

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

Факультет общей и прикладной физики
Кафедра „Проблемы теоретической физики“

**ВЛИЯНИЕ ШУМА НА ФАЗЫ БЕРРИ В
МНОГОУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ**

Дипломная работа
студента 128 группы
Сызранова С.В.

Научный руководитель
д.ф.м.н. Махлин Ю.Г.

Москва
2007

Аннотация

В работе изучается влияние шума на фазы Берри для многоуровневой системы, когда ее гамильтониан и параметры взаимодействия с резервуаром адиабатически меняются по замкнутому или незамкнутому контуру. Вычисляется фаза Берри для двухуровневой системы, эквивалентной спину $1/2$ во флуктуирующем магнитном поле и обсуждается вклад в нее адиабатических изменений как невозмущенного магнитного поля, так и характеристик шума. Проанализирована структура геометрических фаз в многоуровневой системе. Результаты для геометрических фаз двухуровневой системы обобщены на случай многоуровневой.

Содержание

1	Введение	4
2	Фаза Берри для двухуровневой системы	6
3	Структура фаз Берри в многоуровневой системе	15
3.1	Случай изолированной системы	15
3.2	Присутствие шума	17
4	Геометрические фазы для многоуровневой системы с невырожденными расщеплениями	18
5	Геометрические фазы для системы с одинаковыми расщеплениями	22
6	Геометрическая релаксация диагональных элементов матрицы плотности	25
7	Заключение	26
	Список литературы	26

1 Введение

Фазой Берри [1] называется фаза, которую приобретает в дополнение к обычной динамической фазе $-\int E_n(t)dt$ невырожденное состояние $|n(t)\rangle$ гамильтониана, адиабатически меняющегося по замкнутому контуру в пространстве своих параметров. Фаза Берри имеет чисто геометрическую природу, т.е. зависит только от геометрии контура, а не от скорости и деталей его обхода.

Понятие фазы Берри было изначально введено [1] для квантовой системы, изолированной от внешнего мира. Однако, в реальности любая система взаимодействует с шумящей окружающей средой, обладающей непрерывным спектром. Из-за этого эволюция становится неадиабатической, а возврат системы в исходное состояние невозможным. Несмотря на это, фаза Берри была измерена в ряде экспериментов [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], равно как и фаза Ааронова-Анандана [12], обобщение фазы Берри на случай неадиабатической эволюции [13].

Из результатов первых теоретических работ [14, 15, 16, 17, 18, 19], посвященных фазам Берри в присутствии флуктуаций гамильтониана, следует, что существуют измеримые геометрические фазы, в пределе слабого шума переходящие в обычные фазы Берри. В некоторых из этих работ ([14, 15, 18, 19]) влияние шума сводится к появлению процессов дефазировки, скорость которых не зависит или пренебрежимо слабо зависит от скорости изменения гамильтониана. В результате, фазы Берри получаются такими же, как и в случае изолированных систем. В других работах ([16, 17]) используются подходы, которые могут привести к модификации геометрической фазы в присутствии шума, но сама фаза не вычисляется.

Вопрос о вкладе шума в геометрическую фазу был поднят в работе [20], где шла речь о наблюдаемой фазе супероператора эволюции матрицы плотности системы. Ответ на него был дан в работах [21, 22] для случая двухуровневой системы и постоянных во времени матричных элементов взаимодействия системы с резервуаром. Было показано, что в присутствии слабого коротко-коррелированного шума для двухуровневой системы, эквивалентной спину $1/2$ во флуктуирующем магнитном поле, можно ввести измеримую фазу Берри как комплексную фазу усредненного по реализациям шума недиагонального элемента матрицы плотности. Влияние шума сводится в появлении малой комплексной добавки квадрупольного типа к исходному магнитному полю. Та же задача была решена и в работе [23], но для частного случая временной зависимости невозмущенного магнитного поля.

В работах [23, 21, 22] рассматривалась ситуация, когда гамильтониан взаимодействия системы с резервуаром не зависит от параметров гамильтониана системы. Адиабатические изменения матричных элементов этого взаимодействия могут давать вклад в фазы элементов матрицы плотности. Возможна ситуация, когда гамильтониан системы неизменен, а от времени зависит только взаимодействие с шумом. В таком случае тоже встает вопрос о существовании геометрической фазы, связанной со свойствами пути параметров взаимодействия.

Отдельного рассмотрения также требует вопрос о геометрических фазах для многоуровневых систем. Действительно, фаза Берри для двухуровневой системы может быть приписана только одному недиагональному элементу матрицы плотно-

сти, так как только у него есть вещественная фаза. Однако, в случае многоуровневой системы из-за процессов релаксации несколько недиагональных элементов матрицы плотности эволюционируют взаимосвязанно, из-за чего геометрические фазы не могут быть приписаны отдельным элементам. Таким образом, структура и количество геометрических фаз для многоуровневой системы в присутствии шума могут отличаться от случая изолированной системы.

В настоящей работе мы изучаем влияние слабого коротко-коррелированного шума на геометрические фазы для многоуровневой системы с невырожденными уровнями энергии, предполагая, что со временем адиабатически меняется не только гамильтониан системы, но и матричные элементы ее взаимодействия с резервуаром.

Что мы будем называть геометрическими фазами? Чтобы измерить фазы квантовой системы, необходимо мерить среднее значение некоторого оператора $\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho})$, действующего на состояния системы. Усреднение производится по множеству попыток измерения, в каждой из которых параметры гамильтониана меняются по одному и тому же замкнутому контуру. Условие адиабатичности изменения параметров будет означать, что разницы энергий уровней системы гораздо больше обратного времени обхода контура $1/t_P$. Шум появляется в задаче в виде флуктуаций гамильтониана и задан своими временными корреляторами. При усреднении оператора по попыткам измерения он усредняется и по реализациям шума.

Чтобы ввести геометрические фазы, воспользуемся подходом, предложенным в [20]. Так как время эволюции системы существенно больше характерного времени корреляции шума и обратных расщеплений уровней, эволюцию можно считать марковской. Тогда, в силу линейности уравнений эволюции матрицы плотности, конечное значение оператора $\langle \mathcal{O} \rangle$ и матрицы плотности представляется в виде суммы конечного набора экспонент, в каждой из которых для фиксированного пути и деталей его обхода (соотношения скоростей обхода в разных точках пути) можно произвести разложение по степеням $1/t_P$:

$$\hat{\rho} = \sum_k \hat{\rho}_k e^{iA_k t_P + i\Phi_k + O(1/t_P)}, \quad t_P \longrightarrow \infty. \quad (1)$$

Матрицы $\hat{\rho}_k$ зависят от начальной матрицы плотности. Члены $A_k t_P$ в экспонентах для конкретного контура и деталей обхода играют роль динамических фаз, члены Φ_k , нулевой степени по t_P , - геометрических фаз. $O(1/t_P)$ - неадиабатические поправки. Константы A_k и Φ_k зависят от геометрии контура, по которому изменяется гамильтониан.

В отсутствие шума величины Φ_k совпадают с обычными фазами Берри изолированной системы между парами собственных состояний.

Таким образом, для изучения геометрических фаз мы будем искать оператор эволюции матрицы плотности в виде (1). При этом мы увидим, являются ли члены Φ_k для рассматриваемых систем геометрическими, т.е. зависят ли только от геометрии контура.

Мы будем использовать следующую схему вычислений. Для нахождения матрицы плотности системы в присутствии шума мы будем выводить уравнения Редфилда

в зависящем от скорости изменения гамильтониана базисе состояний. Эти уравнения мы будем раскладывать до первого неисчезающего порядка по силе шума и по неадиабатичности изменения гамильтониана. Интегрируя затем их по времени, мы будем получать оператор эволюции матрицы плотности с нужной точностью.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 рассматривается двухуровневая система, эквивалентная спину $1/2$ во флуктуирующем магнитном поле. Показано, что фаза Берри есть сумма нескольких вкладов: 1) геометрической фазы, создаваемой вращением источника шума, 2) поправки из-за вариаций гамильтониана системы, 3) потенциальной части, зависящей только от параметров гамильтониана системы и взаимодействия в начальный и конечный моменты времени. Обсуждается измеримость этих фаз. В разделе 3 анализируется структура и количество фаз Берри для многоуровневой системы. Показано, что если все расщепления уровней энергии системы различны, то каждому недиагональному элементу матрицы плотности можно поставить в соответствие единственную динамическую фазу и единственную геометрическую фазу. Если среди расщеплений имеется вырождение, то соответствующие элементы матрицы плотности эволюционируют взаимосвязано. Их динамические и геометрические фазы описываются неабелевой калибровочной структурой. В разделах 4 и 5 результаты для геометрических фаз двухуровневой системы обобщены на случай многоуровневой. В разделе 6 вычисляются геометрические релаксации диагональных элементов матрицы плотности.

2 Фаза Берри для двухуровневой системы

Для того, чтобы продемонстрировать принцип вычисления фаз Берри в случае многоуровневой системы и прояснить причины возникновения шумового вклада в нее, вычислим сначала геометрическую фазу недиагонального элемента матрицы плотности двухуровневой системы.

Вычисление будет частично повторять сделанное в работе [21], где был найден вклад шума в фазу Берри в случае, когда гамильтониан взаимодействия системы с резервуаром не зависит от времени. Здесь мы допустим, что матричные элементы этого взаимодействия могут адиабатически меняться, и покажем, что шумовая модификация фазы Берри состоит из трех частей: 1) поправки, найденной в [21], 2) геометрической фазы, создаваемой вариациями матричных элементов взаимодействия система-шум. 3) поправки, зависящей только от начального и конечного положения гамильтониана.

Гамильтониан. Гамильтониан двухуровневой системы эквивалентен гамильтониану спина $1/2$ в магнитном поле, а его флуктуации- флуктуациям этого поля. Будем для простоты считать шум однонаправленным, т.е. предположим, что поле быстро флуктуирует вдоль некоторой прямой, направление которой медленно меняется со временем.

