Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский Физико–Технический Институт
(Государственный Университет)

Диссертационная работа на степень магистра

Физические состояния в массивных и безмассовых двумерных квантовых теориях поля.

студент 328 группы Алексеев О.В.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Белавин А.А.

Москва, 2009г.

Содержание

Часть I

Физические состояния в Минимальной Лиувиллевской гравитации $M(2,3)$

1 Введение

Теория гравитации Лиувилля это теория динамики метрической структуры на двумерном многообразии. Действие гравитации индуцировано критической материей, т.е. материей, описываемой конформной теорией поля. Простой вид реакции конформной теории поля на перескалирование метрики приводит к универсальному виду эффективного действия индуцированной гравитации. Это действие носит название действия Лиувилля[1]. В подходе Давида и Дистлера–Каваи (DDK approach[2]) Лиувиллевская гравитация представлена в виде тензорного произведения трех конформных теорий поля, а именно, конформной теории поля для материи, теории Лиувилля и системой духов. Схематически, действие для Лиувиллевской гравитации может быть записано в виде

$$S = S^M + S^L + S^{gh}. \tag{1.1}$$

Условие согласования Давида и Дистлера–Каваи налагает ограничения на центральные заряды алгебр Вирассоро этих теорий (1.1). Это ограничение гласит, что полный центральный заряд, включающий в себя центральный заряд конформной теории поля материального сектора, теории Лиувилля и системы духов, должен быть равен нулю

$$c_L + c_M + c_{gh} = 0. \tag{1.2}$$

Таким образом три сектора Лиувиллевской гравитации взаимодействуют вследствие условия сокращения конформной аномалии (1.2). Кроме того, условие общей ковариантности теории приводит к требованию, что единственными физическими состояниями могут быть только состояния конформного веса 0.

В этой работе мы рассмотрим один специальный вид гравитации, а именно минимальную Лиувиллевскую гравитацию, т.е. конформная материя представлена минимальной моделью [3]. В этом случае возможно исследовать физические состояния в более подробно.

Простейшие состояния с духовым числом[1] 1 – это старшие вектора материального сектора, "одетые" подходящими старшими векторами теории Лиувилля таким образом, что полная конформная размерность такого состояния (учитывая духи) равна 0. Простая структура этих состояний позволяет изучить операторы, соответствующие этим состояниям, очень подробно. Например, трех-точечные и четырех-точечные функции таких состояний явно найдены в работах [4, 5].

[1]Определение духового числа см. в Разделе 3

Лиан и Цукерман установили [6], что для каждого данного старшего вектора материального сектора, существует бесконечное количество дополнительных состояний с произвольными духовыми числами. Интересной задачей представляется рассмотреть эти дополнительные состояния более детально и исследовать операторную алгебру и корреляционные функции.

Отметим, что существует две версии Лиувиллевской гравитации. В первой из них гравитационный сектор модели реализован теорией свободного скалярного поля (с математической точки зрения можно сказать, что пространство состояний - это Фейгин-Фуксовские модули). В этом случае, операторная алгебра дополнительных физических состояний изучена в работе Канно и Сармади [8]. Во второй версии Лиувиллевской гравитации, пространство состояний гравитационного сектора представлено неприводимыми модулями алгебры Вирассоро [9]. В работе [6] было установлено, что эти две формулировки Лиувиллевской гравитации имеют совершенно различные пространства физических состояний.

В этой работе мы рассмотрим именно вторую формулировку Лиувиллевской гравитации. Нам представляется интересным рассмотреть дополнительные физические состояния в этом случае. Естественным способом нахождения физических состояний является BSRT процедура. В этой процедуре физические состояния определяются как когомологии BRST оператора. Обычно, только относительные когомологии называются физическими. В этой работе мы покажем, что существует рекурсивная процедура нахождения относительных BRST когомологий. Эта процедура обобщает результаты работы [10].

Однако, как мы покажем, определение физических состояний как относительных классов когомологий не является вполне приемлемым в данном случае. Действительно, мы увидим, что операторная алгебра относительных классов когомологий не является ассоциативной. Для того чтоб избежать этой проблемы, мы расширим пространство состояний и рассмотрим классы абсолютных когомологий. По математическим причинам удобно начинать с относительных когомологий а затем переходить к абсолютным.

Мы определим некоторые операторы действующие на пространстве когомологий. Эти операторы позволят нам вычислить абсолютные классы когомологий и исследовать операторную алгебру локальных операторов, соответствующих этим классам когомологий.

2 Лиувиллевская гравитация

В формализме интеграла по путям, статистическая сумма двумерной гравитации имеет вид

$$Z = \int D[g] e^{A_{\text{eff}}[g]} = \int \mathcal{D}[g] \int \mathcal{D}[X] e^{-A_{matter}[g,X]}, \qquad (2.1)$$

где $A_{\text{eff}}[g]$ - это эффективное действие индуцированное материей $A_{matter}[g, X]$. Функциональный интеграл вычисляется по всем Римановым метрикам, по модулю действия группы диффеоморфизмов.

В силу инвариантности эффективного действия $A_{\text{eff}}[g]$ относительно группы диффеоморфизмов, возникает задача о фиксации калибровки в функциональном интеграле (2.1). Наиболее распространенный выбор калибровки – это конформная калибровка, то есть

$$g_{ab}(x) = e^{2b\phi(x)}\delta_{ab}, \tag{2.2}$$

где масштабный фактор $\phi(x)$ называется полем Лиувилля. Параметр b будет определен позднее. Отметим, что выбор конформной калибровки всегда возможен в двух измерениях.

Фиксация калибровки осуществляется с помощью метода Фадеева-Попова. Можно проверить, что в данном случае детерминант Фадеева-Попова описывается bc-системой духов с действием

$$S_g = \frac{1}{\pi}\int (b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c}). \tag{2.3}$$

Здесь b и c фермионные поля с конформными весами $(2,-1)$. Действие (2.3) описывает конформную теорию поля с центральным зарядом $c_g = -26$. Вычисление эффективного действия по духовым полям, таким образом, опять сводится к действию Лиувилля

$$Z_g = \int D[\phi]e^{-A_L[\phi]}, \tag{2.4}$$

где действие Лиувилля индуцировано и полями материи и духовыми полями. Заметим, что хотя в функциональном интеграле (2.4) интеграл вычисляется по всем диффеоморфно-неэквивалентным метрикам, остается одна существенная проблема. Действительно, легко убедиться, что мера интегрирования по полю Лиувилля ϕ не является линейной.

Согласно гипотезе Давида и Дистлера–Каваи [2], эффект от нелинейной меры интегрирования может быть учтен путем подходящей перенормировки параметров в эффективном действии $A_L[\phi]$. Перенормированные параметры могут быть получены из условия самосогласования, которое мы представим ниже. Отметим, что такое переопределение теории не является строго обоснованным. Единственным подтверждением этой гипотезы служит сравнение с вычислениями в других моделях, которые, как предполагается, описывают двумерную гравитацию. Эти вычисления проводятся в подходе матричных моделей.

Таким образом, после учета инвариантности эффективного действия относительно группы диффеоморфизмов и нелинейности меры интегрирования по полю Лиувилля, мы приходим к перенормированному действию Лиувилля

$$A_L = \int \left(\frac{1}{4\pi}(\partial_a\phi)^2 + \mu e^{2b\phi}\right), \tag{2.5}$$

где параметр μ – это константа связи, называемая космологической постоянной. Это конформная теория поля с центральным зарядом

$$c_L = 1 + 6Q^2, \tag{2.6}$$

где параметр равен $Q = b + b^{-1}$. Условие согласование Давида и Дистлера–Каваи фиксирует параметр b таким образом, что полный центральный заряд материи, теории Лиувилля и системы духов (1.1) равен нулю (1.2). Следовательно, теории (1.1) взаимодействуют только посредством условия сокращения конформной аномалии (1.2).

