x_3 + x_1)(x_1+x_3+\alpha x_2)} \tag{28}$$

После вычислений, находим

$$
\begin{aligned}
T^0_{10} &= -\frac{1}{\alpha}+1\\
T^0_{11} &= -\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\epsilon}+\log\alpha+1\\
T^0_{20} &= \frac{1}{6\alpha^2}-\frac{1}{3\alpha}-\log\alpha-\frac{11}{12}\\
T^0_{21} &= \frac{1}{6\alpha^2}+\frac{2}{3\alpha}+\frac{\log\alpha+5/2}{\epsilon}+\frac{\log^2\alpha}{2}+4\log\alpha+\frac{17}{12}\\
T^1_{10} &= -\frac{1}{\alpha}-2\log\alpha-2\\
T_{01} &= \frac{\log\alpha}{\epsilon}-\frac{\log^2\alpha}{2}\\
T_{02} &= \frac{1}{\epsilon}\\
T_{12} &= -\frac{3\log\alpha+11/2}{\epsilon}+\frac{3\log^2\alpha}{2}+\frac{9\log\alpha}{2}\\
&- 4\log 2\log\alpha+\frac{\pi^2}{6}-4Li_2(\frac{1}{2})-12\log 2+\frac{27}{4}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

VIII. ПРИЛОЖЕНИЕ B

В этом разделе мы представим вычисление интеграла A_{10}, как пример обычных вычислений. Мы начнем с интеграла

$$
-\frac{32a^3}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq} p^2\sum_{k,m>0} mD^c_{p+q}(m)D^3D^c_p(k)D_q(k+m) \tag{1}
$$

Используя фейнмановский трюк, можно написать

$$
\begin{aligned}
&- \frac{16a^3}{\sigma_0 d}\int\limits_{pq} p^2\int\limits_0^\infty dmm\int\limits_0^\infty dk\int\limits_\alpha^1 dz(z-\alpha)^2\int[]\Gamma(6)\\
&[\ h_0^2\ +\ q^2x_{13}+p^2x_{12}+2\ \mathrm{p}\ \mathrm{q}x_1+am(\alpha x_1+x_3)+ak(zx_2+x_3\ ]^{-6}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $x_{ij}=x_i+x_j$. Сдвигая $q\to q-px_1/x_{13}$, мы можем расцепить p и q в знаменателе. Тогда мы можем выполнить интегрирование по k,m,p и q, получая

$$
\frac{4\Omega_d^2 h_0^{4\epsilon}}{\sigma_0\epsilon}A_{10} \tag{3}
$$

где

$$
A_{10}=\int\limits_\alpha^1 dz(z-\alpha)^2\int[]\frac{x_2^3(x_1+x_3)(x_ix_j)^{-2-\epsilon}}{(zx_2+x_3)(\alpha x_1+x_3)^2} \tag{4}
$$

Теперь мы разделим интеграл на четыре части

$$
\begin{aligned}
A_{10} &= \int\limits_\alpha^1\frac{dz(z-\alpha)^2}{z}\int[]\frac{x_2(x_1+x_3)(x_ix_j)^{-1-\epsilon}}{(\alpha x_1+x_3)^2}\\
&\times\ \{\ 1-x_1x_3(x_ix_j)^{-1}-\frac{x_3(x_1+x_3)(x_ix_j)^{-1}}{z}+\frac{x_3^2(x_1+x_3)(x_ix_j)^{-1}}{z(zx_2+x_3)}\ \}\\
&= I_0-I_1-I_2+I_3
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Мы можем точно вычислить первые три интеграла по z и получить $\epsilon = 0$ в четвертом интеграле. Вводя новые переменные $s \in [0, \infty]$ и $u \in [0, 1]$

$$x_1 = \frac{u}{s+1}\,,\, x_2 = \frac{s}{s+1}\,,\, x_3 = \frac{1-u}{s+1} \tag{6}$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
I_0 &= (\frac{1}{2} - 2\alpha)\int\limits_0^1 \frac{du}{(\alpha u + 1 - u)^2}\int\limits_0^\infty ds \frac{s(s+1)^{2\epsilon}}{(s + u(1-u))^{1+\epsilon}} \\
I_1 &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 du \frac{u(1-u)}{(\alpha u + 1 - u)^2}\int\limits_0^\infty ds \frac{s(s+1)^{2\epsilon}}{(s + u(1-u))^{2+\epsilon}} \\
I_2 &= \int\limits_0^1 du \frac{(1-u)}{(\alpha u + 1 - u)^2}\int\limits_0^\infty ds \frac{s(s+1)^{2\epsilon}}{(s + u(1-u))^{2+\epsilon}} \\
I_3 &= \int\limits_\alpha^1 dz \left(\frac{z-\alpha}{z}\right)^2 \int\limits_0^1 du \frac{u(1-u)^2}{(\alpha u + 1 - u)^2}\int\limits_0^\infty ds \frac{(s+1-u)}{(s + u(1-u))^2(\alpha s + 1 - u)^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Мы использовали подстановку в I_3, для которой $x_1 \to x_2$ и обратно. Используя известное интегральное представление для гипергеометрических функций, интегрирования по s могут быть выполнены и (7) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
I_0 &= (\frac{1}{2} - 2\alpha)\int\limits_0^1 du \frac{[u(1-u)]^{1-\epsilon}}{(\alpha u + 1 - u)^2}\,[\, -\frac{1}{1+\epsilon}G_0(u(1-u)) + \frac{1}{\epsilon}G_1(u(1-u))\,] \\
I_1 &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 du \frac{[u(1-u)]^{1-\epsilon}}{(\alpha u + 1 - u)^2}\,[\, -\frac{1}{\epsilon}G_1(u(1-u)) - \frac{1}{1-\epsilon}G_2(u(1-u))\,] \\
I_2 &= \int\limits_0^1 du \frac{u^{-\epsilon}(1-u)^{1-\epsilon}}{(\alpha u + 1 - u)^2}\,[\, -\frac{1}{\epsilon}G_1(u(1-u)) - \frac{1}{1-\epsilon}G_2(u(1-u))\,] \\
I_3 &= \int\limits_\alpha^1 dz \left(\frac{z-\alpha}{z}\right)^2 \int\limits_0^1 du \frac{u}{zu + 1 - u}\,[\, \frac{1}{2}H_3(1-\alpha u) + \frac{(1-u)}{3u}H_4(1-\alpha u)\,]
\end{aligned} \tag{8}$$