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}\mathbf{B}\hat{\sigma} - \frac{1}{2}\hat{X}\mathbf{n}\hat{\sigma} + \hat{\mathcal{H}}_{env}(\hat{X}), \quad (2)$$

где стационарная случайная величина $\hat{X}(t)$ с нулевым средним представляет шум, а

\mathbf{n} - медленно меняющийся безразмерный вектор, введенный для учета направления и силы флуктуаций.

В общем случае вызываемое шумом возмущение гамильтониана является суммой однонаправленных некоррелированных возмущений, таких, какое введено в (2). Поправка к фазе Берри в низшем порядке по силе шума есть сумма вкладов от каждого из этих возмущений.

Мы ввели вектор \mathbf{n} для того, чтобы учесть временную зависимость свойств шума, которая может возникать из-за зависимости взаимодействия системы с резервуаром от контрольного параметра \mathbf{V} системы и из-за возможности управлять гамильтонианом взаимодействия независимо от гамильтониана спина.

Будем предполагать, что магнитное поле \mathbf{V} в конечный момент времени восстанавливает свое начальное направление. Это необходимо для измеримости фаз, набранных элементами матрицы плотности системы в ходе эволюции.

Каждому направлению магнитного поля поставим в соответствие базис собственных состояний гамильтониана системы: $|\uparrow\rangle$, "спин выпрямлен по полю \mathbf{V} " и $|\downarrow\rangle$, "спин противоположен полю". Мы не будем фиксировать фазы этих состояний, так как конечный ответ для геометрической фазы калибровочно-инвариантен, т.е. не зависит от выбора этих фаз для каждого конкретного направления. Действительно, если \mathbf{V} восстанавливает в конце свое направление, то тогда матрица плотности системы может быть измерена в своем начальном базисе, и описывает физические величины, поэтому на нее не может влиять произвол выбора фаз промежуточного базиса.

Выбор системы отсчета.

Как и в работах [21, 22], будем производить вычисления во вращающейся системе отсчета (ВСО), где магнитное поле \mathbf{V}' в отсутствие шума не вращается, а, быть может, меняется только по абсолютной величине и всегда направлено вдоль оси z . Положение ВСО будем задавать при помощи соответствующей системы координат.

Магнитное поле в новой системе отсчета есть $\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ - угловая скорость ее вращения относительно лабораторной системы отсчета. Тогда собственные состояния гамильтониана спина в ВСО $|\uparrow'\rangle$, спин сонаправлен с \mathbf{V}' , и $|\downarrow'\rangle$, противоположен полю, немного отличаются от собственных состояний в лабораторной системе, $|\uparrow\rangle$ and $|\downarrow\rangle$:

$$\begin{aligned} |\uparrow'\rangle &= |\uparrow\rangle + i \frac{\langle\downarrow|\dot{\uparrow}\rangle}{B} |\downarrow\rangle, \\ |\downarrow'\rangle &= |\downarrow\rangle - i \frac{\langle\uparrow|\dot{\downarrow}\rangle}{B} |\uparrow\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Не выбирая конкретным способом фазы собственных волновых функций, мы не фиксируем оси x и y вращающейся системы координат, учитывая, что фаза Берри калибровочно-инвариантна.

Однако, мы потребуем, чтобы положения вращающейся системы координат совпадали в начальный и конечный моменты времени. Тогда базисы гамильтониана совпадут в этих системах, а вместе с ними совпадут и матрицы плотности в лабораторном базисе и вращающемся.

Процедура вычисления фаз Берри.

Так как возникновение фазы Берри есть поправка к эволюции системы первого порядка по неадиабатичности, то мы будем характеризовать ее динамику в каждый момент времени только векторами \mathbf{n} , \mathbf{B} и их первыми производными $\dot{\mathbf{n}}$, $\dot{\mathbf{B}}$, которые будем рассматривать как постоянные в соответствующие моменты.

Так как магнитное поле \mathbf{B} меняется медленно, и все величины в ВСО интересуют нас в линейном порядке по $\dot{\mathbf{B}}$, напишем

$$B' \approx B + \frac{\partial B}{\partial \mathbf{B}} \dot{\mathbf{B}}, \quad (4)$$

$$\mathbf{n}' \approx \mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{B}} \dot{\mathbf{B}}. \quad (5)$$

Таким образом мы ввели производные по $\dot{\mathbf{B}}$ для учета зависимости величин в ВСО от скорости ее вращения.

Используя (3), находим

$$\frac{\partial B}{\partial \dot{\mathbf{B}}} = i \left(\langle \uparrow | \frac{\partial | \uparrow \rangle}{\partial \mathbf{B}} - \langle \downarrow | \frac{\partial | \downarrow \rangle}{\partial \mathbf{B}} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial n_+}{\partial \dot{\mathbf{B}}} = -\frac{in_z}{B} \langle \uparrow | \frac{\partial | \downarrow \rangle}{\partial \mathbf{B}}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial n_z}{\partial \dot{\mathbf{B}}} = \frac{2i}{B} \left(n_- \langle \uparrow | \frac{\partial | \downarrow \rangle}{\partial \mathbf{B}} + n_+ \langle \downarrow | \frac{\partial | \uparrow \rangle}{\partial \mathbf{B}} \right), \quad (8)$$

где мы ввели $\mathbf{n}\hat{\sigma} = n_z\hat{\sigma}_z + n_+\hat{\sigma}_+ + n_-\hat{\sigma}_-$; $n_{\pm} = (n_x \mp in_y)/2$, $\hat{\sigma}_{\pm} = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$ (сигма-матрицы считаем одинаковыми во всех системах координат).

Как и в [21], будем описывать динамику системы, находя эволюцию недиагонального элемента матрицы плотности $\rho_{\uparrow\downarrow} = \langle \downarrow | \rho | \uparrow \rangle$ (усреднение производится по реализациям шума и начальной матрице плотности).

Будем искать его в виде

$$\rho_{\uparrow\downarrow}(t) = \rho_{\uparrow\downarrow}(0) e^{i \int_0^t (B+i\Gamma) dt + i(\Phi^0 + \delta\Phi)}. \quad (9)$$

Величиной Γ определяется вклад шума в динамическую фазу, пропорциональную времени t , Φ^0 - геометрическая фаза изолированной системы, зависящая только от геометрии пути вектора \mathbf{B} за промежуток времени t , $\delta\Phi$ - создаваемая шумом поправка к геометрической фазе, определяемая годографами обоих векторов \mathbf{B} и \mathbf{n} . Если в конечный момент времени t_P гамильтониан возвращается в свое исходное положение, значение величины $\Phi^0 + \delta\Phi$ является фазой Берри.

Раскладывая временную производную от гейзенберговского оператора

$$| \downarrow \rangle \langle \uparrow | (t) = \tilde{T} e^{i \int_0^t \hat{\mathcal{H}} dt} | \downarrow \rangle \langle \uparrow | T e^{-i \int_0^t \hat{\mathcal{H}} dt} \quad (10)$$

до второго порядка по входящему в гамильтониан возмущению $\hat{V} = -\frac{1}{2} \hat{X} \mathbf{n}' \hat{\sigma}'$, и усредняя ее по реализациям шума и начальной матрице плотности системы, получаем уравнение эволюции матричного элемента $\rho_{\uparrow\downarrow}(t)$:

$$(i\partial_t + B')\rho_{\uparrow\downarrow}(t) = -i \int_0^t \left\langle \left[\left[|\downarrow'\rangle\langle\uparrow'|, \frac{1}{2}\hat{X}\mathbf{n}'\hat{\sigma}'(t), \frac{1}{2}\hat{X}\mathbf{n}'\hat{\sigma}'(t_1) \right] \right] \right\rangle dt_1. \quad (11)$$

Это уравнение выведено в предположении слабости и коротко-коррелированности шума. Все операторы в правой части (11) записаны в гейзенберговском представлении. Также мы предполагаем, что приготовление и измерение состояния системы происходят мгновенно и не влияют на статистику шума в начальные моменты времени. В противном случае, нам также понадобится предположение о незапутанности состояний системы и резервуара в начальный момент времени. Вывод уравнения, аналогичного (11), но для эволюции матрицы плотности, а не оператора $|\downarrow'\rangle\langle\uparrow'|$, содержится, например, в [24].

Используя секулярное приближение ($\Gamma \ll B$), получаем

$$(i\partial_t + B')\rho_{\uparrow\downarrow} = -i\rho_{\uparrow\downarrow} \int_0^t S(t-t_1) \left(2n'_+(t)n'_-(t_1)e^{-i\int_{t_1}^t B'dt} + n'_z(t)n'_z(t_1) \right) dt_1, \quad (12)$$

где $S(t-t_1) = \frac{1}{2}(\hat{X}(t)\hat{X}(t_1) + \hat{X}(t_1)\hat{X}(t))$ - временной коррелятор шума.

Если система изолирована от шума, то получим полную фазу элемента в виде $\Phi_{total}(t_P) = \int_0^{t_P} B'dt = \int_0^{t_P} (B + (\boldsymbol{\omega}\mathbf{B})/B)dt = \int_0^{t_P} B'dt + \Phi_{BP}^0$, т.е. как сумму динамической и обычной фазы Берри, которая, с точностью до слагаемого, кратного 2π , есть минус телесный угол, который охватывает контур, описываемый полем \mathbf{B} .

Из-за правой части уравнения (12), пропорциональной мощности шума, возникает дефазировка элемента $\rho_{\uparrow\downarrow}$ и шумовая модификация фазы Берри. Если мы пренебрежем конечностью $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{n}}$, то интегрирование правой части (12) создаст шумовую поправку к динамической фазе. Из-за зависимости штрихованных величин от скорости изменения гамильтониана и несовпадения моментов t и t_1 в уравнении (12) возникнут члены порядка $\mathcal{O}(\dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{n}})$ которые приведут к модификации геометрической фазы.

Обусловленная шумом поправка к динамической фазе.