Мы говорили, что существует две формулировки Лиувиллевской гравитации. В первой из них, теория Лиувилля представлена теорией свободного поля с фоновым зарядом. Эта теория известна как теория Фейгина-Фукса. Действие имеет вид

$$S = \int d2z\sqrt{\hat{g}}\left(\frac{1}{8\pi}(\hat{\nabla}\phi)^2 + \frac{i\alpha_0}{4\pi}\phi R[\hat{g}]\right). \tag{2.7}$$

Дополнительный член в этом действии приводит к появлению дополнительного слагаемого в тензоре энергии-импульса

$$T = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + i\alpha_0\partial^2\phi \tag{2.8}$$

который является производящей функцией для генераторов алгебры Вирассоро

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{L_n}{z^{n+2}}$$

с центральным зарядом

$$c = 1 - 12\alpha_0^2. \tag{2.9}$$

Генераторы алгебры Вирассоро имеют удовлетворяют следующим коммутационным соотношением

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \tag{2.10}$$

где c – центральный заряд алгебры.

Пространство состояний этой теории – это Фейгин–Фуксовские модули $\mathcal{F}_{p,\alpha_0}$. Так как скалярное поле может быть разложено в ряд Лорана, то генераторы алгебры Вирассоро в терминах операторов $i\partial\phi(z) = \sum\alpha_n z^{-n-1}$ имеют вид

$$L_n = \frac{1}{2}\sum :\alpha_m\alpha_{n-m}: -\,(n+1)Q\alpha_n, \tag{2.11}$$

где

$$[\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{n+m,0} \tag{2.12}$$

Фоковский модуль $\mathcal{F}_{p,\alpha_0}$ порождается из вакуума v_p, такого что $\alpha_0 v_p = pv_p$, применением операторов α_m, $m < 0$.

Однако, поле Лиувилля не является свободным полем. Действительно, поле Лиувилля является компонентой метрического тензора. Легко проверить, что при конформных преобразованиях $z \to w = f(z)$, это поле преобразуется следующим образом

$$\sigma \to \sigma - \frac{Q}{2}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2. \tag{2.13}$$

Тензор энергии импульса теории Лиувилля имеет вид

$$T(z) = -(\partial\phi)^2 + Q\partial^2\phi \tag{2.14}$$

и является генератором алгебры Вирассоро (2.10) с центральным зарядом (2.5). Сравнивая (2.6) и (2.9), мы видим, что при определенных мнимых значениях параметра α_0 центральные заряды алгебры Вирассоро могут совпадать. Однако, имеется отличие между этими двумя теориями. А именно, пространство состояний совершенно различны. В теории Лиувилля пространство состояний представлено неприводимыми представлениями алгебры Вирассоро, о не свободными модулями Фейгина–Фукса. В этой работе мы рассмотрим именно вторую формулировку Лиувиллевской гравитации.

3 Обозначения

Естественным способом квантования теории (1.1) со связью (1.2) является BRST процедура, в которой физические состояний определяются как классы когомологий BRST оператора. Напомним основные моменты метода.

Рассмотрим духовый сектор модели. Действие для bc-системы духов было представлено в (2.3). Духовые поля b и c могут быть разложены в ряд Лорана

$$b(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+2}}, \qquad c(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n-1}}, \tag{3.1}$$

где моды разложения b_n и c_n являются антикоммутирующими операторами, с единственным неравным нулю антикоммутатором

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m+n,0}. \tag{3.2}$$

Пусть Λ^{bc} - это Фоковское представление для системы духов. Определим вакуум $|0\rangle_g$ в Фоковском модуле Λ^{bc} следующим образом

$$b_m|0\rangle_g = 0,\ m \geq -1, \qquad c_n|0\rangle_G = 0,\ n \geq 2. \tag{3.3}$$

Этот вакуум является $SL(2,C)$ инвариантным вакуумом. Это значит, что он уничтожается всеми L_n^g с $n > -1$, где L_n^g - это моды разложения тензора энергии импульса для системы духов

$$T^g = :(\partial b)c: - 2\partial(:bc:) \tag{3.4}$$

Конформная размерность $SL(2,C)$-инвариантного вакуума равна 0. Кроме того, мы припишем духовое число 0 этому вакууму. Духовое поле b понижает духовое число на 1, в то время как поле c повышает духовое число на 1.

Нам будет удобнее работать с другим вакуумом, а именно, $|v^g\rangle = c_1|0\rangle_G$. Конформная размерность этого вакуума равна -1, а духовое число 1. Именно этот вакуум мы будем использовать в дальнейшем.

Перейдем к описанию BRST процедуры. Рассмотрим конформную теорию поля с центральным зарядом $c_{\mathcal{M}} = 26$. Пусть $\mathcal{M}$ - некоторое представление алгебры Вирассоро для этой теории. Тогда гильбертово пространство состояний, или абсолютный BRST комплекс, это тензорное произведение представления $\mathcal{L}$ и Фоковского представления Λ^{bc} bc-системы духов

$$C_*^{abs}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \Lambda^{bc}. \tag{3.5}$$

Обозначим $C_k^{\mathrm{abs}}(\mathcal{M})$ подпространство состояний с определенным духовым числом k. BRST оператор действующий на гильбертовом пространстве $C_*^{abs}(\mathcal{M}_\Delta)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Q = \oint : \left(T(z) + \frac{1}{2} T^{gh}(z) \right) c(z) : - \frac{c_0}{2} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{-n} c_n - \frac{1}{2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (m-n) : c_{-m} c_{-n} b_{n+m} : - \frac{c_0}{2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $T(z)$ это тензор энергии импульса, построенный для $\mathcal{M}$, $T^{gh}(z)$ тензор энергии импульса для системы духов. BRST оператор Q является нильпотентным оператором $Q^2 = 0$, если и только если центральный заряд конформной теории поля $c_{\mathcal{M}} = 26$. Классы когомологий абсолютного BRST комплекса $C_*^{abs}(\mathcal{M})$ мы будем обозначать $H_*^{abs}(\mathcal{M})$.

Рассмотрим подкомплекс абсолютного BRST комплекса

$$C_*^{rel}(\mathcal{M}) = \{ w \in C_*(\mathcal{M}) \mid b_0 w = (L_0 + L_0^{gh}) w = 0 \}. \tag{3.7}$$

Этот подкомплекс содержит только такие состояния w, которые уничтожаются нулевой модой духового поля b_0. Этот подкомплекс называется относительным BRST комплексом. Классы когомологий этого комплекса мы будем обозначать $H_*^{rel}(\mathcal{M})$.

В этой работе мы рассмотрим простейший случай Лиувиллевской гравитации, а именно, конформной теорией поля для полей материи является минимальной моделью $M(2,3)$. Не останавливаясь в подробностях на определении минимальной модели, отметим, что центральный заряд минимальной модели $M(2,3)$ равен 0. Единственное представление алгебры Вирассоро в минимальной модели $M(2,3)$ – это представление со старшим весом $\Delta = 0$, т.е. единичное представление $\mathbb{I}$. Отсюда следует, что выбор

$$\mathcal{M} = \mathbb{I} \otimes \mathcal{L}_\Delta \equiv \mathcal{L}_\Delta \tag{3.8}$$

соответствует рассматриваемому нами случаю минимальной Лиувиллевской гравитации $M(2,3)$.

Старший вектор в любом неприводимом представлении алгебры Вирассоро $\mathcal{L}_\Delta$ мы будем обозначать $|\mathcal{L}_\Delta\rangle$. Удобно ввести вакуумный вектор в гильбертовом пространстве состояний $C_*(\mathcal{L}_\Delta)$ для каждого модуля алгебры Вирассоро следующим образом

$$\Psi_\Delta = |\mathcal{L}_\Delta\rangle \otimes |v_g\rangle, \tag{3.9}$$

В BRST квантовании физические состояния определяются как классы когомологий, а именно

$$Qw = 0, \tag{3.10}$$

причем состояние w не является BRST точным.

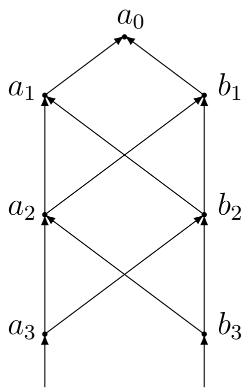
4 Относительный BRST комплекс

4.1 Теоремы Лиана-Цукермана

Для начала, мы рассмотрим относительный BRST комплекс $^{rel}(\mathcal{L}_\Delta)$. Классы относительных когомологий $H_*^{rel}(\mathcal{L}_\Delta)$ зависят от значения старшего веса Δ.

Когомологии $H_*^{rel}(\mathcal{L}.)$ нетривиальны только для некоторого дискретного набора старших весов Δ.

