

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН

И. В. Протопопов

**ТЕОРИЯ $2e$ и $4e$ СВЕРХТОКА В ЦЕПОЧКЕ
РОМБИКОВ ИЗ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ**

Дипломная работа по кафедре
"Проблемы теоретической физики"

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, проф.
Фейгельман М. В.

Черноголовка - 2004

Содержание

1	Введение	4
2	Модель и ее классические состояния	5
3	Квантовые флуктуации ромбиков и сверхток	8
4	Состояния с малым напряжением	16
5	Заключение	19
A	Квазиклассический анализ $I(\gamma)$	23

1 Введение

Спаривание куперовских пар в фрастрированных цепочках джозефсоновских контактов было теоретически предсказано при исследовании систем, в которых возможно существование нетривиальной топологически защищенной квантовой жидкости [1, 2, 3]. Простейшая система, в которой это явление может быть обнаружено, была предложена Дюсо и Видалом в работе [1]. Она представляет собой цепочку ромбиков (каждый из которых — кольцо из четырех сверхпроводящих островков, соединенных четырьмя джозефсоновскими переходами), помещенную в поперечное магнитное поле (рис. 1). В [1] было показано, что в полностью фрастрированной цепочке (т.е. при потоке через каждый ромбик $\Phi = \frac{1}{2}\Phi_0 = \frac{\hbar c}{4e}$) обычное туннелирование куперовских пар вдоль цепочки запрещено из-за интерференции туннельных траекторий внутри одного ромбика. В то же время, коррелированный транспорт пар куперовских пар не запрещен. Очевидно, было бы желательно экспериментально обнаружить это явление, проявлением которого является например аномальный период $\Phi_0/2$ сверхпроводящего тока в цепочке. Однако, в [1] была исследована ситуация, когда кулоновская энергия цепочки определяется собственными емкостями C_0 отдельных сверхпроводящих островков, в то время как в реальных матрицах субмикронных джозефсоновских контактов преобладает емкость переходов C [4]. В данной работе рассматривается модель, предложенная в [1], в важном для эксперимента пределе $C \gg C_0$. Этот случай проще также и с теоретической точки зрения, так как лагранжиан системы при этом представляет собой сумму членов, каждый из которых соответствует отдельному ромбику. Единственным источником связи между ромбиками является периодическое граничное условие вдоль цепочки. Метод рассмотрения аналогичной задачи был недавно предложен Матвеевым, Ларкиным и Глазманом [5] (МЛГ). Они рассмотрели простую цепочку из N джозефсоновских контактов, замкнутую в кольцо, и свели вычисление сверхпроводящего тока (в пределе больших N) к решению уравнения Шредингера для частицы в периодическом потенциале $\sim \cos x$ при соответствующих граничных условиях. МЛГ предполагали, что джозефсоновская энергия контактов E_J много больше кулоновской энергии $E_C = e^2/2C$. Везде ниже это условие также предполагается выполненным. Мы обобщим метод МЛГ на случай цепочки ромбиков. Ниже будет показано, что в рассматриваемом случае фиктивная частица, введенная МЛГ, приобретает большой спин $S = \frac{1}{2}N$, где N — число ромбиков в цепочке. В случае максимальной фрастрации $|\Phi_r - \Phi_0/2| \equiv \delta\Phi = 0$

проекция спина на ось x является интегралом движения и ее значение должно быть выбрано так, чтобы минимизировать полную энергию. Это приводит к $S_x = \pm \frac{1}{2}N$. При этом задача сводится к изученной МЛГ с точностью до тривиального переопределения параметров. В этой ситуации энергия основного состояния цепочки и сверхпроводящий ток (пропорциональный производной от энергии основного состояния по полному потоку через кольцо Φ_c) являются периодическими функциями Φ_c с периодом $\Phi_0/2$, т.е. имеет место $4e$ -транспорт. Ненулевое отклонение потока $\delta\Phi$ ведет к появлению продольного поля h_z связанного с z -компонентой спина фиктивной частицы. При этом спин приобретает собственную нетривиальную динамику. Достаточно большое отклонение $\delta\Phi > \delta\Phi^c$ приводит к подавлению $4e$ -сверхтока и восстановлению обычного $2e$ -транспорта. Мы покажем, что в пределе достаточно длинной цепочки система может быть проанализирована в терминах квазиклассической динамики частицы с большим спином под зависящим от спина потенциальным барьером. В общем случае существуют две туннельные траектории, одна из которых соответствует $2e$ -транспорту, в то время как другая — $4e$ -транспорту. Сравнивая величины действия на этих траекториях при различных $\delta\Phi$, мы определим критическое отклонение $\delta\Phi_c$ как функцию отношения $E_J/E_C \gg 1$.

Работа организована следующим образом: в разделе II мы определим модель и классифицируем ее классические состояния; в разделе III мы получим эффективный гамильтониан, управляющий квантовыми проскоками фазы и вычислим сверхпроводящий ток как функцию отклонения потока $\delta\Phi$; в разделе IV мы рассмотрим цепочку при заданном внешнем токе $I > I_c$ и определим напряжение $V(I)$ через вероятность некогерентных квантовых проскоков фазы; обсуждение и предложения для эксперимента представлены в разделе V. В приложении A изложено вычисление соотношения между током и фазой для цепочки.

2 Модель и ее классические состояния

Изучается цепочка из N ромбиков изображенная на Рис. 1. Каждый ромбик состоит из четырех сверхпроводящих островков, соединенных туннельными контактами с джозефсоновской энергией $E_J = \hbar I_c^0/2e$; кулоновская энергия E_C определяется емкостью переходов C , $E_C = e^2/2C$ (мы пренебрегаем собственной емкостью островков, предполагая, что она много меньше C). Ниже мы рассматриваем джозефсоновский ток по

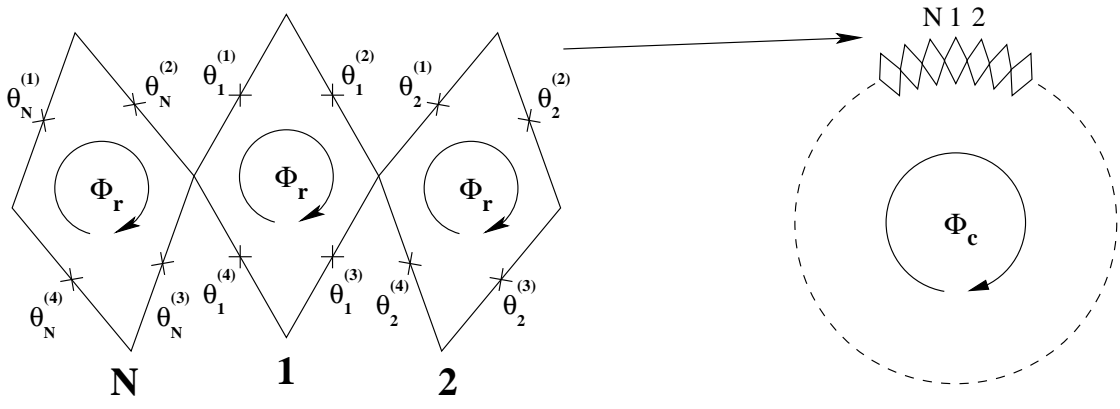


Рис. 1: Замкнутая в кольцо цепочка ромбиков.

цепочке из $N \gg 1$ ромбиков и предполагаем, что цепочка замкнута в кольцо с полным магнитным потоком Φ_c внутри. Мы также обозначаем через Φ_r магнитный поток через отдельный ромбик и определяем фазы γ and φ :

$$\gamma = 2\pi \frac{\Phi_c}{\Phi_0}, \quad \varphi = 2\pi \frac{\Phi_r}{\Phi_0}. \quad (1)$$

Здесь $\Phi_0 = h/2e$ — сверхпроводящий квант потока. Мы изучаем ситуацию, когда Φ близко к $\Phi_0/2$, т.е. $\delta = \varphi - \pi \ll 1$.

Предполагая, что при $\delta = 0$ ток в цепочке осуществляется зарядами $4e$, мы ожидаем, что в этом случае зависимость тока по цепочке от внешнего потока Φ_c является периодической с периодом $\Phi_0/2$. Ниже мы вычислим $\Phi_0/2$ -периодичный ток при $\delta = 0$. Мы также покажем, что при малых δ ток состоит из двух компонент I_{4e} и I_{2e} с периодами $\Phi_0/2$ и Φ_0 соответственно. Первая компонента соответствует току пар куперовских пар, а вторая — току отдельных куперовских пар. При самых маленьких δ ток I_{4e} преобладает над I_{2e} . В дальнейшем мы будем называть этот случай $4e$ -режимом. При достаточно больших δ реализуется противоположная ситуация ($2e$ -режим). Ниже мы определим точку кроссовера δ_c между указанными двумя режимами.