Согласно сформулированному выше утверждению, величина Γ может быть найдена из правой части уравнения (12), если положить в ней $n'_-(t) = n_-(t) = n_-(t_1)$, $n'_+(t) = n_+(t)$, и $B' = B$:

$$\Gamma = -i \left(2|n_+|^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{B + \Omega - i0} + n_z^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{\Omega - i0} \right). \quad (13)$$

$S(\Omega)$ - спектр шума, Фурье-образ коррелятора $S(t)$.

В данной величине можно выделить три члена:

$$\Gamma = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_2^*} - i\delta E_{Lamb}, \quad (14)$$

где

$$\frac{1}{T_1} = 2|n_+|^2 S(B), \quad \frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{2}n_z^2 S(0) \quad (15)$$

– соответственно скорости релаксации и "чистой дефазировки"[25], а

$$\delta E_{Lamb} = 2|n_+|^2 \text{v.p.} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{B + \Omega} \quad (16)$$

– лэмбовский сдвиг, перенормировка расщепления уровней энергии системы из-за взаимодействия с шумом. *v.p.* обозначает здесь главное значение интеграла.

Шумовая поправка к геометрической фазе.

Для нахождения $\delta\Phi$ разложим выражение под интегралом в (12) до первого порядка по $\dot{\mathbf{B}}$ и по $\dot{\mathbf{n}}$. Ясно, что соответствующая поправка будет иметь геометрическую природу. В конечном счете, получаем

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \int \left(dn_- \cdot 2in_+ \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(B + \Omega - i0)^2} + dn_z \cdot in_z \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(\Omega - i0)^2} \right) + \\ & \int \left(-2i|n_+|^2 \int \frac{dB}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(B + \Omega - i0)^3} \right) + \int \left(-2|n_+|^2 \frac{\partial B}{\partial \dot{\mathbf{B}}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(B + \Omega - i0)^2} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial |n_+|^2}{\partial \dot{\mathbf{B}}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{B + \Omega - i0} + \frac{\partial n_z^2}{\partial \dot{\mathbf{B}}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{\Omega - i0} \right) d\mathbf{B} \\ & + in_z^2(0) \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(\Omega - i0)^2} + 2i|n_+(0)|^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(\Omega + B - i0)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

Получая последнее выражение, мы не предполагали, что путь гамильтониана является замкнутым. Для измерения фазы недиагонального элемента матрицы плотности гамильтониану системы не обязательно возвращаться в свое исходное положение, а достаточно только, чтобы поле \mathbf{B} восстановило свое начальное направление. Тогда величины Φ и $\delta\Phi$ будут калибровочно-инвариантными, так как измерение состояния системы можно будет произвести в начальном базисе.

Для упрощения (17) введем фазы параметров n_+ и n_- :

$$n_+(\mathbf{B}) = |n_+|e^{i\phi_+}, \quad n_-(\mathbf{B}) = |n_+|e^{-i\phi_+}. \quad (18)$$

Величина $-\phi_+$ - угол поворота вектора \mathbf{n} относительно оси x вращающейся системы координат.

Тогда можно привести $\delta\Phi$ к более простому виду

$$\delta\Phi(t) = -i \int \frac{\partial \Gamma}{\partial B} d\phi_+ + i \int \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\mathbf{B}}} d\mathbf{B} + G(\mathbf{n}(t), \mathbf{B}(t)) + G(\mathbf{n}(0), \mathbf{B}(0)), \quad (19)$$

где потенциал G дается выражением

$$G(\mathbf{n}, B) = G(|n_+|, n_z, B) = i|n_+|^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(B + \Omega - i0)^2} + i \frac{n_z^2}{2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(\Omega - i0)^2}. \quad (20)$$

Для геометрической фазы в случае конкретной калибровки и фиксированных параметров шума в работе [21] было получено аналогичное выражение, но без первого члена формулы (19) и со знаком “-” перед последним членом.

Разберемся в смысле всех членов в нашем ответе. Каждый из них может возникнуть как результат модификации скорости дефазировки Γ в ВСО благодаря ненулевой скорости изменения одного из параметров: $|n_+|$, n_z , B , направления \mathbf{n} , направления \mathbf{B} . Кроме того, может существовать еще потенциальный вклад шума в фазу, зависящий только от координат начала и конца пути гамильтониана.

Подчеркнем еще раз, что все выражения мы выводили, предполагая мгновенность приготовления и считывания состояний системы. Ниже мы обсудим влияние этого предположения на величину и измеримость отдельных членов (19).

Потенциальная часть геометрической фазы

Последние два члена в формуле (19) определяются только значениями параметров $|n_+|$, n_z и B в начальный и конечный моменты времени. На первый взгляд, скорость дефазировки Γ в ВСО не может зависеть от производных упомянутых параметров по времени, так как эти производные не влияют на базис (3) в ВСО. Также кажется странным возникновение в (19) двух функций G с одинаковым знаком, ведь это означает, что некоторая геометрическая фаза возникает мгновенно в начальной или конечной точке.

Оба парадокса разрешаются, если учесть, что на величину $\Gamma(t)$ влияют не мгновенные значения всех параметров, а средние за некоторый интервал времени $(t - \Delta t, t)$, где Δt порядка времени корреляции шума τ_c .

На начальных временах $t \lesssim \tau_c$ скорость Γ определяется интервалом маленькой длительности, прошедшим с момента приготовления исходного состояния системы, и, как следует из уравнения (12), линейно растет с t . Лишь потом, при $t \gg \tau_c$, Γ стабилизируется и становится почти постоянной (медленно меняющейся). В результате получается, например, вклад чистой дефазировки в геометрическую фазу порядка $\sim n_z^2 \int d\Omega S(\Omega) \tau_c^2$, в согласии с формулой (20). Точное вычисление соответствующей поправки дает вклад $2G(\mathbf{n}(0), \mathbf{B}(0))$ в геометрическую фазу.

Выясним теперь происхождение остальной части потенциальной фазы, $G(\mathbf{n}(t), \mathbf{B}(t)) - G(\mathbf{n}(0), \mathbf{B}(0))$.

Для этого вычислим сначала $\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{B}}$. Для каждой из Фурье-компонент шума интервал, по которому нужно усреднять B , свой, поэтому и искать вклад каждой компоненты в эту величину нужно отдельно. Разложим поперечные флуктуации магнитного поля на волны, циркулярно поляризованные в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} . Перейдем в систему отсчета, где волна с угловой скоростью Ω покоится. Фаза возмущения $\hat{X}_{\Omega n_+} \hat{\sigma}_-(t_1)$ входящего в уравнение (11), имеет закон корреляции $\langle \phi(t_1) \phi(0) \rangle \propto \exp(-\lambda t_1)$, где $\lambda = -i(B + \Omega - i0)$. Время λ и есть длительность интервала, по которому нужно усреднить магнитное поле. Тогда имеем $B_{eff} = B - \lambda^{-1} \dot{B} = B + i \frac{d}{dt} \ln(B + \Omega - i0)$. Подстановка этого выражения в Γ дает

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{B}} = -i \frac{\partial G}{\partial B}, \quad (21)$$

как и должно быть в соответствии с нашим ответом для $\delta\Phi$.

Аналогичным образом можно вычислить и чувствительность Γ к скоростям изменений параметров $|n_+|$ и n_z . Однако, здесь учесть временную нелокальность эволюции системы проще. Например, в поперечное возмущение входит произведение слу-

чайной величины $\hat{X}(t)$ и параметра $|n_+(t)|$, который может быть записан как имеющий постоянную амплитуду и медленно меняющуюся фазу: $|n_+(t)| \approx |n_+(\tau)|e^{(t-\tau)(d/dt)\ln|n_+|}$. Последний экспоненциальный множитель можно отнести к величине \hat{X} , что равносильно сдвигу частот ее Фурье-компонент в поперечном возмущении

$$\Omega \rightarrow \Omega + i \frac{d}{dt} \ln |n_+|. \quad (22)$$

Подстановка этого выражения в Γ дает правильный ответ для потенциальной фазы.

Благодаря наличию последних двух членов в формуле (19) нарушается аддитивность фазы: геометрическая фаза, набираемая на данном пути гамильтониана не есть сумма фаз, набираемых на отдельных его участках. Аддитивность полной фазы существует только в пределе нулевого времени корреляции шума, а для конечного τ_c выполняется с точностью до $O(\tau_c/t)$, так как система "помнит" историю своей эволюции на временах порядка τ_c .

Мы показали, что потенциальная часть фазы есть сумма двух шумовых вкладов: 1) фазы $2G(\mathbf{n}(0), \mathbf{V}(0))$, набираемой в процессе установления скорости дефазировки, сразу после того, как состояние было приготовлено, 2) модификации динамической фазы из-за конечных скоростей изменения $|n_+|$, n_z и B .

Оба вклада могут быть получены друг из друга, если учесть инвариантность фазы относительно одновременного обращения направления магнитного поля и времени ($t \rightarrow -t$, $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$, $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$).

Наш ответ отличается от полученного в работе [21] на величину $2G(\mathbf{n}(0), \mathbf{V}(0))$. Это произошло из-за того, что авторы этой работы положили равным $-\infty$ нижний предел интегрирования в уравнении, аналогичном (12). Это можно делать только когда скорость Γ уже установилась, т.е. либо если время приготовления начального состояния существенно превышает τ_c [24], либо на достаточно больших временах t . При медленном считывании состояния может возникнуть также соответствующая погрешность потенциала в конечный момент времени. В настоящей работе мы, наоборот, предполагаем мгновенность приготовления и измерения состояния системы. Однако, в действительности реализуются промежуточные случаи между этими двумя, поэтому потенциальная часть фазы неизмерима, если неизвестны детали приготовления и измерения состояний системы, так как тогда погрешность измерения фазы порядка самого потенциала G .

Заметим, что в случае мгновенных измерений может существовать еще один, помимо упомянутых, источник погрешностей потенциальной фазы. Если измерение состояний системы происходит в базисе {"спин по полю $\mathbf{V} + \hat{X}\mathbf{n}$ ", "спин против $\mathbf{V} + \hat{X}\mathbf{n}$ "}, а не {"по \mathbf{V} ", "против \mathbf{V} "}, то к потенциальной части фазы добавляются соответствующие погрешности приготовления и считывания состояний, которые того же порядка, что и $G(\mathbf{n}, \mathbf{V})$.