Пусть $E = \{a_n, b_n\}$ обозначает набор старших весов, которые появляются на диаграмме вложений модулей Верма



Смысл этой диаграммы заключается в следующем. Каждой точке диаграммы, за исключением верхней, соответствует некоторый модуль Верма со старшим весом либо $a_k = \Delta_{1,1+3(k-1)}$, либо $b_k = \Delta_{1,2+3(k-1)}$, где

$$\Delta_{r,s} = \frac{25 - (3r+2s)^2}{24}. \tag{4.1}$$

Верхняя точка диаграммы соответствует модулю Верма V_{a_0} со старшим весом $a_0 = 1$. Стрелка, соединяющая два модуля $V_\Delta \to V_{\Delta'}$, означает что модуль $V_{\Delta'}$ содержится в модуле V_Δ. Удобно ввести оператор $D_{\Delta',\Delta}$ следующим образом. Если модуль V_Δ содержит модуль $V_{\Delta'}$ тогда существует некоторый оператор $D_{\Delta',\Delta}$ такой, что вектор $D_{\Delta',\Delta}|V_\Delta\rangle$ является особым вектором с конформной размерностью Δ'. Оператор $D_{\Delta',\Delta}$ является полиномом по генераторам алгебры Вирассоро, например

$$D_{a_0,a_1} = L_{-1}, \qquad D_{a_0,b_1} = (L_{-1}^2 - \frac{2}{3}L_{-2}). \tag{4.2}$$

Вернемся к результатам работы [6]. Лиан и Цукерман доказали, что классы относительных когомологий $H_*^{rel}(\mathcal{L}_\Delta)$ нетривиальны, если и только если $\Delta \in E$. При каждом $\Delta \in E$, размерность пространства относительных когомологий $H_*^{rel}(\mathcal{L}_\Delta)$ равна

$$\dim H_k^{rel}(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim H_k^{rel}(\mathcal{L}_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = -n-1,\ n+1 \\ 2, & k = -n-3,\ -n-5, \dots\ n-1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{4.3}$$

где мы предполагаем, что $n > 0$. В случае $n = 0$ размерность пространства относительных когомологий

$$\dim H_k^{rel}(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1}.$$

Для рекурсивной процедуры построения когомологий относительного BRST комплекса, нам потребуется рассмотреть следующий комплекс ${}_{*}^{rel}(V_\Delta)$, где V_Δ модуль

Верма со старшим весом Δ. В этом случае Лиан и Цукерман установили, что классы когомологий $H_*^{rel}(V_\Delta)$, нетривиальны если и только если $\Delta \in E$. В этом случае размерность пространства относительных когомологий $H_*^{rel}(V_\Delta)$ равна

$$\dim H_k^{rel}(V_{a_n}) = \quad \dim H_k^{rel}(V_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = n+1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{4.4}$$

Остановимся подробнее на связи между этими двумя комплексами. Учтем, что существует отображение из любого модуля Верма в некоторый неприводимы модуль алгебры Вирассоро с той же самой конформной размерностью, т.е. $V_\Delta \to \mathcal{L}_\Delta$. Поэтому, существует отображение из одного комплекса в другой, т.е. $C_*(V_\Delta) \to C_*(\mathcal{L}_\Delta)$. Следовательно, $H_*^{rel}(V_\Delta) \to H_*(\mathcal{L}_\Delta)$. Таким образом, единственный представитель классов относительных когомологий в пространстве $H_*^{rel}(V_\Delta)$ имеет некоторый образ в пространстве когомологий $H_*^{rel}(\mathcal{L}_\Delta)$. Сравнивая духовые числа, мы заключаем, что этот образ является представителем классов когомологий с наибольшим духовым числом в пространстве $H_*^{rel}(\mathcal{L}_\Delta)$. В любом пространстве $H_*^{rel}(\mathcal{L}_\Delta)$ класс когомологий с наибольшим духовым числом мы будем называть старшей когомологией.

4.2 Рекурсивное построения базисных векторов

В этом разделе мы покажем, что существует связь между явными выражениями для физических состояний и явным видом соответствующих особых векторов. Эта связь ведет к рекурсивной процедуре построения относительных классов когомологий. Точнее говоря, мы покажем, что в рамках рекурсивной процедуры, все относительные классы когомологий определяются только старшими когомологиями.

4.2.1 Старшие когомологии

Нахождение явного вида старших классов когомологий упрощается вследствие

Предложение 1 *Все старшие классы когомологий могут быть получены только применением операторов $c_{-1}, c_{-2}, \ldots$ к вакуумному вектору Ψ_Δ.*

Это Предложение очевидным образом следует из Предложения 1.11 работы [11]. Поэтому мы не приводим доказательство. Однако отметим, что существует способ построения старших классов когомологий.

Действительно, рассмотрим векторное пространство K_n всевозможных линейных комбинаций антисимметричных мономов

$$c_{-i_1,\ldots,-i_n} = c_{-i_1} c_{-i_2} \cdots c_{-i_n}. \tag{4.5}$$

Пусть $d(c_{-i_1,\ldots,-i_n}) = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$ это размерность такого монома (4.5). На векторном пространстве определен дифференциал δ, такой что $\delta : K^n \to K^{n+1}$

$$\delta(c_{-i}) = \sum_{\alpha+\beta=i} (\alpha - \beta) c_{-\alpha,-\beta}, \qquad \delta(c_{-i_1,\ldots,-i_n}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} d(c_{-i_j}) c_{-i_1,\ldots,-\hat{i}_j,\ldots,-i_n}$$

Легко показать что этот дифференциал является нильпотентным оператором $\delta^2 = 0$. Символом $H_*(K)$ мы будем обозначать когомологии рассматриваемого комплекса. Этот комплекс изоморфен обычному комплексу алгебры Ли $Vir_{>0} = \langle L_1, L_2, \ldots \rangle$ и изучался во многих работах. Теорема Гончаровой [12] утверждает, что размерность пространства когомологий $H_*(K)$ равна

$$\dim H_n(K) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n > 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Пространство когомологий $H_n(K)$ порождается двумя векторами u_n, v_n, размерности которых

$$d(u_n) = \frac{3n^2 - n}{2}, \qquad d(v_n) = \frac{3n^2 + n}{2}. \tag{4.7}$$

Эти два вектора, u_n и v_n, определены по модулю δ точных членов. Например $H_1(K) = \langle c_{-1}, c_{-2} \rangle$ и $H_2(K) = \langle c_{-1}c_{-4}, c_{-2}c_{-5} - 3c_{-3}c_{-4} \rangle$.

Вернемся к задаче о нахождении старших когомологий $O_{a_n}^{a_n}$ для неприводимы модулей алгебры Вирассоро $\mathcal{L}_{a_n}$. Старший вес модуля $\mathcal{L}_{a_n}$ равен $a_n = 1 - d(u_n)$, где $d(u_n)$ определяется формулой (4.7). Рассмотрим вектор

$$u_n \Psi_{a_n}^{\mathcal{L}} = |\mathcal{L}_{a_n}\rangle \otimes u_n c_1 |0\rangle_G \tag{4.8}$$

с духовым числом $n + 1$ и конформной размерностью 0. Очевидно, что этот вектор является BRST замкнутым, т.е. $Q(u_n \Psi_{a_n}) = 0$. Можно показать, что этот вектор не является BRST точным. Поэтому, он является представителем классов когомологий в пространстве $H_*^{rel}(\mathcal{L}_{a_n})$

$$O_{a_n}^{a_n} = u_n \Psi_{a_n}^{\mathcal{L}}. \tag{4.9}$$

Старшие классы когомологий для любого неприводимого представления алгебры Вирассоро $\mathcal{L}_{b_n}$ могут быть построены аналогичным образом. В заключение этого раздела, мы приведем явные примеры некоторых простейших старших классов когомологий

$$\begin{aligned} O_{a_1}^{a_1} = c_{-1} \Psi_{a_1}^{\mathcal{L}}, \qquad O_{a_2}^{a_2} = c_{-1} c_{-4} \Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} \\ O_{b_1}^{b_1} = c_{-2} \Psi_{b_1}^{\mathcal{L}}, \qquad O_{b_2}^{b_2} = (c_{-2}c_{-5} - 3c_{-3}c_{-4}) \Psi_{b_2}^{\mathcal{L}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.2.2 Уравнения рекурсии

В этом разделе мы будем использовать следующие обозначения. Мы рассмотрим BRST комплекс $C_*(V_\Delta)$, где V_Δ это модуль Верма со старшим вектором Δ. Пусть $|V_\Delta\rangle$ это старший вектор в этом модуле Верма. Мы определим вакуумный вектор в комплексе $C_*(V_\Delta)$ в виде

$$\Psi_\Delta^V = |V_\Delta\rangle \otimes |v^g\rangle \tag{4.11}$$

Для того, чтоб подчеркнуть разницу между этим вектором и вектором, введенным в(3.9), мы будем обозначать последний как $\Psi_\Delta^{\mathcal{L}}$.

