

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН

О. В. Димитрова

**ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА ПОВЕРХНОСТНОГО
СВЕРХПРОВОДНИКА В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ МАГНИТНОМ
ПОЛЕ**

Дипломная работа по кафедре
проблем теоретической физики.

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, проф.
Фейгельман М. В.

Черноголовка - 2003

Содержание

Введение	4
1 Модель двумерного спин-орбитального сверхпроводника	6
2 Сверхпроводящий фазовый переход	10
3 Свойства сверхпроводника вблизи симметричной точки	16
4 Фазовая диаграмма	21
5 Ток и электромагнитный отклик в киральной фазе	29
6 Преобразование состояния BCS в "слабо киральную" фазу	31
7 Фазовая диаграмма в присутствии немагнитных примесей	36
Обсуждение результатов	42
Приложения	44
А Преобразование к эллиптическим интегралам	44
Б Линия ST'	46
В Восьмой порядок в функционале ГЛ	47
Список литературы	56

Введение

В слоистых сверхпроводниках, а также в сверхпроводниках с кристаллической решеткой полярного типа возможно отсутствие центра инверсии. Свойства сверхпроводников без центра инверсии существенно зависят от спин-орбитального взаимодействия электронов. Недавно поступили сообщения об экспериментальных наблюдениях сверхпроводящих состояний, локализованных на поверхности металлов и даже диэлектриков. Островки поверхностной сверхпроводящей фазы наблюдались в поверхностно допированном кристалле $WO_3 : Na$ при критической температуре $T_c = 91.5K$ [1]. Спин-орбитальное взаимодействие на границе раздела, известное также как Рашба взаимодействие, существенно модифицирует сверхпроводящее состояние. В обычных сверхпроводниках имеет место иерархия энергетических масштабов $\epsilon_F \gg \hbar\omega_D \gg T_c$, где ϵ_F - Фермиевская энергия, ω_D - Дебаевская частота, T_c - температура сверхпроводящего перехода. Спин-орбитальное взаимодействие характеризуется скоростью α и энергией в металле αp_F , где p_F - Фермиевский импульс. Может быть как $\alpha p_F \gg T_c$, так и $\alpha p_F \ll T_c$. Вторым случаем слабого спин-орбитального взаимодействия был рассмотрен в работах [2], [3], однако на поверхности спин-орбитальное взаимодействие усилено скачком химического потенциала и αp_F может достигать значений $0.1eV$. Теория сверхпроводника при сильном спин-орбитальном взаимодействии была построена в статье Горькова и Рашбы [4]. Такое сверхпроводящее состояние должно обладать рядом необычных свойств благодаря тому, что на поверхности кристалла нарушена симметрия "верх"- "низ"; волновая функция конденсата является в этом случае смесью синглетной и триплетной волновой функции [2, 4]. При низких температурах восприимчивость Паули увеличена по сравнению с обычными сверхпроводниками [4]; парамагнитный предел в параллельном магнитном поле смещен в сторону намного более высоких значений поля благодаря возникновению неоднородного сверхпроводящего состояния [5], подобного предсказанному Ларкиным-Овчинниковым и Фульде-Феррелом [6, 7] (LOFF) для ферромагнитного сверхпроводника. Йип [8] предсказал необычные свойства такого сверхпроводника в параллельном магнитном поле, а именно существование сверхпроводящего тока перпендикулярного направлению поля и пропорционального полю. Все эти свойства вытекают из кирального расщепления спектра электронов на поверхности благодаря присутствию спин-орбитального члена Рашба [9]; величина этого расщепления αp_F мала по сравнению с энергией Ферми, но может быть довольно большой по сравнению с другими

энергиями в задаче. Задача о неоднородном состоянии в спин-орбитальном сверхпроводнике отличается от задачи Ларкина-Овчинникова в связи с тем, как магнитное поле меняет Ферми-поверхность. В LOFF задаче Ферми-поверхности, соответствующие спину вверх или спину вниз, увеличиваются или уменьшаются в радиусе; а в спин-орбитальном сверхпроводнике происходит параллельный перенос Ферми-поверхностей, что благоприятствует возникновению неоднородного состояния. В работе [10], исходя из феноменологической модели, для спин-орбитального сверхпроводника была показана возможность существования состояния типа бегущей волны - киральная фаза. Возможность такого состояния была рассмотрена также в задаче Ларкина-Овчинникова, которые обнаружили, что оно не является сверхпроводящим, а сверхпроводящая плотность в нем обращается в ноль [6]. Как было показано [11], неоднородное состояние LOFF подавляется примесями, поэтому представляется интересным изучить влияние примесей на спин-орбитальную сверхпроводимость и неоднородное состояние. Линия перехода от нормального в сверхпроводящее состояние $T_c(h)$ была определена в [5]; однако переход между обычным однородным сверхпроводящим состоянием BCS, существующем в низких магнитных полях и состоянием типа LOFF, возникающим в высоких полях изучен не был .

В этом дипломе детально изучается фазовая диаграмма поверхностного сверхпроводника в параллельном магнитном поле h , исходя из микроскопической модели. Показано, что при достаточно низких (по сравнению с парамагнитным пределом) значениях поля $h \sim T_c/\mu_B$ поведение этой системы довольно сильно отличается от двумерной модели LOFF [13]. А именно, демонстрируется существование "кирального" состояния с параметром порядка $\Delta \propto \exp(\mathbf{Q}\mathbf{r})$ (где $\mathbf{Q} \perp \mathbf{h}$) и $Q \sim \mu_B h/v_F$ в значительной части фазовой диаграммы, которая изображена в итоге на Рис.5. Доказывается, что ток в основном состоянии равен нулю в противоречии с предсказаниями Йипа [8]. Доказывается, что сверхпроводящая плотность всюду отлична от нуля в киральной фазе. Однако на границе раздела однородного BCS и киральной фазы предсказывается возможность разрушения сверхпроводимости; изучена эволюция фазовой диаграммы в присутствии примесей. Как и в обычной LOFF фазе, примеси разрушают неоднородное состояние. Однако в подтверждение результатов Клемма и Лютера [12] найдено увеличение верхнего критического поля для однородного состояния BCS.

1 Модель двумерного спин-орбитального сверхпроводника

На поверхности кристалла трансляционная симметрия понижена, а симметрия инверсии нарушена, даже если она присутствует в объеме. (Компонента импульса электрона \hat{p} , параллельная поверхности сохраняется благодаря существующей двумерной трансляционной симметрии.) В результате может появиться электрическое поле перпендикулярное поверхности. Спин электрона цепляется за это электрическое поле посредством релятивистского спин-орбитального взаимодействия, известного в этом случае как член Рашба: $H_{so} = \alpha \left[\vec{\sigma} \times \hat{p} \right] \cdot \vec{n}$, где $\alpha > 0$ - константа спин-орбитального взаимодействия, имеющая размерность скорости, \vec{n} , - единичный вектор, перпендикулярный к поверхности, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ - матрицы Паули. Это взаимодействие явно нарушает симметрию инверсии. Оператор спина электрона не коммутирует с членом Рашба, таким образом проекция спина не есть хорошее квантовое число. С другой стороны, оператор киральности $[\vec{\sigma} \times \hat{p}] \cdot \vec{n}$ коммутирует с гамильтонианом; здесь $\hat{e} = \hat{p}/p$ - оператор направления импульса, которому соответствует собственное число $\vec{e}_p = (\cos \varphi_p, \sin \varphi_p)$, где φ_p - угол между импульсом электрона и осью x . Собственное значение оператора киральности $\lambda = \pm 1$ вместе с импульсом электрона составляют квантовые числа электронного состояния (\vec{p}, λ) . Член Рашба сохраняет двукратное вырождение, и состояния электрона (\vec{p}, λ) и $(-\vec{p}, \lambda)$ имеют одинаковую энергию.

В этом дипломе мы рассматриваем самую простую модель поверхностного сверхпроводника: модель Горькова для двумерного металла со включенным членом Рашба [4], в пределе $\alpha p_F \gg T_{co}$. Гамильтониан, написанный в координатном представлении, имеет вид

$$\hat{H} = \int \psi_\alpha^+(\vec{r}) \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} \delta_{\alpha\beta} + \alpha \left[\vec{\sigma}_{\alpha\beta} \times \hat{P} \right] \cdot \vec{n} - g\mu_B \vec{h} \cdot \vec{\sigma}_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(\vec{r}) d^2r - \frac{U}{2} \int \psi_\alpha^+ \psi_\beta^+ \psi_\beta \psi_\alpha d^2r \quad (1.1)$$

где m - масса электрона; α, β - спиновые индексы; $\hat{P} = -i\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})$ - оператор импульса электрона в присутствии бесконечно малого вектор-потенциала в плоскости $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$. Мы включили в гамильтониан Зеемановское взаимодействие с однородным внешним магнитным полем \vec{h} , параллельным поверхности, и считаем, что \vec{h} направлено по оси x . Вектор-потенциал поля в плоскости может быть выбран имеющим только z -компоненту поэтому он выпадает из члена для кинетической энергии двумерного электрона. μ_B -

магнетон Бора, g - фактор Ланде. Ниже везде мы используем обозначение $H = g\mu_B h$. Волновая функция электрона может быть разложена по базису плоских волн: $\hat{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{r}} a_\alpha(\vec{p})$, и одночастичная часть гамильтониана (1.1) в импульсном представлении и в калибровке $div\vec{A} = 0$ может быть написана как сумма \hat{H}_0 и \hat{H}_{em} :

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{p}} a_\alpha^+(\vec{p}) \left(\frac{p^2}{2m} \hat{1} + \alpha [\vec{\sigma}_{\alpha\beta} \times \vec{p}] \cdot \vec{n} - \vec{H} \cdot \vec{\sigma}_{\alpha\beta} \right) a_\beta(\vec{p}), \quad (1.2)$$

$$\hat{H}_{em} = \sum_{\vec{p}} a_\alpha^+(\vec{p}) \left(-1/c \hat{j} \vec{A} \right) a_\beta(\vec{p}),$$

здесь \hat{j} - оператор тока в спиновом представлении:

$$\hat{j} = -e(\vec{p}/m - \alpha[\vec{\sigma} \times \vec{n}]) - \frac{e^2}{2mc} \vec{A}. \quad (1.3)$$

\hat{H}_0 может быть диагонализирован преобразованием $a_\alpha(\vec{p}) = \eta_{\lambda\alpha}(\vec{p}) \hat{a}_{\lambda\mathbf{p}}$ с двухкомпонентным спинором

$$\eta_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda \exp(i\varphi_{\mathbf{p}}(H)) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где

$$\varphi_{\mathbf{p}}(H) = \arcsin \frac{\alpha p_y - H}{\sqrt{(\alpha p)^2 - 2\alpha p_y H + H^2}}, \quad (1.5)$$

является модификацией угла $\varphi_{\mathbf{p}}$ в присутствии продольного магнитного поля. Собственные значения гамильтониана (1.2), соответствующие киральностям $\lambda = \pm 1$ имеют вид

$$\epsilon_\lambda(\vec{p}) = p^2/2m - \lambda \sqrt{\alpha^2 |\mathbf{p}|^2 - 2\alpha p_y H + H^2}, \quad (1.6)$$

и следовательно, состояния электронов с одинаковым импульсом, но принадлежащим разным $\lambda = \pm 1$ Ферми-окружностям, энергетически разделены величиной $2\alpha p_F$, с радиусом $p_F = \sqrt{2m\mu + m^2\alpha^2} \pm m\alpha$, где $\mu \gg m\alpha^2$ - химический потенциал, см. Рис. 1. Плотности состояния на двух Ферми-окружностях почти одинаковы, $\nu_\pm = \frac{m}{2\pi} \left(1 \pm \frac{\alpha}{v_F} \right)$, и в дипломе мы пренебрегаем различием $\nu_+ - \nu_-$. Когда прикладывается слабое внешнее магнитное поле $H \ll \alpha p_F$ вдоль оси x , эти две Ферми-окружности смещаются в противоположных y -направлениях на величину $Q = \pm H/v_F$, как показано на Рис. 2.

Двухчастичный гамильтониан взаимодействия в (1.1) в импульсном представлении имеет вид:

$$-\frac{U}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} a_{\alpha\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^+ a_{\beta-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^+ a_{\beta-\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2} a_{\alpha\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2}, \quad (1.7)$$

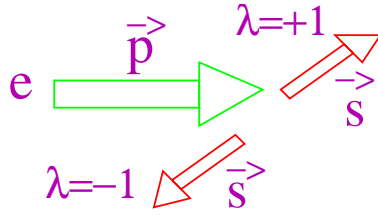


Рис. 1: Киральность $\lambda = \pm 1$ соответствует повороту спина электрона перпендикулярно вправо и перпендикулярно влево от направления импульса электрона.

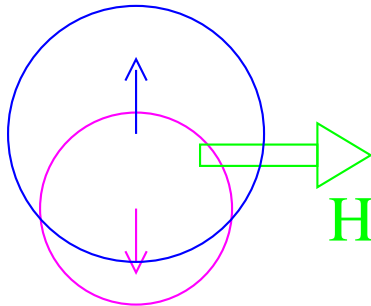


Рис. 2: При приложении слабого внешнего магнитного поля $H \ll \alpha v_F$ вдоль оси x , две Ферми-окружности, соответствующие двум киральным ветвям $\lambda = \pm 1$, смещаются в противоположных y -направлениях на величину $Q = \pm H/v_F$. В меру параметра α/v_F окружность, соответствующая одной киральности, больше, чем соответствующая другой.

и может быть упрощен в киральном базисе (1.4) в предположении $H \ll \alpha p_F \ll \mu$. В длинноволновом пределе $q \ll p_F$ он может быть факторизован следующим образом:

$$\hat{H}_{int} = -\frac{U}{4} \sum_{\mathbf{q}} \hat{A}^+(\vec{q}) \hat{A}(\vec{q}), \quad (1.8)$$

где

$$\hat{A}(\vec{q}) = \sum_{\mathbf{p}\lambda} \lambda e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} a_{\lambda-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} a_{\lambda\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} \quad (1.9)$$

есть оператор уничтожения пары.

Для того, чтобы вычислить термодинамический потенциал $\Omega = -T \ln Z$, мы используем технику функционального интегрирования во мнимом времени по Грассмановым электронным полям $a_{\lambda,\mathbf{p}}$, $\bar{a}_{\lambda,\mathbf{p}}$ и вводим дополнительное комплексное поле $\Delta(\mathbf{r}, \tau)$, расщепляющее член H_{int} , [15]. Эффективный лагранжиан имеет вид:

$$\begin{aligned} L[a, \bar{a}, \Delta, \Delta^*] &= \sum_{\mathbf{p}, \lambda} \bar{a}_{\lambda\mathbf{p}} (-\partial_\tau - \epsilon_\lambda(\vec{p})) a_{\lambda\mathbf{p}} + \\ &+ \sum_{\mathbf{q}} \left[-\frac{|\Delta_{\mathbf{q}}|^2}{U} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\lambda} (\Delta_{\mathbf{q}} \lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \bar{a}_{\lambda,\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} \bar{a}_{\lambda,-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} + \Delta_{\mathbf{q}}^* \lambda e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} a_{\lambda,-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} a_{\lambda,\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}) \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Термодинамический потенциал $\Omega = -T \ln Z$ описывает систему в равновесии, где Z - статистическая сумма. Мы выражаем Ω как предел производящего функционала $\Omega = \Omega[\eta, \bar{\eta}]|_{\eta \rightarrow 0}$:

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{\Omega[\eta, \bar{\eta}]}{T} \right) &= \int \mathcal{D}\Delta \mathcal{D}\Delta^* \exp \left(-\frac{\Omega[\eta, \bar{\eta}, \Delta, \Delta^*]}{T} \right) = \\ &= \int \mathcal{D}a \mathcal{D}\bar{a} \mathcal{D}\Delta \mathcal{D}\Delta^* \exp \left(\int_0^{1/T} [L[a, \bar{a}, \Delta, \Delta^*] + \right. \\ &\left. + \sum_{\mathbf{p}} (\bar{\eta}(\tau\mathbf{p}) a(\tau\mathbf{p}) + \bar{a}(\tau\mathbf{p}) \eta(\tau\mathbf{p}))] d\tau \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ниже мы будем работать в приближении среднего поля, которое управляется малостью параметра Гинзбурга Gi . Для чистого двумерного сверхпроводника $Gi \sim T_c/E_F$ и может рассматриваться как маленькое, хотя и не пренебрежимое (мы обсуждаем флуктуационные эффекты кратко в конце диплома).

Средне-полевое приближение эквивалентно приближению седловой точки для функционального интеграла по Δ и Δ^* (первое уравнение в (1.11)), таким образом мы будем

изучать минимум функционала $\Omega[\Delta, \Delta^*]$, появляющегося после гауссова интегрирования по Грассмановым полям:

$$\frac{\delta\Omega[\Delta, \Delta^*]}{\delta\Delta(\tau\mathbf{r})} = 0, \quad (1.12)$$

известное также как уравнение самосогласования. (Другими словами, в средне-полевом приближении первое уравнение в (1.11) ограничено окрестностью глобального минимума термодинамического потенциала $\Omega[\Delta, \Delta^*] = \Omega[\eta, \bar{\eta}, \Delta, \Delta^*]|_{\eta \rightarrow 0}$ относительно $\Delta(\mathbf{r})$.)