Если детали процессов приготовления и измерения известны, то все упомянутые добавки к потенциальной части фазы могут быть учтены.

Зависящая от геометрии пути часть фазы может быть отделена от потенциальной части и погрешностей измерения только для замкнутого пути $\{\mathbf{V}(t), \mathbf{n}(t)\}$, если менять количество обходов по фиксированному пути [21], или его геометрию при

фиксированных начальных и конечных точках. Далее мы не будем рассматривать потенциальные эффекты, и сосредоточимся на зависящих от всего контура геометрических фазах.

Вращение источника шума. Первый член формулы (19) описывает поправку к геометрической фазе из-за вращения источника шума (вектора \mathbf{n}) в ВСО.

Рассмотрим, например, ситуацию, когда магнитное поле \mathbf{B} постоянно по величине и направлению, в то время как источник шума изменяется по замкнутому контуру в пространстве векторов \mathbf{n} .

Тогда остается только первый член выражения (19), и недиагональный элемент матрицы плотности системы приобретает геометрическую фазу

$$\Phi_{geom}^{noise} = \oint i \frac{\partial \Gamma}{\partial B} d\varphi. \quad (23)$$

Фаза Φ_{geom}^{noise} имеет следующую геометрическую интерпретацию. Она равна потоку однородного поля \mathbf{b}_n через поверхность, охватываемую годографом вектора $\mathbf{n}(t)$ (см Рис. 1), где

$$\mathbf{b}_n = -\mathbf{e}_z \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(B + \Omega - i0)^2}. \quad (24)$$

Этот результат следует напрямую из формул (23), (13), и определения параметра $n_+ = (n_x - in_y)/2$.

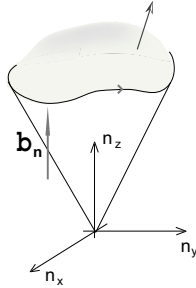


Рис. 1: Поверхность, натянутая на контур $\{\mathbf{n}(t)\}$.

Если шум достаточно медленный ($\Omega \ll B$), то геометрическая фаза, вызываемая вращением источника шума, может быть просто выведена следующим образом. Фаза Берри есть минус телесный угол, охватываемый контуром, по которому адиабатически меняется магнитное поле. В единицу времени поперечные флуктуации заметают, в среднем, площадь $\frac{1}{2}|\mathbf{n}_\perp|^2 \langle X^2 \rangle \dot{\phi} = 2|n_+|^2 \langle X^2 \rangle \dot{\phi}$ (Рис. 2).

Соответствующий минус телесный угол, т.е. искомая фаза-

$$\Phi_{slow\ noise}^{rot} = -2|n_+|^2 \langle X^2 \rangle \int \frac{d\phi}{B^2}, \quad (25)$$

что согласуется с ранее полученными результатами.

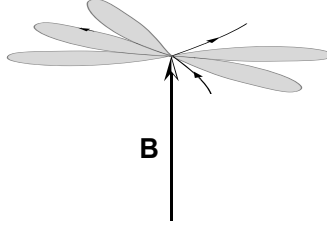


Рис. 2: Площадь, замечаемая вектором $\mathbf{B} + (\mathbf{n}(t)X(t))_{\perp}$ в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} .

Таким образом, мы нашли геометрическую фазу, которая создается вариациями контрольных параметров гамильтониана, отвечающих за взаимодействие системы и резервуара.

Фаза, вызываемая вращением источника шума, может наблюдаться, например, в экспериментах по ЯМР или ЯКР, где производится вращение исследуемого образца. Например, в работе [4] наблюдалась возникающая в системе отсчета образца фаза Берри. В этой системе отсчета эффективное магнитное поле описывало конус вокруг оси вращения. Если эффективное магнитное поле будет направлено по оси вращения, и будет иметься поперечный шум, не связанный с образцом, то геометрическая фаза будет вызываться вращением источника шума в системе отсчета образца.

Шумовая поправка к геометрической фазе первого порядка по $\dot{\mathbf{B}}$.

Второй член (19) может быть получен как результат модификации скорости Γ в ВСО, вызванный ненулевой величиной $\dot{\mathbf{B}}$, по аналогии с (4) и (5). Заметим, что выражение не является калибровочно-инвариантным.

Такой вклад в фазу Берри, как и фаза, создаваемая вращением источника шума в ВСО, может быть просто выведен следующим образом. В системе отсчета, где вокруг оси z не вращаются оба вектора \mathbf{n} и \mathbf{B} , магнитное поле равно $\tilde{\mathbf{B}} = B' - \dot{\phi}_+$, а “скорость дефазировки”-

$$\tilde{\Gamma} \approx \Gamma + \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\mathbf{B}}} \dot{\mathbf{B}} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\phi}_+} \dot{\phi}_+ = \Gamma + \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\mathbf{B}}} \dot{\mathbf{B}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial B} \dot{\phi}_+, \quad (26)$$

откуда сразу следуют первые два члена (19).

Как нетрудно показать, оставаясь в рамках наших вычислений, всегда можно выбрать такую ВСО, что угол ϕ_+ будет постоянен, и вызываемый вращением шума вклад в геометрическую фазу исчезнет. Это не повлияет на полную фазу Берри в силу ее калибровочной инвариантности. Действительно, в работах [21, 22] был рассмотрен спин-1/2 во флуктуирующем вдоль некоторой прямой магнитном поле в конкретной калибровке и было получено выражение типа $\delta\Phi_{BP} = \oint (i\partial\Gamma/\partial\dot{\mathbf{B}})d\mathbf{B}$, без первого члена формулы (19).

Мы видим, что если в лабораторной системе отсчета параметры взаимодействия системы и резервуара зависят от времени, то, в дополнение к шумовой модификации фазы Берри, найденной в [21], необходимо учитывать геометрическую фазу, вызываемую вращением источника шума, либо выбирать для вычислений систему отсчета, где шум не вращается вокруг эффективного магнитного поля.

Для примера рассмотрим систему, описанную в работе [26]. Там предлагается мерить фазу Берри в сверхпроводниковом зарядовом кубите. Эффективное магнитное поле меняется по конусу, деформированному в направлении, перпендикулярном его оси. Флуктуации могут быть разложены на две составляющие: 1) постоянную по мощности и параллельную оси конуса, 2) направленную по касательной к границе основания конуса. Вклад первой в фазу Берри считается напрямую по формуле, приведенной в [21]. Найдем вклад второй. В системе отсчета, в которой магнитное поле направлено по оси z , а ось x параллельна плоскости основания конуса, направление флуктуаций поворачивается сначала в одну, потом – в другую сторону, так что фаза, вызываемая вращением шума, равна нулю. Из симметрии задачи также следует, что в искомую фазу дает вклад только вращение поля вокруг оси конуса. Тогда $\delta\Phi_{BP} = i \oint d\phi \frac{\partial \Gamma}{\partial B_{\parallel}}$, где ϕ – угол поворота поля вокруг оси конуса в лабораторной системе отсчета, а B_{\parallel} – величина проекции магнитного поля на эту ось.

3 Структура фаз Берри в многоуровневой системе

Перейдем к анализу фаз Берри в многоуровневых системах. Как мы уже отметили, структура и количество геометрических фаз для многоуровневой системы в присутствии шума могут отличаться от случая изолированной системы. В данном разделе мы проанализируем структуру фаз, пока не вычисляя их.

В настоящей работе рассматриваются только гамильтонианы с невырожденными по энергии состояниями. Это означает, расщепления уровней существенно превышают $1/t_P$ на протяжении рассматриваемого периода эволюции. Будем рассматривать гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0(\mathbf{R}) + \hat{V}(\mathbf{R}, \hat{X}) + \hat{\mathcal{H}}_{bath}(\hat{X}), \quad (27)$$

в котором адиабатически меняющийся многомерный контрольный параметр \mathbf{R} описывает замкнутый контур за время t_P . $\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_k E_k^0 |k\rangle\langle k|$ – гамильтониан изолированной системы, \hat{V} – возмущение, пропорциональное быстрой слабой случайной эрмитовой величине $\hat{X}(t)$ с нулевым средним.

3.1 Случай изолированной системы

Начнем с вычисления оператора эволюции состояния системы, не взаимодействующей с шумом. Этот оператор нам понадобится в дальнейшем для вычисления шумового вклада в геометрическую фазу.

Эволюция волновых функций многоуровневой системы.

Зафиксируем некоторый стационарный базис волновых функций системы. Пусть $\hat{\mathcal{H}}_0^{St}(\mathbf{R}(t))$ – гамильтониан в этом базисе. Рассмотрим унитарное преобразование U , переводящее волновые функции этого базиса в собственные состояния гамильтониана $|n\rangle$. В базисе собственных состояний гамильтониан есть $\hat{\mathcal{H}}'_0 = -iU^\dagger \dot{U} + U^\dagger \hat{\mathcal{H}}_0^{St} U$. Здесь и далее под "собственными состояниями гамильтониана" будем подразумевать

собственные волновые функции "адиабатически замороженного" гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_0^{St}(t)$ в соответствующий момент времени.

Оператор эволюции волновых функций имеет недиагональную калибровочную структуру:

$$\hat{S}(t) = T e^{-i \int_0^t \hat{\mathcal{H}}_0 dt} = \mathcal{P}. e^{-i \int \hat{\mathcal{H}}_0 dt} e^{-i \int \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}} d\mathbf{R}}, \quad (28)$$

где \mathcal{P} . обозначает упорядочивание по контуру, описываемому гамильтонианом в пространстве параметров системы. $\hat{\mathcal{H}}_0 = \text{diag}(E_1, \dots, E_N)$ - матрица собственных значений гамильтониана, а $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}}$ - матрица поправок по неадиабатичности эволюции: $(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}})_{kl} = -i \langle k | \frac{\partial |l\rangle}{\partial \mathbf{R}}$.