Классы когомологий, за исключением старших, допускают построение с помощью рекурсии[2]. Для вывода уравнений рекурсии мы начнем с вершины диаграммы

[2]Математический смысл этой конструкции заключается в следующем. Мы рассматриваем резольвенту неприводимого модуля алгебры Вирассоро состоящую из модулей Верма и вычисляем BRST когомологии с коэффициентами в этой резольвенте. После этого классы когомологий для неприводимых модулей можно получить с помощью спектральной последовательности.

вложений. Далее мы покажем, что любой класс когомологий (за исключением старших) на произвольном уровне диаграммы погружений, полностью определяется классами когомологий на предыдущих уровнях.

Уровень 0.

Верхняя точка диаграммы вложений соответствует старшему весу $a_0 = 1$. Так как размерность пространства когомологий $\dim H_k^{rel}(\mathcal{L}_{a_0}) = \delta_{k,1}$, прямым вычисление можно убедиться, что единственный представитель классов когомологий имеет вид

$$O_{a_0}^{a_0} = \Psi_{a_0}^{\mathcal{L}} \tag{4.12}$$

Это состояние хорошо известно. Оно содержит вектор со старшим весом $\Delta_M = 0$ в материальном секторе, "одетый" подходящим вектором Лиувиллевского сектора со старшим весом $\Delta_{\mathcal{L}} = 1$. Учитывая, что конформная размерность вакуума равна -1, мы получаем, что конформная размерность состояния $O_{a_0}^{a_0}$ действительно равна 0.

Перейдем к состояниям, отвечающим следующим уровням диаграммы. Эти состояния мы будем называть дополнительными.

Уровень 1.

Точки на первом уровне диаграммы вложений соответствуют старшим весам $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$. Рассмотрим пространство когомологий $H_*(\mathcal{L}_{a_1})$, связанное с первым из них. Учитывая результаты теоремы Лиана и Цукермана (4.3), можно установить, что единственные нетривиальные классы когомологий принадлежат пространствам $H_0(\mathcal{L}_{a_0})$ и $H_2(\mathcal{L}_{a_0})$. Явный вид старшей когомологии $O_{a_1}^{a_1}$ мы представили в (4.10). Представитель класса когомологий $H_0(\mathcal{L}_{a_0})$ может быть найден следующим образом.

Шаг 1. Рассмотрим относительный BRST комплекс $C_*^{rel}(V_{a_1})$, где V_{a_1} модуль Верма со старшим весом $a_1 = 1$. Этот модуль содержит особый вектор на первом уровне. Особый вектор на первом уровне может быть представлен как результат применения оператора $D_{a_0,a_1} = L_{-1}$ к старшему вектору $|V_{a_1}\rangle$.

Рассмотрим состояние

$$O_{a_0|a_1}^{a_0} = D_{a_0,a_1}|V_{a_1}\rangle \otimes |v^g\rangle \tag{4.13}$$

Модули Верма со старшими векторами $D_{a_0,a_1}|V_{a_1}\rangle$ и $|V_{a_0}\rangle$ эквивалентны, так как оба модуля имеют один и тот же старший вес $a_0 = 1$. Поэтому, возможно рассматривать состояние $O_{a_0|a_1}^{a_0}$ как состояние $O_{a_0}^{a_0}$[3]. Следовательно, состояние (4.13) является BRST замкнутым.

Шаг 2. Мы можем показать, что состояние (4.13) так же является и BRST точным. Действительно, согласно теореме Лиана–Цукермана единственный нетривиальный представитель классов когомологий пространства $H_*^{rel}(V_{a_1})$ должен иметь духовое число 2, в то время как состояние (4.13) имеет духовое число 1. Поэтому, это состояние является BRST точным. Следовательно, существует некоторый оператор $H_{a_1}^{a_0}$, такой что

$$Q(H_{a_1}^{a_0}\Psi_{a_1}^{V}) = O_{a_0|a_1}^{a_0}. \tag{4.14}$$

Step 3. Покажем, что состояние $O_{a_1}^{a_0} = H_{a_1}^{a_0}\Psi_{a_1}^{\mathcal{L}}$ является представителем классов когомологий в пространстве $H_0(\mathcal{L}_{a_0})$. Оператор $H_{a_1}^{a_0}$ может быть найден из уравнения (4.14). Отметим, что этот оператор действует на вакуумный вектор $\Psi_{a_1}^{\mathcal{L}}$, а не на $\Psi_{a_1}^{V}$.

[3] Второй нижний индекс в $O_{a_0|a_1}^{a_0}$ просто обозначает модуль Верма V_{a_1}, в котором мы рассматриваем особый вектор.

Действительно, состояние $O^{a_0}_{a_1}$ является некоторым представителем классов когомологий. Используя выражения (4.14) и (4.13) мы получаем[4]

$$Q(O^{a_0}_{a_1}) = D_{a_0,a_1}|\mathcal{L}_{a_1}\rangle \otimes |v^g\rangle = 0, \tag{4.15}$$

так как $D_{a_0,a_1}|\mathcal{L}_{a_1}\rangle = 0$ в силу того, что неприводимые модули алгебры Вирассоро не содержат особых векторов. Можно показать, что состояние $O^{a_0}_{a_1}$ не является BRST точным. Поэтому, это состояние является некоторым представителем классов когомологий.

Уравнение (4.14) мы будем называть уравнением рекурсии. Это уравнение позволяет нам определить класс когомологий $O^{a_0}_{a_1}$ посредством старшей когомологии $O^{a_0}_{a_0}$ на предыдущем уровне.

Таким образом, мы нашли все когомологии пространства $H^{rel}_*(\mathcal{L}_{a_1})$ и показали связь между этими когомологиями и особыми векторами в неприводимом модуле $\mathcal{L}_{a_1}$.

Можно построить классы когомологий в пространстве $H^{rel}_*(\mathcal{L}_{b_1})$ подобным образом. Старший класс когомологий представлен в (4.10). Рассмотрим оставшийся нетривиальный класс с духовым числом 0. В модуле Верма V_{b_1} находится особый вектор на втором уровне. Этот вектор может быть представлен как результат применения оператора $D_{a_0,b_1} = (L^2_{-1}+2/3L_{-2})$ к старшему вектору. Оставшаяся часть конструкции в точности такая, что мы использовали для построения представителя классов когомологий в пространстве $H_0(\mathcal{L}_{a_1})$. Поэтому, мы приведем результаты. Уравнение рекурсии в данном случае имеет вид

$$Q(H^{a_0}_{b_1}\Psi^V_{b_1}) = O^{a_0}_{a_0|b_1}, \qquad \text{where} \quad O^{a_0}_{a_0|b_1} = D_{a_0,b_1}|V_{b_1}\rangle \otimes |v^g\rangle, \tag{4.16}$$

и состояние $O^{a_0}_{b_1} = H^{a_0}_{b_1}\Psi^{\mathcal{L}}_{b_1}$ является представителем классов когомологий пространства $H^{rel}_0(\mathcal{L}_{b_1})$.

Уровень 2

Точки на этом уровне диаграммы вложений соответствуют старшим весам $a_2 = 4$ and $b_2 = 5$. Мы подробно рассмотрим пространство $H^{rel}(\mathcal{L}_{a_2})$. Не сложно вычислить размерности и духовые числа классов когомологий, используя теорему Лиана–Цукермана (4.3). Старшая когомология $O^{a_2}_{a_2}$ представлена в (4.10). Рассмотрим остальные классы.