Далее используем метод функций Грина. Электронная функция Грина определяется как вариационная производная производящего функционала:

$$G(\tau\mathbf{r}, \tau'\mathbf{r}') = \frac{\delta\Omega[\eta, \bar{\eta}]}{\delta\bar{\eta}(\tau\mathbf{r})\delta\eta(\tau'\mathbf{r}')} \Big|_{\eta \rightarrow 0}. \quad (1.13)$$

2 Сверхпроводящий фазовый переход

Вблизи фазового перехода из нормального металла в сверхпроводящее состояние параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ всюду мал на двумерной плоскости. Поэтому термодинамический потенциал Ω может быть разложен по степеням $\Delta(\mathbf{r})$ и его градиентам. Это разложение известно как функционал Гинзбурга-Ландау. Как показали Горьков и Барзыкин [5], основное состояние может быть неоднородным в направлении, перпендикулярном к магнитному полю. Соответственно мы рассматриваем параметр порядка как суперпозицию конечного числа гармоник:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_i \Delta_{\mathbf{Q}_i}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{Q}_i\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где амплитуды $\Delta_{\vec{Q}_i}(\mathbf{r})$ - медленно меняющиеся в двумерном пространстве функции. В основном состоянии параметр порядка может быть с ненарушенной пространственной четностью, если $\Delta(\mathbf{r})\Delta^*(\mathbf{r}') = \Delta(\mathbf{r}')\Delta^*(\mathbf{r})$, и с нарушенной пространственной четностью и симметрией по обращению времени в противном случае. Соответствующий функционал Гинзбурга-Ландау имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_{sn} = & \int \left[\sum_i \alpha_{Q_i Q_i} |\Delta_{\mathbf{Q}_i}(\vec{r})|^2 + \right. \\ & + \sum_{ijkl} \beta_{Q_i Q_j Q_k Q_l} \Delta_{\mathbf{Q}_i}(\vec{r}) \Delta_{\mathbf{Q}_j}^*(\vec{r}) \Delta_{\mathbf{Q}_k}(\vec{r}) \Delta_{\mathbf{Q}_l}^*(\vec{r}) \delta_{\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_l} + \\ & \left. + \sum_i c_{Q_i Q_i}^x \left| \left(-i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2e}{c} A_x(\vec{r}) \right) \Delta_{\vec{Q}_i}(\vec{r}) \right|^2 + c_{Q_i Q_i}^y \left| \left(-i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2e}{c} A_y(\vec{r}) \right) \Delta_{\vec{Q}_i}(\vec{r}) \right|^2 \right] d^2\vec{r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

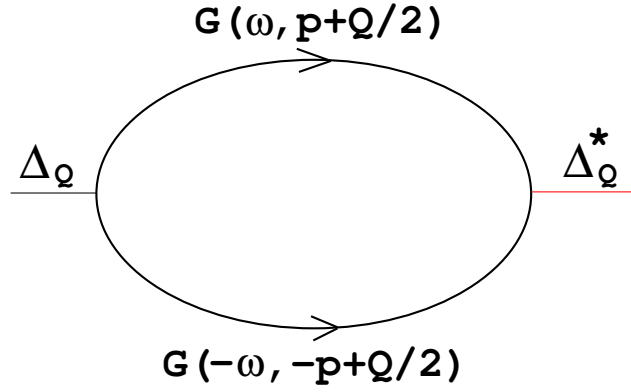


Рис. 3: Куперовская петля с проходящим импульсом Q . Возникновение неоднородного сверхпроводящего состояния.

В коэффициент α_{QQ} входит интеграл от куперовской петли с переданным импульсом Q , которая показана на Рис.3; а коэффициенты β_{QQQQ} и β_{QQ-Q-Q} даются интегралами, соответствующими четырехвершинным петлевым диаграммам (показанным на Рис.4):

$$\alpha_{QQ} = \frac{1}{U} - \frac{T}{2} \sum_{\omega, \lambda, \vec{p}} G_{\lambda}(\omega, \vec{p} + \vec{Q}/2) G_{\lambda}(-\omega, -\vec{p} + \vec{Q}/2); \quad (2.3)$$

$$\beta_{QQQQ} = T \sum_{\omega \vec{p} \lambda} G_{\lambda}^2(\omega, \vec{p} + \vec{Q}/2) G_{\lambda}^2(-\omega, -\vec{p} + \vec{Q}/2);$$

$$\beta_{QQ-Q-Q} = T \sum_{\omega \vec{p} \lambda} G_{\lambda}^2(\omega, \vec{p} + \vec{Q}/2) G_{\lambda}(-\omega, -\vec{p} + \vec{Q}/2) G_{\lambda}(-\omega, -\vec{p} - 3\vec{Q}/2), \quad (2.4)$$

$$c_{QQ}^{\mu} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial q_{\mu}^2} \alpha(Q \vec{e}_y + q_{\mu} \vec{e}_{\mu}), \quad (2.5)$$

где функция Грина нормального состояния электрона во внешнем магнитном поле $H \ll \alpha r_F$ в плоскости есть

$$G_{\lambda}(\omega, \vec{p}) = \frac{1}{i\omega - \xi - \lambda H \sin \varphi_{\vec{p}}}, \quad (2.6)$$

здесь считаем, что дисперсия квазичастицы $\xi = p^2/2m - \lambda \alpha r_F - \mu$ мала по сравнению с αr_F . Интегралы по импульсам в (2.3) и (2.4) берутся в квазиклассическом приближении:

$$\int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} = \nu(\epsilon_F) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (2.7)$$

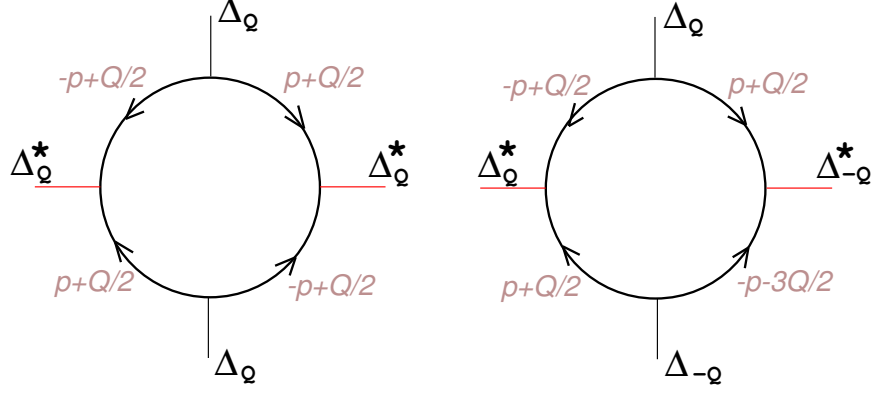


Рис. 4: Диаграммы, соответствующие членам четвертого порядка по Δ в разложении Гинзбурга-Ландау: $\beta_{QQQQ}|\Delta_Q|^4$ и $\beta_{QQ-Q-Q}|\Delta_Q|^2|\Delta_{-Q}|^2$.

откуда, пользуясь полезной формулой (A.11) из Приложения, получаем

$$\alpha_{QQ} = \frac{1}{U} - \pi\nu(\epsilon_F)T \max_Q \sum_{\omega>0,\lambda} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + H_\lambda^2}}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \beta_{QQQQ} &= \frac{\nu(\epsilon_F)}{4} \pi T \sum_{\omega>0,\lambda} \frac{2\omega^2 - H_\lambda^2}{(\omega^2 + H_\lambda^2)^{5/2}}; \\ \beta_{QQ-Q-Q} &= \frac{\nu(\epsilon_F)}{2} \pi T \sum_{\omega>0,\lambda} \frac{(2\omega^2 + H_\lambda^2)}{\omega^2(\omega^2 + H_\lambda^2)^{3/2}} \frac{H_\lambda}{v_F Q}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} c_{QQ}^x &= c_{-Q-Q}^x = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_F}{2}\right)^2 \pi\nu(\epsilon_F)T \sum_{\omega,\lambda} \frac{1}{(\omega^2 + H_\lambda^2)^{3/2}}, \\ c_{QQ}^y &= c_{-Q-Q}^y = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_F}{2}\right)^2 \pi\nu(\epsilon_F)T \sum_{\omega,\lambda} \frac{2H_\lambda^2 - \omega^2}{(\omega^2 + H_\lambda^2)^{5/2}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $H_\lambda = \lambda H + v_F Q/2$. Заметим, что $\beta_{QQQQ} = \beta_{-Q-Q-Q-Q}$ - коэффициенты, стоящие соответственно перед членами $|\Delta_Q|^4$ и $|\Delta_{-Q}|^4$ в функционале Гинзбурга-Ландау(2.2); коэффициент, стоящий перед членом $|\Delta_Q|^2|\Delta_{-Q}|^2$ в (2.2) - это сумма четырех равных по величине коэффициентов $\beta_{QQ-Q-Q} = \beta_{Q-Q-QQ} = \beta_{-Q-Q-QQ} = \beta_{-QQQ-Q}$.

Условие $\alpha_{QQ} = 0$ определяет линию перехода второго рода (если $\beta_{QQQQ} > 0$) между нормальным металлом и сверхпроводником:

$$\frac{1}{U} = \nu(\epsilon_F)T \max_Q \sum_{\omega>0,\lambda} \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 + (\lambda H + v_F Q/2)^2}}. \quad (2.11)$$

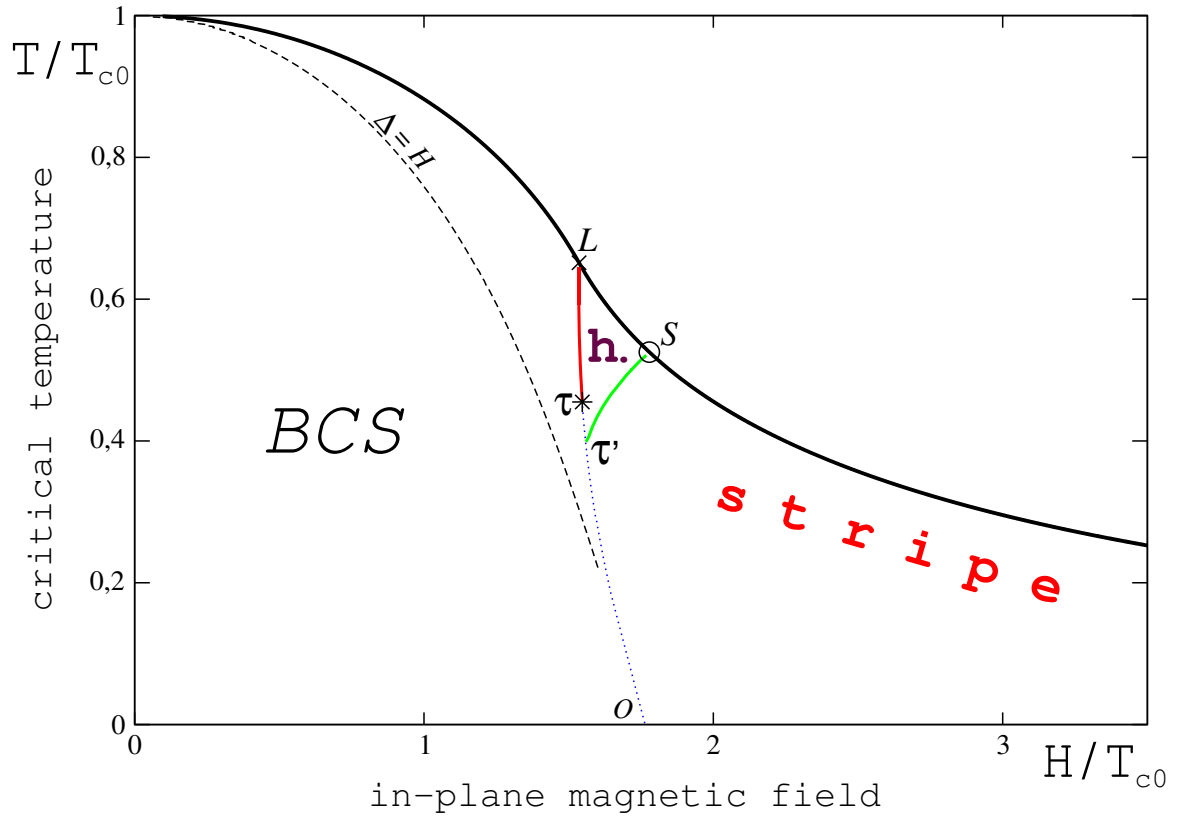


Рис. 5: Линия сверхпроводящего фазового перехода $T_c(H)$ (жирная) и две линии фазового перехода второго рода в чистом случае: \mathcal{LT} линия между однородным и "киральным" состоянием и линия устойчивости "кирального" состояния ST' . "Киральное" состояние помечено буквой **h.** ("helical"). Пунктирная линия отделяет от области "бесщелевой" сверхпроводимости. Точечная линия обозначает границу устойчивости BCS состояния.

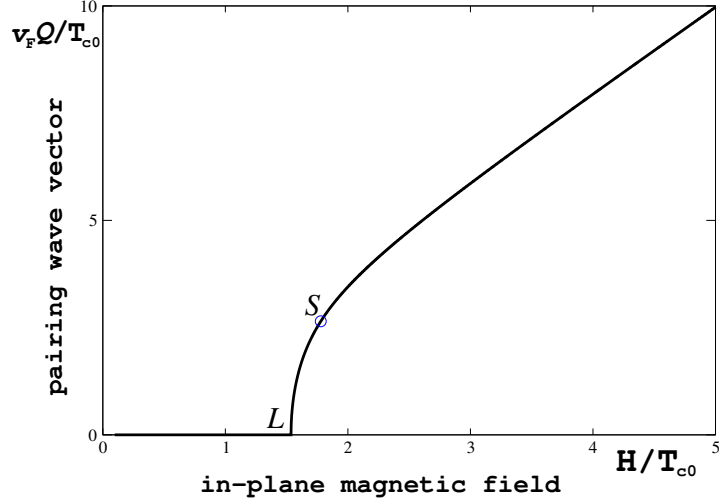


Рис. 6: Волновой вектор куперовской пары Q на линии $T_c(H)$. Кругком обозначена симметричная точка \mathcal{S} .

Для разных значений H , максимум по Q в правой части уравнения (2.11) достигается либо на $Q = 0$, либо на отличном от нуля $Q = \pm|Q|$. Положение $T_c(H)$ линии, найденное численным решением уравнения (2.11), показано на Рис. 5, на котором и температура T_c и магнитное поле H в плоскости нормированы критической температурой в нулевом магнитном поле: $T_{c0} = 2\omega_D \exp(-1/\nu U + \gamma)/\pi$, где $\gamma = 0.577$ - постоянная Эйлера. Линии $T_c(H)$ соответствуют две асимптотики, найденные в [5]:

$$\log \frac{T_c(H)}{T_{c0}} = -\frac{7\zeta(3)H^2}{8\pi^2 T_{c0}^2} \quad \text{при } H/T_{c0} \rightarrow 0;$$

$$\frac{T_c(H)}{T_{c0}} = \frac{\pi T_{c0}}{2e^\gamma H} - \frac{H}{4\alpha p_F} \quad \text{при } H/T_{c0} \gg 1, \quad H/(\alpha p_F) \ll 1. \quad (2.12)$$

Последняя асимптотика получена при учете следующего малого члена по H в знаменателе функции Грина (2.6) $H^3/(\alpha p_F)^2$, и из нее следует значение верхнего критического поля $H_{c2} = \sqrt{2\Delta(0)\alpha p_F}$. Точка Лифшица \mathcal{L} отделяет решения с $Q = 0$ и $Q \neq 0$ на линии $T_c(H)$, а также конец фазового перехода второго рода между двумя сверхпроводящими фазами. Координаты \mathcal{L} точки - $(H_L, T_L) = (1.536, 0.651)T_{c0}$. Так как α_{QQ} (Eq.(2.8)) симметрично по замене $-Q \rightarrow Q$, оно всегда имеет экстремум в точке $Q = 0$. Поэтому аналитически точка Лифшица \mathcal{L} может быть определена как точка, где этот экстремум меняется с \max на \min при понижении температуры:

$$\left. \frac{\partial^2 \alpha_{QQ}}{\partial Q^2} \right|_{Q=0} = 0,$$

Это условие дает отношение $H_L/T_L \approx 2.36$, которое согласуется с отношением значений для H_L и T_L , найденных через численное решение (2.11).

На Рис. 6 показан волновой вектор куперовской пары Q на линии $T_c(H)$ как функция магнитного поля H в плоскости. Этот волновой вектор является параметром порядка вблизи \mathcal{L} точки: $v_F Q(H) \sim \sqrt{H^2 - H_L^2}$. Мы находим асимптотику

$$v_F Q = 2H - \frac{\pi^4 T_{c0}^4}{7\zeta(3)e^{2\gamma} H^3} \quad \text{при } H/T_{c0} \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Обратим внимание, что $Q = 2H/v_F$ - вектор, на который разъезжаются две $\lambda = \pm 1$ Ферми поверхности при приложении параллельного магнитного поля. Вблизи $T_c(H)$ линии коэффициент α может быть разложен:

$$\alpha(T, H) \approx \nu(\epsilon_F) \frac{T - T_c(H)}{2T} \sum_{\lambda} Y(T_c(H), H_{\lambda}), \quad (2.14)$$

где $Y(T, H)$ - функция Йосиды (A.10), $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ - мацубаровская частота. При $H > H_L$ ниже $T_c(H)$ линии возникает неоднородная сверхпроводящая фаза. Из вида (2.11) ясно, что чуть ниже $T_c(H)$ линии в $\Delta(\mathbf{r})$ входят не больше, чем две гармоники: $\Delta(y) = \Delta_+ e^{iQy} + \Delta_- e^{-iQy}$.