Когда изменения \mathbf{R} происходят достаточно медленно, а энергетические уровни системы невырождены, т.е. их расщепления достаточно большие, оператор $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}}$ может рассматриваться как малое возмущение.

В базисе волновых функций

$$|n'\rangle \approx |n\rangle - i \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \frac{\partial |n\rangle}{\partial \mathbf{R}} \dot{\mathbf{R}} |m\rangle}{E_n - E_m}, \quad (29)$$

$S(t)$ принимает вид

$$\hat{S}(t) \approx \text{diag} \left(\{ e^{-i \int_0^t E_{n'} dt} \} \right), \quad (30)$$

$$E_{n'} = E_n - i \langle n | \frac{\partial |n\rangle}{\partial \mathbf{R}} \dot{\mathbf{R}}. \quad (31)$$

Формулы (29) и (30) написаны с точностью, учитывающей первую поправку по неадиабатичности к собственным состояниям и значениям гамильтониана.

Описанная процедура диагонализации $\hat{\mathcal{H}}_0'$ для многоуровневой системы аналогична тому, что мы делали со спином 1/2 в предыдущем разделе: переходу во вращающуюся систему отсчета и выбору базиса состояний "спин выпрямлен по эффективному полю в ВСО" и "спин противоположен полю".

Зная этот базис, можно найти зависимость всех величин в ВСО от скорости изменения контрольных параметров. Так мы определим и будем далее использовать $\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{R}}$ и $\frac{\partial \hat{V}}{\partial \mathbf{R}}$.

Показатели экспонент в (30) могут быть разделены на динамические фазы $\int_0^t E_n dt$ и геометрические $\int (\mathbf{a}_{\mathbf{R}})_{nn} d\mathbf{R} = -i \int \langle n | \frac{\partial |n\rangle}{\partial \mathbf{R}} d\mathbf{R}$, дающие обычные фазы Берри, приписываемые волновым функциям.

Видно, что геометрические фазы калибровочно-инвариантны, т.е. не зависят от выбора фаз собственных состояний, если путь гамильтониана является замкнутым.

Таким образом, мы получили, что если состояния системы невырождены, т.е.

$$|E_n - E_m| \gg |(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}})_{ij} \dot{\mathbf{R}}|, \quad (32)$$

то недиагональные элементы матрицы $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}}$ не влияют на динамические и геометрические по t_P части экспонент в $\hat{S}(t_P)$.

Следовательно, если мы хотим найти матрицу плотности или некоторый оператор в виде (1), мы можем отбросить недиагональные элементы $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}}$. После этого нужно только связать состояния $|n\rangle$ и $|n'\rangle$ в моменты времени $t = 0$ и $t = t_P$. Если скорости изменения гамильтониана равны 0 вначале и в конце, два базиса в эти моменты совпадают, и можно считать, что оператор (30) написан в базисе собственных состояний гамильтониана.

Если условие (32) нарушается, то недиагональный вид матрицы $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}}$ может быть важен. В частности, в случае вырожденных уровней энергии, соответствующие волновые функции имеют одинаковые динамические фазы, и калибровочный потенциал $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}}$ полностью определяет эволюцию волновых функций [27]. Однако, в настоящей работе мы рассматриваем только невырожденные уровни, т.е. предполагаем, что условие (32) всегда выполнено.

Эволюция матрицы плотности.

Выпишем супероператор эволюции матрицы плотности изолированной системы с той же точностью, что и (28):

$$\hat{\rho}(t_P) = \mathcal{P}.e^{i \int_0^{t_P} \Delta \check{H} dt} e^{i \oint \check{\mathbf{C}}_{\mathbf{R}} d\mathbf{R}} \hat{\rho}(0). \quad (33)$$

Здесь $\Delta \check{H}$ -супероператор расщеплений уровней энергии $E_{nm} = E_n - E_m$, действующий на элементы матрицы плотности. ($\rho_{mn} \leftrightarrow E_{nm}$), $\check{\mathbf{C}}_{pq}^{mn} = \delta_{mp}(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}})_{qn} - \delta_{qn}(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}})_{mp}$.

Последнее выражение означает, что

$$\dot{\rho}_{mn} = i\rho_{mn}E_{nm} + \sum_{p,q} (\delta_{mp}(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}})_{qn} - \delta_{qn}(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{R}})_{mp}) \rho_{pq}. \quad (34)$$

Как и раньше, для вычисления физических величин в форме (1) можно отбросить недиагональные элементы $\check{\mathbf{C}}$ (т.е. элементы $\check{\mathbf{C}}_{nm,pq}$ с $n \neq p$ или $m \neq q$), и написать

$$\rho_{mn}(t_P) = e^{i \int_0^{t_P} E_{nm} dt} e^{\oint \langle n|d|n\rangle - \langle m|d|m\rangle} \rho_{mn}(0). \quad (35)$$

3.2 Присутствие шума

Проанализируем теперь структуру фаз системы в присутствии шума, не выводя явно формул для геометрических фаз и скоростей дефазировки.

Рассмотрим сначала части полных фаз, пропорциональные t_P . Когда система не изолирована, в них дают вклады как расщепления уровней системы, так и процессы дефазировки.

$$\hat{\rho}(t_P) \sim \mathcal{P}.e^{i \int_0^{t_P} (\Delta \check{H} + i\check{\Gamma}) dt} \hat{\rho}(0), \quad (36)$$

где $\check{\Gamma}$ - супероператор скоростей дефазировки $\dot{\rho}_{nm} = \dots - \Gamma_{pq}^{nm}(t)\rho_{pq}$.

В настоящей работе мы предполагаем что шум слабый, и, следовательно, для каждой скорости релаксации Γ_{pq}^{nm} и для каждого расщепления E_{kl} имеет место $|\Gamma_{pq}^{nm}| \ll E_{kl}$.

Заметим, что все элементы $\check{\Gamma}$, связывающие различные элементы матрицы плотности, вообще говоря, одного порядка величины.

Недиагональные элементы матрицы плотности для невырожденных расщеплений.

Проведя рассуждения по аналогии со случаем оператора эволюции для изолированной системы, можно показать, что если набор расщеплений энергий для элементов матрицы плотности невырожден, то

$$\rho_{mn} = \rho_{mn}^0 e^{i \int_0^t P(E_{nm} + i\Gamma) dt + i(\Phi_{BP}^0 + \oint \mathbf{A}_R d\mathbf{R})}. \quad (37)$$

Здесь, в отличие от формулы (36), E_{nm} , Γ , Φ_{BP} и компоненты \mathbf{A}_R - скаляры. Чтобы написать последнее равенство, мы отбросили недиагональные элементы $\check{\Gamma}$, так как они создают только малые поправки к динамической фазе. Однако, эти поправки могут быть больше чем фаза Берри и ее шумовая модификация, которую мы хотим найти. Таким образом, мы будем считать геометрические и динамические фазы только в главном порядке по шуму и подразумевать, что они могут быть отделены друг от друга.

Наборы элементов с одинаковыми расщеплениями.

Недиагональная структура супероператора $\check{\Gamma}$ становится важной при описании некоторого набора элементов матрицы плотности, если эти элементы соответствуют одной и той же разности энергий уровней, что может случиться в одном из двух случаев: 1) это диагональные элементы матрицы плотности (расщепление $E_{nn} = 0$), 2) расщепления энергий для нескольких пар разных уровней остаются одинаковыми на протяжении значительного времени.

В обоих случаях из выражения для калибровочного потенциала $\check{\mathbf{C}}_R$ в формуле (33) следует, что он не связывает элементы матрицы плотности с одинаковыми расщеплениями, если спектр системы невырожден. Утверждение верно как для диагональных, так и для недиагональных элементов матрицы плотности.

Каждый набор элементов, соответствующих одному расщеплению, эволюционирует независимо от элементов, соответствующих другим расщеплениям.

Таким образом, для нахождения эволюции элементов матрицы плотности для определенной одинаковой разности энергий уровней нужно учесть скорости Γ , связанные с переходами только между этими элементами, и найти шумовую модификацию каждой из этих скоростей, пропорциональную скорости изменения параметров гамильтониана.

4 Геометрические фазы для многоуровневой системы с невырожденными расщеплениями

Рассмотрим сначала систему, у которой все расщепления невырождены, т.е. $|E_{n_1 m_1} - E_{n_2 m_2}| \gg 1/t_P$ почти всегда (в том же смысле, что и при определении невырожденности спектра). $E_{nm} = E_n - E_m$ здесь обозначает расщепление между n -ым и m -ым уровнями.

Уравнение эволюции для элемента матрицы плотности.

Как и в случае спина-1/2, для нахождения временной зависимости элемента матрицы плотности ρ_{mn} используем уравнение эволюции гейзенберговского оператора $\hat{\rho}_{nm}(t) = |n\rangle\langle m|(t)$, записанное с точностью до второго порядка по шумовому возмущению \hat{V} , и усредненное по реализациям шума и исходным матрицам плотности системы и шума:

$$(i\partial_t + E_{nm})\rho_{mn}(t) = -i \int_{-\infty}^t \left\langle \left[[\hat{\rho}_{nm}(t), \hat{V}(t)], \hat{V}(t_1) \right] \right\rangle dt_1. \quad (38)$$

Выводя это уравнение, мы использовали слабость и коротко-коррелированность шума и равенство $\langle \hat{\rho}_{nm} \rangle = \rho_{mn}$. Также мы предполагаем, что $\langle \hat{V}(t) \rangle = 0$.

Структура возмущения.