Во-первых, рассмотрим пространство $H^{rel}_1(\mathcal{L}_{a_2})$. Два класса когомологий в этом пространстве могут быть построены тем же способом, что мы использовали на предыдущем уровне. В модуле Верма V_{a_2} существуют два особых вектора. Первый из них, $D_{a_1,a_2}|V_{a_2}\rangle$, находится на уровне 4, а второй, $D_{b_1,a_2}|V_{a_2}\rangle$, находится на уровне 3. Нетрудно убедиться, что уравнения рекурсии в этом случае имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &Q(H^{a_1}_{a_2}\Psi^V_{a_2}) = O^{a_1}_{a_1|a_2}, \qquad && O^{a_1}_{a_1|a_2} = H^{a_1}_{a_1}D_{a_1,a_2}|V_{a_2}\rangle \otimes |v^g\rangle, \\ &Q(H^{b_1}_{a_2}\Psi^V_{a_2}) = O^{b_1}_{b_1|a_2}, && O^{b_1}_{b_1|a_2} = H^{b_1}_{b_1}D_{b_1,a_2}|V_{a_2}\rangle \otimes |v^g\rangle \end{aligned} \tag{4.17}$$

[4]Существует отображение из модуля Верма в неприводимый модуль алгебры Вирассоро, т.е. $V_{a_1} \to \mathcal{L}_{a_1}$. Следовательно, $H^{rel}_*(V_{a_1}) \to H^{rel}_*(\mathcal{L}_{a_1})$. Правая часть выражения (4.14) находится в ядре этого отображения, в то время как правая часть $H^{a_0}_{a_1}\Psi^V_{a_1}$ имеет образ $H^{a_0}_{a_1}\Psi^L_{a_1}$, который мы обозначим как $O^{a_0}_{a_1}$. При этом отображении уравнение (4.14) принимает вид $Q(O^{a_0}_{a_1}) = 0$.

и представители классов когомологий это $O^{a_1}_{a_2} = H^{a_1}_{a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2}$ и $O^{b_1}_{a_2} = H^{b_1}_{a_2}\Psi_{a_2}$.

Теперь построим представителя классов когомологий пространства $H^{rel}_{-1}(\mathcal{L}_{a_2})$. Конструкция этого класса осуществляется следующим образом.

Шаг 1. Рассмотрим относительный BRST комплекс $C^{rel}_*(V_{a_2})$. Как мы обсуждали, в модуле Верма V_{a_2} содержатся два особых вектора. Определим два состояния

$$O^{a_0}_{a_1|a_2} = H^{a_0}_{a_1} D_{a_1,a_2}|V_{a_2}\rangle \otimes |v^g\rangle, \qquad O^{a_0}_{b_1|a_2} = H^{a_0}_{b_1} D_{b_1,a_2}|V_{a_2}\rangle \otimes |v^g\rangle. \tag{4.18}$$

Можно рассматривать эти состояния как $O^{a_0}_{a_1}$ и $O^{a_0}_{b_1}$ соответственно. Следовательно, принимая во внимание уравнения рекурсии (4.14) и (4.16), мы получаем

$$Q(O^{a_0}_{a_1|a_2}) = H^{a_0}_{a_1} D_{a_0,a_1} D_{a_1,a_2}|V_{a_2}\rangle \otimes |v^g\rangle, \qquad Q(O^{a_0}_{b_1|a_2}) = H^{a_0}_{b_1} D_{a_0,b_1} D_{b_1,a_2}|V_{a_2}\rangle \otimes |v^g\rangle. \tag{4.19}$$

Как мы обсуждали, в модулях Верма V_{a_1} и V_{b_1} содержится один особый вектор со старшим весом $a_0 = 1$. Оба этих модуля и, следовательно, особый вектор содержатся в модуле V_{a_2}. Так как такой особый вектор с конформной размерностью a_0 только один в модуле Верма V_{a_2}, существует операторное тождество $D_{a_0,a_1}D_{a_1,a_2} = D_{a_0,b_1}D_{b_1,a_2}$. Поэтому, из выражения (4.19) мы получаем

$$Q(O^{a_0}_{a_1|a_2} - O^{a_0}_{b_1|a_2}) = 0.$$

Оставшаяся часть конструкции такая же, что мы использовали на предыдущем уровне. Поэтому, представим результаты. Уравнение рекурсии имеет вид

$$Q(H^{a_0}_{a_2}\Psi^V_{a_2}) = O^{a_0}_{a_1|a_2} - O^{a_0}_{b_1|a_2}, \tag{4.20}$$

и $O^{a_2}_{a_0} = H^{a_0}_{a_2}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_2}$ является представителем классов когомологий в пространстве $H^{rel}_{-1}(\mathcal{L}_{a_2})$.

Уровень n

Мы предполагаем, что возможно построить уравнения рекурсии для классов когомологий пространства $H^{rel}_*(\mathcal{L}_{a_n})$. Классы когомологий этого пространства мы обозначим следующим образом

$$\begin{array}{cccccc}
 & O^{a_1}_{a_n} & O^{a_2}_{a_n} & \dots & O^{a_{n-1}}_{a_n} & \\
O^{a_0}_{a_n} & & & & & O^{a_n}_{a_n} \\
 & O^{b_1}_{a_n} & O^{b_2}_{a_n} & \dots & O^{b_{n-1}}_{a_n} & \\
 & & & & & \\
N^g: \ -n, & -n+2, & -n+4, & \dots & n, & n+2.
\end{array}$$

Пусть γ_k и δ_k обозначают либо a_k либо b_k. Определим оператор $H^{\gamma_k}_{a_n}$ следующим образом

$$O^{\gamma_k}_{a_n} = H^{\gamma_k}_{a_n}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_n}. \tag{4.21}$$

Оператор $H^{\gamma_k}_{\delta_n}$ является полиномом по генераторам алгебры Вирассоро L_n и духам c_n, b_n. Введем состояния

$$O^{\gamma_j}_{\delta_{n-1}|a_n} = H^{\gamma_j}_{\delta_{n-1}} D_{\delta_{n-1},\ a_n}|V_{a_n}\rangle \otimes |v^g\rangle. \tag{4.22}$$

Можно рассматривать эти состояния как состояния $O^{\gamma_j}_{\delta_{n-1}}$, т.е., как классы когомологий на предыдущем уровне $n-1$. Поэтому, вследствие предположения индукции набор операторов $H^{\gamma_j}_{\delta_{n-1}}$ можно считать заданным. Операторы $D_{\delta_{n-1},\, a_n}$ определены структурой вложений особых векторов в модуле Верма V_{a_n}. Теперь мы можем сформулировать

Предложение 2 *Для классов когомологий пространства $H^{rel}_*\mathcal{L}_{a_n}$ набор уравнений рекурсии имеет вид*

$$Q(H^{\gamma_j}_{a_n}\Psi^V_{a_n}) = \begin{cases} O^{\gamma_j}_{a_{n-1}|a_n} - O^{\gamma_j}_{b_j|a_n}, & j=0,\dots n-2 \\ O^{\gamma_{n-1}}_{\gamma_{n-1}|a_n}, & j=n-1 \\ 0, & j=n \end{cases} \tag{4.23}$$

и $O^{\gamma_j}_{a_n} = H^{\gamma_j}_{a_n}\Psi^{\mathcal{L}}_{a_n}$ являются представителями классов когомологий в пространстве $H^{rel}_*(\mathcal{L}_{a_n})$.

Как следствие этого предложения мы показали, что классы когомологий полностью определяются через старшие когомологии. Аналогичное предположение мы можем сформулировать для классов когомологий пространства $H_*\mathcal{L}_{a_b}$.

4.3 Операторы, действующие на пространстве относительных когомологий

В предыдущем разделе мы построили базисные состояния в пространстве $H^{rel}_*(\mathcal{L}_{a_n})$ используя структуру вложений особых векторов в неприводимых модулях алгебры Вирассоро. Для исследования операторной алгебры более удобно выбрать других представителей классов когомологий. Мы построим новые базисные состояния в пространстве относительных когомологий используя некоторые операторы, действующие на этом пространстве.

Рассмотрим два оператора

$$X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_{-n} c_n, \qquad X_+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^3 c_{-n} c_n. \tag{4.24}$$

Эти операторы коммутируют с BRST зарядом Q. Легко проверить, что оператор X является коммутатором $X = [Q, c_0]$ и коммутирует с BRST зарядом в силу $Q^2 = 0$. Коммутативность оператора X_+ с BRST зарядом можно проверить прямым вычислением. Поэтому, эти операторы действуют на пространстве когомологий, т.е. если w является классом когомологий с духовым числом k, тогда Xw и X_+w являются (если существуют) классами когомологий с духовым числом $k+2$.