Ниже линии перехода $T_c(H)$ плотность термодинамического потенциала Ω в сверхпроводящем состоянии меньше, чем в нормальном, на величину

$$\Omega_{sn} = \alpha(T, H)|\Delta|^2 + \beta_s(T, H)|\Delta|^4 + \beta_a(T, H)(|\Delta_+|^2 - |\Delta_-|^2)^2, \quad (2.15)$$

где $|\Delta|^2 = |\Delta_+|^2 + |\Delta_-|^2$. Уравнение (2.15) получено из (2.2), если в нем оставить только две гармоники и сделать замену $|\Delta_+|^2 = \Delta_{\mathbf{Q}} \Delta_{\mathbf{Q}}^*$, $|\Delta_-|^2 = \Delta_{-\mathbf{Q}} \Delta_{-\mathbf{Q}}^*$; коэффициенты $\beta_{s,a}$ составлены из интегралов (2.9) для четырехвершинных петлевых диаграмм:

$$\begin{aligned} \beta_s(T, H) &= \beta_{QQQQ}/2 + \beta_{QQ-Q-Q}; \\ \beta_a(T, H) &= \beta_{QQQQ}/2 - \beta_{QQ-Q-Q}; \end{aligned} \quad (2.16)$$

В симметричной точке \mathcal{S} , определяемой условием $\beta_a(T_c(H), H) = 0$, свободная энергия (2.15) зависит только от $|\Delta|^2$ и инвариантна относительно $U(2)$ вращений спинора параметра порядка (Δ_+, Δ_-) . Координаты \mathcal{S} точки: $(H_S, T_S) = (1.779, 0.525)T_{c0}$, соответствующий волновой вектор в ней $v_F Q_S = 2.647T_c(0)$. При $H < H_S$ находимся в области $\beta_a < 0$, и минимум свободной энергии при $T < T_c(H)$ достигается либо на $\Delta_+ = 0$,

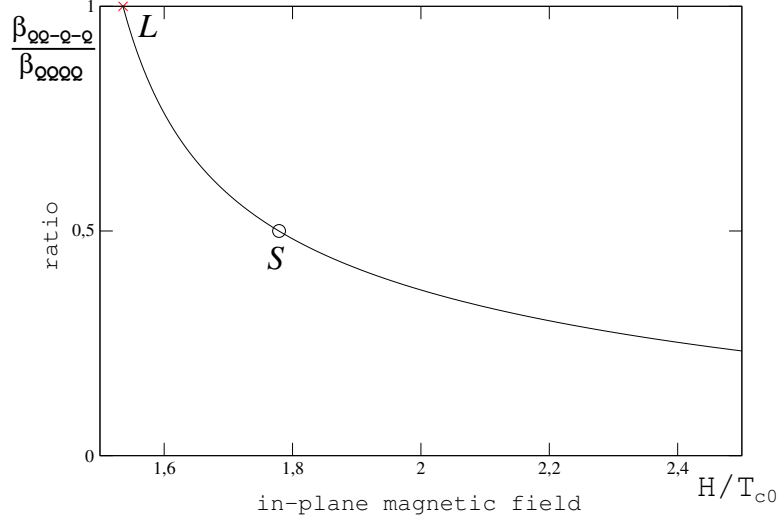


Рис. 7: Отношение коэффициентов β_{QQ-Q-Q} и β_{QQQQ} . В симметричной точке \mathcal{S} , обозначенной на рисунке кружком, это отношение равно $1/2$. В точке Лифшица \mathcal{L} отношение равно 1.

либо на $\Delta_- = 0$, получаем "киральное" состояние. При $H > H_S - \beta_a > 0$ и минимум свободной энергии достигается на $|\Delta_+| = |\Delta_-|$, то есть возникает фаза типа LOFF с $\Delta(y) \propto \cos(Qy)$, устойчивая в высоких магнитных полях, которую называем "полосатая структура".

3 Свойства сверхпроводника вблизи симметричной точки

После преобразования растяжения координат $x = x\sqrt{c_x/c_y}$ и $y = y\sqrt{c_y/c_x}$ (таком, что площадь сохраняется), в симметричной точке функционал Гинзбурга-Ландау примет вид

$$F_s - F_n = \int d^2\mathbf{r} (\sqrt{c_x c_y} (|\partial_\mu \Delta_+|^2 + |\partial_\mu \Delta_-|^2) + \beta_s (\Delta_0^2 - |\Delta_+|^2 - |\Delta_-|^2)^2 - \beta_s \Delta_0^4), \quad (3.1)$$

где $\Delta_0^2 = -\frac{\alpha}{2\beta_s}$ есть равновесное значение параметра прядка. Член четвертого порядка в GL (2.15) может быть разделен на симметричную и анизотропную часть: $\beta_a(T, H)(|\Delta_+|^2 - |\Delta_-|^2)^2$, и в симметричной точке коэффициент $\beta_a(T_S, H_S) = 0$. Коэффициенты c_x, c_y даются выражениями (2.10), и их отношение в точке \mathcal{S} равно $c_x/c_y = 1.7232$. Минимум

энергии (3.1) достигается в однородном состоянии при условии $|\Delta_+|^2 + |\Delta_-|^2 = \Delta^2$. Если $z_1 = \Delta_+/\Delta$ и $z_2 = \Delta_-/\Delta$, то в симметричной точке спинор параметра порядка (z_1, z_2) ($|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$) пробегает сферу S^3 и эквивалентен четырех-компонентному вектору $\vec{\mathcal{N}}$. Градиентная часть энергии Гинзбурга-Ландау имеет вид

$$E = \frac{\hbar^2}{8m} n_s \int (\partial_\mu \vec{\mathcal{N}})^2 d^2\vec{r} \quad (3.2)$$

Уравнение ренорм-группы на заряд $\left(\frac{\hbar^2}{2m} n_s\right)^{-1}$ для N -компонентного единичного поля было найдено Поляковым [17] и для нашего случая $N = 4$ имеет вид:

$$\frac{dn_s}{dx} = -\frac{4Tm}{\pi\hbar^2} \quad (3.3)$$

где $x = \log(L/\xi)$. Анизотропия $\beta_a(T, H)(\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_2^2 - \mathcal{N}_3^2 - \mathcal{N}_4^2)^2$ подчиняется РГ уравнению:

$$\frac{d\beta_a}{dx} = -\frac{8Tm}{\pi\hbar^2 n_s} \beta_a \quad (3.4)$$

Уравнение ренорм-группы справедливо до масштаба $L_{anis}^2 = \xi^2(T)\beta_s/\beta_a$. Таким образом находим

$$n_s(T) = n_s^0 - \frac{4Tm}{\pi\hbar^2} X, \quad (3.5)$$

где

$$X = \log\left(\frac{1}{1 - T/T_c} \frac{\beta_s}{\beta_a}\right) \quad (3.6)$$

Перенормировка коэффициента β_s пренебрежимо мала, поскольку флуктуации продольной компоненты Δ малы. Анизотропия перенормируется как

$$\beta_a = \beta_a^0 \left(1 - \frac{4Tm}{\pi\hbar^2 n_s^0} X\right)^4. \quad (3.7)$$

Изучим возможность точечных дефектов в параметре порядка. Градиентная энергия физического дефекта должна быть конечна. Анизотропная энергия станет ∞ , если не удовлетворяется условие минимума на больших расстояниях от дефекта. Например левее симметричной точки \mathcal{S} имеем либо $|z_1| = 1$ либо $|z_2| = 1$. Это подмножество пространства вырождения параметра порядка, соответствующее минимуму анизотропной энергии, S^1 . Правее симметричной точки пространство вырождения параметра порядка, соответствующее минимуму анизотропной энергии, $S^1 \otimes S^1$. Напротив, в коре дефекта параметр порядка может принимать любое значение пространства вырождения S^3 симметрической части энергии.

В таком физическом случае наличие топологического дефекта определяется неединичными элементами группы гомотопии $\pi_2(S^3, S^1) = Z$ или $\pi_2(S^3, S^1 \otimes S^1) = Z \otimes Z$. Действительно, отображение, соответствующее физическому дефекту, это отображение диска с границей S^1 , которая соответствует далекой от дефекта области плоскости. Граница S^1 пространства R^2 отображается на подмножество S^1 вырождения анизотропной энергии из S^3 ($z_1 = e^{i\psi}$). А это есть относительная гомотопическая группа $\pi_2(S^3, S^1) = Z$. Если бы не было анизотропии, то любую конфигурацию параметра порядка на плоскости можно стянуть в однородное состояние, так как $\pi_2(S^3) = 0$. В нашем случае на бесконечности направление спинора (z_1, z_2) фиксировано анизотропным членом в энергии, и значит нельзя стянуть дефект в точку.

Проекция Хопфа разделяет спинор параметра порядка $z \in S^3$ на вектор $\vec{n} = z^\dagger \vec{\sigma} z \in S^2$ сфере и общую фазу $\in U(1)$. Общая фаза канонически сопряженная величина плотности электронов, а значит заряду. Напротив, вектор \vec{n} - нейтральное поле. Если запараметризовать спинор параметра порядка как

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{i\psi/2} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

то для единичного вектора \vec{n} имеем параметризацию на сфере S^2 через углы Эйлера:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Тогда градиентная энергия (3.2) может быть представлена как сумма градиентной энергии \vec{n} -поля и кинетического члена:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar^2}{8m} n_s \int \partial_\mu z^\dagger \partial_\mu z \, d^2 \vec{r} = \\ &= \frac{\hbar^2}{8m} n_s \int \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu \vec{n})^2 + \mathcal{A}_\mu^2 \right] d^2 \vec{r}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\mathcal{A}_\mu = -i(z^\dagger \partial_\mu z - z \partial_\mu z^\dagger) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi - \partial_\mu \varphi \cos \theta). \quad (3.11)$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что имеет место равенство

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{R^2} \vec{n} [\partial_x \vec{n} \times \partial_y \vec{n}] d^2 \vec{r} = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\infty} \vec{\mathcal{A}} \cdot d\vec{l}. \quad (3.12)$$

Заметим, что правее точки \mathcal{S} , где анизотропия легкая плоскость и $\theta = \frac{\pi}{2}$, получаем $\delta\chi = 2\pi Q$, для топологического заряда $Q = 1$ общая фаза $\chi = \psi/2$ меняется на 2π при обходе по контуру вокруг дефекта.

Мы взяли пробное решение

$$z_1 = \frac{re^{i\varphi}}{\sqrt{|R|^2 + r^2}}, \quad z_2 = \frac{R}{\sqrt{|R|^2 + r^2}}, \quad (3.13)$$

которому соответствует топологический заряд (3.12) $Q = 1$, и которое удовлетворяет граничным условиям левее симметричной точки ($\beta_a < 0$): на больших расстояниях выживает только одна компонента $z_1 = \frac{\Delta_+}{|\Delta|} = e^{i\varphi}$. Решение (3.13) двухпараметрическое: обладает произвольным параметром R , который можно домножить на любое комплексное число. Пробная функция (3.13) - это анзац Белавина-Полякова для нелинейной сигма-модели $\epsilon = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \vec{n})^2 d^2\vec{r}$, так называемая топологическая текстура скирмион с ненулевым индексом отображения сферы вырождения параметра порядка S^2 на реальную двумерную плоскость R^2 . Текстура доставляет нелинейной сигма-модели глобальный минимум в своем топологическом классе ввиду общего неравенства $\epsilon_{texture} \geq 4\pi Q$ (непосредственное вычисление показывает $\epsilon_{texture} = 4\pi Q$ и $Q = 1$).

Подчеркнем еще раз, что для нашей задачи (3.10) решение (3.13) не доставляет минимума, а является пробной функцией - соответствующей непрерывному вихрю с неразрушенной сверхпроводимостью в коре, пропускающему один квант потока. Мы находим энергию этого пробного непрерывного вихря:

$$\epsilon_{cont} \sim \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 (\log \lambda/L_{anis} + 0.5 + |\beta_a|L_{anis}^2/\xi^2), \quad (3.14)$$

где β_a - маленькая анизотропия, $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/2e$ - квант потока, и сравниваем ее с энергией сингулярного вихря Абрикосова:

$$\epsilon_A \sim \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left(\log \frac{\lambda}{\xi} + 1.2 \right). \quad (3.15)$$

Сравнивая (3.14) и (3.15), видим, что при $|\beta_a| \ll 1$ а значит $L_{anis} \gg \xi$ энергия непрерывного вихря меньше энергии сингулярного на величину $\propto \log \frac{L_{anis}}{\xi} = \log \sqrt{\frac{\beta_s}{|\beta_a|}}$.

Энергия вихря, доставляющего глобальный минимум (3.1) в точке \mathcal{S} (если в последнем учесть и анизотропный член), еще ниже (3.14) и получается вариацией функционала ГЛ, и далее численным решением получающегося дифференциального уравнения.

Таким образом, (3.14) - верхняя оценка для энергии непрерывного вихря в симметричной точке.

Анизотропия легкая плоскость. Правее точки \mathcal{S} параметр порядка есть $\vec{n} \cdot e^{i\chi}$, где χ - общая фаза. Пространство вырождения для вектора \vec{n} - это окружность S_1 (экватор сферы S_2); для общей фазы χ пространство вырождения тоже окружность. Если взять контур на реальной плоскости вокруг дефекта - вихря, то на этом контуре параметр порядка непрерывен:

1) обычный Абрикосов вихрь: $\vec{n} = \text{const}$, а χ меняется от 0 до 2π ;

2) дефект поля \vec{n} дисклинация: $\chi = \text{const}$, \vec{n} поворачивается от 0 до 2π ; никакого проникновения поля с этим вихрем не связано; он тоже имеет логарифмическую энергию.

3) полуквантовый вихрь: \vec{n} поворачивается от 0 до π и общая фаза χ поворачивается от 0 до π при обходе по контуру вокруг дефекта. Эта конфигурация параметра порядка тоже непрерывная: $\vec{n}e^{i\chi} = -\vec{n}e^{i(\chi+\pi)}$, но поле \vec{n} и поле χ имеют разрыв вдоль линии разреза, начинающейся с дефекта в реальном пространстве. Физический же смысл имеет только поле $\vec{n} \cdot e^{i\chi}$. Заметим, что общая фаза χ набегаает в этом вихре на π , а значит, поток магнитного поля есть половинка от потока в вихре Абрикосова, поэтому-то он и "полуквантовый". Полуквантовые вихри бывают 4 типов: вектор \vec{n} может вращаться на 180° как по часовой стрелке, так и против, и этому соответствует заряд $\pm 1/2$. Но и общая фаза может либо увеличиваться от 0° до 180° , либо уменьшаться от 0° до -180° при обходе вокруг вихря, и этому соответствует другой заряд $\pm 1/2$. Два вихря с противоположными обоими зарядами притягиваются и могут аннигилировать. Обычный непрерывный вихрь может распасться на два полуквантовых вихря с противоположными первыми зарядами (соответствующими вектору \vec{n}), но одинаковыми вторыми зарядами (соответствующими общей фазе χ или токам).

Анизотропия легкая ось. Левее точки \mathcal{S} , когда параметр порядка или $z_1 = 0$ или $z_2 = 0$, может быть доменная стенка, разделяющая области с $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$. Можно посчитать энергию доменной стенки на единицу ее длины, ответ порядка $\sqrt{c_x \beta_a}$. Такая доменная стенка была рассмотрена в [14] и было показано, что обычный одноквантовый вихрь будет садиться на доменную стенку. В центре доменной стенки параметр порядка принимает значения из подмножества S_1 экватора сферы. Отображение линии доменной стенки, т. е. S_1 на S_1 экватор характеризуется целым числом Z , - это и есть число квантов потока (со знаком) в вихрях притянутых на доменную стенку.

4 Фазовая диаграмма

Теперь мы сосредоточимся на свойствах "кирального" состояния значительно ниже $T_c(H)$, и получим местоположения линий фазовых переходов и линий устойчивости однородного и кирального состояний \mathcal{LT} , \mathcal{ST}' и \mathcal{TO} . Это вычисление возможно благодаря тому, что $|\Delta|^2 = \text{const}$ в "киральном" состоянии, и таким образом явно можно выписать аналитические уравнения, определяющие $|\Delta|$ и соответствующий Q глубоко внутри сверхпроводящего состояния. Термодинамический потенциал в "киральном" состоянии может быть посчитан:

$$\Omega_{hel} = \frac{\Delta^2}{U} - \nu(\epsilon_F)T \sum_{\omega, \lambda} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi)^2 + \Delta^2} - |\omega| \right) \frac{d\varphi}{2}, \quad (4.1)$$

а уравнения, определяющие $|\Delta|$ и Q определяются из стационарных условий:

$$\frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial \Delta} = \frac{2\Delta}{U} - \nu(\epsilon_F)T \sum_{\omega, \lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta}{\sqrt{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \frac{d\varphi}{2} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} = -\frac{v_F}{2} \nu(\epsilon_F)T \sum_{\lambda \omega} \int_0^{2\pi} i \frac{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi) \sin \varphi}{\sqrt{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \frac{d\varphi}{2} = \frac{v_F}{2} \nu(\epsilon_F)T \sum_{\lambda \omega} f(H_\lambda, \omega) = 0 \quad (4.3)$$

Интегралы по углу φ могут быть преобразованы к эллиптическим интегралам (подробнее см. Приложение А). После такого преобразования два стационарных условия для "киральной" фазы имеют вид:

$$\frac{1}{U} = 2\nu(\epsilon_F)T \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{\mathbf{K}(k)}{\sqrt{\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2}}; \quad (4.4)$$

$$\sum_{\omega > 0, \lambda} f(H_\lambda, \omega) = 0, \quad (4.5)$$

где модуль Якоби

$$k = \frac{2\sqrt{\Delta|H_\lambda|}}{\sqrt{\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2}}; \quad (4.6)$$

функция $f(H_\lambda, \omega)$ выражается через полные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$f(H_\lambda) = \frac{1}{H_\lambda} \left((\omega^2 + H_\lambda^2 + \Delta^2) \frac{\mathbf{K}(k)}{\sqrt{\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2}} - \sqrt{\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2} \mathbf{E}(k) \right). \quad (4.7)$$

При $\Delta = 0$ первое уравнение самосогласования (4.4) сводится к уравнению (2.11), определяющему сверхпроводящий фазовый переход, а второе стационарное условие (4.5) сводится к условию \max_Q для правой части уравнения (4.4).

Из термодинамического потенциала для "кирального" состояния (4.1) можно исключить зависимость от Δ при помощи уравнения (4.4). Тогда термодинамический потенциал станет функцией только Q , и при маленьком Q может быть разложен по степеням Q :

$$\Omega_{hel}(Q) = \Omega_{hel}(0) + aQ^2 + bQ^4 + cQ^6, \quad (4.8)$$

где $c > 0$,

$$a = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Q^2} = \left(\frac{v_F}{2}\right)^2 \nu(\epsilon_F) T \sum_{\lambda, \omega} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta^2 \sin^2 \varphi}{((\omega + i\lambda H \sin \varphi)^2 + \Delta^2)^{3/2}} \frac{d\varphi}{2}, \quad (4.9)$$

$$b = \frac{d^4 E}{dQ^4} = \frac{\partial^4 \Omega}{\partial Q^4} - 3 \frac{\left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \Delta \partial Q^2}\right)^2}{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \Delta^2}}.$$

Условие $a = 0$, $b > 0$ определяет линию Лифшица \mathcal{LT} - линию перехода второго рода, которая оканчивается в точке \mathcal{T} , где коэффициент $b = 0$ меняет знак. Используя уравнения (4.4,4.5), мы вычисляем координаты \mathcal{T} точки: $(H, T) = (1.547, 0.455)T_{c0}$. Ниже точки \mathcal{T} , при понижении температуры, $b < 0$ и имеет место переход первого рода из однородного состояния. Таким образом, точка \mathcal{T} - это критическая точка переходов второго рода, и, согласно [18], в этой точке кривая перехода второго рода должна смыкаться с кривой перехода первого рода без излома.