Разложим возмущение \hat{V} на операторы, действующие на пары уровней и на отдельные уровни:

$$\hat{V}(\hat{X}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \hat{X} (V_+^{kl} \hat{\sigma}_+^{kl} + V_-^{kl} \hat{\sigma}_-^{kl}) + \frac{1}{2} \sum_{k \neq n, m} \hat{X} V_k |k\rangle\langle k| + \frac{1}{2} \hat{X} V_z^{nm} \hat{\sigma}_z^{nm}. \quad (39)$$

Операторы $\hat{\sigma}_+^{kl}$ и $\hat{\sigma}_-^{kl}$ связывают состояния $|k\rangle$, $|l\rangle$ и переводят их друг в друга (к примеру, $\frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{kl} = |k\rangle\langle l|$). Члены с $V_k |k\rangle\langle k|$ учитывают изменения диагональных элементов гамильтониана системы, но, как следует из уравнения (38), не влияют на эволюцию ρ_{mn} , если $k \neq n, m$. Последний член (39) изменяет расщепления уровней $|n\rangle$ и $|m\rangle$ и создает таким образом дефазировку.

Когда мы писали формулу (39) и выводили уравнение (38), мы отбросили член типа $\frac{1}{2} V_0^{nm} \hat{\sigma}_0^{nm}$, который одинаково сдвигает энергии обоих уровней $|n\rangle$ и $|m\rangle$. Можно показать, что он не влияет на эволюцию ρ_{mn} , поэтому мы всегда будем отбрасывать эту часть возмущения при рассмотрении многоуровневой системы.

Динамика элемента ρ_{mn} зависит от операторов $\hat{\sigma}^{nm}$ в пространстве состояний $|n\rangle$, $|m\rangle$, и от операторов, индуцирующих переходы между каждым из них и другими состояниями системы. Из подстановки возмущения (39) в уравнение (38) следует, что коммутаторы в правой части (38), содержащие пару операторов $V_+^{kn} \hat{\sigma}_+^{kn}$ и $V_-^{kn} \hat{\sigma}_-^{kn}$, или $V_+^{km} \hat{\sigma}_+^{km}$ и $V_-^{km} \hat{\sigma}_-^{km}$, создают вклад в дефазировку и фазу Берри элемента ρ_{mn} .

В силу эрмитовости возмущения, величины V_z^{nm} и V_k - действительные числа, а V_+^{kl} , V_-^{kl} удовлетворяют условиям

$$V_+^{kl} = V_-^{lk} = (V_-^{kl})^*. \quad (40)$$

Точное значение элемента матрицы плотности.

Заметим, что элемент ρ_{mn} ($n \neq m$) в приближении случайных фаз эволюционирует независимо от других элементов, как мы и говорили раньше.

Следуя той же процедуре, что и для двухуровневой системы, напомним в базисе собственных состояний

$$\rho_{mn} = \rho_{mn}^0 e^{i \int_0^t (E_{nm} + i\Gamma) dt + i(\Phi_{BP}^0 + \delta\Phi_{BP})}, \quad (41)$$

и найдем скорость дефазировки Γ и шумовой вклад в фазу Берри $\delta\Phi_{BP} = \oint \mathbf{A}_{\mathbf{R}} d\mathbf{R}$.

Скорость дефазировки:

$$\Gamma = -i \sum_k \left(|V_+^{kn}|^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{\Omega + E_{nk} - i0} + |V_+^{km}|^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{\Omega + E_{km} - i0} \right) - i(V_z^{nm})^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{\Omega - i0} \quad (42)$$

Здесь $S_c(\Omega)$ - Фурье-образ коррелятора $S_c(t - t_1) = \langle \hat{X}(t)\hat{X}(t_1) \rangle$. Он удовлетворяет условиям $S(\Omega) = (S_c(\Omega) + S_c(-\Omega))/2$, $(S_c(\Omega))^* = S_c(\Omega)$.

Векторный потенциал:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{R}} = & \sum_k \left(i \frac{\partial V_-^{kn}}{\partial \mathbf{R}} V_+^{kn} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{(E_{nk} + \Omega - i0)^2} + i \frac{\partial V_+^{km}}{\partial \mathbf{R}} V_-^{km} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{(E_{km} + \Omega - i0)^2} - \right. \\ & -i|V_+^{kn}|^2 \frac{\partial E_{nk}}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{(E_{nk} + \Omega - i0)^3} - i|V_+^{km}|^2 \frac{\partial E_{km}}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{(E_{km} + \Omega - i0)^3} - \\ & -|V_+^{kn}|^2 \frac{\partial E_{nk}}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{(E_{nk} + \Omega - i0)^2} - |V_+^{km}|^2 \frac{\partial E_{km}}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{(E_{km} + \Omega - i0)^2} + \\ & \left. + \frac{\partial |V_+^{kn}|^2}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{E_{nk} + \Omega - i0} + \frac{\partial |V_+^{km}|^2}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{E_{km} + \Omega - i0} \right) + \\ & + iV_z^{nm} \frac{\partial V_z^{nm}}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{(\Omega - i0)^2} + \frac{\partial (V_z^{nm})^2}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{\Omega - i0} \quad (43) \end{aligned}$$

Определим смысл различных членов в формулах (42) и (43).

Структура шумового вклада в динамическую фазу.

Заметим, что

$$Re(\Gamma) = \frac{1}{2} \sum_{k \neq n} \Gamma^{nk} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq m} \Gamma^{mk} + \Gamma_{deph}^{mn}, \quad (44)$$

где $\Gamma^{ij} = |V_+^{ij}|^2 S_c(E_{ij})$ скорость релаксационного перехода $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$, а $\Gamma_{deph}^{mn} = \frac{1}{2}(V_z^{nm})^2 S(0)$ - скорость чистой дефазировки ρ_{nm} .

Результат (44) может быть понят следующим образом. Состояния $|n\rangle$ и $|m\rangle$ должны входить в $Re(\Gamma)$ симметричным образом, и скорости релаксации между каждым из них и состояниями $|k\rangle$ тоже симметричны в отношении разных k , что выражается равенством $Re(\Gamma) \propto const \cdot (\sum_{k \neq n} \Gamma^{nk} + \sum_{k \neq m} \Gamma^{mk}) + \text{чистая дефазировка}$. Значение константы перед скобкой может быть найдено путем приравнивания этого выражения к результату для двухуровневой системы [25]. Результат (44) был также получен в работе [28] для системы, взаимодействующей с "классическим" шумом $\hat{X}(t)$, т.е. коммутирующим с самим собой в разные моменты времени.

Рассмотрим теперь мнимую часть выражения (42). Появление мнимого вклада в дефазировку эквивалентно перенормировке расщепления уровней энергии. Каждой

паре уровней $|i\rangle$ и $|j\rangle$ может быть приписан лэмбовский сдвиг [25], перенормировка расщепления между ними,

$$\delta E_{Lamb}^{ij} = 2|V_+^{ij}|^2 \text{v.p.} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S(\Omega)}{E_{ij} - \Omega}. \quad (45)$$

Разложим лэмбовский сдвиг, соответствующий каждой паре уровней, на две части;

$$\delta E_{Lamb}^{ij} = \delta E_i^j - \delta E_j^i, \quad (46)$$

где

$$\delta E_i^j = |V_+^{ij}|^2 \text{v.p.} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{E_{ij} - \Omega}, \quad (47)$$

$$\delta E_j^i = |V_+^{ij}|^2 \text{v.p.} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{E_{ji} - \Omega}. \quad (48)$$

Условно можно рассматривать величину δE_i^j как сдвиг i -го уровня энергии из-за влияния на него j -го уровня, а δE_j^i , аналогично, как сдвиг энергии E_j из-за взаимодействия с $|i\rangle$.

Теперь физический смысл мнимой части (42) становится понятным:

$$Im(\Gamma) = \sum_{k \neq m} \delta E_m^k - \sum_{k \neq n} \delta E_n^k \quad (49)$$

(сдвиг энергии m -го уровня из-за влияния всех остальных уровней минус аналогичный сдвиг n -го уровня)

Полная шумовая поправка к расщеплению, соответствующему элементу ρ_{mn} -

$$\Gamma = \sum_{k \neq n} \left(\frac{1}{2} \Gamma^{nk} - i \delta E_n^k \right) + \sum_{k \neq m} \left(\frac{1}{2} \Gamma^{mk} + i \delta E_m^k \right) + \Gamma_{deph}^{mn}. \quad (50)$$

Заметим, что, в отличие от случая произвольной многоуровневой системы, у двухуровневой системы величины δE_i^j входят в дефазировку в составе единственного Лэмбовского сдвига $\delta E_{Lamb}^{nm} = \delta E_n^m - \delta E_m^n$, зависящего только от симметризованного коррелятора шума $S(\Omega)$.

Структура шумового вклада в геометрическую фазу.

Рассмотрим подробнее выражение (43). Введем фазы $\Phi^{ij}(\mathbf{R}(t))$, характеризующие "вращение" шума, по аналогии с (18):

$$V_+^{ij} = |V_+^{ij}| e^{i\Phi^{ij}}, \quad V_-^{ij} = |V_+^{ij}| e^{-i\Phi^{ij}}. \quad (51)$$

Подобно случаю двухуровневой системы, сделав несколько калибровочных преобразований и предположив замкнутость контура $\{\mathbf{R}(t)\}$, можно упростить формулу (43) и привести к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{R}} = & \sum_{k \neq n} |V_+^{kn}|^2 \frac{\partial \Phi^{kn}}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{(E_{nk} + \Omega - i0)^2} + \\ & - \sum_{k \neq m} |V_+^{km}|^2 \frac{\partial \Phi^{km}}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{(E_{km} + \Omega - i0)^2} + i \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (52)$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{A}_{\mathbf{R}} = i \sum_{k \neq n, m} \left(\frac{\partial \Phi^{kn}}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \Gamma}{\partial E_{kn}} + \frac{\partial \Phi^{km}}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \Gamma}{\partial E_{km}} \right) + \frac{\partial \Phi^{nm}}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \Gamma}{\partial E_{nm}} + i \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\mathbf{R}}}. \quad (53)$$

Как и в случае двухуровневой системы, первые два члена векторного потенциала $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}$ возникают из-за “вращения шума”, изменения фаз матричных элементов взаимодействия системы с резервуаром, а последний член возникает из поправки к Γ первого порядка по $\dot{\mathbf{R}}$.