Операторы X и X_+ порождают алгебру действующую на пространстве $H^{rel}\mathcal{L}_\Delta$ с квадратичным соотношением[5]

$$X \cdot X_+ = 0. \tag{4.25}$$

[5]С математической точки зрения мы изучаем действие когомологий алгебры Вирассоро на полубесконечных когомологиях. Операторы X и X_+ образуют базис в двумерном пространстве $H^2(Vir, Vir_0, \mathbb{C})$, где $Vir_0 = \langle L_0, c\rangle$. Полная алгебра $H^*(Vir, Vir_0, \mathbb{C})$ порождается X и X_+ с соотношением $XX_+ = 0$.

Это соотношение может быть получено следующим образом. Рассмотрим оператор

$$\tilde{Y} = \sum_{i+j+k=0,\, i,j,k,\neq 0} (i-j)(j-k)(k-i)c_i c_j c_k. \tag{4.26}$$

Можно показать, что произведение $X \cdot X_+$ равно коммутатору оператора $\tilde{Y}$ с BRST зарядом Q. Поэтому, для любого представителя классов когомологий w, $XX_+w = [Q,\tilde{Y}]w = Q\tilde{Y}(w)$, т.е. XX_+w равно 0 в пространстве когомологий.

Операторы X и X_+ могут быть использованы для нахождения представителей классов когомологий. Рассмотрим пространство $H_*^{rel}(\mathcal{L}_{a_n})$. В этом пространстве когомологию с минимальным духовым числом мы обозначим как O_{a_n}. Этот представитель тот же самый, что и $O_{a_n}^{a_0}$, рассмотренный в предыдущем разделе. Можно построить все классы когомологий используя

Теорема 1 *Представители классов когомологий пространства* $H_*^{rel}(\mathcal{L}_{a_n})$

$$O_{a_n}, \qquad XO_{a_n}, X^2O_{a_n}, \dots X^nO_{a_n}, \qquad X_+O_{a_n}, X_+^2O_{a_n}, \dots X_+^{n-1}O_{a_n} \tag{4.27}$$

образуют базис.

Доказательство этой теоремы будет опубликовано отдельно[6].

Теорема 1 может быть проиллюстрирована следующим образом

$$\begin{tikzcd}
& XO_{a_n} \arrow[r, "X"] & X^2O_{a_n} \arrow[r, "X"] & \dots \arrow[r, "X"] & X^{n-1}O_{a_n} \arrow[dr, "X"] & \\
O_{a_n} \arrow[ur, "X"] \arrow[dr, "X_+"'] & & & & & X^nO_{a_n} \\
& X_+O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & X_+^2O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & \dots \arrow[r, "X_+"] & X_+^{n-1}O_{a_n} \arrow[ur, "X_+"'] &
\end{tikzcd}$$

Смысл этой диаграммы следующий. Стрелка, соединяющая два класса когомологий $X^kO_{a_n} \to X^{k+1}O_{a_n}$ означает, что когомология $X^{k+1}O_{a_n}$ может быть получена из когомологии $X^kO_{a_n}$ применением оператора X.

Базисные вектора, описанные в теореме 1, отличаются от изучаемых в предложении 2. Например, рассмотрим пространство когомологий $H_*^{rel}(\mathcal{L}_{a_2})$. Принимая во внимание явный вид представителей классов когомологий, мы получаем

$$X(O_{a_2}^{a_0}) = -\frac{5}{3} \cdot O_{a_2}^{b_1} - O_{a_2}^{a_1}, \quad X_+(O_{a_2}^{a_0}) = \tfrac{7}{3} \cdot O_{a_2}^{b_1} - O_{a_2}^{a_1}$$

6 Идея доказательства заключается в следующем. Алгебра, порождаемая X, X_+ с соотношением $XX_+ = 0$ – это алгебра когомологий $H^*(Vir, Vir_0, \mathbb{C})$. Пространство когомологий $H_*(Vir, Vir_0, \mathbb{C})$ это свободный модуль над этой алгеброй. Неприводимый модуль алгебры Вирассоро $\mathbb{C}$ дуален некоторому бесконечномерному $\mathcal{K}$ вследствие дуальности между $c = 0$ и $c = 26$ модулей алгебры Вирассоро. Поэтому $H^{\infty/2+*}(Vir, Vir_0, \mathcal{K})$ – это свободный модуль над алгеброй $H^*(Vir, Vir_0, \mathbb{C})$. Неприводимый модуль алгебры Вирассоро $\mathcal{L}_{a_n}$ квазиизоморфен усеченному комплексу $\mathcal{K}$. Поэтому, пространство $H_*^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{a_n}) = H^{\infty/2+*}(Vir, Vir_0, \mathcal{L}_{a_n})$ – это циклический модуль над алгеброй $H^*(Vir, Vir_0, \mathbb{C})$

Напомним, что все классы когомологий, за исключением старших, могут быть получены из когомологий предыдущего уровня с помощью рекурсивной процедуры. С другой стороны, как следует из теоремы 1, все классы когомологий (включая старшую) в пространстве $H_*^{\rm rel}(\mathcal{L}_{a_n})$ могут быть получены из когомологии с минимальным духовым числом O_{a_n} применением операторов X, X_+. Поэтому, все классы когомологий могут быть найдены из одной когомологии $O_{a_0}^{a_0} \in H_*^{\rm rel}(\mathcal{L}_{a_0})$ (см.**??**)

4.4 Операторная алгебра

Из состояний в гильбертовом пространстве можно построить физические локальные операторы, используя соответствие между состояниями и операторами. Любое состояние из Гильбертова пространства имеет образ в пространстве локальных операторов. Например, любой старший вектор неприводимого представления алгебры Вирассоро соответствует Лиувиллевскому примарному полю той–же самой конформной размерности.

Для любого класса когомологий O мы можем рассмотреть соответствующий ему оператор $O(z)$ такой, что этот оператор коммутирует с BRST зарядом Q. Этот оператор не зависит от точки z, по модулю BSRT точных членов. Действительно

$$\partial O(z) = L_{-1}O(z) \qquad L_{-1}O = [Q, b_{-1}]O = Qb_{-1}O.$$

Хорошо известно, что любой нетривиальный класс когомологий O имеет нулевую конформную размерность. Действительно, предположим что $L_0 O = \Delta O$ и $\Delta \neq 0$. Тогда, мы имеем

$$O = \frac{1}{\Delta}L_0 O = \frac{1}{\Delta}[Q, b_0]O = Q\left(\frac{1}{\Delta}b_0 O\right).$$

Общий вид операторного разложения (OPE) двух локальных операторов имеет вид

$$O_1(z)O_2(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(0)z^n, \tag{4.28}$$

где коэффициенты разложения $A_n(0)$ это некоторые определенные операторы конформной размерности n. Так как операторы $O_1(z)$ и $O_2(z)$ являются BRST когомологиями, коэффициенты разложения $A_n(z)$ коммутируют с BRST зарядом Q. BRST когомологий с ненулевой конформной размерностью не существует. Поэтому, только коэффициент $A_0(z) \equiv O_3(z)$ может быть равен некоторому нетривиальному BRST оператору. Следовательно мы получаем структуру кольца, определяемую операторным разложением по модулю BRST коммутаторов

$$O_1(z)O_2(0) = O_3(0) + [Q, \ldots], \tag{4.29}$$

которую мы будем записывать так

$$O_1 \cdot O_2 = O_3. \tag{4.30}$$

Мы утверждаем, что операторная алгебра относительных классов когомологий не является ассоциативной. Мы рассмотрим простейший нетривиальный пример и покажем что

$$(O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_1}^{a_1}) \cdot O_{a_2}^{a_0} \neq O_{a_1}^{a_1} \cdot (O_{a_1}^{a_1} \cdot O_{a_2}^{a_0}). \tag{4.31}$$

Левая часть выражения (4.31) равна 0 в пространстве когомологий. Действительно, $O^{a_1}_{a_1} \cdot O^{a_1}_{a_1}$ равно 0 так как не существует класса когомологий с духовым числом 4 в пространстве $H^{rel}_*(\mathcal{L}_{a_1})$. Правая часть выражения (4.31) может быть вычислена используя явный вид операторов, представленных в Дополнении. Можно показать, что правая часть равна $240 O^{a_2}_{a_2}$. Это вычисление показывает, что операторная алгебра не является ассоциативной.