Однородный сверхпроводник, существующий при полях левее линии Лифшица, может стать "бесщелевым" при повышении температуры. Мы сталкиваемся с ситуацией, когда одна величина описывает параметр порядка, т. е. волновую функцию конденсата Δ , и совсем другая характеризует минимальную энергию связи пар, или энергетическую щель. Известно [16], что полюс функции Грина соответствует спектру квазичастицы: $E_p = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} - \lambda H \sin \varphi_p$. Откуда видим, что не все пары имеют одинаковую энергию связи и минимальная энергия связи (энергетическая щель) может обратиться в ноль. Таким образом, при $H \geq \Delta$ имеем бесщелевую сверхпроводимость. Линия $H = \Delta$ - линия перехода в бесщелевую сверхпроводимость, - показана на Рис.5 пунктиром.

Линия устойчивости \mathcal{LO} BCS состояния может быть определена и другим способом, - вычислением вариации термодинамического потенциала при слабой статической

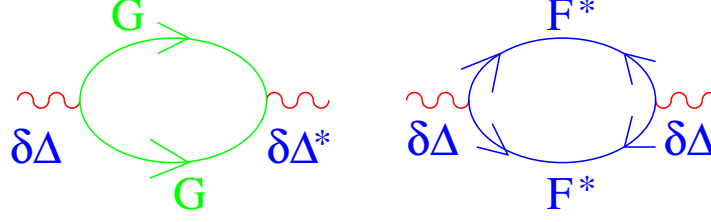


Рис. 8: Диаграммы, определяющие зависимость свободной энергии от $\delta\Delta_q$.

модуляции параметра порядка вида $\delta\Delta(\vec{r}) = \Delta_{-q} \exp(-iqy) + \Delta_q \exp(iqy)$, где $q = v_F Q$ - маленький волновой вектор, на котором возникает неоднородное состояние (присутствие двух Фурье гармоник в возмущении обязано четности по Q стационарных условий в киральной фазе):

$$\delta\Omega_{\delta\Delta} = \vec{u}^+ \hat{\mathcal{C}}(q) \vec{u}, \quad (4.10)$$

где мы ввели спинор возмущения $\vec{u} = (\delta\Delta_{-q}, \delta\Delta_q^*)$, и "куперовскую матрицу"

$$\hat{\mathcal{C}}(q) = \frac{\hat{1}}{U} - \sum_{\omega > 0, \lambda, \mathbf{p}} \begin{pmatrix} G_\lambda(p - q/2) G_\lambda(-p - q/2) & F_\lambda(p - q/2) F_\lambda(-p - q/2) \\ F_\lambda^*(p - q/2) F_\lambda^*(-p - q/2) & G_\lambda(p + q/2) G_\lambda(-p + q/2) \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

здесь функции Грина соответствуют основному BCS состоянию:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\lambda \left(\omega, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} \right) &= - \frac{i\omega - \lambda H \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi + q/2 \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i\lambda H \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + q/2 \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2}, \\ \mathcal{F}_\lambda \left(\omega, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} \right) &= \frac{\lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \Delta}{(\omega + i\lambda H \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + q/2 \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2} = \\ &= -\mathcal{F}_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Куперовские петли, соответствующие возмущению (4.10), показаны на Рис. 8.

Матрица $\hat{\mathcal{C}}$ имеет два собственных значения $\epsilon_2(q) > \epsilon_1(q)$:

$$\begin{aligned} \epsilon_1(q) &= \frac{1}{U} - \frac{T}{2} \sum_{\omega, \lambda} \nu(\epsilon_F) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \Delta^2}} \frac{\tilde{\omega}^2 + \Delta^2 - i\tilde{\omega} \frac{q}{2} \sin \varphi}{\tilde{\omega}^2 + \Delta^2 + (\frac{q}{2} \sin \varphi)^2} \approx \\ &\approx \epsilon_1(0) + \frac{T}{2} \sum_{\omega, \lambda} \nu(\epsilon_F) \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{i\tilde{\omega}}{(\tilde{\omega}^2 + \Delta^2)^{3/2}} \frac{q}{2} \sin \varphi + \frac{1}{(\tilde{\omega}^2 + \Delta^2)^{3/2}} \left(\frac{q}{2} \sin \varphi \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

где введено обозначение $\tilde{\omega} = \omega + i\lambda H \sin \varphi$; во второй строчке сделано разложение до второй степени по q . Два собственных значения соответствуют существованию двух

типов возмущения,- продольных $\delta\Delta_q \sim \Delta$ и фазовых $\delta\Delta_q \sim i\Delta$:

$$\delta\Delta_q = \frac{\Delta}{|\Delta|} |\delta\Delta|_q + i\Delta\delta\varphi_q, \quad (4.14)$$

(мы создали маленькую неоднородность на фоне основного BCS состояния $\Delta = |\Delta|e^{i\varphi}$:

$$\Delta(\vec{r}) = (|\Delta| + |\delta\Delta|(\vec{r}))e^{i\varphi+i\delta\varphi(\vec{r})} \approx \Delta + \frac{\Delta}{|\Delta|} |\delta\Delta|(\vec{r}) + i\Delta\delta\varphi(\vec{r}).$$

Заметим, что $\delta\varphi$ - действительное, и $\delta\varphi_q = \int \delta\varphi e^{iq\vec{r}} d^2\vec{r} = \delta\varphi_{-q}^*$.)

После взятия интеграла по $\varphi_{\mathbf{p}}$ в (4.13) получаем, что выполнено уравнение самосогласования для параметра порядка Δ (4.4) для $Q = 0$, а значит - статическая фазовая мода - бесщелевая:

$$\epsilon_1(q=0) = 0. \quad (4.15)$$

В уравнении для энергии возмущения (4.13) коэффициент перед линейным по q членом обращается в ноль при одновременной замене $\lambda \rightarrow -\lambda$, $\sin\varphi \rightarrow -\sin\varphi$, поэтому $\epsilon_1(q)$ имеет всегда экстремум при $q = 0$. Мы ищем линию, на которой этот экстремум меняется с \min на \max при увеличении магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1(q)}{\partial q^2} = 0, \quad (4.16)$$

и это есть второе условие для фазового перехода из BCS в "киральное" состояние. После взятия интегралов по $\varphi_{\mathbf{p}}$, (4.16) имеет вид:

$$\sum_{\omega>0} \left(J + 2\omega \frac{\partial}{\partial \omega} J + \frac{\Delta^2 - \omega^2}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \Delta} J \right) = 0, \quad (4.17)$$

где J -ядро уравнения (4.4) при $Q = 0$:

$$J = \frac{\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{4\Delta H}{\omega^2 + (H+\Delta)^2}} \right)}{\sqrt{\omega^2 + (H+\Delta)^2}}.$$

Заметим, что коэффициент при Q^2 в разложении сверхпроводящей энергии киральной фазы (4.8) совпадает с коэффициентом при q^2 в разложении энергии фазового возмущения (4.13) с точностью до умножения на Δ^2 . Таким образом, условия (4.9) и (4.16), определяющие границу стабильности BCS состояния, равносильны. Мы решаем численно систему двух уравнений: уравнение (4.15) (которое сводится к уравнению (4.4) при $Q = 0$) и второе уравнение - (4.17); получаем линию \mathcal{LO} фазового перехода между однородной BCS фазой и комплексным параметром порядка, показанную на Рис.5.

Обратим внимание, что было доказано \mathcal{LT} - линия фазового перехода второго рода, а ниже точки \mathcal{T} начинается переход первого рода, так что \mathcal{TO} - это своего рода область локальной устойчивости BCS состояния. Действительная линия перехода первого рода \mathcal{TO}' лежит при более низких значениях магнитного поля ($H_{O'} < H_O = 1.76T_{c0}$).

Линия устойчивости \mathcal{ST}' "кирального" состояния определена посредством вычисления вариации термодинамического потенциала при слабой статической модуляции параметра порядка вида

$$\delta\Delta(\vec{r}) = v_{-q} \exp(-iqy) + v_{q+2Q} \exp(i(q+2Q)y)$$

(присутствие двух Фурье гармоник в возмущении обязано неоднородности основного "кирального" состояния):

$$\delta\Omega_{\delta v} = \vec{v}^+ \hat{\mathcal{A}}(q) \vec{v}, \quad (4.18)$$

где $\vec{v} = (\delta v_{-q}, \delta v_{q+2Q}^*)$ - спинор возмущения, а "куперовская" матрица возмущения дается

$$\hat{\mathcal{A}}(q) = \frac{\hat{1}}{U} - \sum_{\omega > 0, \lambda, \mathbf{p}} \begin{pmatrix} G_\lambda(p - q/2)G_\lambda(-p - q/2) & F_\lambda(p - q/2)F_\lambda(-p - q/2) \\ F_\lambda^*(p - q/2)F_\lambda^*(-p - q/2) & G_\lambda(p + q/2 + Q)G_\lambda(-p + q/2 + Q) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Квазичастичные возбуждения формируются на основе неоднородного "кирального" состояния, поэтому куперовские петли в матрице $\hat{\mathcal{A}}(q)$ сделаны из "киральных" функций Грина:

$$\begin{aligned} G_\lambda \left(\omega, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) &= -\frac{i\omega - (\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2}, \\ F_\lambda \left(\omega, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) &= \frac{\lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \Delta}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2} = \\ &= -F_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} + \vec{Q} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} G_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) &= -\frac{-i\omega + (\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2}, \\ F_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right) &= -\frac{\lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \Delta}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$G_\lambda \left(\omega, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} + \vec{Q} \right) = - \frac{i\omega - (\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi + \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2}, \quad (4.22)$$

$$G_\lambda \left(-\omega, -\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} + \vec{Q} \right) = - \frac{-i\omega + (\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}}}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\xi - \frac{q+Q}{2} \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + |\Delta|^2}$$

Матрица \hat{A} имеет два собственных значения $\epsilon_1(q) < \epsilon_2(q)$:

$$\epsilon_{2,1}(q) = \left(\frac{1}{U} - \frac{g_{-q} + g_{q+2Q}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{g_{-q} - g_{q+2Q}}{2} \right)^2 + |f_{-q}|^2},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} - \frac{g_{-q} + g_{q+2Q}}{2} &= \sum_{\omega>0, \lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4} \frac{1}{\sqrt{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \times \\ &\times \left(1 - \frac{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 - (\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)^2}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi_{\mathbf{p}})^2 + (\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)^2 + \Delta^2} \right), \\ \frac{g_{-q} - g_{q+2Q}}{2} &= \sum_{\omega>0, \lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4} \frac{1}{\sqrt{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \times \\ &\times \frac{2i(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)(\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + (\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)^2 + \Delta^2}, \\ f_{-q} &= \sum_{\omega>0, \lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4} \frac{1}{\sqrt{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \times \\ &\times \frac{\Delta^2}{(\omega + i(\lambda H + Q/2) \sin \varphi)^2 + (\frac{q+Q}{2} \sin \varphi)^2 + \Delta^2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь $g_{-q} = \sum_{\omega>0, \mathbf{p}, \lambda} G_{\lambda, \mathbf{p}-\mathbf{q}/2} G_{\lambda, -\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}$ и $g_{q+2Q} = \sum_{\omega>0, \mathbf{p}, \lambda} G_{\lambda, \mathbf{p}+\mathbf{q}/2+\mathbf{Q}} G_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{q}/2+\mathbf{Q}}$ - куперовские петли из нормальных функций Грина, а $f_{-q} = \sum_{\omega>0, \mathbf{p}, \lambda} F_{\lambda, \mathbf{p}-\mathbf{q}/2} F_{\lambda, -\mathbf{p}-\mathbf{q}/2}$ - куперовская петля из аномальных функций Грина, $1/U$ берется из уравнения самосогласования (4.2).

Интегралы (4.23) можно выразить через эллиптические интегралы первого и второго рода, подробнее см. Приложение Б.

Линия устойчивости "кирального" состояния ST' определяется как множество точек на фазовой диаграмме, в которых возникновение моды δv становится энергетически выгодным: $\min_q \epsilon_1(q) = 0$. Мы решаем численно четыре уравнения одновременно: два

уравнения самосогласования (4.4, 4.5), которые определяют равновесные Δ и Q , совместно с двумя уравнениями $\partial_q \epsilon_1(q) = 0$ и $\epsilon_1(q) = 0$ ($\epsilon_1(q)$ дается (4.23)).

Подчеркнем, что линия \mathcal{ST}' действительно соответствует фазовому переходу из "кирального" состояния, *если* этот переход - второго рода; другой возможный сценарий - это переход первого рода от "кирального" к пространственно-четной и симметричной по обращению времени полосатой структуре, который происходит при слегка более низких значениях поля H для данного T .

В частности, мы нашли, что вблизи $T_c(H)$ имеет место фазовый переход *второго* рода, оценивая члены восьмого порядка по $|\Delta_Q|$ в функционале Гинзбурга-Ландау. А именно, если запараметризовать спинор параметра порядка вблизи симметричной точки как

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\psi/2} e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

то анизотропная часть в разложении Гинзбурга-Ландау примет вид

$$f(\kappa) = \beta_a \Delta^4 \cos^2 \theta + \kappa \Delta^8 \cos^4 \theta.$$

От знака коэффициента κ перед членом $\cos^4 \theta$ зависит какого рода переход вблизи линии $T_c(H)$. Если удерживать члены не выше восьмого порядка, то функционал Гинзбурга-Ландау имеет вид

$$\begin{aligned} F_{sn} = & \alpha \Delta^2 + \beta_s \Delta^4 + \beta_a (|u|^2 - |v|^2)^2 + \\ & + \frac{(C_1 + C_2)}{4} \Delta^6 + \frac{(3C_1 - C_2)}{4} \Delta^2 (|u|^2 - |v|^2)^2 + \\ & + \frac{(D_1 + D_2 + D_3/2)}{8} \Delta^8 + \frac{(6D_1 - D_3)}{8} (|u|^2 - |v|^2)^2 \Delta^4 + \frac{(D_1 - D_2 + D_3/2)}{8} (|u|^2 - |v|^2)^4 + \\ & + E_{3Q}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $\beta_{s,a}$ определены в (2.16), а

$$E_{3Q} = \mathcal{V}^+ A \mathcal{V} + (X^+ \mathcal{V} + \mathcal{V}^+ X) \quad (4.26)$$

и матрица A и вектор X содержат численные значения l_i для петель с двумя, четырьмя

и шестью вершинами (подробнее см. Приложение I):

$$A = \begin{pmatrix} l_7 + l_9|u|^2 + l_{10}|v|^2 & l_{11}uv \\ l_{11}u^*v^* & l_7 + l_{10}|u|^2 + l_9|v|^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V}^+ = (u_{3Q}^*, v_{-3Q}), \quad X^+ = (x^*, y),$$

$$x = l_8u^2v^* + l_{12}u^2v^*|u|^2 + (l_{13} + l_{14})u^2v^*|v|^2;$$

$$y = l_8v^2u^* + l_{12}v^2u^*|v|^2 + (l_{13} + l_{14})v^2u^*|u|^2. \quad (4.27)$$

В функционале Гинзбурга-Ландау в E_{3Q} удержаны все члены, содержащие гармоники u_{3Q} и (либо) v_{-3Q} и дающие вклад не выше, чем восьмого порядка по $u_{\pm Q}$. И этого достаточно, поскольку учет в (4.25) как более высоких гармоник (следующая пара, которая непрерывно появляется при понижении температуры, это (u_{5Q}^*, v_{-5Q})), так и членов, содержащих более высокие степени $u_{\pm 3Q}$, чем вторая (а следующая - это четвертая, из законов сохранения импульса в петле) даст вклад только более высокого порядка, чем восьмой по $u_{\pm Q}$. Значения u_{3Q} и v_{-3Q} , на которых достигается минимум сверхпроводящей энергии, находятся из условия $\frac{\partial E_{3Q}}{\partial \mathcal{V}} = 0$. Из последнего следует

$$\mathcal{V} = -A^{-1}X \quad (4.28)$$

и, соответственно,

$$E_{3Q} = -X^+A^{-1}X. \quad (4.29)$$

Выражение (4.29) можно разложить по степеням малых $U = |u|^2$ и $V = |v|^2$:

$$E_{3Q} = d_2 \cdot (|u|^6|v|^2 + |u|^2|v|^6) + d_3 \cdot |u|^4|v|^4, \quad (4.30)$$

где

$$d_2 = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 E_{3Q}}{\partial U^3} \frac{\partial E_{3Q}}{\partial V} = \frac{l_8(-2l_{12}l_7 + l_8l_9)}{l_7^2}$$

$$d_3 = \left(\frac{1}{2!}\right)^2 \frac{\partial^2 E_{3Q}}{\partial U^2} \frac{\partial^2 E_{3Q}}{\partial V^2} = \frac{2l_8(-2(l_{13} + l_{14})l_7 + l_8(l_{10} + l_{11}))}{l_7^2}. \quad (4.31)$$

После несложных алгебраических преобразований, из (4.30) и (4.25) получим, что анизотропная часть с учетом членов восьмого порядка по $u_{\pm Q}$ сверхпроводящей энергии дается выражением

$$F_{sn}^{anis} = \beta_a(u^2 - v^2)^2 + \frac{1}{8}(D_1 - D_2 + D_3/2 - d_2 + d_3/2)(u^2 - v^2)^4, \quad (4.32)$$

где в (4.25) мы пренебрегли членами Δ/T_c по сравнению с 1. Мы получили (см. Приложение В) $\kappa = D_1 - D_2 + D_3/2 - d_2 + d_3/2 = 0.0053 > 0$. Откуда и последовало, что переход второго рода.