5 Геометрические фазы для системы с одинаковыми расщеплениями

Рассмотрим теперь систему, где есть две пары уровней энергии ($|n_1\rangle, |m_1\rangle$ and $|n_2\rangle, |m_2\rangle$) с одинаковыми расщеплениями ($E_{n_1 m_1}(\mathbf{R}) = E_{n_2 m_2}(\mathbf{R}) \equiv E_{nm}(\mathbf{R})$) (Рис. 3). Эволюция системы легко обобщается на случай произвольного количества одинаковых разностей энергии. Также мы будем предполагать для простоты, что расщепления совпадают все время, хотя это тоже необязательно; в общем случае можно разделить эволюцию на интервалы, когда расщепления совпадают и когда они различны, а потом скомбинировать ответы, если переходные области между этими двумя типами эволюции не вносят существенного вклада в фазы.

К примеру, рассматриваемой системой могли бы быть два взаимодействующих или невзаимодействующих спина $1/2$ с разными магнитными моментами, помещенных в одно магнитное поле. Когерентные фазы Берри для такой системы наблюдались в работе [9].

В спектре системы могут быть и другие уровни кроме этих четырех. От них мы будем требовать только, чтобы их расщепления не были равны $E_{n_1 m_1}$.

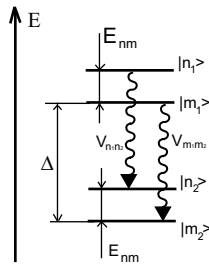


Рис. 3: Схема энергетических уровней в двумя парами одинаковых расщеплений.

Согласно результатам раздела 3, элементы $\rho_{m_1 n_1}$ и $\rho_{m_2 n_2}$ эволюционируют взаимосвязанно. Найдем теперь их эволюцию. Напишем

$$\begin{pmatrix} \rho_{m_1 n_1}(t_P) \\ \rho_{m_2 n_2}(t_P) \end{pmatrix} = e^{i \int_0^{t_P} E_{nm} dt} \times$$

$$\times \mathcal{P} \cdot \left(e^{i \oint \left(\begin{pmatrix} (\mathbf{C}_R)_1 & 0 \\ 0 & (\mathbf{C}_R)_2 \end{pmatrix} d\mathbf{R} + i \left(\int \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} dt + \oint \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} d\mathbf{R} \right)} \right) \begin{pmatrix} \rho_{m_1 n_1}(0) \\ \rho_{m_2 n_2}(0) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Здесь благодаря величинам \mathbf{C}_R возникают обычные фазы Берри между парами уровней, так что $(\Phi_{BP})_{m_i n_i} = \oint (\mathbf{C}_R)_i d\mathbf{R}$.

Величины на диагоналях матриц, Γ_{ii} , \mathbf{A}_{ii} , представляющие шумовые поправки к динамическим фазам, даются теми же формулами, что и в случае разных расщеплений. А для недиагональных элементов получаем

$$\Gamma_{12} = i \left(V_-^{n_1 n_2} V_+^{m_1 m_2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{\Omega + \Delta - i0} + V_-^{n_1 n_2} V_+^{m_1 m_2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{\Omega - \Delta - i0} \right) = \quad (55)$$

$$= -V_-^{n_1 n_2} V_+^{m_1 m_2} S_c(-\Delta), \quad (56)$$

где $\Delta = E_{m_1 m_2} = E_{n_1 n_2}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{12} = & -i V_-^{n_1 n_2} \frac{\partial V_+^{m_1 m_2}}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{(\Omega + \Delta - i0)^2} - i V_+^{m_1 m_2} \frac{\partial V_-^{n_1 n_2}}{\partial \mathbf{R}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{(\Omega - \Delta - i0)^2} + \\ & + i \frac{\partial \Delta}{\partial \mathbf{R}} V_-^{n_1 n_2} V_+^{m_1 m_2} \left(\int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{(\Omega + \Delta - i0)^3} - \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{(\Omega - \Delta - i0)^3} \right) + \\ & + \frac{\partial \Delta}{\partial \mathbf{R}} V_-^{n_1 n_2} V_+^{m_1 m_2} \left(\int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{(\Omega + \Delta - i0)^2} - \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{(\Omega - \Delta - i0)^2} \right) - \\ & - \frac{\partial (V_-^{n_1 n_2} V_+^{m_1 m_2})}{\partial \mathbf{R}} \left(\int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{\Omega + \Delta - i0} + \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(-\Omega)}{\Omega - \Delta - i0} \right). \quad (57) \end{aligned}$$

Величины Γ_{21} и \mathbf{A}_{21} отличаются от Γ_{12} и \mathbf{A}_{12} заменой $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$ для всех входящих в них параметров.

Согласно результатам раздела 3, можно отбросить недиагональные элементы матрицы $\hat{\Gamma} \cdot dt/d\mathbf{R}$ или $\hat{\mathbf{A}}_R$, если они существенно меньше разности $|(\mathbf{C}_R)_1 - (\mathbf{C}_R)_2|$. В этом случае можно считать, что два элемента эволюционируют независимо друг от друга. В противном случае, если скорости изменения геометрических фаз двух элементов достаточно близки значительную часть времени, недиагональность матриц $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\mathbf{A}}_R$ становится важной.

Благодаря тому, что шум связывает два элемента матрицы плотности, по одному из них можно судить о когерентной фазе Берри другого. Для примера рассмотрим ситуацию когда шумовые части фаз Берри набираются равномерно на всем периоде эволюции системы, а переходы из второй пары уровней в первую подавлены. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_{m_2 n_2}(t_P) = & \rho_{n_2 m_2}(0) e^{-\Gamma_{22} t_P + i \Phi_{BP}^{m_2 n_2}} - \\ & \rho_{n_1 m_1}(0) \frac{\Gamma_{21} t_P}{(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) t_P + i(\Phi_{BP}^{m_1 n_1} - \Phi_{BP}^{m_2 n_2})} e^{-\Gamma_{11} t_P + i \Phi_{BP}^{m_1 n_1}}. \quad (58) \end{aligned}$$

Видно, что при $\Gamma_{21} \sim \Phi_{BP}/t_P$, меряя элемент $\rho_{m_2 n_2}$, можно определить фазу Берри $\Phi_{BP}^{m_1 n_1}$, которую набирал бы элемент $\rho_{m_1 n_1}$ в случае изолированной системы.

Вклад шума в динамические фазы.

На недиагональные элементы матрицы плотности симметричным образом влияют скорости переходов между парами уровней $|m_1\rangle, |m_2\rangle$ и $|n_1\rangle, |n_2\rangle$, что отражается в равенстве

$$|\Gamma_{12}| = \sqrt{\Gamma^{n_2 n_1} \Gamma^{m_2 m_1}}. \quad (59)$$

Последняя формула может быть понята следующим образом. Γ_{12} может зависеть только от скоростей переходов $n_2 \rightarrow n_1$ $m_2 \rightarrow m_1$, которые входят в нее симметрично. В низшем порядке по шуму зависимость корневая. Коэффициент +1 перед квадратным корнем может быть получен как, с одной стороны, гарантирующий неотрицательность собственных значений $\hat{\Gamma}$, а с другой стороны, их зануление в некоторых частных случаях.

Заметим, что Γ_{12} имеет фазу $\Phi^{m_1 m_2} - \Phi^{n_1 n_2}$, зависящую от выбора фаз волновых функций системы. Однако, произвол выбора этих фаз не влияет на собственные значения $\hat{\Gamma}$ в экспоненте формулы (1), так как элемент Γ_{21} имеет противоположную фазу $\Phi^{n_1 n_2} - \Phi^{m_1 m_2}$, а в собственные значения $\hat{\Gamma}$ эти две величины входят в виде произведения $\Gamma_{12} \Gamma_{21} = |V_+^{n_1 n_2}|^2 |V_+^{m_1 m_2}|^2 S_c(\Delta) S_c(-\Delta)$.

Шумовой вклад в геометрические фазы.

Вводя потенциал

$$G_{12} = i \frac{\partial}{\partial \Delta} \left(V_-^{n_1 n_2} V_+^{m_1 m_2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{S_c(\Omega)}{\Omega + \Delta} \right), \quad (60)$$

представим недиагональный элемент калибровочного потенциала (57) как

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{12} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \ln \left(\frac{|V_+^{n_1 n_2}|}{|V_+^{m_1 m_2}|} \right) \frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial \Delta} + \\ & + i \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \left(\frac{\Phi^{n_1 n_2} + \Phi^{m_1 m_2}}{2} \right) \frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial \Delta} + i \frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} + \frac{\partial G_{12}}{\partial \mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (61)$$

что может быть также переписано в виде

$$\mathbf{A}_{12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial \Delta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \ln \frac{V_-^{n_1 n_2}}{V_+^{m_1 m_2}} + i \frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} + \frac{\partial G_{12}}{\partial \mathbf{R}}. \quad (62)$$

Заметим, что в отличие от случая системы с невырожденными расщеплениями, при вычислении фаз Берри мы не можем отбрасывать под интегралами полные дифференциалы. В последней формуле мы сохранили производную потенциала G_{12} , так как матрица $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}}$ не коммутирует сама с собой в разные моменты времени, и, следовательно, эта производная может дать ненулевой вклад в интеграл по контуру в (54). Именно этим объясняется полученный численно в работе [29] эффект возникновения геометрических фаз для трехуровневой системы в присутствии шума, у которой были равны нулю фазы Берри в отсутствие шума.