где G и H представляют собой гипергеометрические функции ${}_2F_1$. Делая ϵ-разложение и используя следующие ассимптотические выражения для гипергеометрических ${}_2F_1$ функций, получаемые прямо из их определения

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(1, -2\epsilon, -\epsilon; z) &= G_0(1-z) = \frac{1+z}{1-z} \\
{}_2F_1(1, -2\epsilon, 1-\epsilon; z) &= G_1(1-z) = 1 + 2\epsilon\log(1-z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(1, -2\epsilon, 2-\epsilon; z) &= G_2(1-z) = 1 \\
{}_2F_1(1, 2, 3; z) = H_3(z) &= -\frac{2}{z^2}\,(\log(1-z) + z) \\
{}_2F_1(1, 2, 4; z) = H_4(z) &= \frac{6}{z^3}\,(\,(1-z)\log(1-z) + z - z^2/2\,)
\end{aligned} \tag{9}$$

получаем

$$
\begin{aligned}
I_0 &= -\frac{1}{\alpha} - \frac{\log\alpha + 2}{\epsilon} - \frac{\log^2\alpha}{2} - 2\log\alpha - \frac{\pi^2}{3} \\
I_1 &= \frac{\log\alpha + 2}{\epsilon} + \frac{\log^2\alpha}{2} + 2\log\alpha + \frac{\pi^2}{3} \\
I_2 &= \frac{\log\alpha + 1}{\epsilon} + \frac{\log^2\alpha}{2} + 2\log\alpha + \frac{\pi^2}{3} + 1 \\
I_3 &= -\log\alpha
\end{aligned}
\tag{10}
$$

После суммирования интегралов, приходим к окончательному результату

$$
A_{10} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{2\log\alpha + 3}{\epsilon} - \log^2\alpha - 5\log\alpha - \frac{2\pi^2}{3} + 3
$$

---

[1] A.M.M. Pruisken, M.A. Baranov and B. Škorić, Phys. Rev. B **60**, 16807 (1999)
[2] B.I. Halperin, P.A. Lee and N. Read, Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993)
[3] J.K. Jain Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989); Phys. Rev. B **40**, 8079 (1989)
[4] A.M.M. Pruisken, M.A. Baranov and B. Škorić, Phys. Rev. B **60**, 16838 (1999)
[5] А.М. Финкельштейн, ЖЭТФ **84**, 168 (1983); ЖЭТФ **86**, 367 (1984)
[6] P. Streda, J. Phys. C **15**, L717 (1982)
[7] *The Quantum Hall Effect*, edited by R.E. Prange and S.M. Girvin (Springer-Verlag, Berlin, 1987), chapter 5
[8] A.M.M. Pruisken and M.A. Baranov, Europhys. Lett., **31**, 543 (1995)
[9] A.M.M. Pruisken, M.A. Baranov and B. Škorić, Phys. Rev. B **60**, 16821 (1999)
[10] T.R. Kirkpatrick and D. Belitz, Phys. Rev. B **41**, 11082 (1990)
[11] E. Brézin, S. Hikami and J. Zinn-Justin, Nucl. Phys. B **165**, 528 (1980)
[12] A.M.M. Pruisken and Z. Wang, Nucl. Phys. B **322**, 721 (1989)
[13] F. Wegner, Z. Phys. B **25**, 327 (1976)
[14] J. Chayes, L.Chayes, D.S. Fisher and T. Spencer, Phys. Rev. Lett. **57**, 2999 (1986)
[15] B.L. Altshuler and A.G. Aronov, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **77**, 2028 (1979)
[16] A.M.M. Pruisken, Nucl. Phys. B **285**, 719 (1987), **290**, 61 (1987)

отметим, что это условие и условие (VII E) могут быть выполнены одновременно, т.к. они имеют вид $1/(\epsilon_F\tau) \ll \omega_c\tau \ll 1$.

Мы подразумеваем, что площадь электронного газа равна еденице.

Здесь "свободная энергия"означает логарифм статистической суммы.

Возникновение множителя $L^{-2\epsilon}$ в формуле для z связано с тем, что в $d = 2 + 2\epsilon$ измерениях температура имеет размерность $[L^{-2-2\epsilon}]$, а в ренормированной теории мы хотим иметь температуру, измеряемую в единицах $[L^{-2}]$

Отметим, что $t = 1/\pi\sigma$ в $d = 2$.