Правее симметричной точки \mathcal{S} (при полях выше H_S), под линией сверхпроводящего перехода $T_c(H)$, при понижении температуры непрерывно индуцируются нечетные гармоники парами $\pm 3Q, \pm 5Q, \dots$ ввиду свойства закона сохранения импульса в коэффициентах разложения Гинзбурга-Ландау. При этом заметим, что если для полосатой структуры $u_Q = v_{-Q}^*$, то из уравнений (4.27,4.28), а также из эрмитовости матрицы A следует, что $u_{3Q} = v_{-3Q}^*$, а значит пространственная четность и симметрия по обращению времени полосатой структуры с учетом высших гармоник сохраняется. Поэтому из симметричных соображений и ввиду того, что найденный нами переход второго рода из киральной фазы происходит в фазу, у которой тоже нарушена пространственная четность и симметрия по обращению времени, должен существовать еще один переход из последней в четную полосатую структуру. Этот переход будет начинаться в точке \mathcal{S} , но будет лежать чуть правее (более высокие значения поля) от линии \mathcal{ST}' .

Тот факт, что точки \mathcal{T} и \mathcal{T}' , различны, но близки друг к другу - в пользу существования критической точки \mathcal{K} на линии \mathcal{ST}' (подобной точке \mathcal{T} на линии \mathcal{LO}), ниже которой фазовый переход от кирального в состояние типа LOFF становится переходом слабо первого рода.

5 Ток и электромагнитный отклик в киральной фазе

Вид параметра порядка (2.1), состоящего из конечного числа гармоник и \mathbf{Q}_i отличных от нуля в основном состоянии, не означает, что надо сопоставлять электрический ток каждой комплексной гармонике. Мы показываем, что ток возникает только в неравновесном состоянии.

Сверхпроводящий ток может быть записан в следующем виде:

$$\vec{j}_s = \frac{e}{2} T \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \left(\frac{\partial \epsilon_{\lambda, \mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} G_{\lambda\lambda}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, \omega) - \frac{\partial \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} G_{\lambda\lambda}(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, -\omega) \right), \quad (5.1)$$

где функция Грина электрона в киральном состоянии ($|\Delta(\mathbf{r})| = \text{const}$) со спектром од-

ночастичного гамильтониана равным $\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}}$ дается

$$G_{\lambda\lambda}(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2, \omega) = -\frac{i\omega + \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{\left(\omega + i\frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} - \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} + \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{2}\right)^2 + \Delta^2}, \quad (5.2)$$

Термодинамический потенциал в киральном состоянии может быть явно выписан для произвольного спектра $\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}}$ электрона:

$$\Omega = -\frac{T}{2} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \log \left[\left(\omega + i\frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} - \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} + \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{2}\right)^2 + \Delta^2 \right], \quad (5.3)$$

а его производная - легко вычислена:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{Q}} = -\frac{T}{4} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \frac{i\tilde{\omega} \left(\frac{\partial \epsilon_{\lambda, \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} \right) + \xi \left(\frac{\partial \epsilon_{\lambda, \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{\partial \mathbf{p}} \right)}{\tilde{\omega}^2 + \xi^2 + \Delta^2}, \quad (5.4)$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$\tilde{\omega} = \omega + i\frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} - \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{2}, \quad \xi = \frac{\epsilon_{\lambda, \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} + \epsilon_{\lambda, -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}{2}.$$

Подставляя в оператор тока (5.1) функцию Грина (5.2), и непосредственно сравнивая получающееся выражение со стационарным условием для киральной фазы (5.4), видим

$$\vec{j}_s = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial \vec{Q}}. \quad (5.5)$$

Таким образом, прямое вычисление сверхпроводящего тока \vec{j}_s показало, что в любом порядке по α/v_F ток в равновесии равен нулю.

Оператор сверхпроводящего тока в киральном базисе получается поворотом оператора тока (1.3) в спиновом базисе:

$$\hat{j}^{(chir)} = U + \vec{j} U$$

матрицей перехода $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\varphi} & -e^{i\varphi} \end{pmatrix}$:

$$\hat{j}_y^{(chir)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{p}{m} - \alpha\right) \sin \varphi & -i\alpha \cos \varphi \\ i\alpha \cos \varphi & \left(\frac{p}{m} + \alpha\right) \sin \varphi \end{pmatrix}; \quad \hat{j}_x^{(chir)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{p}{m} - \alpha\right) \cos \varphi & i\alpha \sin \varphi \\ -i\alpha \sin \varphi & \left(\frac{p}{m} + \alpha\right) \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Мы вычислили электромагнитный отклик $\delta j_\alpha / \delta A_\beta = -\frac{e^2}{mc} n_s^{\alpha\beta}$ в киральном состоянии, используя стандартные диаграммные методы и формулы (5.6) для операторов тока:

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{e^2}{c} T \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \left(G^2 \left(\vec{p} + \vec{Q}/2 \right) + F^2 \left(\vec{p} + \vec{Q}/2 \right) \right) \cos^2 \varphi \left(\frac{p}{m} - \lambda \alpha \right)^2 A_x; \\ j_y &= \frac{e^2}{c} T \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} \left(G^2 \left(\vec{p} + \vec{Q}/2 \right) + F^2 \left(\vec{p} + \vec{Q}/2 \right) \right) \sin^2 \varphi \left(\frac{p}{m} - \lambda \alpha \right)^2 A_y \end{aligned} \quad (5.7)$$

и нашли

$$n_s^{yy} = 4 \frac{m}{\hbar} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Q^2}, \quad (5.8)$$

то есть пропорциональный параметру a из уравнения (4.8). Таким образом, на линии Лифшица \mathcal{LT} нет никакого линейного сверхпроводящего тока в направлении перпендикулярном к магнитному полю. Компонента n_s^{xx} нигде не исчезает в киральной области и порядка n_s BCS состояния:

$$n_s^{xx} = \frac{4m}{\hbar^2} \left(\frac{v_F^2}{2} \Delta \frac{\partial}{\partial \Delta} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial \Delta} \right) - \frac{\partial^2 \Omega_{hel}}{\partial Q^2} \right). \quad (5.9)$$

Этот случай сильно отличается от классической LOFF задачи, где показано, что в киральном состоянии n_s везде обращается в ноль [6]. Различие - вероятно вследствие того, что в нашей задаче направление \mathbf{Q} фиксируется прикладываемым полем \mathbf{h} , в то время как для случая ферромагнитного сверхпроводника оно произвольно. Полученное поведение тензора $n_s^{\alpha\beta}$ указывает на существенно анизотропный электромагнитный отклик поверхностного сверхпроводника вблизи линии Лифшица \mathcal{LT} .

6 Преобразование состояния BCS в "слабо киральную" фазу

Выражение (4.1) для термодинамического потенциала в киральной фазе было получено в пренебрежении членом αQ малым по сравнению с $v_F Q$ в энергии электрона. В этом приближении термодинамический потенциал был симметричен по замене Q на $-Q$ и, соответственно, разложение (4.8) шло по четным степеням Q . Если учитывать члены α/v_F , то в уравнении (4.1) надо заменить $H_\lambda = \lambda H + v_F Q/2$ на $\lambda H + v_F Q/2 - \lambda \alpha Q/2$,

после чего второе стационарное условие (4.3) существенно изменится и примет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} = \nu(\epsilon_F) T \sum_{\lambda\omega} \left(\frac{v_F}{2} - \lambda \frac{\alpha}{2} \right) f(H_\lambda, \omega), \quad (6.1)$$

откуда следует, что теперь ни при каких значениях поля не будет достигаться минимум сверхпроводящей энергии на $Q = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} \right|_{Q=0} &= -\alpha \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} f(H, \omega) = \\ &= -\frac{\alpha}{H} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} \left[\frac{(\omega^2 + H^2 + \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2}} \mathbf{K}(k) - \sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2} \mathbf{E}(k) \right] \neq 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

и разложение термодинамического потенциала по степеням Q будет содержать линейный член:

$$\Omega_{hel}(Q) = \Omega_{hel}(0) + \eta Q + \tilde{a} Q^2 + \dots, \quad (6.3)$$

где $\eta = \left. \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} \right|_{Q=0}$ и $\tilde{a} = \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Omega_{hel}}{\partial Q^2} \right|_{Q=0}$, а вторая производная дается выражением

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Omega_{hel}}{\partial Q^2} \right|_{Q=0} &= \frac{v_F^2}{2} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} \frac{\partial f(H, \omega)}{\partial H} = \\ &= \frac{v_F^2}{2H^2} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} \left[-\frac{(\omega^2 + \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2}} \mathbf{K}(k) + \frac{(\omega^2 + \Delta^2)^2 + H^2(\omega^2 - \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2} (\omega^2 + (H - \Delta)^2)} \mathbf{E}(k) \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

k - модуль Якоби (4.6).

Ввиду малости коэффициента η можем везде в области левее линии Лифшица \mathcal{LT} для сверхпроводящей энергии пользоваться разложением (6.3), из которого можем найти равновесный вектор слабой модуляции параметра порядка в этой области:

$$Q_{hel} = -\frac{\eta}{2\tilde{a}} = \frac{2\alpha H}{v_F^2} \times \frac{\sum_{\omega} \left[\frac{(\omega^2 + H^2 + \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2}} \mathbf{K}(k) - \sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2} \mathbf{E}(k) \right]}{\sum_{\omega} \left[-\frac{(\omega^2 + \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2}} \mathbf{K}(k) + \frac{(\omega^2 + \Delta^2)^2 + H^2(\omega^2 - \Delta^2)}{\sqrt{\omega^2 + (H + \Delta)^2} (\omega^2 + (H - \Delta)^2)} \mathbf{E}(k) \right]} \quad (6.5)$$

Заметим, что в пределе $H \rightarrow 0$ выражения (6.2) и (6.4) можно разложить в ряд по H :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega_{hel}}{\partial Q} \right|_{Q=0} &\approx -\frac{\alpha}{2} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} \frac{\pi \Delta^2 H}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = -\frac{\alpha H}{2} \nu(\epsilon_F) (1 - Y(T, \Delta)), \\ \left. \frac{\partial^2 \Omega_{hel}}{\partial Q^2} \right|_{Q=0} &\approx \frac{v_F^2}{4} \nu(\epsilon_F) T \sum_{\omega} \frac{\pi \Delta^2}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = \frac{v_F^2}{4} \nu(\epsilon_F) (1 - Y(T, \Delta)) \end{aligned} \quad (6.6)$$

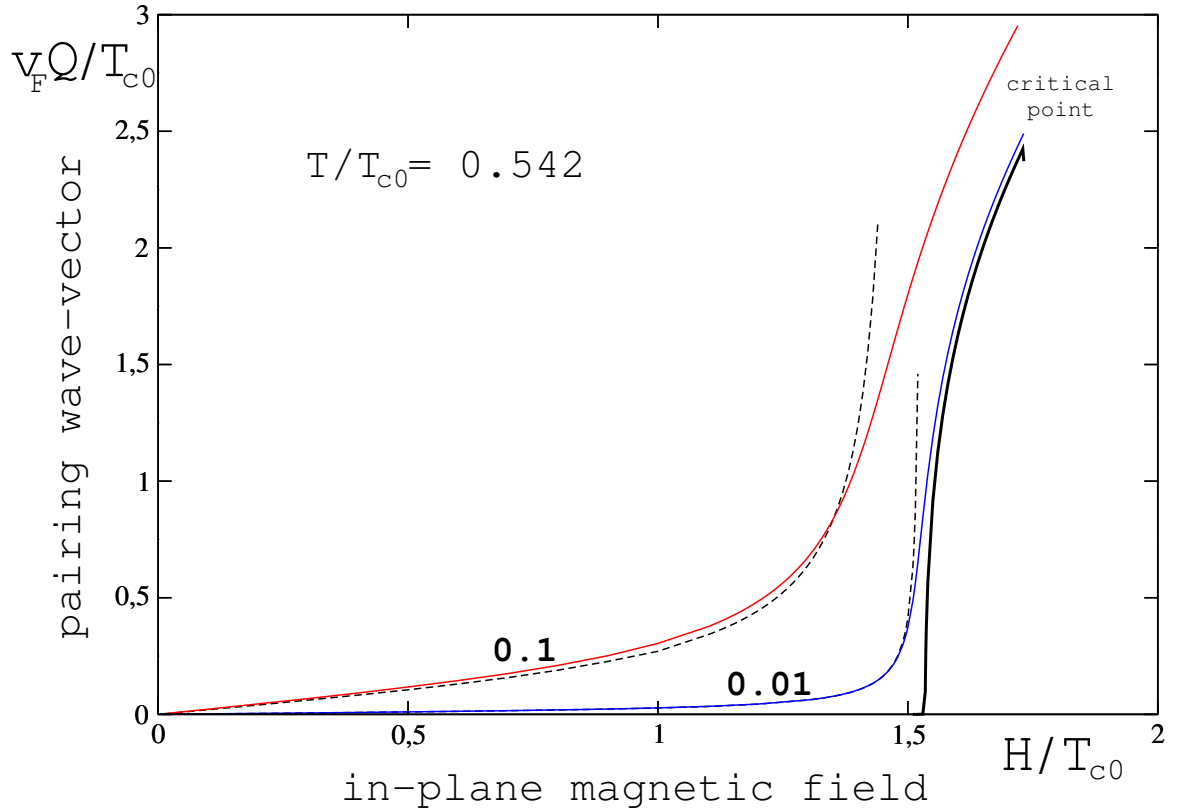


Рис. 9: Волновой вектор куперовской пары как функция магнитного поля для постоянного значения температуры $T = 0.542T_{c0}$. Жирная линия построена в пренебрежении, а тонкие линии - при учете в сверхпроводящей энергии киральной фазы малых членов α/v_F . Пунктирные линии строятся по формуле (6.5), область применимости которой - малые Q . Графики построены для двух значений α/v_F равных 0.1 и 0.01.

Таким образом, учет членов первого порядка по α/v_F в (4.1) преобразует однородную фазу в "слабо киральную" фазу с маленьким волновым вектором

$$Q_{hel} = 2\alpha H/v_F^2, \quad (6.7)$$

а линию перехода "второго рода" \mathcal{LT} расширяет до узкой области кроссовера. Формула (6.7) применима для маленьких магнитных полей $H < 0.5T_{c0}$. При более высоких полях зависимость вектора спаривания от магнитного поля становится нелинейной; в слабо киральной фазе левее линии Лифшица применима формула (6.5); график $Q_{hel}(H)$ показан на Рис.(9)

Согласно [19], градиент фазы конденсатной волновой функции определяет плот-

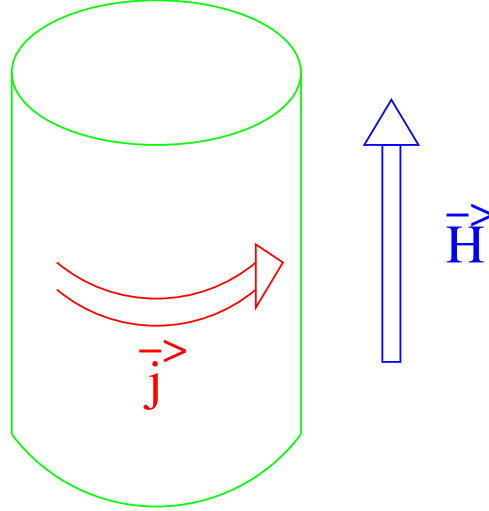


Рис. 10: Геометрическая конфигурация для сверхпроводящего листа (циклические граничные условия), при которой возможно протекание тока в основном состоянии в киральной фазе при включении продольного магнитного поля.

ность сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{j}_s^{(1)} = \frac{e\hbar}{2m} n_s \vec{Q}_{hel}, \quad (6.8)$$

где n_s - плотность числа сверхпроводящих электронов, $e = -|e|$ - заряд электрона, а m - его истинная масса. Согласно (5.8) и (6.6), для слабых магнитных полей

$$n_s^{yy} = \frac{mv_F^2}{\hbar} \nu(\epsilon_F) (1 - Y(T, \Delta)) \quad (6.9)$$

и, соответственно, ток в y - направлении, возникающий от градиента фазы, дается:

$$j_y^{(1)} = e\nu(\epsilon_F)\alpha(1 - Y(T, \Delta))H, \quad (6.10)$$

Недавно в литературе появилась статья [8], в которой утверждалось, что для нашей системы при приложении магнитного поля в плоскости потечет ток в перпендикулярном полю направлению. Действительно, вычисление тока в BCS-состоянии дает ненулевое значение (совпадающее с [8]):

$$j_y^{(2)} = \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G_\lambda(\omega, \mathbf{p}) \hat{j}_y^{(chir)} = -e\nu(\epsilon_F)\alpha(1 - Y(T, \Delta))H, \quad (6.11)$$

где $\hat{j}_y^{(chir)}$ дается выражением (5.6).

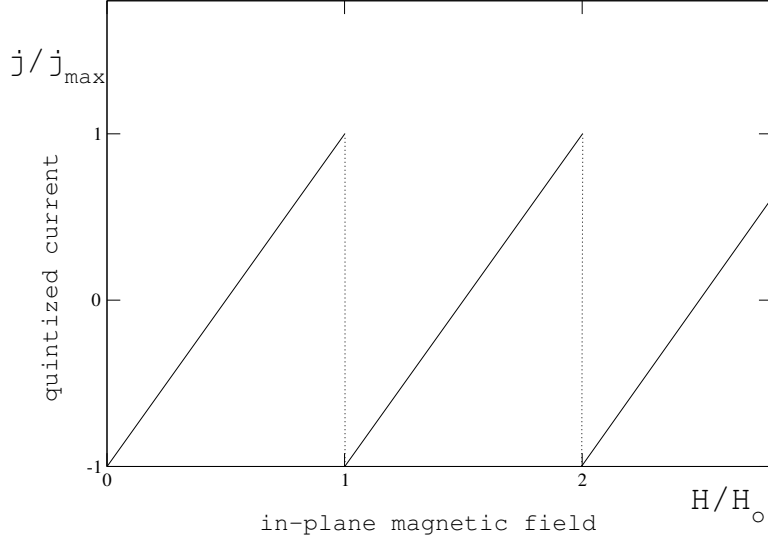


Рис. 11: пилообразная зависимость сверхпроводящего тока j на цилиндре от продольного магнитного поля H ; амплитуда $j_{max} = \frac{e\hbar}{2m}n_s/R$, период $H_o = v_F^2/(2\alpha R)$. Строго линейная зависимость, показанная на рисунке, имеет место в случае $H_o \ll T_{c0}$ и $T = 0$, когда можно пренебречь флуктуациями тока.