Определим смысл различных членов в формулах (61) и (62). Предположим сначала, что абсолютные величины параметров $|V_+^{n_1 n_2}|$ и $|V_+^{m_1 m_2}|$ равны. Тогда первый член (61) зануляется, а второй представляет собой "вращение" шума для процессов $|n_1\rangle \rightarrow |n_2\rangle$, $|m_1\rangle \rightarrow |m_2\rangle$, как и в выражении (53). Но если амплитуды V_+ не постоянны, их изменения могут рассматриваться как вращение с мнимыми угловыми скоростями. Вводя комплексные "фазы" величин $V_-^{n_1 n_2}$ и $V_+^{m_1 m_2}$ формулами

$$\begin{aligned}\Phi_c^{n_1 n_2} &= i \ln V_-^{n_1 n_2} + const, \\ \Phi_c^{m_1 m_2} &= -i \ln V_+^{m_1 m_2} + const,\end{aligned}\quad (63)$$

и рассматривая вращение шума как изменение этих фаз, немедленно получаем результат (62). Оставшийся член в обеих формулах (61) и (62)- первая по $\dot{\mathbf{R}}$ поправка к Γ_{12} .

6 Геометрическая релаксация диагональных элементов матрицы плотности

Теперь мы опишем временную зависимость диагональных элементов матрицы плотности. Они всегда меняются взаимосвязанно, независимо от вида спектра системы. Далее мы предполагаем только, что в спектре нет вырожденных уровней.

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \vdots \\ \rho_{NN} \end{pmatrix} (t_P) = \mathcal{P}.e^{-\int_0^{t_P} \hat{\Gamma} dt - \int \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}} d\mathbf{R}} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \vdots \\ \rho_{NN} \end{pmatrix} (0), \quad (64)$$

где

$$(\hat{\Gamma})_{nn,nn} = \sum_{k \neq n} \Gamma^{nk}, \quad (65)$$

$$(\hat{\Gamma})_{nn,kk} = -\Gamma^{kn}. \quad (66)$$

(что означает $\partial_t \rho_{nn} \approx -\rho_{nn} \sum_{k \neq n} \Gamma^{nk} + \sum_{k \neq n} \rho_{kk} \Gamma^{kn}$),

$$(\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}})_{nn,nn} = \sum_{k \neq n} \left(\frac{\partial \Gamma^{nk}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} + \frac{\partial \Gamma^{nk}}{\partial E_{nk}} \frac{\Phi^{nk}}{\partial \mathbf{R}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \left(\frac{\partial \delta E_n^k}{\partial E_{nk}} \right) \right), \quad (67)$$

$$(\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}})_{nn,kk} = -\frac{\partial \Gamma^{kn}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} + \frac{\partial \Gamma^{kn}}{\partial E_{kn}} \frac{\Phi^{kn}}{\partial \mathbf{R}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \left(\frac{\partial \delta E_k^n}{\partial E_{kn}} \right). \quad (68)$$

Напоминая вектор-потенциал для недиагональных матричных элементов, первые члены в каждом из выражений описывают первую по $\dot{\mathbf{R}}$ поправку к динамической фазе, вторые- вращение шума, а третьи- полную производную некоторого

потенциала, которые необходимо учитывать даже в случае замкнутого контура, потому что матрица $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{R}}$ не коммутирует сама с собой для различных \mathbf{R} .

Заметим, что для измеримости потенциала не требуется замкнутость контурного интеграла в (64). Действительно, выражения для геометрической релаксации действительны и калибровочно-инварианты, так как релаксация может быть измерена в любой момент. Таким образом, ее геометрическая часть имеет смысл для любого не обязательно замкнутого пути и определяет анизотропию релаксации при изменении пути гамильтониана. Например, если гамильтониан обходит один и тот же контур сначала в одном направлении, а потом в другом, то мнимые фазы диагональных элементов матрицы плотности отличаются на удвоенную величину геометрической релаксации.

7 Заключение

В настоящей работе мы рассматривали влияние слабого коротко-коррелированного шума на фазы Берри в многоуровневых системах с невырожденными уровнями энергии.

Использовалась следующая схема вычислений фаз Берри. Для рассматриваемой системы выводились уравнения Редфилда в базисе состояний, зависящем от скорости изменения гамильтониана системы. Эти уравнения раскладывались до первого неисчезающего порядка по силе шума и по неадиабатичности изменения гамильтониана. Путем их интегрирования по времени получен оператор эволюции матрицы плотности.

Для двухуровневой системы, эквивалентной спину $1/2$ во флуктуирующем магнитном поле, показано, что фаза Берри есть сумма геометрической фазы, создаваемой вращением источника шума, поправки из-за вариаций гамильтониана системы, и потенциальной части, зависящей только от параметров гамильтониана системы и взаимодействия в начальный и конечный моменты времени. Обсуждена измеримость соответствующих вкладов в шумовую модификацию фазы Берри.

Проанализирована также структура и количество фаз Берри для многоуровневой системы с невырожденным спектром. Показано, что если все расщепления уровней энергии системы различны, то каждому недиагональному элементу матрицы плотности можно поставить в соответствие единственную динамическую фазу и единственную геометрическую фазу. Если среди расщеплений имеется вырождение, то соответствующие элементы матрицы плотности эволюционируют взаимосвязанно. Динамические и геометрические фазы описываются неабелевой калибровочной структурой.

Найденные компоненты геометрических фаз для многоуровневой системы имеют такой же вид, как и в случае двухуровневой системы. Аналогичные результаты получены для геометрической релаксации диагональных элементов матрицы плотности.

Список литературы

- [1] M. Berry, "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes," *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. 392, p. 45, 1984.
- [2] A. Tomita and R. Y. Chiao, "Observation of Berry's topological phase by use of an optical fiber," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, p. 937, 1986.
- [3] G. Delacrétaz, E. R. Grant, R. L. Whetten, L. Wöste, and J. W. Zwanziger, "Fractional quantization of molecular pseudorotation in Na_3 ," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, p. 2598, 1986.
- [4] R. Tycko, "Adiabatic rotational splitting and Berry's phase in nuclear quadrupole resonance," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 2281, 1987.
- [5] T. Bitter and D. Dubbers, "Manifestation of Berry's topological phase in neutron spin rotation," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 59, p. 251, 1987.
- [6] D. Suter, G. C. Chingas, R. A. Harris, and A. Pines, "Berry's phase in magnetic resonance," *Mol. Phys.*, vol. 61, p. 1327, 1987.
- [7] R. Bhandari and J. Samuel, "Observation of topological phase by use of laser interferometer," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, p. 1211, 1988.
- [8] W. Wernsdorfer and R. Sessoli, "Quantum phase interference and parity effects in magnetic molecular clusters," *Science*, vol. 284, p. 133, 1999.
- [9] J. A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, and G. Castagnoli, "Geometric quantum computation with NMR," *Nature*, vol. 403, p. 869, 2000.
- [10] W. Wernsdorfer, M. Soler, G. Christou, and D. Hendrickson, "Quantum phase interference (Berry phase) in single-molecule magnets of $[Mn_{12}]^{2-}$," *J. Appl. Phys.*, vol. 91, p. 7164, 2002.
- [11] J.-B. Yau, E. De Poortere, and M. Shayegan, "Aharonov-Bohm oscillations with spin: evidence for Berry's phase," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 146801, 2002.
- [12] D. Suter, K. Mueller, and A. Pines, "Study of the Aharonov-Anandan quantum phase by NMR interferometry," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, p. 1218, 1988.
- [13] Y. Aharonov and J. Anandan, "Phase change during a cyclic quantum evolution," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 1593, 1987.
- [14] D. Gamliel and J. H. Freed, "Berry's geometrical phase in ESR in the presence of a stochastic process," *Phys. Rev. A*, vol. 39, p. 3238, 1989.
- [15] D. Ellinas, S. Barnett, and M. Dupertuis, "Berry's phase in optical resonance," *Phys. Rev. A*, vol. 39, p. 3228, 1989.

- [16] J. Avron and A. Elgart, “Adiabatic theorem without a gap condition: Two-level system coupled to quantized radiation field,” *Phys. Rev. A*, vol. 58, p. 4300, 1998.
- [17] F. Gaitan, “Berry’s phase in the presence of a stochastically evolving environment: A geometric mechanism for energy-level broadening,” *Phys. Rev. A*, vol. 58, p. 1665, 1998.
- [18] K. F. Romero, A. A. Pinto, and M. Thomaz, “Berry’s phase in the presence of a dissipative medium,” *Physica A*, vol. 307, p. 142, 2002.
- [19] A. Carollo, I. Fuentes-Guridi, M. F. Santos, and V. Vedral, “Geometric phase in open systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, pp. 160402–1, 2003.
- [20] R. S. Whitney and Y. Gefen, “Does Berry phase exist for a system coupled to its environment?,” in *Proceedings of XXXVIIth Rencontres de Moriond “Electronic correlations: from Meso- to Nano-physics”*, 2001.
- [21] R. S. Whitney, Y. Makhlin, A. Shnirman, and Y. Gefen, “Geometric nature of the environment-induced Berry phase and geometric dephasing,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 070407, 2005.
- [22] R. S. Whitney, Y. Makhlin, A. Shnirman, and Y. Gefen, “Berry phase with environment: classical versus quantum,” in *Theory of Quantum Transport in Metallic and Hybrid Nanostructures* (A. Glatz, V. Kozub, and V. Vinokur, eds.), Springer, 2006.
- [23] R. S. Whitney and Y. Gefen, “Berry phase in a non-isolated system,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 190402, 2003.
- [24] C. Gardiner and P. Zoller, *Quantum noise*. Springer, 2nd ed., 2000.
- [25] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, “Dissipation in Josephson qubits,” in *New Directions in Mesoscopic Physics (Towards Nanoscience)* (R. Fazio, V. F. Gantmakher, and Y. Imry, eds.), pp. 197–224, Springer, 2003.
- [26] G. Falci, R. Fazio, G. Palma, J. Siewert, and V. Vedral, “Detection of geometric phases in superconducting nanocircuits,” *Nature*, vol. 407, p. 355, 2000.
- [27] F. Wilczek and A. Zee, “Appearance of gauge structure in simple dynamical systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, p. 2111, 1984.
- [28] J. Schrieffl, “Dephasing in coupled qubits,” Master’s thesis, Univ. Karlsruhe, 2002.
- [29] S. Dasgupta and D. A. Lidar, “Decoherence-induced geometric phase in a multilevel atomic system,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 40, p. S127, 2007.