Отсутствие ассоциативности операторной алгебры крайне нежелательно. Исследуем эту проблему более детально. До сих пор мы обсуждали относительные классы BRST когомологий w, по модулю BRST точных членов Qw', где оба состояния w и w' уничтожаются нулевой модой духового поля b_0. Заметим, что существуют и состояния вида $Q\tilde{w}$, такие что $b_0\tilde{w} \neq 0$. Например, состояние $O^{a_1}_{a_1}$ одно из таких

$$O^{a_1}_{a_1} = Q(c_0 b_{-1} \Psi_{a_1})$$

Любая корреляционная функция, которая содержит состояния такого типа, равна нулю. Можно сказать, что эти состояния не являются физическими.

Поэтому, нам необходимо исключить нефизические состояния. Для того чтоб исключить такие нежелательные состояния мы рассмотри абсолютный BRST комплекс в следующем разделе.

5 Абсолютный BRST комплекс

В этом разделе мы рассмотрим абсолютный BRST комплекс $C^{abs}_*(\mathcal{L}_\Delta)$. Лиан и Цукерман показали, что классы когомологий пространства $H^{abs}_*(\mathcal{L}_\Delta)$ нетривиальны если и только если $\Delta \in E$. Напомним, что E это набор старших весов, появляющихся на диаграмме вложений. Мы можем сформулировать

Теорема 2 *Если $\Delta \in E$ тогда размерности пространства когомологий $H^{rel}_*(\mathcal{L}_\Delta)$ равны*

$$\dim\, H^{abs}_k(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim\, H^{abs}_k(\mathcal{L}_{b_n}) = \begin{cases} 1, & k = -n+1, -n+3, -n+4, \ldots, n-1, n, n+2 \\ 0, & \end{cases}$$

Доказательство. Следуя [11],[6] имеем точную последовательность, связывающую относительные и абсолютные когомологии

$$\ldots \xrightarrow{\gamma_{k-1}} H^{\rm rel}_{k-2} \xrightarrow{\alpha_{k-1}} H^{\rm rel}_{k} \xrightarrow{\beta_k} H^{\rm abs}_{k} \xrightarrow{\gamma_k} H^{\rm rel}_{k-1} \xrightarrow{\alpha_k} H^{\rm rel}_{k+1} \xrightarrow{\beta_{k+1}} H^{\rm abs}_{k+1} \xrightarrow{\gamma_{k+1}} \tag{5.1}$$

Как следует из точной последовательности

$$\dim H^{\rm abs}_k(\mathcal{L}_{a_n}) = \dim \mathrm{im}(\gamma_k) + \dim \mathrm{im}(\beta_k) = \dim \ker(\alpha_k) + \dim H^{\rm rel}_k(\mathcal{L}_{a_n}) - \dim \mathrm{im}(\alpha_{k-1}).$$

Так как размерности пространств когомологий $\dim H^{\rm rel}_k(\mathcal{L}_{a_n})$ известны (4.3), достаточно изучить отображение α_k.

Отображение $\alpha_*: H^{\rm rel}_{*-1} \to H^{\rm rel}_{*+1}$ определяется как действие оператора c_0 а затем действие BRST заряда Q. Заметим, что $[Q, c_0] = X$. Поэтому отображение α_* эквивалентно действию оператора X. Следовательно, из теоремы 1 мы заключаем, что ядро этого отображения α_* является линейной оболочкой классов когомологий $X_+^j O_{a_n}$ $(1 \leq j < n)$ и $X^n O_{a_n}$. Образ этого отображения является линейной оболочкой $X^j O_{a_n}$ $(1 \leq j \leq n)$. Из этого рассмотрения размерности пространств когомологий легко следуют. $\square$

Смысл последовательности (5.1) заключается в следующем. Любой класс абсолютных когомологий может быть либо состоянием из $H_*^{rel}\mathcal{L}$, либо состоянием вида $c_0 w + w'$, где $w \in H_*^{rel}\mathcal{L}$ и $w' \in C^{rel}\mathcal{L}$. Некоторые классы относительных когомологий не являются классами абсолютных когомологий. Действительно, можно рассмотреть действие BRST оператора на состояние вида $c_0 w + w'$ и получить

$$Q(c_0 w + w') = Xw + Qw'. \tag{5.2}$$

Поэтому, все когомологии вида Xw являются BRST точными в пространстве абсолютных когомологий.

Из доказательства теоремы 2 следует, что классы относительных когомологий вида

$$O_{a_n}, \quad X_+ O_{a_n}, \quad X_+^2 O_{a_n}, \quad \dots \quad X_+^{n-1} O_{a_n} \tag{5.3}$$

образуют базис в пространстве $H_*^{rel}(\mathcal{L}_{a_n}) \cap H_*^{abs}(\mathcal{L}_{a_n})$. Можно показать, что набор состояний (5.3) можно расширить до базиса в пространстве абсолютных когомологий $H_*^{abs}\mathcal{L}_{a_n}$ добавив состояний вида

$$YO_{a_n},\ X_+ YO_{a_n},\ X_+^2 YO_{a_n},\ \dots\ X_+^{n-1} YO_{a_n},$$

где мы ввели новый оператор

$$Y = \sum_{i+j+k=0} (i-j)(j-k)(k-i) c_i c_j c_k \tag{5.4}$$

с духовым числом 3. Прямым вычислением можно показать, что этот оператор коммутирует с BRST зарядом Q и, поэтому, действует на пространстве когомологий.

Структура пространства $H^{abs}(\mathcal{L}_{a_n})$ может быть проиллюстрирована следующим образом

$$\begin{tikzcd}
O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] \arrow[dr, "Y"'] & X_+ O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & X_+^2 O_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & \dots \arrow[r, "X_+"] & X_+^{n-1} O_{a_n} & \\
& YO_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & X_+ YO_{a_n} \arrow[r, "X_+"] & \dots \arrow[r, "X_+"] & X_+^{n-1} YO_{a_n}
\end{tikzcd}$$

Удобно обозначать классы когомологий в виде

$$O_{a_n}^m = X_+^m O_{a_n} \qquad N_{a_n}^m = X_+^m YO_{a_n} \tag{5.5}$$

5.1 Операторная алгебра

Операторная алгебра в пространстве абсолютных когомологий имеет структуру кольца (4.30). Правила слияния для локальных операторов следуют из правил слияния вырожденных представлений алгебры Вирассоро и закона сохранения духового числа

$$\begin{gathered} O^i_{a_{k+1}} \cdot O^j_{a_{l+1}} = \lambda O^{i+j}_{a_{k+l+1}}, \quad O^i_{a_{k+1}} \cdot N^j_{a_{l+1}} = \mu N^{i+j}_{a_{k+l+1}}, \\ N^i_{a_{k+1}} \cdot N^j_{a_{l+1}} = \nu O^{i+j+3}_{a_{k+l+1}}, \end{gathered} \tag{5.6}$$

где λ, μ и ν – структурные константы, зависящие от всех индексов. Мы вычислим структурные константы операторной алгебры используя операторы X_+ и Y действующие на пространстве когомологий.