Но следует помнить, что состояние BCS, согласно (6.2), *не является* равновесным для любых значений поля. Основное состояние всегда неоднородно и при малых магнитных полях оно слабо киральное с вектором модуляции параметра порядка (6.7). Полный ток в равновесии, согласно (5.5), в киральной фазе всегда ноль. И в слабо киральной фазе, для малых магнитных полей $H < T_{c0}$, полный ток можно представить как сумму двух вкладов $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_s^{(1)} + \mathbf{j}_s^{(2)} = 0$, что наглядно физически: вклад $\mathbf{j}_s^{(1)}$ ”доучитывает” слабую пространственную модуляцию параметра порядка. На самом деле будет происходить следующее: при приложении магнитного поля в плоскости ток не потечет, но на концах сверхпроводника можно будет наблюдать разность фаз $\Delta\chi = LQ_{hel}$.

Однако, если свернуть сверхпроводник в цилиндр, и приложить магнитное поле вдоль оси, то по поверхности цилиндра ток будет течь (см. Рис. 10), поскольку на фазу будет наложено условие квантования $\delta\chi = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$ Полный ток будет даваться суммой ”тока от спин-орбиты” $\mathbf{j}_s^{(2)}$ и ”тока от градиента квантованной фазы”:

$$j_{quant} = \frac{e\hbar}{2m}n_s \left(-Q_{hel} + \frac{2\pi n}{2\pi R} \right),$$

где R - радиус цилиндра, $Q_{hel} = 2\alpha H/v_F^2$. Целое число n будет расти с увеличением поля так, чтобы ток был минимален: $n = \text{целая часть}[H/H_o]$, где $H_o = \frac{v_F^2}{2\alpha R}$. Ток будет

обращаться в ноль только при $H = nH_o$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Максимальное значение тока будет равно $j_{max} = \frac{e\hbar}{2m} n_s / R$. Зависимость тока от магнитного поля будет пилообразной как показано на Рис.11.

7 Фазовая диаграмма в присутствии немагнитных примесей

В этом разделе мы изучаем влияние немагнитных примесей, характеризующихся временем τ между упругими столкновениями, на фазовую диаграмму. Взаимодействию между электронами и атомами примеси соответствует гамильтониан

$$\hat{H}_{int} = \sum_i \int \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) u(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) d^2\mathbf{r}. \quad (7.1)$$

В последнем волновую функцию электрона раскладываем по базису плоских волн $\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} a_\alpha(\mathbf{p})$; и считаем примеси точечными $u(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) = u\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$. Получаем примесный гамильтониан в импульсном представлении в спиновом базисе:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{V} \sum_i \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} u e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{R}_i} \psi_\alpha^+(\mathbf{p}) \psi_\alpha(\mathbf{p}'). \quad (7.2)$$

Переход в киральный базис $a_\alpha(\mathbf{p}) = \eta_{\lambda\alpha}(\mathbf{p}) \hat{a}_{\lambda\mathbf{p}}$ задается матрицей из столбцов спинора (1.4); и примесный гамильтониан в киральном базисе имеет вид:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{V} \sum_i \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} u e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{R}_i} a_{\mathbf{p}\lambda}^+ M_{\lambda\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') a_{\mathbf{p}'\mu}, \quad (7.3)$$

где

$$M_{\lambda\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{2} (1 + \lambda\mu e^{i(\varphi_{\mathbf{p}} - \varphi_{\mathbf{p}'})}). \quad (7.4)$$

После стандартной процедуры (см. [16], стр.328) для примесного гамильтониана в киральном представлении (7.3), мы находим функцию Грина в присутствии немагнитных примесей для нормального металла:

$$G_\lambda(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{i\omega - \xi(\mathbf{p}) - \lambda H \sin \varphi_{\mathbf{p}} + \frac{i}{2\tau} \text{sgn}\omega}, \quad (7.5)$$

где

$$\frac{1}{2\tau} = \pi n_{imp} u^2 \nu(\epsilon_F), \quad (7.6)$$

n_{imp} - число атомов примеси в единице объема. Мы используем стандартный 'крестовый' метод, в котором матрица (7.4) соответствует примесному кресту, а множитель $n_{imp}u^2$ - линии примеси. Куперовская петля в присутствии немагнитных примесей дается непересекающимися диаграммами, показанными на Рис.(12). Это - чередующаяся последовательность блоков из двух Гриновских функций и линий примеси. Линия примеси несет нулевую частоту, что соответствует статическому примесному потенциалу, и рассеяние электрона на такой примеси упругое. Жирные функции Грина- функции Грина свободных "диффузных" электронов, то есть приняты во внимание процессы рассеяния отдельного квазичастичного возбуждения вблизи $T_c(H)$. В ведущем порядке в каждом блоке импульсы на верхних и нижних линиях - противоположны, а киральности одинаковы. Мы рассматриваем эти два электрона, рассеивающиеся на одной и той же примеси. Выражение (7.7), с точностью до численных множителей - матричный элемент возмущения (7.1). Если верхний и нижний электроны в одном блоке принадлежат Ферми-окружностям, соответствующим разным киральностям, то их энергия отличается на большую величину $2\alpha p_F$, и соответствующий вклад в лестничную диаграмму от формулы (7.9) либо порядка $T_{c0}/(\alpha p_F)$ для не очень большой концентрации примесей $1/\tau \propto T_{c0}$, либо порядка $1/(\tau\alpha p_F)$ для грязного предела $\alpha p_F \gg 1/\tau \gg T_{c0}$; такими вкладами мы пренебрегаем; физически их малость означает маленькую вероятность процесса рассеяния на одной и той же примеси двух электронов с равными и противоположными импульсами, но принадлежащие разным киральным ветвям. В очень грязном случае $1/\tau \propto \alpha p_F$, действительно, надо было бы учитывать рассеяние двух электронов разной киральности на одной и той же примеси, но мы этот предел не рассматриваем. Это уже другая задача, для которой функции Грина не равны (7.5).

Выражение для линии примеси, оканчивающейся двумя крестами:

$$V_{\lambda\mu}(\varphi_{\mathbf{p}}, \varphi_{\mathbf{p}'}) = \frac{1}{4}n_{imp}u^2(1 + \lambda\mu e^{i\varphi_{\mathbf{p}} - i\varphi_{\mathbf{p}'}})^2. \quad (7.7)$$

Оно равняется $n_{imp}u^2 e^{i\varphi_{\mathbf{p}} - i\varphi_{\mathbf{p}'}} \cos^2 \frac{\varphi_{\mathbf{p}} - \varphi_{\mathbf{p}'}}{2}$, если $\lambda = \mu$, либо $-n_{imp}u^2 e^{i\varphi_{\mathbf{p}} - i\varphi_{\mathbf{p}'}} \sin^2 \frac{\varphi_{\mathbf{p}} - \varphi_{\mathbf{p}'}}{2}$, если $\lambda = -\mu$. Поэтому примесную линию можно записать и в виде

$$V_{\lambda\mu}(\varphi_{\mathbf{p}}, \varphi_{\mathbf{p}'}) = \frac{1}{2}n_{imp}u^2 e^{i\varphi_{\mathbf{p}} - i\varphi_{\mathbf{p}'}} (\lambda\mu + \sin \varphi_{\mathbf{p}} \sin \varphi_{\mathbf{p}'} + \cos \varphi_{\mathbf{p}} \cos \varphi_{\mathbf{p}'}) \quad (7.8)$$

где λ и μ - киральности на левом и правом блоке, прилегающих к примесной линии. Последнее слагаемое в правой части выражения (7.8) обращается в ноль после интегрирования по $\varphi_{\mathbf{p}}$ или $\varphi_{\mathbf{p}'}$: заметим, что $\int_0^{2\pi} d\varphi f(\sin \varphi) \cos \varphi = 0$ для произвольной функции $f(x)$.

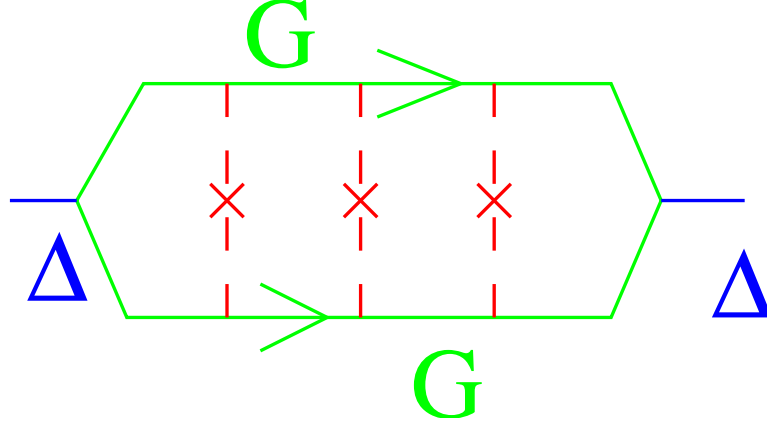


Рис. 12:

В блоке из двух Гриновских функций можно взять интеграл по ξ :

$$\begin{aligned}
 C_\lambda(\omega, \sin \varphi_{\mathbf{p}}) &= \nu(\epsilon_F) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi G_\lambda \left(\omega, \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) G_\lambda \left(-\omega, -\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) = \\
 &= \frac{i\pi\nu(\epsilon_F)}{i\omega + \frac{i}{2\tau} - (\lambda H + \frac{q}{2}) \sin \varphi_{\mathbf{p}}}.
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Тогда куперовская петля в присутствии примесей приобретает вид:

$$T \sum_{\omega > 0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_n} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_{\mathbf{p}_n}}{2\pi} L_{\lambda_n}^n(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_n}) C_{\lambda_n}(\omega, \sin \varphi_{\mathbf{p}_n}) \lambda_n e^{-i\varphi_{\mathbf{p}_n}}, \tag{7.10}$$

где $L_{\lambda_n}^n(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_n})$ - выражение для лестничной диаграммы, содержащей n примесных линий и со сверхпроводящей вершиной в левом углу $\lambda_0 e^{i\varphi_{\mathbf{p}_0}}$. Для лестничных диаграмм можно написать рекуррентное интегральное соотношение:

$$L_{\lambda_{n+1}}^{n+1}(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_{n+1}}) = \sum_{\lambda_n} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{p}_n}}{2\pi} L_{\lambda_n}^n(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_n}) C_{\lambda_n}(\omega, \sin \varphi_{\mathbf{p}_n}) V_{\lambda_n \lambda_{n+1}}(\varphi_{\mathbf{p}_n}, \varphi_{\mathbf{p}_{n+1}}). \tag{7.11}$$

Очевидно (см. (7.8)), $L_{\lambda_n}^n(\omega, \varphi_{\mathbf{p}_n}) = l_n^0(\lambda_n, \omega) + \sin \varphi_{\mathbf{p}_n} l_n^1(\lambda_n, \omega)$. Тогда Eq.(7.11) может быть переписано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} l_{n+1}^0(\lambda_{n+1}) \\ l_{n+1}^1(\lambda_{n+1}) \end{pmatrix} = \sum_{\lambda_n} \begin{pmatrix} \lambda_n \lambda_{n+1} I_{\lambda_n}^0 & \lambda_n \lambda_{n+1} I_{\lambda_n}^1 \\ I_{\lambda_n}^1 & I_{\lambda_n}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n^0(\lambda_n) \\ l_n^1(\lambda_n) \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

или

$$\begin{pmatrix} l_{n+1}^0(+), \\ l_{n+1}^1(+), \\ l_{n+1}^0(-), \\ l_{n+1}^1(-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_+^0 & I_+^1 & -I_-^0 & -I_-^1 \\ I_+^1 & I_+^2 & I_-^1 & I_-^2 \\ -I_+^0 & -I_+^1 & I_-^0 & I_-^1 \\ I_+^1 & I_+^2 & I_-^1 & I_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n^0(+), \\ l_n^1(+), \\ l_n^0(-), \\ l_n^1(-) \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

где матрица T в правой части содержит три интеграла

$$\begin{aligned} I_\lambda^0 &= \frac{1}{\sqrt{(\omega + \frac{1}{2\tau})^2 + h_\lambda^2}} \frac{1}{4\tau}, \\ I_\lambda^1 &= \frac{i}{h_\lambda} \left(\frac{\omega + \frac{1}{2\tau}}{\sqrt{(\omega + \frac{1}{2\tau})^2 + h_\lambda^2}} - 1 \right) \frac{1}{4\tau}, \\ I_\lambda^2 &= -\frac{\omega + \frac{1}{2\tau}}{h_\lambda^2} \left(\frac{\omega + \frac{1}{2\tau}}{\sqrt{(\omega + \frac{1}{2\tau})^2 + h_\lambda^2}} - 1 \right) \frac{1}{4\tau}; \end{aligned} \quad (7.14)$$

здесь введено обозначение $h_\lambda = \lambda H + q/2$. Сумма всех лестничных диаграмм, показанных на Рис.12, дается

$$w^T \sum_0^\infty L_n v = w^T (1 - T)^{-1} v, \quad (7.15)$$

где вектор $v = (\lambda_0 e^{-i\varphi_{p_0}}, 0)$ соответствует начальному условию в левом углу, а вектор $w = (\lambda I_\lambda^0, \lambda I_\lambda^1)$ - интегралу в последнем блоке в правом углу. Вычисляя это скалярное произведение, мы находим куперовскую петлю с примесями и, соответственно, уравнение на $T_c(H)$:

$$\frac{1}{\nu(\epsilon_F)U} = \pi T \max_q \sum_{\omega>0} K \left(\omega, h_+, h_-, \frac{1}{2\tau} \right), \quad (7.16)$$

где ядро имеет вид

$$K = 4\tau \frac{(I_+^0 + I_-^0) [1 - (I_+^2 + I_-^2)] + (I_+^1 - I_-^1)^2}{(1 - (I_+^0 + I_-^0)) [1 - (I_+^2 + I_-^2)] - (I_+^1 - I_-^1)^2}. \quad (7.17)$$

Уравнение (7.16) для $T_c(H)$ может быть решено численно, и линии фазовых переходов для времен рассеяния на примеси $1/2\tau T_{c0} = 0.5, 1.2, 2.1, 3.2, 4.5, 7.7, 11.7$ показаны на Рис.13.

Замечаем, что в чистом пределе $T_{c0}\tau \gg 1$ рассеяние на примесях уменьшает критическое параллельное магнитное поле (в чистом случае оно дается $H_{p0} = \sqrt{2\alpha p_F \Delta(0)}$,

впервые найденное в [5]) и одновременно выталкивает положение \mathcal{L} точки к более высоким значениям H и более низким значениям T . В результате, оба неоднородных состояния исчезают с фазовой диаграммы при $\tau^{-1} \leq 9T_{c0}$.

В пределе $H = 0, q = 0$ ядро имеет вид

$$K(\omega) = \frac{2}{|\omega|}, \quad (7.18)$$

согласующийся с теоремой Андерсона.

В пределе сильной концентрации примесей $1/\tau \gg T_{c0}$ ядро упрощается:

$$K(\omega) = \frac{2}{\omega + 2H^2\tau + v_F^2 q^2 \tau / 4}, \quad (7.19)$$

из чего видим, что при понижении температуры сверхпроводящее состояние впервые возникает на $q = 0$, так что в "грязном" пределе выживает только однородная сверхпроводящая фаза. Парамагнитный предел H_p может быть найден как точка, где $T = 0$, что позволяет сделать замену $T \sum_{\omega} = \int \frac{d\omega}{2\pi}$ в "грязном" уравнении самосогласования (7.16); принимая во внимание упрощение ядра в (7.19) и при замене в нем $q = 0$, получаем

$$H_p = \sqrt{\frac{\pi T_{c0}}{4\tau e^{\gamma}}}, \quad (7.20)$$

и в грязном пределе $1/\tau \gg T_{c0}$ парамагнитное критическое поле *растет* с увеличением беспорядка.