Рассматриваемая система описывается следующим действием в мнимом времени

$$S_E = \int dt \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^4 \left\{ \frac{1}{16E_C} \left(\frac{d\theta_n^{(m)}}{dt} \right)^2 - E_J \cos \theta_n^{(m)} \right\}. \quad (2)$$

Здесь переменная $\theta_n^{(m)}$ — разность фаз на m -том переходе в n -том ромбике (рис. 1). Принимая во внимание, что поток через каждый ромбик равен Φ_r , а поток через всю

цепочку — Φ_c , мы получаем следующие дополнительные условия на фазы $\theta_n^{(m)}$

$$\sum_{m=1}^4 \theta_n^{(m)} = \varphi, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^N (-\theta_n^{(3)} - \theta_n^{(4)}) = \gamma. \quad (4)$$

В данной работе мы рассматриваем случай сильной связи между островками $E_J \gg E_C$. Это позволяет для определения энергетического спектра системы использовать квазиклассическое приближение. При $E_C = 0$ фазы $\theta_n^{(m)}$ являются классическими переменными и состояния системы могут быть найдены минимизацией суммы джозефсоновских энергий ромбиков в действии (2). Пусть $\theta_n = -\theta_n^{(3)} - \theta_n^{(4)}$, θ_n имеет смысл разности фаз параметра порядка вдоль диагонали n -го ромбика. Минимизацию джозефсоновской энергии удобно производить в два этапа. Прежде всего минимизируется энергия отдельного ромбика при фиксированном потоке через ромбик и фиксированной разности фаз θ_n . После минимизации энергия цепочки принимает вид (при $\delta \ll 1$):

$$E = -2\sqrt{2}E_J \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{4}\delta\sigma_n^z\right) \cos\left(\frac{\theta_n}{2} - \beta_n\right), \quad (5)$$

$$\sin \beta_n = \pm \frac{\sigma_n^z}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\delta}{4}\sigma_n^z\right), \quad \cos \beta_n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\delta}{4}\sigma_n^z\right). \quad (6)$$

Знаки плюс и минус в уравнении (6) относятся к случаю положительной (соответственно отрицательной) величины $\cos \frac{\theta}{2}$. Здесь мы ввели важное обозначение $\sigma_n^z = \text{sign} \sin \theta_n$. Легко показать, что при $\delta = 0$ каждый ромбик, рассматриваемый отдельно, имеет два классических основных состояния с одинаковыми энергиями. Эти состояния отличаются только знаком сверхпроводящего тока, циркулирующего в ромбике. Именно двоичная переменная σ_n^z определяет знак сверхтока.

Теперь необходимо минимизировать энергию (5) по отношению к фазам $\theta_n^{(m)}$ при дополнительном ограничении (4). При малых δ и больших N мы получаем

$$E_{m,\sigma} \approx \frac{E_J\sqrt{2}}{4N} (\tilde{\gamma} - \pi N/2 - \pi S^z - 2\pi m)^2 - \sqrt{2}\delta S^z E_J + \text{Const}. \quad (7)$$

Здесь m — произвольное целое число (имеющее тот же смысл, что и в работе МЛГ [5])

и

$$s_n^z = \frac{1}{2}\sigma_n^z, \quad S^z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^z, \quad \tilde{\gamma} = \gamma + \frac{N\varphi}{2}. \quad (8)$$

В выписанных выше выражениях s_n^z можно рассматривать как z -проекцию спина $\frac{1}{2}$, описывающего двукратное вырождение классических состояний n -го ромбика. При этом S_z соответствует z -проекции полного спина \mathbf{S} описывающего всю цепочку ромбиков. Для ясности везде в этой работе мы будем рассматривать случай четного числа ромбиков. Тогда полный спин S и собственные значения его проекции — целые. Классические состояния цепочки характеризуются проекцией спина σ_n^z для каждого ромбика и принимающей целые значения переменной m . Мы будем обозначать эти состояния $|m, \{\sigma_n^z\}\rangle$ или $|m, \sigma \rangle$. Физически, классическое состояние цепочки задается полным током I вдоль цепи и направлениями локальных токов текущих в каждом ромбике. Отличная от нуля кулоновская энергия E_C приводит к квантовым проскокам фазы во всех $4N$ джозефсоновских переходах; эти процессы смешивают различные классические состояния, приводя к формированию полностью квантового основного состояния системы. Ниже мы получим эффективный гамильтониан действующий в пространстве классических состояний, найдем энергию основного состояния $E_0(\gamma)$ и соответствующий сверхпроводящий ток.

3 Квантовые флуктуации ромбиков и сверхток

Ниже мы рассматриваем квантовые флуктуации фаз $\theta_n^{(m)}$ при конечных E_C . Наиболее важным типом таких флуктуаций являются инстантоны (квантовые проскоки фазы, QPS). Инстантон представляет собой траекторию, начинающуюся в одном из минимумов (7) потенциальной энергии в действии (2) при $t = -\infty$ и оканчивающуюся в другом минимуме при $t = +\infty$. Имеется два типа таких траекторий: первые начинаются в $|m, \{\sigma_n^z\}\rangle$ и оканчиваются в $|m, \{\sigma_n^z + 2\delta_{nk}\}\rangle$ с произвольным $1 \leq k \leq N$, $\sigma_k^z = -1$, в то время как вторые начинаются в $|m, \{\sigma_n^z\}\rangle$ и оканчиваются в $|m + 1, \{\sigma_n^z - 2\delta_{nk}\}\rangle$ с произвольным $1 \leq k \leq N$, $\sigma_k^z = 1$. Каждая траектория первого типа соответствует QPS одной из фаз $\theta_k^{(1)}$ или $\theta_k^{(2)}$. Каждая траектория второго типа соответствует QPS фаз $\theta_k^{(3)}$ или $\theta_k^{(4)}$. Отметим, что при $\delta = 0$ и $\gamma = \pi/2$ все эти траектории, начинающиеся в $|m, \{\sigma_n^z\}\rangle$ при $2m + S^z = 0$ соединяют классические состояния с одинаковой энергией. Таким образом, они оказываются важными для восстановления симметрии, которая классически нарушена. Обозначим через v амплитуду QPS в одном контакте. При больших $N \gg 1$ эта амплитуда не отличается от амплитуды "переворота спина" в отдельном ромбике при $\Phi_r \approx \Phi_0/2$. В этом приближении мы можем использовать

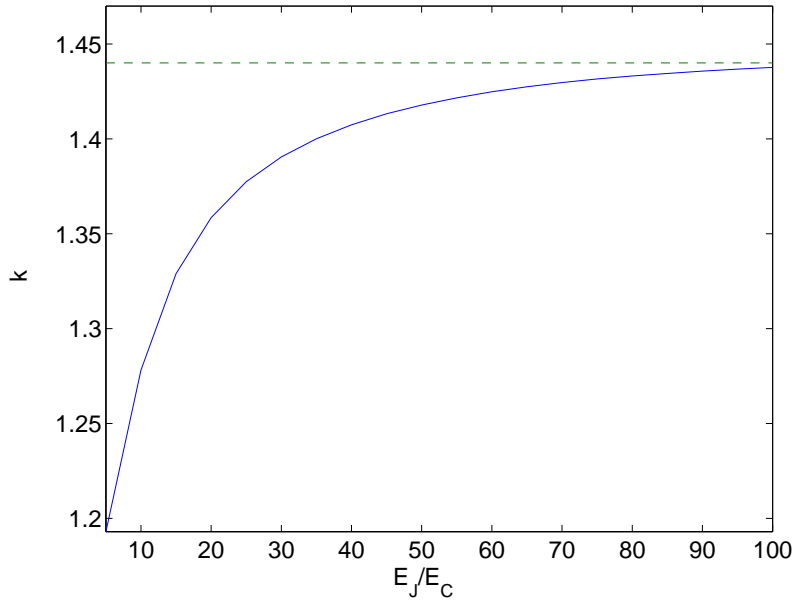


Рис. 2: Коэффициент k как функция E_J/E_C .

результат работы [2]:

$$v \approx k (E_J^3 E_C)^{1/4} \exp \left(-1.61 \sqrt{\frac{E_J}{E_C}} \right). \quad (9)$$

где k — численный коэффициент порядка единицы. Сравнение квазиклассического результата (9) результатами прямого численного расчета [6] низколежащих уровней отдельного фрастрированного ромбика показывает, что коэффициент k растет от 1.3 до 1.44 при изменении отношения E_J/E_C от 10 до бесконечности (Рис. 2). Инстантоны учитывают возможность туннелирования системы между различными минимумами (7) потенциальной энергии в действии (2). Их влияние на энергию основного состояния может быть рассмотрено с помощью нижеследующего гамильтониана

$$\begin{aligned} \hat{H} |m, \{\sigma_n^z\}\rangle &= E_{m,\sigma} |m, \{\sigma_n^z\}\rangle + \\ &2v \sum_{k=1}^N |m, \{\sigma_1^z, \dots, \sigma_{k-1}^z, -\sigma_k^z, \dots, \sigma_{k+1}^z, \sigma_N^z\}\rangle + \\ &2v \sum_{k=1, \sigma_k^z=1}^N |m+1, \{\sigma_1^z, \dots, \sigma_{k-1}^z, -\sigma_k^z, \dots, \sigma_{k+1}^z, \sigma_N^z\}\rangle + \\ &2v \sum_{k=1, \sigma_k^z=-1}^N |m-1, \{\sigma_1^z, \dots, \sigma_{k-1}^z, -\sigma_k^z, \dots, \sigma_{k+1}^z, \sigma_N^z\}\rangle. \quad (10) \end{aligned}$$

Для нахождения энергии основного состояния $E(\gamma)$ удобно произвести преобразование Фурье по переменной m в соответствии с

$$|x, \sigma\rangle = \sum_m \exp \left\{ 2i \left(2m - \frac{\tilde{\gamma}}{\pi} + S^z + \frac{N}{2} \right) x \right\} |m, \sigma\rangle, \quad S^z = \sum_{n=1}^N s_n^z. \quad (11)$$

Отметим, что не все векторы нового базиса (11) независимы. Из (11) легко видеть, что $|x + \pi/2, \sigma\rangle = e^{-i\tilde{\gamma} + i\pi S^z + i\pi N/2} |x, \sigma\rangle$. Поэтому, рассматривая произвольное состояние системы $|\psi\rangle = \sum_{x, \sigma} \psi(x, \sigma) |x, \sigma\rangle$, необходимо наложить на волновую функцию $\psi(x, \sigma)$ граничное условие

$$e^{i\pi \hat{S}^z + i\pi N/2} \psi(x + \pi/2, \sigma) = e^{i\tilde{\gamma}} \psi(x, \sigma). \quad (12)$$

Здесь мы ввели оператор \hat{S}^z , действующий на спиновые переменные в соответствии со стандартными правилами.

Получающееся уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (b - 2w \cos 2x \cdot \hat{S}^x + 2h \hat{S}^z) \psi = 0, \quad (13)$$

где

$$b = \frac{16NE}{\sqrt{2}E_J\pi^2}, \quad w = \frac{64Nv}{\sqrt{2}E_J\pi^2}, \quad h = \frac{8N\delta}{\pi^2}. \quad (14)$$

Заметим, что группа симметрии гамильтониана, соответствующего уравнению (13), включает преобразования $U_n = e^{i\pi n(\hat{S}^z + N/2)} \hat{T}_{\pi n/2}$. Здесь \hat{T}_a — оператор трансляции на расстояние a вдоль оси x . Уравнение (12) показывает, что параметр $\tilde{\gamma}$ характеризует различные неприводимые представления группы симметрии.

Уравнения (13,12) Могут быть полностью исследованы в случае полной фрустрации, когда поток через каждый ромбик равен $\Phi_0/2$. В такой системе $h = 0$ и гамильтониан коммутирует с S^x . Однако, переменные x и S^x не могут быть напрямую разделены из-за граничного условия (12). Поэтому мы ищем волновую функцию в виде

$$\psi(x, \sigma) = e^{i\tilde{\gamma}} |S^x\rangle \phi(x) + e^{i\pi \hat{S}^z + i\pi N/2} |S^x\rangle \phi(x + \pi/2) \quad (15)$$

При этом для $\phi(x)$ получается стандартное уравнение Матье:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (b - 2q \cos 2x) \phi = 0, \quad (16)$$

где $q = wS^x$. Граничное условие (12) теперь принимает вид:

$$\phi(x + \pi) = e^{2i\tilde{\gamma}} \phi(x). \quad (17)$$

Основное состояние системы, определяемой уравнениями (16, 17), соответствует максимальной абсолютной величине проекции спина S_x , равной $N/2$. Другими словами, в основном состоянии все ромбики цепочки находятся либо в симметричной, либо в антисимметричной суперпозиции своих (вырожденных) классических состояний. Таким образом имеются два вырожденных собственных состояния

$$|0_{\tilde{\gamma}}^+\rangle = \phi_{\tilde{\gamma}}(x)|S^x = N/2\rangle \quad \text{and} \quad |0_{\tilde{\gamma}}^-\rangle = \phi_{\tilde{\gamma}}(x + \pi/2)|S^x = -N/2\rangle = \widehat{U}_1|0_{\tilde{\gamma}}^+\rangle, \quad (18)$$

с одинаковой энергией E_0 . Это вырождение является прямым следствием того, что при $\hbar = 0$ (полностью фразстрированная цепочка) гамильтониан имеет два интеграла движения S^x и U_1 , которые не коммутируют друг с другом (поэтому двукратно вырождены все состояния, а не только основное). Состояния $|0_{\tilde{\gamma}}^\pm\rangle$ составляют базис, в котором оператор \widehat{S}^x диагонален. Возвращаясь к исходной задаче, определяемой уравнениями (12,13) мы видим (в соответствии с (15)), что правильное (единственное) собственное состояние, подчиняющееся условию (12), представляет собой определенную линейную комбинацию состояний $|0_{\tilde{\gamma}}^+\rangle$ и $|0_{\tilde{\gamma}}^-\rangle$:

$$|G_{\tilde{\gamma}}\rangle = \frac{e^{i\tilde{\gamma}}|0_{\tilde{\gamma}}^+\rangle + |0_{\tilde{\gamma}}^-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (19)$$

диагонализующую оператор U_1 . Состояние $|G_{\tilde{\gamma}}\rangle$ аналогично состояниям $|G\rangle$ из работы [2], ср. уравнение (5) в [2].

Из граничного условия (17) следует, что сдвиг фазы $\tilde{\gamma}$ на π не меняет граничной задачи, определяемой уравнениями (16, 17). Поэтому энергия основного состояния системы, а вместе с ней и сверхпроводящий ток, является периодической функцией потока Φ_c с периодом $\Phi_0/2$.

При $Nw \sim N^2v/E_J \ll 1$ флуктуации ромбиков слабы, потенциал в (16) мал и его воздействие наиболее существенно, когда $4\Phi_c/\Phi_0$ является целым числом и уровни $E_{m,\sigma}$ вырождены. В этой ситуации применимо обычное приближение слабой связи и для сверхпроводящего тока кольцо мы получаем

$$I(\tilde{\gamma}) = \frac{2e}{\hbar} \frac{dE}{d\gamma} = \text{sign } \tilde{\gamma} \frac{\sqrt{2}I_c^0\pi}{4N} \left(1 - \frac{2|\tilde{\gamma}|}{\pi}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - 2|\tilde{\gamma}|/\pi)^2 + (q/2)^2}} - 1\right). \quad (20)$$

Ток $I(\tilde{\gamma})$ описывается уравнением (20) при $-\pi/2 < \tilde{\gamma} < \pi/2$ является периодической функцией $\tilde{\gamma}$ с периодом π . Таким образом в режиме слабых флуктуаций зависимость

$I(\tilde{\gamma})$ демонстрирует характерное "пилообразное" поведение, слегка сглаженное флуктуациями.

Противоположный предел $Nw \gg 1$ соответствует режиму сильных флуктуаций. В этом случае собственное значение b экспоненциально слабо зависит от фазы $\tilde{\gamma}$ [7]:

$$b = -2q + 16\sqrt{\frac{2}{\pi}}q^{3/4}e^{-4\sqrt{q}}(1 - \cos 2\tilde{\gamma}) \quad (21)$$

и для сверхтока в основном состоянии мы находим

$$I(\tilde{\gamma}) = 32 \cdot 2^{3/8} I_c^0 (v/E_J)^{3/4} \sqrt{N} \exp \left\{ -\frac{16 \cdot 2^{1/4}}{\pi} N \sqrt{\frac{v}{E_J}} \right\} \sin 2\tilde{\gamma}. \quad (22)$$

Уравнение (22), совместно с (9), представляет собой один из основных результатов данной работы: оно определяет амплитуду $4e$ -сверхтока в режиме полной фразстрации.

Обратимся теперь к исследованию ситуации общего положения, описываемой уравнениями (13) и (12). Как было упомянуто ранее, когда магнитный поток через отдельный ромбик слегка отличается от половины кванта потока, сверхпроводящий ток через кольцо имеет две компоненты I_{4e} и I_{2e} . В режиме сильных флуктуаций оба эти тока экспоненциально малы. При этом главный экспоненциальный множитель в выражениях для них можно найти на основе уравнения (13) используя квазиклассическое приближение.