Все вышеперечисленные результаты о влиянии немагнитных примесей на фазовую диаграмму были получены в пренебрежении членами порядка α/v_F . Учет этих членов в первом порядке приведет к замене в ядре (7.17) h_{λ} на $\lambda H + v_F Q/2 - \lambda \alpha Q/2$. В пределе сильной концентрации примесей $1/\tau \gg T_{c0}$ и при учете членов первого порядка по α/v_F ядро примет вид (ср. с (7.19)):

$$K(\omega) = \frac{2}{\omega + 2H^2\tau + v_F^2 q^2 \tau / 4 - 2\tau \alpha q H}. \quad (7.21)$$

Минимизируя куперовскую петлю с ядром (7.21) по вектору спаривания q

$$\frac{\partial \alpha_{qq}}{\partial q} = 0$$

получаем, что сверхпроводящее состояние в "грязном" пределе при понижении температуры впервые возникает на ненулевом импульсе пары, равным

$$q_{hel} = \frac{4\alpha H}{v_F^2} \quad (7.22)$$

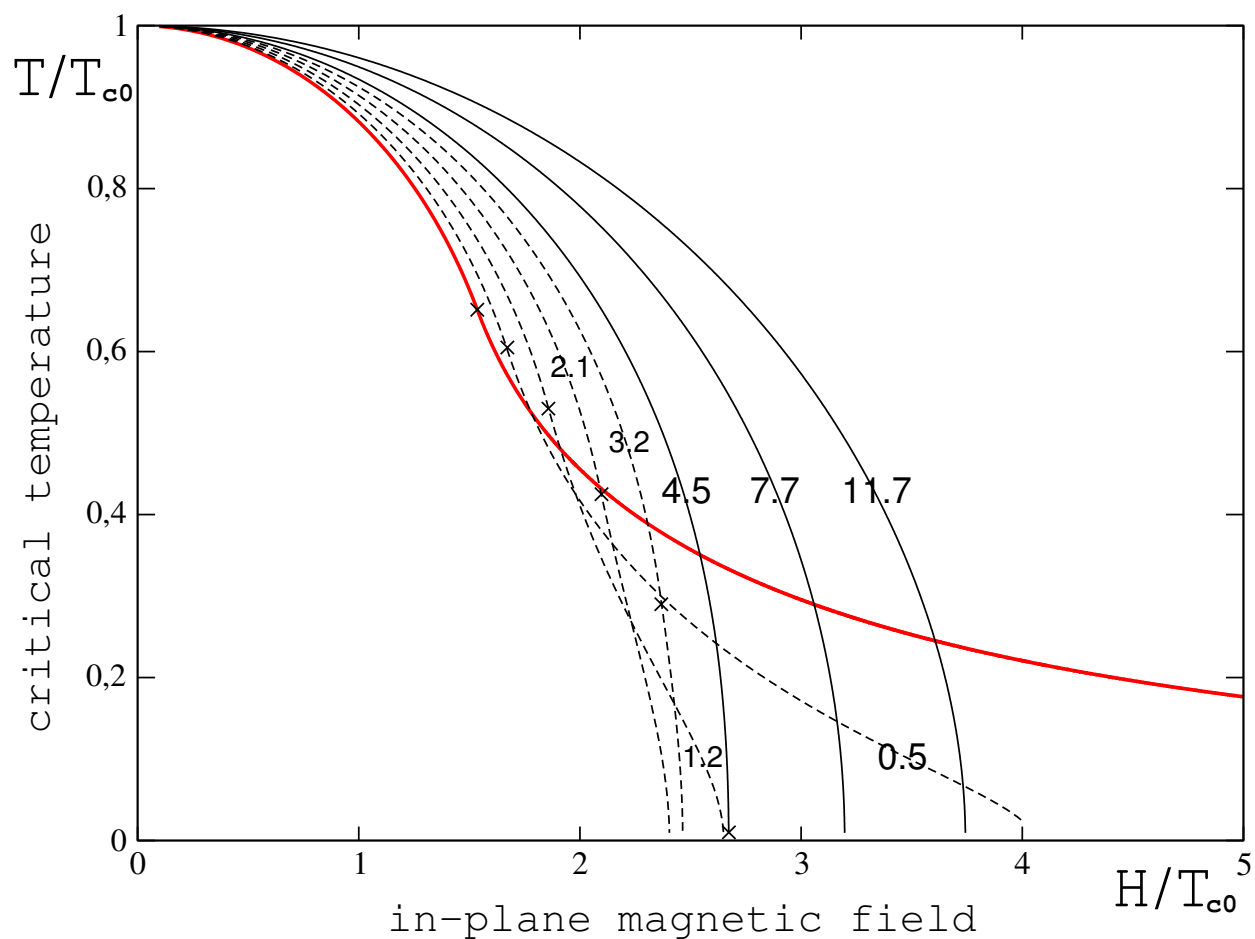


Рис. 13: Линии сверхпроводящего фазового перехода для разных времен τ между упругими столкновениями на примесях: $1/2\tau T_{c0} = 0.0, 0.5, 1.2, 2.1, 3.2, 4.5, 7.7, 11.7$. Крестиками обозначены точки Лифшица.

для любых магнитных полей. Таким образом, учет членов α/v_F так же, как и в чистом случае, привел к преобразованию однородного в слабо киральное состояние. Заметим, что маленький волновой вектор, модулирующий параметр порядка в ”грязном” пределе, - в два раза больше, чем в чистом случае для слабых магнитных полей (см. 6.7). Но следует помнить, что на этот раз результат (7.22) получен только вблизи линии перехода $T_c(H)$.

Обсуждение результатов

В заключении, еще раз перечислим результаты, полученные в данной работе:

- В рамках модели спин-орбитального металла с иерархией энергий $\epsilon_F \gg \alpha p_F \gg \omega_D \gg T_c$ для чистого поверхностного сверхпроводника в параллельном магнитном поле найден функционал Гинзбурга-Ландау, включая разложение до степеней восьмого порядка.
- На линии $T_c(H)$ найдены две критические точки: точка Лифшица \mathcal{L} и симметричная точка \mathcal{S} и тем самым показано существование ”киральной” сверхпроводящей фазы с параметром порядка $\Delta(\mathbf{r}) \propto \exp(i\mathbf{Q}\mathbf{r})$ и *большим* $Q \sim H/v_F$ на фазовой диаграмме.
- В киральной фазе найдены два условия самосогласования на Δ и на Q .
- На фазовой диаграмме найдены границы устойчивости BCS и киральной фазы: линия Лифшица, оканчивающаяся в критической точке Ландау \mathcal{T} ; и линия, начинающаяся в симметричной точке.
- Установлено, что киральная фаза и пространственно четная фаза (полосатая структура) разделены двумя фазовыми переходами второго рода и промежуточной новой сверхпроводящей фазой.
- В BCS и в киральной фазе найден равновесный сверхпроводящий ток, пропорциональный вариации свободной энергии по волновому вектору параметра порядка, и доказано, что равновесный ток в основном состоянии обращается в ноль.

- Найден тензор сверхпроводящей плотности электронов в BCS и в киральной фазе и обнаружено, что на линии Лифшица сверхпроводящая плотность для направления тока $\perp \mathbf{h}$ обращается в ноль, что символизирует разрушение сверхпроводимости в окрестности этой линии. Вглубине киральной фазы сверхпроводящий отклик подобен отклику в обычной BCS фазе.
- Исследовано влияние слабой киральной анизотропии на фазовую диаграмму и найден слабый градиент параметра порядка в основном состоянии BCS, преобразующий ее в "длинноволновую киральную" фазу (на существование последней указал [10]).
- В присутствии немагнитных примесей с помощью метода трансфер матрицы найдена критическая сила примесей, при которой происходит исчезновение неоднородных сверхпроводящих состояний.
- В грязном пределе обнаружено увеличение критического магнитного поля с усилением беспорядка.
- В грязном пределе и в первом порядке по α/v_F найдена слабая неоднородность BCS состояния.
- Установлено, что в симметричной точке \mathcal{S} непрерывный вихрь с неразрушенной сверхпроводимостью в коре вихря энергетически более выгоден, чем сингулярный вихрь Абрикосова.
- Показано, что вблизи симметричной точки, из-за присутствия расширенной до $U(2)$ симметрии параметра порядка, будут иметь место существенные флуктуации.

* * *

Отметим, что так как мы нашли свободную энергию киральной фазы и фазы BCS, то численными методами можно установить верхнюю грань по магнитному полю на линию перехода первого рода, имеющую место ниже точки \mathcal{T} , разделяющую BCS фазу и полосатую структуру.

Отметим также, что найденное нами обращение в ноль одной из компонент сверхпроводящей плотности на линии Лифшица соответствует обращению в ноль одного из коэффициентов перед градиентным членом в разложении Гинзбурга-Ландау, и следовательно, исчезновению логарифмического члена в энергии двумерного вихря вблизи точки Лифшица \mathcal{L} . Отсюда мы ожидаем, что вблизи точки \mathcal{L} будут иметь место существенные флуктуации.

Ввиду найденного нами функционала ГЛ, и при учете в нем более высоких градиентных членов, численными методами можно найти форму сильно вытянутого вихря в точке \mathcal{L} .

Как очевидный эффект флуктуаций, в области точек \mathcal{L} и \mathcal{S} произойдет смещение действительной $T_c(H)$ линии в направлении $(0, 0)$ относительно ее средне-полевого положения, показанного на Рис. 1.

Приложения

А Преобразование к эллиптическим интегралам

1) После взятия интеграла по ξ уравнение самосогласования имеет вид:

$$\frac{1}{U\nu(\epsilon_F)} = T \sum_{\omega>0,\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega + iH_\lambda \sin \varphi)^2 + \Delta^2}}. \quad (\text{A.1})$$

Замечаем, что $\int_0^{2\pi} f(\sin \varphi) d\varphi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin \varphi) d\varphi = 2 \int_0^\pi f(\cos \varphi) d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} f(\cos 2\varphi) d\varphi$. Тогда, заменяя в (A.1) $\sin \varphi$ на $\cos 2\varphi$ и используя формулы $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$; $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, правую часть уравнения самосогласования записываем как

$$T \sum_{\omega>0,\lambda} 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{[\omega(c^2 + s^2) + iH_\lambda(c^2 - s^2)]^2 + \Delta^2(c^2 + s^2)^2}}, \quad (\text{A.2})$$

где $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$. В последнем интеграле делаем замену $\varphi = \arctg t$, получаем:

$$T \sum_{\omega>0,\lambda} 2 \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{Ae^{i\psi}t^4 + 2(\omega^2 + H_\lambda^2 + \Delta^2)t^2 + Ae^{-i\psi}}}, \quad (\text{A.3})$$

где обозначили $Ae^{i\psi} = (\omega - iH_\lambda)^2 + \Delta^2$ и

$$A = \sqrt{(\omega^2 + (|H_\lambda| + \Delta)^2)(\omega^2 + (|H_\lambda| - \Delta)^2)}. \quad (\text{A.4})$$

Интеграл (A.2) сходящийся, поэтому можем сделать поворот в комплексной плоскости $\tau = te^{i\frac{\psi}{2}}$, по дуге на бесконечности интеграл стремится к нулю, остается:

$$T \sum_{\omega>0,\lambda} 2 \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{A}\sqrt{1+(a+a^{-1})\tau^2+\tau^4}}, \quad (\text{A.5})$$

в котором

$$a = \sqrt{\frac{(\omega^2 + (|H\lambda| + \Delta)^2)}{(\omega^2 + (|H\lambda| - \Delta)^2)}}. \quad (\text{A.6})$$

Теперь в (A.5) делаем обратную замену $\tau = \text{tg } \varphi$, получаем:

$$T \sum_{\omega>0,\lambda} \frac{2}{\sqrt{A}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a^{-1}}}{2}\right)^2 \cos^2 2\varphi}} \quad (\text{A.7})$$

Учитывая, что $\int_0^{\pi/2} f(\cos^2 2\varphi)d\varphi = \int_0^{\pi/2} f(\sin^2 \varphi)d\varphi$, заменяем в последнем интеграле $\cos^2 2\varphi$ на $\sin^2 \varphi$ и, следуя определению эллиптического интеграла первого рода $\mathbf{K}(k) = \int_0^{2\pi} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$, переписываем (A.7) в виде:

$$T \sum_{\omega>0,\lambda} \frac{2}{\sqrt{A}} \mathbf{K} \left(i \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a^{-1}}}{2} \right). \quad (\text{A.8})$$

Интеграл \mathbf{K} - табличный, применяя к нему стандартные преобразования (см. [20]), записываем окончательно уравнение самосогласования как:

$$\frac{1}{U\nu(\epsilon_F)} = T \sum_{\omega>0,\lambda} \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{\mathbf{K} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right)}{\sqrt{a}}, \quad (\text{A.9})$$

Подставляя в (A.9) значения (A.4) и (A.6) для A и a , получаем (4.4).

Заметим, что второго уравнения самосогласования у нас пока что нет. Кроме как из минимизации сверхпроводящей энергии кирального состояния (4.3), его можно вывести, создавая слабую неоднородность на основном состоянии $\Delta(r) = ue^{iQr}$.

2) Функция Йосиды.

$$Y(T, \Delta) = \frac{1}{4T} \int d\xi \text{sech}^2 \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2T} = 1 - T \sum_n \frac{\Delta^2 \pi}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^{3/2}}. \quad (\text{A.10})$$

3) Полезная формула.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\omega + iH \sin \varphi} = \frac{2\pi \text{sign}\omega}{\sqrt{\omega^2 + H^2}}. \quad (\text{A.11})$$

Б Линия ST'

Интегралы по углу φ (4.23), возникающие при определении положения линии устойчивости киральной фазы ST' , можно представить в виде эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\sqrt{(\omega + iH \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \frac{-1 + (\omega + i(H + X) \sin \varphi)^2}{(\omega + iH \sin \varphi)^2 + \Delta^2 + (X \sin \varphi)^2} = \\ &= \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{z\mathbf{K}(k) - z_1\Pi(l_1, k) - z_2\Pi(l_2, k)}{\sqrt{(\Delta + H)^2 + \omega^2}}, \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\sqrt{(\omega + iH \sin \varphi)^2 + \Delta^2}} \frac{\Delta^2}{(\omega + iH \sin \varphi)^2 + \Delta^2 + (X \sin \varphi)^2} = \\ &= \sum_{\omega > 0, \lambda} \frac{y\mathbf{K}(k) - y_1\Pi(l_1, k) - y_2\Pi(l_2, k)}{\sqrt{(\Delta + H)^2 + \omega^2}}, \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} l_1(\mathbf{S}) &= 1 - \frac{(\Delta - H + i\omega)(\Delta^2 - (H + i\omega)^2) + X^2}{(\Delta + H + i\omega)(\Delta^2 + H^2 + \omega^2 - X^2 - 2i\mathbf{S})}, \\ l_2(\mathbf{S}) &= l_1(-\mathbf{S}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= -2 - \frac{\Delta H(2i\omega X + \Delta(H + 2X))}{(\Delta + i\omega)^2 X^2}, \\ z_1(\mathbf{S}) &= -\frac{(\Delta - H + i\omega)}{2(\Delta + i\omega)^2 X^2 (\Delta^2 - (H - i\omega)^2 + X^2)} L(\mathbf{S}), \\ z_2(\mathbf{S}) &= z_1(-\mathbf{S}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\Delta^2 H^2}{(\Delta + i\omega)^2 X^2} \\ y_1(\mathbf{S}) &= -\frac{i\Delta^2 (\Delta - H + i\omega)}{2(\Delta + i\omega)^2 X^2 (\Delta^2 - (H - i\omega)^2 + X^2)} M(\mathbf{S}), \\ y_2(\mathbf{S}) &= y_1(-\mathbf{S}); \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

где

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{S}) = & -i\Delta^4 H(H+X)^2 - \\
& - 2\omega^2 X^2 (H-i\omega+X)(\omega X+\mathbf{S}) + \\
& + 2i\Delta\omega X(H+X)(H-i\omega+X)(\omega X+\mathbf{S}) + \\
& + \Delta^3 (H+X)^2 (-iH^2 - H\omega + 2\omega X + iX^2 + \mathbf{S}) + \\
& + \Delta^2 (H+X)(H^2 - iH\omega + HX + i\omega X)(2\omega X + \mathbf{S}) - \\
& - \omega X^2 \Delta^2 (H+X)^2
\end{aligned}$$

и

$$\mathbf{S} = \sqrt{-\Delta^2 H^2 + (\Delta^2 + \omega^2) X^2}, \quad X = \frac{q+Q}{2}; \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{S}) = & \Delta H^3 (\Delta + H - i\omega) - \\
& - HX^2 (\Delta(\Delta + 2H) - i(\Delta - H)\omega + 2\omega^2) + \\
& + (\Delta + i\omega)X^4 + \\
& + (H^2(i(\Delta + H) + \omega) + (-i(\Delta + H) + \omega)X^2) \mathbf{S}. \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

В Восьмой порядок в функционале ГЛ

Каждому коэффициенту разложения восьмого порядка по Δ Гинзбурга-Ландау соответствуют диаграммы и выражение:

$$D_1 = 1/8T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^4 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^4 \left(-p + \frac{Q}{2} \right); \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned}
D_2 = & T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^4 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^3 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) + \\
& + T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^3 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right); \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= 3/2T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^4 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) + \\
&+ T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^3 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^3 \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right) + \\
&+ T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^3 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^3 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p - \frac{3Q}{2} \right) + \\
&+ T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^2 \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right);
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$l_7 = \frac{1}{U} - \frac{T_s}{2} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(p + \frac{3Q}{2} \right) G \left(-p + \frac{3Q}{2} \right); \tag{B.4}$$

$$l_8 = \frac{T_s}{2} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right); \tag{B.5}$$

$$l_9 = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right); \tag{B.6}$$

$$l_{10} = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(-p + \frac{5Q}{2} \right) G^2 \left(p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right); \tag{B.7}$$

$$l_{11} = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G \left(p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(p + \frac{5Q}{2} \right); \tag{B.8}$$

$$l_{12} = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G \left(p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(-p + \frac{Q}{2} \right) G^2 \left(p - \frac{3Q}{2} \right) G \left(-p - \frac{3Q}{2} \right); \tag{B.9}$$

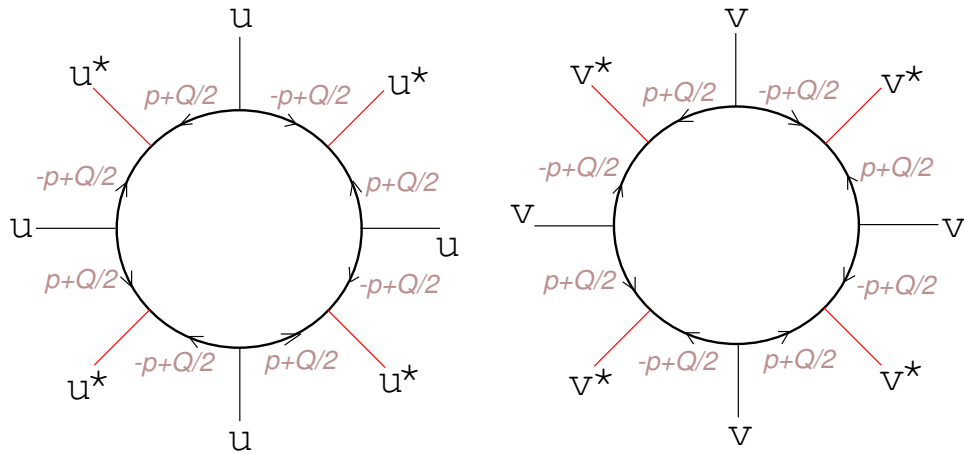


Рис. 14: Диаграммы, соответствующие коэффициенту D_1 при члене $|u|^8 + |v|^8$ в разложении Гинзбурга-Ландау. Диаграмме соответствует комбинаторный коэффициент $1/8$. Заметим, что все петли симметричны по замене Q на $-Q$, что эквивалентно замене на диаграммах всех u на v ; значит, такие диаграммы равны.