Заметим, что уравнение (13) соответствует частице массы 1 со спином S , движущейся в одномерном потенциале

$$U(x, \vec{S}) = w \cos 2x \cdot S^x - hS^z, \quad (23)$$

причем энергия частицы $E^0 = b/2$. Таким образом, обозначая через θ и ϕ углы, определяющие направление спина, мы можем представить соответствующую амплитуду перехода в мнимом времени в виде функционального интеграла [8]

$$\langle \theta_2, \phi_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | \theta_1, \phi_1, x_1 \rangle = \int_{\theta_1, \phi_1, x_1}^{\theta_2, \phi_2, x_2} \mathcal{D}\Omega \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left(iS(1 - \cos \theta)\dot{\phi} + \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x, \vec{S}) \right) \right\} \quad (24)$$

Для наших целей удобнее переписать выписанное выше выражение в иной форме, также

полученной в [8]:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | \vec{S}_1, x_1 \rangle = \\ \int_{\vec{S}_1, x_1}^{\vec{S}_2, x_2} \mathcal{D}\vec{S} \mathcal{D}x \delta(\vec{S}^2 - S^2) \exp \left\{ - \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left(i \frac{S^x \dot{S}^y - \dot{S}^x S^y}{S + S^z} + \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x, \vec{S}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

Мы проанализируем выражение (25) в пределе достаточно больших δ , когда $h \gg w$. При этом поле h в (23) фиксирует направление спина \vec{S} , так что S^x и S^y всегда малы. Поэтому действие в функциональном интеграле (24) может быть линеаризовано по отношению к S^x и S^y . После линеаризации переменная S^y может быть исключена с помощью уравнений движения. Замена переменных $S^x \rightarrow \sqrt{S\hbar}y$, $\tau \rightarrow \tau/h$ приводит к функциональному интегралу

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \int_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \mathcal{D}x \mathcal{D}y \exp(-S_E) \quad (26)$$

где действие

$$S_E = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + U_{eff}(x, y) \}, \quad (27)$$

$$U_{eff}(x, y) = (y + d \cos 2x)^2 + d^2 \sin^2 2x, \quad d = \sqrt{\frac{w^2 S}{\hbar^3}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\delta^{3/2}} \frac{v}{E_J}. \quad (28)$$

Соответствующие уравнения движения

$$\ddot{x} + 2dy \sin 2x = 0, \quad (29)$$

$$\ddot{y} - y - d \cos 2x = 0. \quad (30)$$

Используя квазиклассическое приближение, необходимо прежде всего определить классические минимумы потенциала (28). В рассматриваемом пределе $h \gg w$ мы находим, что имеются две группы минимумов потенциала U_{eff} (мы будем называть их четными и нечетными)

$$x = \pi n, \quad y = -d, \quad (31)$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad y = d, \quad (32)$$

где n — произвольное целое. Все эти минимумы соответствуют одному и тому же значению $U_{eff} = 0$. Таким образом необходимо рассматривать два типа траекторий туннелирования. Траектории первого типа соединяют минимумы из одной группы, т.е.

"четный-четный" или "нечетный-нечетный". Изменение переменной x на такой траектории равно $\pm\pi$, в то время как значения y в начале и конце траектории совпадают. Траектории второго типа соединяют минимумы противоположной четности. Изменение x на траектории второго типа равно $\pm\frac{\pi}{2}$. Из соотношений (11,13,12) нетрудно видеть, что изменение Δx переменной x вдоль траектории туннелирования находится во взаимно однозначном соответствии с элементарным зарядом, переносимым по цепочке ромбиков: $q_0 = \frac{4e}{\pi}\Delta x$. В соответствии с этим траектории первого типа ответственны за $4e$ -сверхток, в то время как траектории второго типа приводят к обычному $2e$ сверхпроводящему току. Амплитуды компонент сверхтока с экспоненциальной точностью определяются классическим действием на соответствующих траекториях (непосредственный вывод приведен в приложении)

$$I(\gamma) = I_{2e} \sin \tilde{\gamma} + I_{4e} \sin(2\tilde{\gamma}), \quad (33)$$

где

$$I_{4e} = A_{4e} \exp(-S_E^{4e}), \quad I_{2e} = A_{2e} \exp(-S_E^{2e}), \quad (34)$$

и S_E^{4e} и S_E^{2e} — величина действия на траекториях первого и второго типов соответственно. В режиме сильных флуктуаций $Nw \gg 1$ оба действия S_E^{4e} и S_E^{2e} велики и, таким образом, сверхпроводящий ток определяется в основном процессами туннелирования с наименьшим действием.

Чтобы сравнить действия S_E^{4e} и S_E^{2e} , заметим, что система (29) и (30) имеет две характерные частоты. Первая из них $\omega_s = 1$ характеризует "спиновую" подсистему, в то время как вторая $\omega_x \sim d$, характеризует "х"-подсистему. Следовательно при $d \ll 1$, т.е. при достаточно большом отклонении потока δ , "спиновая переменная" y является быстрой и может быть исключена в адиабатическом приближении. Это приводит к действию.

$$S_E = h \int d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{d^2}{4} \cos 4x \right\}, \quad (35)$$

$$S_E^{4e} \approx 2hd \quad \text{и} \quad S_E^{2e} \approx hd, \quad \text{при} \quad d \ll 1 \quad (36)$$

Доминирующим процессом является таким образом обычный $2e$ -транспорт. Сравнивая действие (35) с действием, соответствующим уравнению Шредингера (16)

$$S_E^0 = \int d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} + q \cos 2x \right\} \quad (37)$$

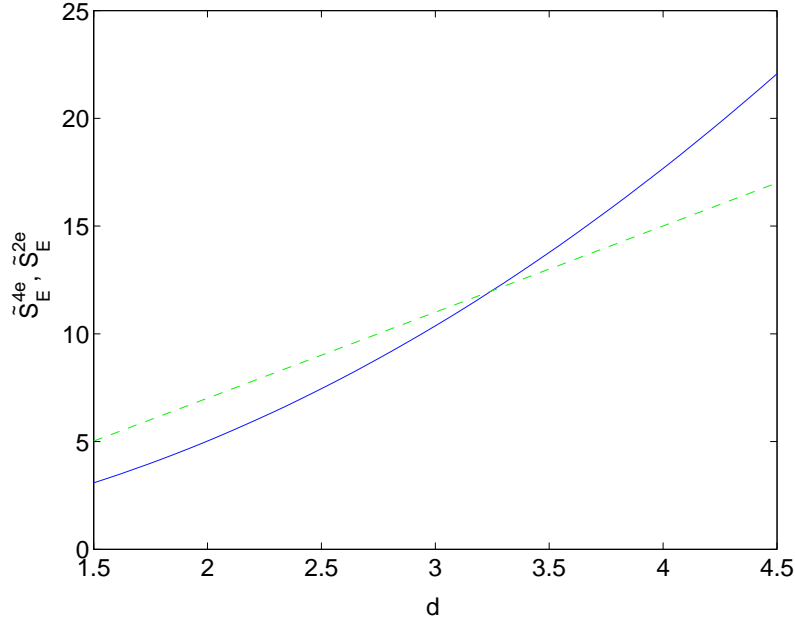


Рис. 3: Результаты численного расчета функций $\tilde{S}_E^{2e}(d)$ (сплошная линия) и $\tilde{S}_E^{4e}(d)$ (пунктирная линия).

и используя (21), мы получаем амплитуду сверхпроводящего тока

$$I_{2e} \approx 32 \cdot 2^{1/4} I_c^0 \sqrt{N} \left(\frac{v}{E_J \sqrt{\delta}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{8\sqrt{2}}{\pi} \frac{Nv}{E_J \sqrt{\delta}} \right\} \quad \text{при} \quad \frac{1}{\delta^{3/2}} \frac{v}{E_J} \ll 1 \quad (38)$$

При малых отклонениях потока δ параметр $d \gg 1$ и спиновая переменная y является относительно медленной и практически не меняется на траектории первого типа. При этом доминируют $4e$ -траектории. Считая y постоянным, мы получаем

$$S_E^{4e} = h \int d\tau \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} - d^2 \cos 2x \right\} = 4hd \quad (39)$$

Принимая во внимание также первый порядок теории возмущений по малой величине $1/d \ll 1$, находим $S_E^{4e} = h(4d - 1)$. Сравнение действия (39) with (37) с (21) позволяет определить также и предэкспоненциальный фактор в выражении для тока

$$I_{4e} \approx 128 \cdot 2^{1/4} I_c^0 \sqrt{N} \left(\frac{v}{E_J \sqrt{\delta}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{32\sqrt{2}}{\pi} \frac{Nv}{E_J \sqrt{\delta}} + \frac{8N\delta}{\pi^2} \right\} \quad \text{при} \quad \frac{1}{\delta^{3/2}} \frac{v}{E_J} \gg 1 \quad (40)$$