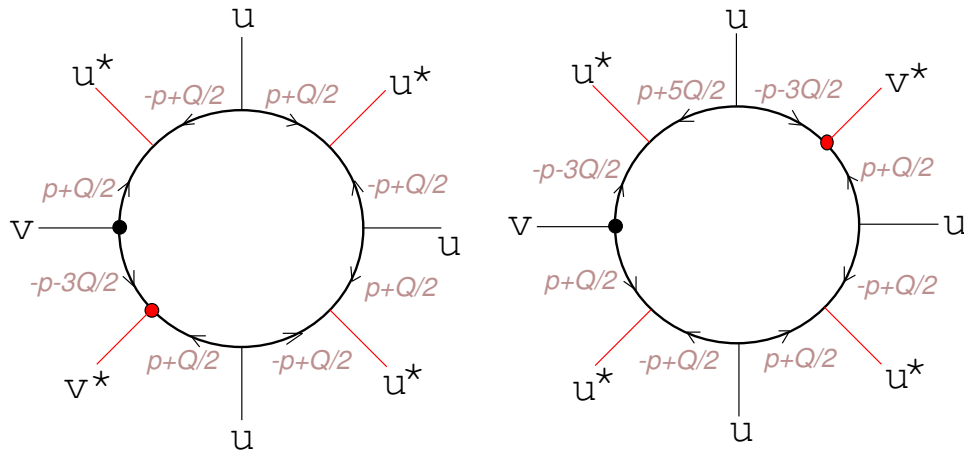


Рис. 15: Две разные диаграммы, составляющие коэффициент D_2 перед членом $|v|^2|u|^6$. Обеим диаграммам соответствует комбинаторный коэффициент 1.

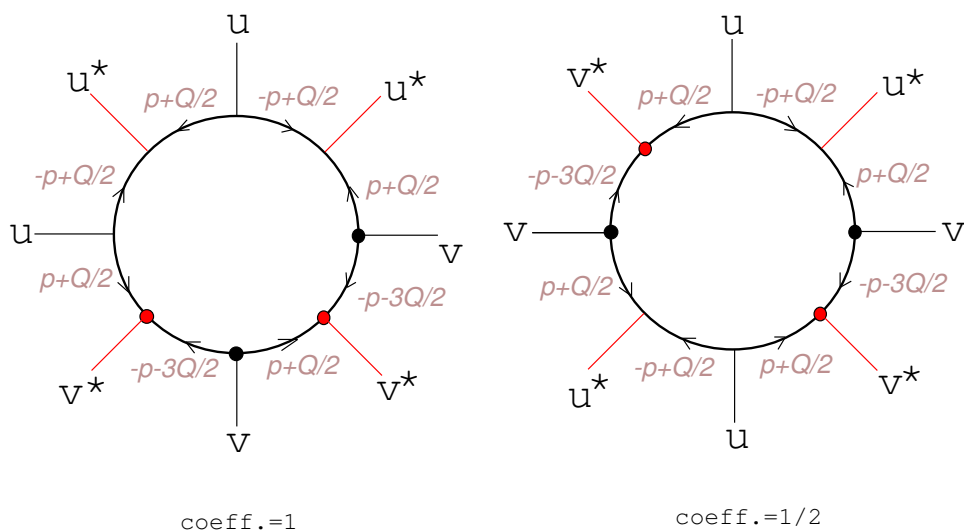


Рис. 16: Диаграммы, дающие вклад в коэффициент D_3 при $|u|^4|v|^4$. Значения этих двух диаграмм равны, а их коэффициенты разные - 1 и 1/2. При замене всех u на v обе диаграммы не меняются. Комплексно сопряженные им изменят только обход вдоль петли и

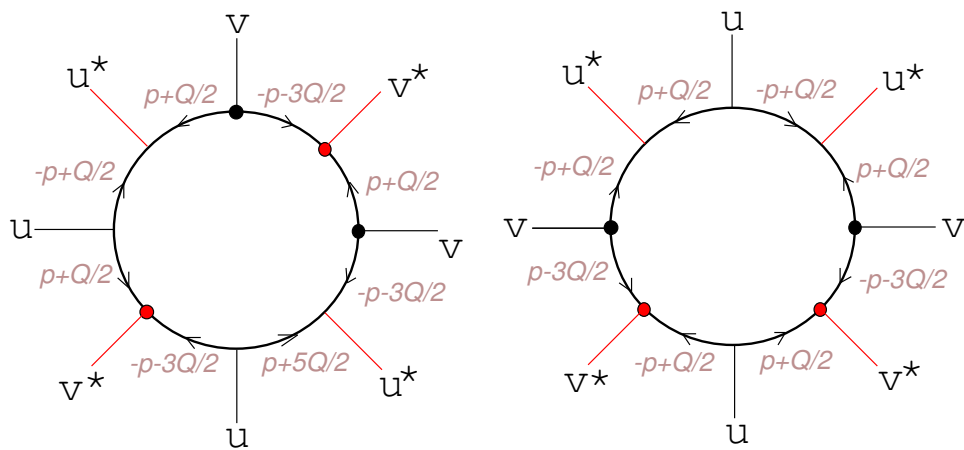


Рис. 17: Диаграммы, дающие вклад в коэффициент D_3 при $|u|^4|v|^4$. Коэффициент для обеих полагаем равным 1, поскольку учитываем равные им комплексно сопряженные диаграммы. Заметим, что эти две петли переходят друг в друга при замене всех u на v .

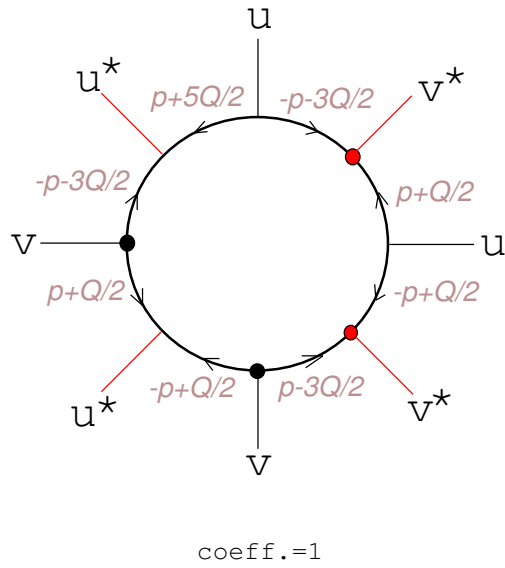


Рис. 18: Диаграмма, дающая вклад в коэффициент D_3 при $|u|^4|v|^4$. Комбинаторный коэффициент 1.

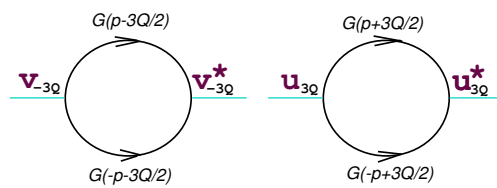


Рис. 19: Диаграмма шестого порядка по u , дает вклад в коэффициент l_7 . Куперовская петля для третьей гармоники. Коэффициент $1/2$.

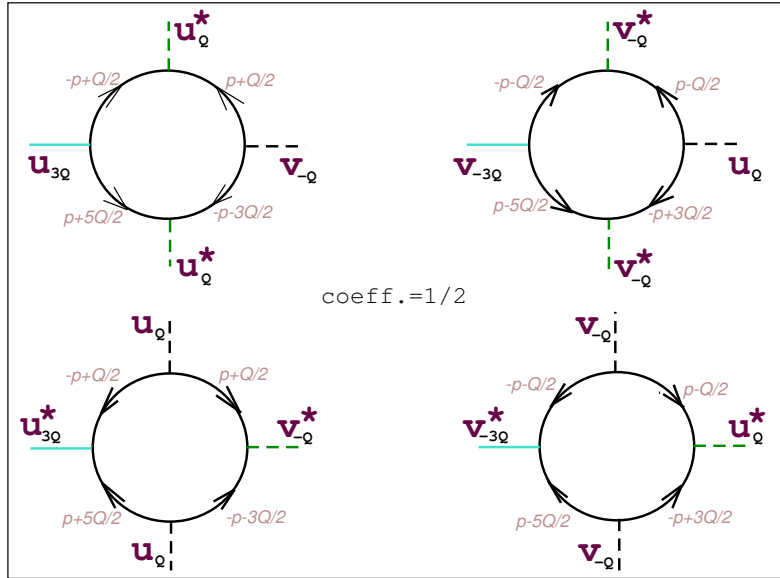


Рис. 20: Диаграммы шестого порядка по u , соответствующие члену $l_8(u_{3Q}u_Q^*{}^2v_{-Q} + v_{-3Q}v_{-Q}^*{}^2u_{-Q})$

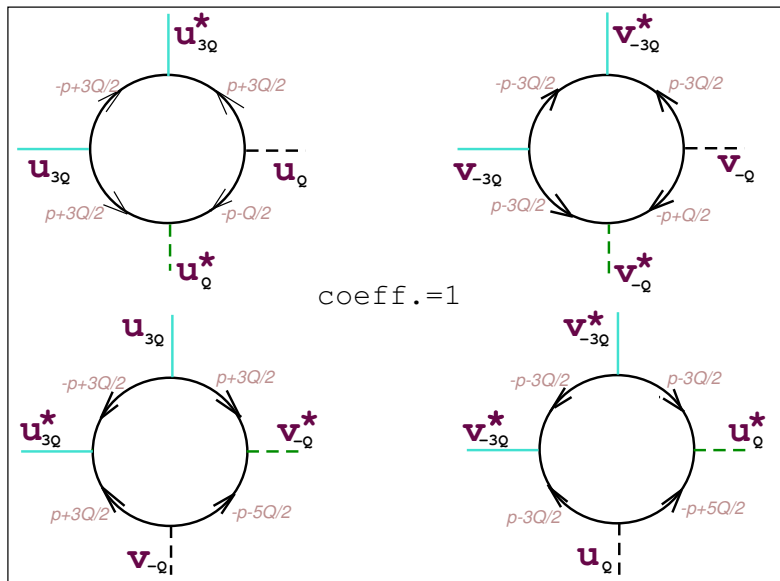


Рис. 21: Диаграммы восьмого порядка по u . Коэффициент для всех четырех 1. Верхний ряд соответствует члену $l_9(|u_{3Q}|^2|u_Q|^2 + |v_{-3Q}|^2|v_{-Q}|^2)$, Нижний ряд соответствует члену $l_{10}(|u_{3Q}|^2|v_{-Q}|^2 + |v_{-3Q}|^2|u_Q|^2)$

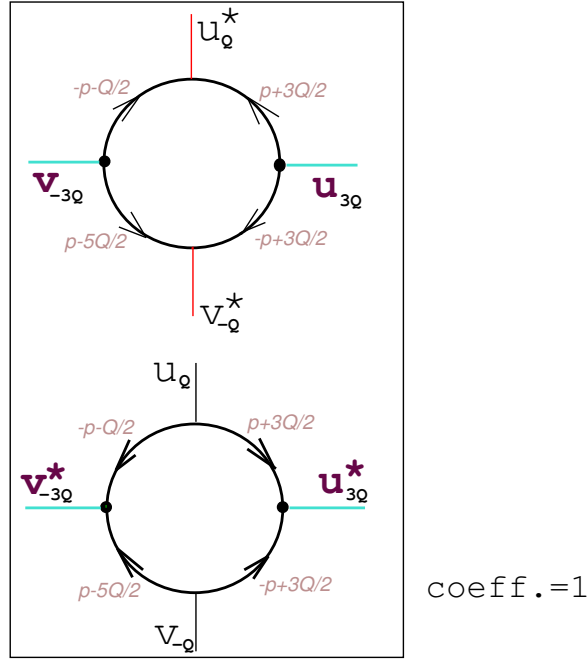


Рис. 22: Диаграммы восьмого порядка по u , соответствующие члену $l_{11}(u_{3Q}v_{-3Q}u_Q^*v_{-Q}^* + h.c.)$ Нижняя петля - комплексное сопряжение верхней. Коэффициент 1.

$$l_{13} = \frac{T_s}{2} \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G^2\left(p + \frac{Q}{2}\right) G^2\left(-p + \frac{Q}{2}\right) G\left(p - \frac{3Q}{2}\right) G\left(-p - \frac{3Q}{2}\right); \quad (\text{B.10})$$

$$l_{14} = T_s \sum_{\omega, \mathbf{p}, \lambda} G\left(p + \frac{5Q}{2}\right) G\left(p + \frac{Q}{2}\right) G\left(-p + \frac{Q}{2}\right) G\left(p - \frac{3Q}{2}\right) G^2\left(-p - \frac{3Q}{2}\right). \quad (\text{B.11})$$

Везде G - функции Грина нормального металла.

Сумма по импульсу заменяется на $\nu(\epsilon_F) \int d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}$ и интеграл по ξ вычисляется. Интеграл по φ вычисляется с помощью производящей функции $1/\sqrt{\omega^2 + (\lambda H \pm nQ)^2}$, где $n = 1, 3, 5$. В получившиеся аналитические выражения подставлялись $T_S = 1.779T_{c0}$, $H_S = 0.525T_{c0}$ и $Q_S = 2.647T_{c0}$ и оставшаяся сумма по ω бралась численно. В результате мы нашли:

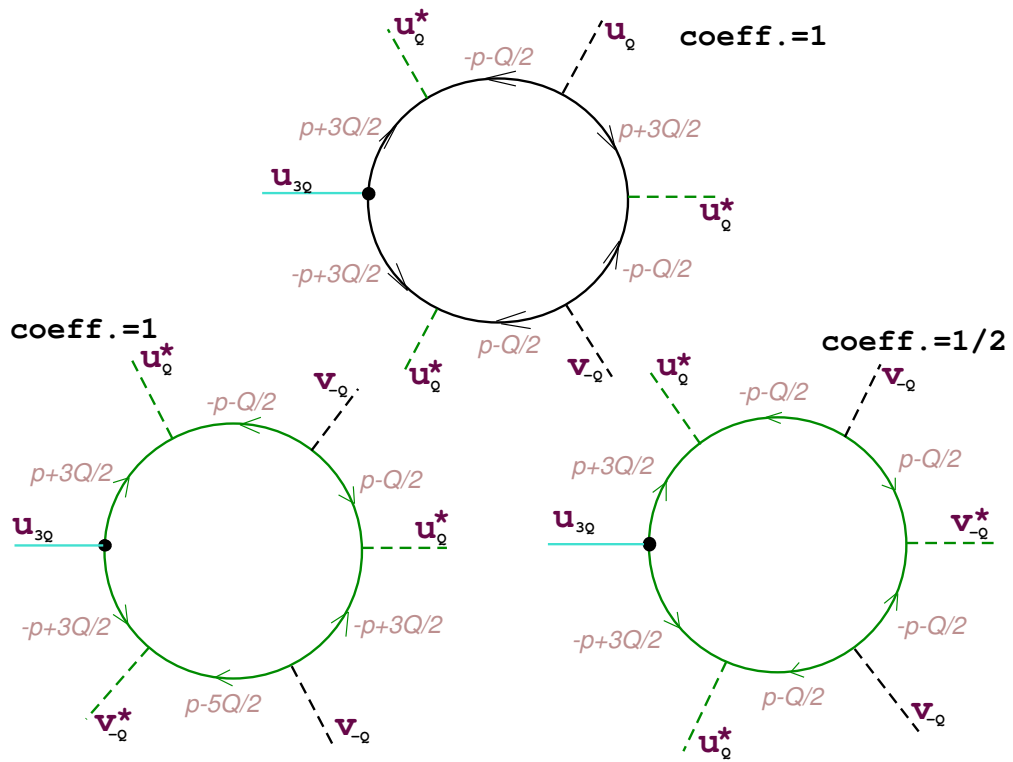


Рис. 23: Диаграммы восьмого порядка по u , соответствующие членам $l_{12}u_{3Q}u_Q^{*2}v_{-Q}|u_Q|^2$ и $(l_{13} + l_{14})u_{3Q}u_Q^{*2}v_{-Q}|v_{-Q}|^2$. Еще есть петли комплексно сопряженные показанным на рисунке, а также с заменой всех u на v . Значения их те же самые, поэтому мы их не рисуем.

$$\begin{aligned}
D_1 &= 0.00106053 - \text{коэффициент перед } |u|^8 \text{ и } |v|^8 \text{ в восьмом "простом" порядке ;} \\
D_2 &= 0.00152674 - \text{коэффициент перед } (|u|^2|v|^6 + |u|^6|v|^2) \text{ в восьмом "простом"}; \\
D_3 &= -0.00120067 - \text{коэффициент перед } |u|^4|v|^4 \text{ в восьмом "простом"} ; \\
l_7 &= 0.674254; \\
l_8 &= 0.103447; \\
l_9 &= 0.191039; \quad l_{10} = 0.170477; \quad l_{11} = 0.206894; \quad l_{12} = 0.0325726; \\
l_{13} &= 0.00491175; \quad l_{14} = 0.021198.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Список литературы

- [1] S. Reich and Y. Tsabba, Eur.Phys. J. B **9**, 1 (1999). Y. Levi et al., Europhys. Lett., **51**, 564 (2000).
- [2] V. M. Edelstein, JETP, **95**, 2151 (1989)
- [3] Л. Н. Булаевский, А. А. Гусейнов, А. И. Русинов, ЖЭТФ, **71**, 2356 (1976)
- [4] L. P. Gorkov and E.I. Rashba, Phys.Rev.Lett. **87**, 037004 (2001).
- [5] V. Barzykin and L. P. Gorkov, Phys.Rev.Lett.**89**, 227002 (2002).
- [6] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1136 (1964) [Sov. Phys. JETP **20**, 762 (1965)]
- [7] P. Fulde and R. A. Ferrel, Phys. Rev. **135**, A550 (1964)
- [8] S. K. Yip, Phys. Rev. B **65**, 144508 (2002)
- [9] E. I. Rashba, Sov.Phys. - Solid State **2**, 1109 (1960).
- [10] D. F. Agterberg, cond-mat/0204592.
- [11] L. G. Aslamazov, Sov. Phys. JETP **28**, 773 (1969)
- [12] R. A. Klemm and A. Luther, Phys. Rev. B **12**, 877 (1975)
- [13] H. Burkhardt and D. Rainer, Ann. Phys. (Berlin) **3**, 181 (1994)
- [14] Manfred Sigrist and Daniel F. Agterberg, Progress of Theoretical Physics, Vol.102, No. 5, 965 (1999)
- [15] V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations*, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
- [16] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover New York 1975)
- [17] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, ИТФ им. Ландау (1995)

- [18] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, том V, *Статистическая Физика, часть 1*, Физматлит, Москва (2001)
- [19] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, том IX, *Статистическая Физика, часть 2*, Физматлит, Москва (2001)
- [20] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва (1963)