Отметим, что при δ , определенном из уравнения $h = w$ (точка, в которой линейное приближение, использованное для описания спиновой подсистемы перестает работать),

4e-ток, определенный в (40), совпадает с точным результатом (22) для $\delta = 0$. В промежуточной области $d \sim 1$ мы анализируем уравнения (27), (29) и (30) численно. Величины S_E^{4e} S_E^{2e} могут быть представлены в виде $S_E^{4e} = h\tilde{S}_E^{4e}(d)$, $S_E^{2e} = h\tilde{S}_E^{2e}(d)$. Функции $\tilde{S}_E^{4e}(d)$ и $\tilde{S}_E^{2e}(d)$, зависящие от единственного параметра d рассчитываются численно. Результат представлен на Рис. 3. Действия на траекториях обоих типов сравниваются при $d = d_0 \approx 3.2$, причем $\tilde{S}_E^{4e}(d_0) = \tilde{S}_E^{2e}(d_0) \approx 11.9$. Таким образом кроссовер между 4e-режимом и 2e-режимом происходит в точке

$$\delta\Phi = \delta\Phi^c = \left(\frac{v^2}{4\pi d_0^2 E_J^2} \right)^{1/3} \Phi_0 \approx 0.2 \left(\frac{v}{E_J} \right)^{2/3} \Phi_0 \quad (41)$$

Изменяя поток Φ_r в некоторой окрестности точки кроссовера (41), можно зарегистрировать обе компоненты тока I_{2e} и I_{4e} , однако их относительная величина очень чувствительна к отклонению $\Phi_r - \Phi_r^c$, аналогично сосуществованию фаз вблизи точки фазового перехода первого рода.

4 Состояния с малым напряжением

В предыдущем разделе мы получили оценки (20,22,38,40) для равновесного сверхпроводящего тока $I(\gamma)$ в кольце из $N \gg 1$ ромбиков с заданным *потоком* через него. Отметим, что максимальное значение этого тока мало по сравнению с критическим током одного перехода I_c^0 даже в случае слабых квантовых флуктуаций, ср. уравнение (20). Причиной этого является тот факт, что до сих пор мы рассматривали полностью равновесный джозефсоновский ток, который должен быть 2π -периодической функцией фазы γ . В связи с этим в длинной цепочке разность фаз на каждом ромбике пропорциональна $1/N$, что приводит к $I_c \sim I_c^0/N$ в пределе слабых флуктуаций $Nw \ll 1$ (в области сильных флуктуаций I_c экспоненциально мало по N). Ясно однако, что при заданном внешнем *токе* через цепочку, $I \ll I_c^0$, цепочка будет находиться в некотором "почти сверхпроводящем" состоянии с очень малым напряжением, вызванным редкими проскоками фазы. Ниже мы рассматриваем режим относительно больших токов (точное условие приведено ниже), когда процессы туннелирования в различных ромбиках некогерентны. При этом среднее напряжение V на цепочке может быть оценено просто как N раз напряжение на отдельном ромбике. Ниже мы оцениваем вероятность QPS в отдельном ромбике в единицу времени при фиксированном транспортном токе $I \ll I_c^0$ через ромбик и получаем вольт-амперную характеристику цепочки $V(I)$.

Вводя переменные $\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)}$, $\chi_1 = \theta^{(1)} - \theta^{(2)}$, $\chi_2 = \theta^{(3)} - \theta^{(4)}$, мы можем переписать действие в мнимом времени для отдельного ромбика, несущего внешний ток I , в виде

$$S_E = \int d\tau \left\{ \frac{1}{32E_C} \left(2\dot{\theta}^2 + \dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2 \right) + V(\theta, \chi_1, \chi_2) \right\}, \quad (42)$$

$$V(\theta, \chi_1, \chi_2) = -E_J \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\chi_1}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} + \frac{I}{I_c^0} \theta \right). \quad (43)$$

Здесь предположено, что магнитный поток через ромбик равен половине кванта потока.

Для того чтобы найти классические состояния ромбика, мы исключаем χ_1 и χ_2 из (43) и находим

$$V(\theta) = -E_J \left(2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| + 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| + \frac{I}{I_c^0} \theta \right). \quad (44)$$

Потенциал (44) имеет набор локальных минимумов: $\theta_{min} = \theta_0 + \pi m$, где θ_0 определяется уравнением

$$\sin \frac{\theta_0}{2} - \cos \frac{\theta_0}{2} = \frac{I}{I_c^0}. \quad (45)$$

При надлежащем выборе фаз χ_1 и χ_2 каждая θ_{min} соответствует классическому состоянию, локализованному возле этого минимума. Из-за процессов квантового туннелирования все эти состояния являются метастабильными и имеют конечное время распада τ .

В квазиклассическом приближении (применимом при $E_J \gg E_C$) время распада τ определяется окрестностью классической траектории, начинающейся в одном из минимумов потенциальной энергии (43), проходящей вблизи другого и возвращающейся затем к первому минимуму [10, 11]. Ради конкретности мы будем говорить о скорости распада классического состояния с $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$ и $\theta = \theta_0$. Распад этого состояния идет по двум возможным траекториям (при $I > 0$). Одна из них проходит возле $\theta = \theta_0$, $\chi_1 = 2\pi$ и $\chi_2 = 0$, в то время как вторая — возле $\theta = \theta_0$, $\chi_1 = -2\pi$ и $\chi_2 = 0$. Обе эти траектории дают одинаковый вклад в вероятность распада.

Обозначим через $q = (\theta, \chi_1, \chi_2)^T$ — трехмерный вектор-столбец в координатном пространстве ромбика. Введем в рассмотрение также $q_0(\tau) = (\theta_0, 0, 0)^T$ — траекторию, соответствующую системе, покоящейся в минимуме потенциала (43), и $q_b(\tau)$ — траекторию, по которой происходит распад. Эта траектория может быть определена интегрированием классических уравнений движения при надлежащих граничных условиях. Тогда вероятность распада в единицу времени метастабильного состояния определяется вы-

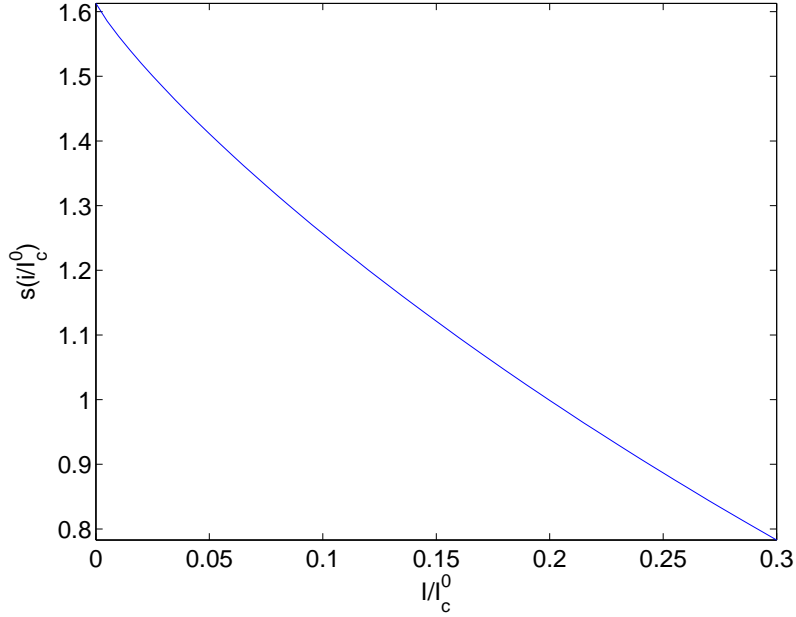


Рис. 4: Результаты численного расчета $s(I/I_c^0)$.

ражением [10, 11]

$$1/\tau = 2 \left(\frac{S_E[q_b]}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-S_E[q_b]} \left| \text{Det}' \left(\frac{\delta^2 S_E}{\delta q^2} \right)_{q=q_b} \right|^{-1/2} \left| \text{Det} \left(\frac{\delta^2 S_E}{\delta q^2} \right)_{q=q_0} \right|^{1/2} \quad (46)$$

где Det' означает, что нулевое собственное значение должно быть опущено при вычислении детерминанта.

После замены временного масштаба в соответствии с $\tau \rightarrow \tau/\sqrt{E_J E_C}$, действие на траектории может быть записано в виде $S_E[q_b] = 2\sqrt{E_J/E_C} s(I/I_c^0)$ и для обратного времени распада мы имеем

$$\frac{1}{\tau} \approx 2 \frac{(E_J^3 E_C)^{1/4}}{\hbar} K(I/I_c^0) \exp \left(-2\sqrt{\frac{E_J}{E_C}} s(I/I_c^0) \right). \quad (47)$$

Здесь $K(I/I_c^0)$ — численный коэффициент порядка единицы. Функция $s(I/I_c^0)$, зависящая от единственного параметра I/I_c^0 может быть рассчитана численно решением уравнений Лагранжа для действия (42) с соответствующими граничными условиями. Результат представлен на Рис. 4. Предположим, что ток I не очень мал, так что разность энергий $\delta V = \pi E_J I/I_c^0$ между двумя ближайшими минимумами потенциала (43) намного превосходит введенную выше квантовую амплитуду проскока фазы v , т.е. примем, что $I \gg I_1 = I_c^0 v/\pi E_J$. В таком случае переходы внутри каждого ромбика между

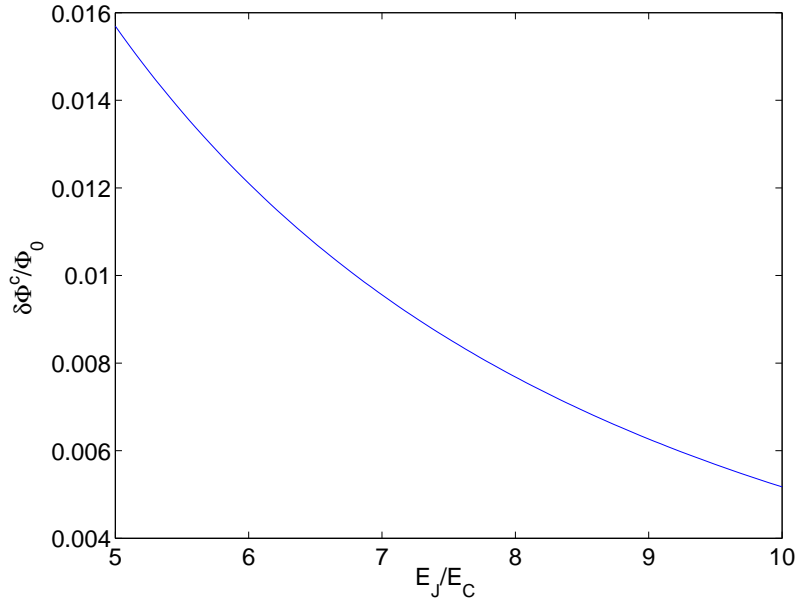


Рис. 5: Критическое отклонение $\delta\Phi^c$ в зависимости от отношения E_J/E_C

состояниями, соответствующими различным минимумам потенциала (43) некогерентны. Полное напряжение на цепочке может быть выражено через время распада τ соотношением $V = N\hbar\bar{\theta}/2e \approx \pi N\hbar/2e\tau$, так как при каждом прыжке системы из одного минимума в другой фаза θ меняется на π . Таким образом, окончательно мы находим вольт-амперную характеристику цепочки $V(I)$:

$$V(I) = \frac{\pi N E_J}{e} \left(\frac{E_C}{E_J} \right)^{1/4} K(I/I_c^0) \exp \left(-2 \sqrt{\frac{E_J}{E_C}} s(I/I_c^0) \right) \quad (48)$$

Уравнение (48) описывает цепочку ромбиков с случае, когда внешний ток I достаточно велик: $I > I_c$, $I \gg I_1$. При соблюдении этого условия когерентность в системе разрушена. Этот предел противоположен рассмотренному в предыдущем разделе, где величина равновесного джозефсоновского тока определялась *когерентными* квантовыми флуктуациями всех ромбиков.

5 Заключение

В данной работе приведено детальное вычисление сверхпроводящего тока в длинной цепочке фрастрированных ромбиков. Мы показали, что сверхток, переносимый кван-

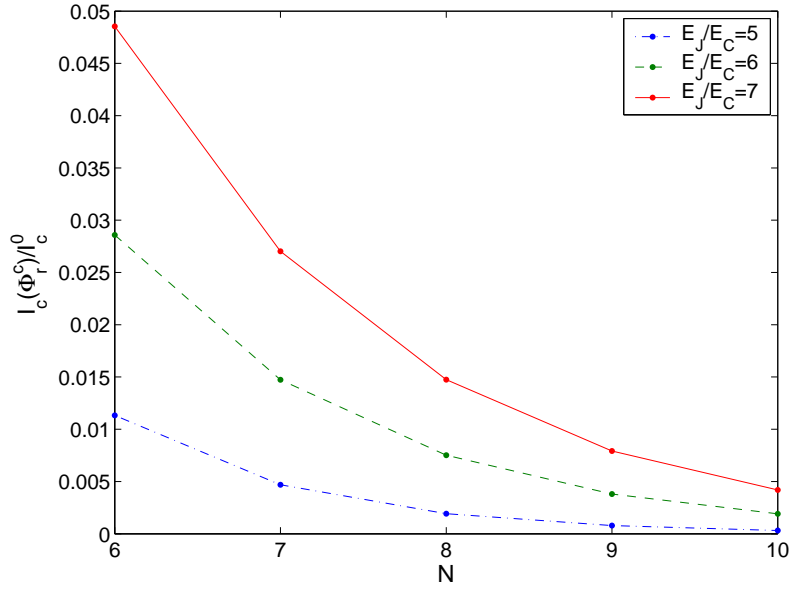


Рис. 6: Критический ток I_c в точке кроссовера в зависимости от N при различных E_J/E_C .

тами заряда $4e$ доминирует над $2e$ -сверхтоком в малой окрестности точки максимальной фразстрации $\Phi_r = \Phi_0/2$. Согласно (41), критическое отклонение $\delta\Phi^c$ от этой точки, возвращающее систему к обычному $2e$ -сверхтоку, зависит от единственного параметра E_J/E_C . Эта зависимость представлена на Рис. 5. Мы видим, что $\delta\Phi^c$ быстро уменьшается с увеличением отношения E_J/E_C . Чтобы экспериментально обнаружить $4e$ -сверхток, необходимо контролировать поток Φ_r , проходящий через каждый ромбик, с точностью, превышающей $\delta\Phi^c$. Таким образом, отношение E_J/E_C не должно быть слишком большим.

В соответствии с (14), параметр $q = Nw/2$, управляющий силой флуктуаций в точке максимальной фразстрации, пропорционален N^2v/E_J , где v определяется уравнением (9). В режиме сильных флуктуаций (большие q) $4e$ - и $2e$ -сверхтоки экспоненциально малы, см. (34). Действия S_E^{4e} и S_E^{2e} в уравнении (34) пропорциональны числу ромбиков N : $S_E^{2e} \sim N\delta\tilde{S}_E^{2e}$ и $S_E^{4e} \sim N\delta\tilde{S}_E^{4e}$. При достаточно больших N небольшие вариации величин $\delta\tilde{S}_E^{4e}$ и $\delta\tilde{S}_E^{2e}$ возле точки кроссовера Φ_r^c приводят к сильным изменениям соотношения между $2e$ - и $4e$ -сверхтоками. Поэтому следует ожидать, что кроссовер между $2e$ - и $4e$ -режимами будет резким при больших N и $N^2v/E_J \geq 1$. С другой стороны, сверхтоки I_{4e} и I_{2e} , подавленные квантовыми флуктуациями, должны быть измеримыми. Качественная зависимость критического тока цепочки I_c в точке кроссовера от числа ромбиков

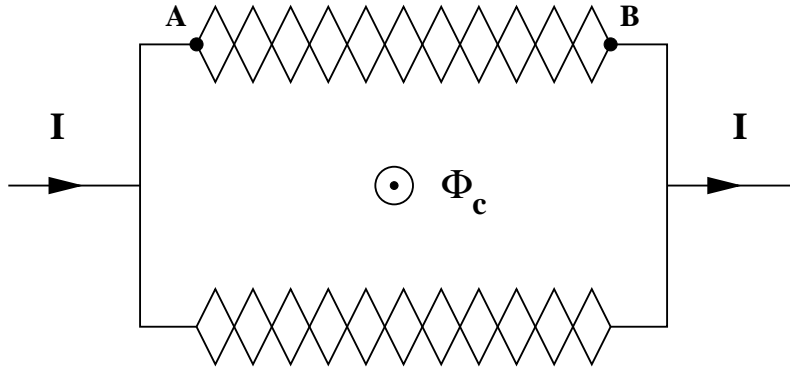


Рис. 7: Аналог СКВИДа на постоянном токе для проверки зависимости сверхтока от внешней разности фаз (33).

при различных E_J/E_C представлена на Рис. (6). При расчете кривых, изображенных на Рис. 6, предэкспоненциальный множитель в выражении для критического тока был оценен как среднее геометрическое префакторов в (38) и (40). Оптимальный для эксперимента набор параметров представляется следующим: $5 \leq E_J/E_C \leq 7$, и $N \in (6, 10)$. В соответствии с Рис. 5 и Рис. 6, при этом $\delta\Phi^c/\Phi_0 \in (0.01 - 0.015)$ и $I_c \sim 10^{-2} - 10^{-3} I_c^0$.

В данной работе функциональный интеграл (25) рассматривался в пределе достаточно больших δ , когда $h \gg w$. Для того чтобы это условие выполнялось в точке кроссовера, необходимо, см. (14, 41)

$$\left. \frac{h}{w} \right|_{\Phi_r = \Phi_c^c} = \left(\frac{\pi^2}{64\sqrt{2}d_0^2} \frac{E_J}{v} \right)^{1/3} \approx 0.2 \left(\frac{E_J}{v} \right)^{1/3} \gg 1 \quad (49)$$

Это всегда правильно при больших E_J/E_C . Однако, для предложенного набора параметров ($5 \leq E_J/E_C \leq 7$) отношение $0.75 \leq h/w \leq 0.95$ и мы находимся на границе применимости сделанного приближения. Поэтому для получения точных оценок I_{2e} и I_{4e} в точке кроссовера необходимо вычислять классическое действие на $2e$ - и $4e$ -траекториях для исходного функционального интеграла (25).

Возможная схема эксперимента для проверки фазовой зависимости сверхпроводящего тока (33) представлена на Рис. 7. Цепь на Рис. 7 является аналогом обычного СКВИДа на постоянном токе. Обозначим через ϕ разность фаз параметра порядка в точках A и B , см. Рис. 7. Из уравнения (33) следует, что для определения критического тока рассматриваемого устройства, во многом аналогично обычному СКВИДу, необходимо произвести максимизацию относительно фазы ϕ сверхтока I , задаваемого

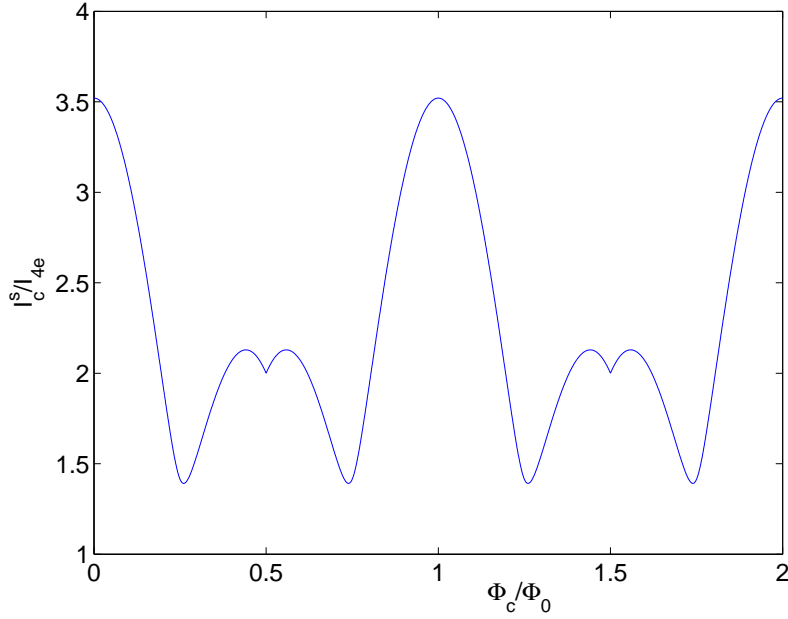


Рис. 8: Критический ток I_c^s в точке кроссовера.

соотношением

$$I = 2I_{4e} \cos \frac{2\pi\Phi_c}{\Phi_0} \sin \left(2\phi + \frac{2\pi\Phi_c}{\Phi_0} \right) + 2I_{2e} \cos \frac{\pi\Phi_c}{\Phi_0} \sin \left(\phi + \frac{\pi\Phi_c}{\Phi_0} \right). \quad (50)$$

Когда отклонение $\delta\Phi$ магнитного потока Φ_r через каждый ромбик от $\Phi_0/2$ превышает критическое отклонение $\delta\Phi^c$, $4e$ -сверхток пренебрежимо мал и для критического тока предложенного устройства мы получаем (в полной аналогии со СКВИДом)

$$I_c^s = 2I_{2e} \left| \cos \frac{\pi\Phi_c}{\Phi_0} \right|. \quad (51)$$

Таким образом зависимость I_c^s от потока Φ^c является Φ_0 -периодической при $\delta\Phi \gg \delta\Phi^c$. С другой стороны, в точке максимальной фрустрации существует только $4e$ -сверхток, так что I_c^s будет $\Phi_0/2$ -периодичен

$$I_c^s = 2I_{4e} \left| \cos \frac{2\pi\Phi_c}{\Phi_0} \right|. \quad (52)$$

Зависимость $I_c^s(\Phi_c)$ в точке кроссовера ($I_{2e} = I_{4e}$) представлена на Рис. 8.

В представленном анализе цепочки ромбиков мы пренебрегли двумя существенными источниками беспорядка, которые всегда присутствуют в реальной системе: а) некоторая случайность потоков Φ_r^j , пронизывающих различные ромбики (из-за неизбежного

различия их площадей), и б) присутствие случайных зарядов q_n , приводящих из-за эффекта Ааронова-Кашера к появлению случайных фазовых множителей в амплитудах квантовых проскоков фазы. Можно ожидать, что воздействие на систему беспорядка типа а) слабо, если площади различных ромбиков совпадают с точностью лучше, чем $\delta\Phi^c/\Phi_0$. В то же время эффект случайных зарядов может оказаться значительно более существенным (см. работу [5], где этот эффект обсуждался для цепочки обычных джозефсоновских переходов).

А Квазиклассический анализ $I(\gamma)$

В этом приложении мы получим зависимость наименьшего собственного значения b задачи, определяемой уравнениями (12,13), от фазы $\tilde{\gamma}$ в режиме сильных флуктуаций и выведем выражение (33) для сверхпроводящего тока.

Рассмотрим более подробно амплитуду перехода (26) в случае, когда (x_1, y_1) — четный минимум потенциала (28), а (x_2, y_2) — нечетный, ср. (31,32). Для конкретности выберем $(x_1, y_1) = (0, -d)$ и $(x_2, y_2) = (\pi/2, d)$. Линии уровня потенциала $U_{eff}(x, y)$ представлены на Рис. 9. Возможные туннельные траектории схематически изображены стрелками. Удобно разделить все траектории туннелирования на восемь групп. На всякой траектории из группы 1, переменная y не меняется и равна $-d$ на обоих концах траектории, в то время как переменная x увеличивается на π ; траектории из группы 2 — партнеры траекторий из группы 1 (идущие против стрелки на Рис. 9). Группы 3, 4, ..., 8 определяются аналогично в соответствии с Рис. 9. Все траектории из групп 1, 2, 7, 8 соединяют минимумы одинаковой четности и являются траекториями первого типа в терминах раздела III, в то время как траектории из групп 3, 4, 5, 6 соединяют минимумы противоположной четности и являются траекториями второго типа.

Обозначим через $T\alpha_{4e}$ и $T\alpha_{2e}$ вклады в амплитуду туннелирования от *единственной* траектории первого и второго типов соответственно, т.е.

$$\alpha_{4e} = \beta_{4e} e^{-S_E^{4e}} \quad \alpha_{2e} = \beta_{2e} e^{-S_E^{2e}}, \quad (53)$$

где предэкспоненциальные множители β_{4e} и β_{2e} могут быть получены интегрированием по флуктуациям возле соответствующих траекторий. Для вычисления амплитуды перехода (26) в квазиклассическом приближении необходимо просуммировать вклады от всех траекторий, состоящих из n_1 подтраекторий из группы 1, n_2 подтраекторий из

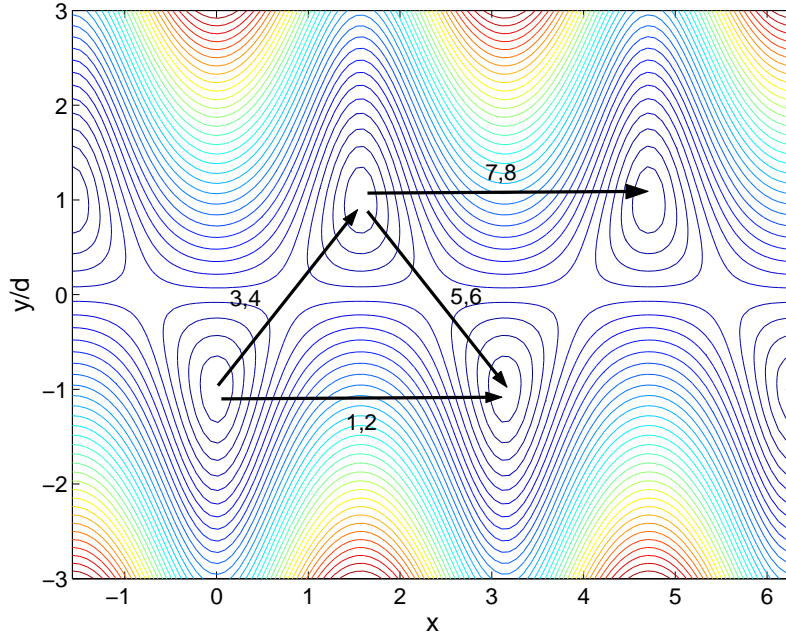


Рис. 9: Линии уровня потенциала $U_{eff}(x, y)$.

группы 2 и так далее. Такая траектория, включающая $R = \sum_{k=1}^8 n_k$ подтраекторий дает в функциональный интеграл (26) вклад

$$\frac{T^R}{R!} \alpha_{4e}^{n_3+n_4+n_5+n_6} \alpha_{2e}^{n_1+n_2+n_7+n_8}. \quad (54)$$

Поскольку все рассматриваемые траектории начинаются в точке $(0, -d)$ и заканчиваются в $(\pi/2, d)$, на целые числа n_1, \dots, n_8 необходимо наложить ограничения:

$$2(n_1 + n_7) - 2(n_2 + n_8) + n_3 - n_4 + n_5 - n_6 = 1, \quad (55)$$

$$n_3 - n_4 - n_5 + n_6 = 1. \quad (56)$$

Обозначим

$$K = n_1 + n_7, \quad L = n_2 + n_8 \quad M = n_4 + n_5 = n_3 + n_6 - 1. \quad (57)$$

Все траектории с фиксированными K, L, M, n_3 и n_4 дают одинаковый вклад в амплитуду перехода. Число таких траекторий

$$\frac{R!(M+1)!M!}{(2M+1)!K!L!n_3!n_4!(M-n_4)!(M-n_3+1)!} \quad (58)$$

Таким образом, принимая во внимание (54,58,55), для амплитуды перехода в квазиклассическом приближении мы получаем

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \sum_{\substack{K,L,n_3,n_4 \geq 0 \\ M \geq \max(n_4, n_3-1) \\ K-L+n_3-n_4=1}} \frac{(T\alpha_{4e})^{K+L}(T\alpha_{2e})^{2M+1}(M+1)!M!}{K!L!n_3!n_4!(2M+1)!(M-n_4)!(M-n_3+1)!}. \quad (59)$$

Вместо вычисления суммы (59) удобно рассмотреть функцию $Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e})$, определенную согласно соотношению

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \frac{1}{T} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_{2e}}. \quad (60)$$

Для функции $Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e})$ мы имеем

$$Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{K,L,n_3,n_4 \geq 0 \\ M \geq \max(n_4, n_3-1) \\ K-L+n_3-n_4=1}} \frac{(T\alpha_{4e})^{K+L}(T\alpha_{2e})^{2M+2}B(M+1, M+1)}{K!L!n_3!n_4!(M-n_4)!(M-n_3+1)!}, \quad (61)$$

где $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера. Используя интегральное представление бета-функции и разложение в ряд модифицированных функций Бесселя [7]

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\sin \varphi)^{2x-1} (\cos \varphi)^{2y-1}, \quad I_n(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^n \sum_k \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(n+k)!}, \quad (62)$$

мы можем выполнить суммирование по M, K, L в (61) и получить

$$Q = \sum_{n_3, n_4 \geq 0} \frac{(T\alpha_{2e})^{n_4+n_3+1} I_{|n_4-n_3+1|}(2T\alpha_{4e})}{2^{n_3+n_4+1} n_3! n_4!} \int_0^\pi d\varphi (\sin \varphi)^{n_3+n_4} I_{|n_4-n_3+1|}(T\alpha_{2e} \sin \varphi). \quad (63)$$

Вводя обозначение $Z = n_3 - 1 - n_4$ и суммируя по n_3, n_4 при фиксированном Z , находим

$$Q = \frac{T\alpha_{2e}}{2} \sum_{Z=-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi d\varphi I_{|Z|}(2T\alpha_{4e}) I_{|Z|}(T\alpha_{2e} \sin \varphi) I_{|Z+1|}(T\alpha_{2e} \sin \varphi). \quad (64)$$

Принимая во внимание интегральное представление модифицированных функции Бесселя выражение для их производящей функции [7]

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \exp(in\theta + z \cos \theta), \quad \exp\left\{\frac{z}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t^k I_k(z), \quad (65)$$

мы можем переписать (64) в виде

$$Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e}) = \frac{T\alpha_{2e}}{4} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \times \\ \exp\{T\alpha_{2e} \sin \varphi (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + 2T\alpha_{4e} \cos(\theta_1 + \theta_2)\}. \quad (66)$$

После подстановки $u = (\theta_1 + \theta_2)/2$, $v = (\theta_1 - \theta_2)/2$ мы интегрируем по φ и v , используя соотношение [12]

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi I_1(2z \sin \varphi) = \frac{\pi}{2} I_{1/2}^2(z) = \frac{\sinh^2 z}{z}, \quad (67)$$

и получаем интегральное представление для $Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e})$

$$Q(\alpha_{2e}, \alpha_{4e}) = \int_0^\pi \frac{du}{2\pi} \{ \cosh(2T\alpha_{2e} \cos u) - 1 \} \exp(2T\alpha_{4e} \cos 2u). \quad (68)$$

Окончательно, используя (60) мы находим явное выражение для квазиклассической амплитуды перехода (26)

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{du}{2\pi} e^{iu} \exp(2T\alpha_{4e} \cos 2u + 2T\alpha_{2e} \cos u). \quad (69)$$

С другой стороны амплитуда перехода (26) может быть написана в виде суммы по собственным состояниям системы

$$\langle y_2, x_2 | e^{-T\hat{H}} | y_1, x_1 \rangle = \sum_n \psi_n^*(x_1, y_1) \psi_n(x_2, y_2) e^{-E_n T}. \quad (70)$$

Заметим, что группа симметрии потенциала $U_{eff}(x, y)$ состоит из преобразований $\hat{V}_n = \hat{R}^n \hat{T}_{\pi n/2}$, где \hat{T}_a — оператор трансляции на расстояние a вдоль оси x , введенный в разделе III, а \hat{R} — оператор отражения в оси x .

Таким образом уровни энергии E_u^0 фиктивной частицы в потенциале U_{eff} классифицируются наложением на их волновые функции ψ_u граничного условия

$$\hat{V}_1 \psi_u(x, y) \equiv \psi_u(x + \pi/2, -y) = e^{iu} \psi_u(x, y). \quad (71)$$

Сравнивая (70, 71) с (69), мы заключаем, что результат (69) имеет вид разложения (70), причем множитель e^{iu} под интегралом возникает из $\psi_u^*(x_1, y_1) \psi_u(x_2, y_2)$, в то время как оставшаяся часть подынтегрального выражения дает нам энергию частицы

$$E_u^0 = -2\alpha_{4e} \cos 2u - 2\alpha_{2e} \cos u. \quad (72)$$

Возвращаясь к исходной задаче, определяемой уравнениями (12, 13) и сравнивая (12) с (71), мы видим, что необходимо отождествить фазу $\tilde{\gamma}$ с "квазиимпульсом" u . Принимая во внимание соотношение между b и энергией фиктивной частицы $b = 2E^0$, упомянутое в разделе III, мы окончательно получаем зависимость $b(\tilde{\gamma})$:

$$b(\tilde{\gamma}) = -4\alpha_{4e} \cos 2\tilde{\gamma} - 4\alpha_{2e} \cos \tilde{\gamma}. \quad (73)$$

Используя уравнение (73) и стандартное соотношение $I(\gamma) = (2e/\hbar) dE_0/d\gamma$, мы легко восстанавливаем результаты (33) и (34).

Список литературы

- [1] B. Doucot and J. Vidal, Phys. Rev. Lett. **88**, 227005 (2002).
- [2] L. B. Ioffe and M. V. Feigel'man, Phys. Rev. B **66**, 224503 (2002)
- [3] B. Doucot, M. V. Feigel'man and L. B. Ioffe, Phys. Rev. Lett. **90**, 107003 (2003)
- [4] P. Delsing, C. D. Chen, D. B. Halivald, Y. Harada, T. Claeson, Phys. Rev. B **50**, 3959 (1994)
- [5] K. A. Matveev, A. I. Larkin and L. I. Glazman, Phys. Rev. Lett. **89**, 096802 (2002).
- [6] L. B. Ioffe, частное сообщение.
- [7] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1974).
- [8] J. R. Klauder, Phys. Rev. D **19**, 2349 (1979)
- [9] B. Pannetier, частное сообщение.
- [10] C. Callan, S. Coleman, Phys. Rev. D **16**, 1762 (1977)
- [11] A. I. Larkin, U. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **59**,420 (1984)
- [12] I. Gradstein, I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, (Academic Press, New York, 1980).