Рассмотрим первый оператор X_+. В силу соответствия между операторами и состояниями, оператор X_+ действующий на гильбертовом пространстве состояний имеет образ, действующий на пространстве локальных операторов $O(z)$. По модулю BRST коммутаторов, это изображение задается следующим контурным интегралом

$$X_+ = -\oint dzc(z)\partial^3 c(z). \tag{5.7}$$

Из этого представления следует, что оператор X_+ дифференцирует произведение любых двух локальных операторов, то есть

$$X_+(O_1 \cdot O_2) = (X_+ O_1) \cdot O_2 + O_1 \cdot (X_+ O_2) \tag{5.8}$$

Рассмотрим оператор Y. Прямым вычислением можно проверить что на пространстве когомологий применение оператора Y к любому физическому состоянию O эквивалентно операторному произведению состояния $N^0_{a_1}$ и O, т.е

$$Y \cdot O = N^0_{a_1} \cdot O. \tag{5.9}$$

Состояние $N^0_{a_1}$ имеет образ в пространстве локальных операторов

$$N^0_{a_1}(z) =: c\partial c \partial^2 c : . \tag{5.10}$$

Достаточно рассмотреть операторную алгебру только в пространстве $\oplus_{n>0} H^{abs}(\mathcal{L}_{a_n})$. Действительно, существует изоморфизм между любыми двумя пространствами когомологий $H^{abs}_*(\mathcal{L}_{a_n})$ and $H^{abs}_*(\mathcal{L}_{b_n})$. Этот изоморфизм осуществляется оператором

$$O^0_{b_1}(z) = (\partial + \frac{2}{3} : bc :)\Phi_{b_1}(z), \tag{5.11}$$

где образ состояния $|\mathcal{L}_\Delta\rangle$ мы обозначили как $\Phi_\Delta(z)$.

Специальным элементом операторной алгебры является единичный оператор $\mathbb{I}$. Можно проверить, что этот оператор является образом состояния $O^0_{a_1}$ из гильбертова пространства.

Операторы X_+ и Y почти определяют структуру операторной алгебры в силу

Предложение 3 *Предположим что*

$$O^k_{a_{k+1}} \cdot O^l_{a_{l+1}} = O^{k+l}_{a_{k+l+1}}, \tag{5.12}$$

тогда

$$\begin{gathered} O^{k-i}_{a_{k+1}} \cdot O^{l-j}_{a_{l+1}} = \binom{i+j}{i} O^{k+l-i-j}_{a_{k+l+1}}, \qquad O^{k-i}_{a_{k+1}} \cdot N^{l-j}_{a_{l+1}} = \binom{i+j}{i} N^{k+l-i-j}_{a_{k+l+1}}, \\ N^{k-i}_{a_{k+1}} \cdot N^{l-j,1}_{a_{l+1}} = 0. \end{gathered} \tag{5.13}$$

В предположении предложения (3) мы предположили, что операторное умножение не вырождено, в то время как коэффициент может быть убран подходящей нормировкой старших когомологий.

Доказательство предложения 3

Рассмотрим операторное произведение двух операторов $O^k_{a_{k+1}}$ и $O^{l-i}_{a_{l+1}}$. Если $i = 0$, мы получаем допущение предложения. Рассмотрим случай $i = 1$. Принимая во внимание правила слияния (5.6) мы получаем

$$O^k_{a_{k+1}} \cdot O^{l-1}_{a_{l+1}} = \alpha O^{k+l-1}_{a_{k+l+1}}, \tag{5.14}$$

где α это структурная константа. Для того чтобы вычислить эту константу мы применим оператор X_+ к обоим частям операторного разложения (5.14). Так как этот оператор дифференцирует операторное произведение, левая часть равна $O^{k+l}_{a_{k+l+1}}$, в то время как правая $\alpha O^{k+l}_{a_{k+l+1}}$. Поэтому $\alpha = 1$.

Подействуем справа оператором Y на обе части операторного разложения (5.14). Учитывая (5.9) мы получим

$$O^k_{a_{k+1}} \cdot N^{l-1}_{a_{l+1}} = N^{k+l-1}_{a_{k+l+1}} \tag{5.15}$$

Первые два равенства из (5.13) могут быть получены по рекурсии. Последнее равенство является следствием тождества $Y^2 = 0$. $\square$

Интересно сравнит наши результаты с результатами работы[8], где вместо неприводимых модулей алгебры Вирассоро рассматриваются модули Фейгина-Фукса. В случае $c \geq 25$, модуль Фейгина-Фукса изоморфен либо модулю Верма, либо контрградиентному модулю Верма (см. [14]). Классы когомологий из работы.[8] соответствуют нашим классам когомологий с наименьшими и наибольшими духовыми числами. Например w^n соответствует классу $O_{a_{n+1}}$, где $n \geq 0$. Из результатов работы [8] что операторное произведение двух классов когомологий вида $O^0_{a_{n+1}}$ не вырождено. Поэтому, операторное произведение не вырождено и допущение предложения (3) выполняется.

6 Обсуждение

Одна из главных целей этой работы прояснить разницу между относительными и абсолютными когомологиями. По математическим причинам удобно рассматривать сначала классы относительных когомологий а потом переходить к абсолютным. Поэтому естественно сначала изучать классы относительных когомологий. В некоторых случаях (например в случае реализации теории Лиувилля через свободные поля [8]) пространство абсолютных когомологий $H_k^{abs} \cong H_k^{rel} + c_0 H_{k-1}^{rel}$. В частности, любой класс относительных когомологий является и классом абсолютных. В нашем случае связь между относительными и абсолютными когомологиями более сложная.

Мы изучим операторную алгебру в пространстве $H^{rel}\mathcal{L} \cap H^{abs}\mathcal{L}$ более подробно. Все состояния из этого пространства имеют вид $O_{a_k}^i$. Алгебра этих состояний изоморфна алгебре многочленов от двух переменных $\mathbb{C}[a,b]$ и изоморфизм определяется следующим образом

$$O_{k+1}^{k-i} \mapsto \frac{1}{i!} a^i b^{k-i} \tag{6.1}$$

Хорошо известно, что на пространстве $\mathbb{C}[a,b]$ действует алгебра sl_2. Поэтому, можно ожидать, что sl_2 действует и на пространстве $H^{rel}\mathcal{L} \cap H^{abs}\mathcal{L}$. Легко проверить, что оператор X_+ изоморфен sl_2 повышающему оператору

$$X_+ \mapsto b\frac{\partial}{\partial a} \tag{6.2}$$

и можно ожидать что существует оператор X_-, изоморфный sl_2 понижающему оператору

$$X_- \mapsto a\frac{\partial}{\partial b} \tag{6.3}$$

Построение этого оператора является открытой задачей. Похоже, что не существует понижающего оператора X_-, такого что $[Q, X_-] = 0$ и X_- действовал бы на когомологиях не нулем. Мы полагаем что существует оператор X_-, такой что $[Q, X_-] \neq 0$ но X_- действует на определенного вида представителях классов когомологий пространства $H^{rel}\mathcal{L} \cap H^{abs}\mathcal{L}$. Это похоже на действие sl_2 на пространстве гармонических форм многообразия Кахлера[15]

В работе. [16] Лиан и Цукерман установили, что абсолютные когомологии имеют структуру алгебры Гернштенбахера. Другими словами они определили скобку $\{u, v\}$. Эта скобка дифференцирует операторное произведение и обеспечивает структуру алгебр Ли на пространстве абсолютных когомологий. Интересно вычислить эту скобку в нашем случае. Самый простой пример это $\{N_{a_1}^0, O\} = X_+ O$. Это равенство эквивалентно (5.7) и дает объяснение свойству (5.8).

7 Дополнение

В этом разделе мы представим явный вид некоторых дополнительных состояний в пространстве относительных когомологий. Эти примеры получены с использованием рекурсивной процедуры, описанной нами в Разделе (4.2). Так как некоторые старшие классы когомологий были найдены нами в (4.10), в этом разделе мы рассмотрим только те классы, существование которых связано с особыми векторами в неприводимых представлениях алгебры Вирассоро.

Уровень 1.

1. Рассмотрим пространство когомологий $H_*^{rel}(\mathcal{L}_{a_1})$. Легко проверить, что представитель классов когомологий с духовым числом 0, имеет вид

$$O_{a_1}^{a_0} = H_{a_1}^{a_0}\Psi_{a_1}^{\mathcal{L}} = b_{-1}\Psi_{a_1}^{\mathcal{L}}$$

Можно показать, что $Q(O_{a_1}^{a_0}) = L_{-1}\Psi_{a_1}^{\mathcal{L}} = 0$, так как вектор $L_{-1}|\mathcal{L}_{a_1}\rangle$ является особым вектором в неприводимом модуле алгебры Вирассоро $\mathcal{L}_{a_1}$.

1. В пространстве $H_*^{rel}(\mathcal{L}_{b_1})$ представитель классов когомологий с духовым числом 0 имеет вид

$$O_{b_1}^{a_0} = H_{b_1}^{a_0}\Psi_{b_1}^{\mathcal{L}} \;\; = \;\; (b_{-1}L_{-1} + \frac{2}{3}b_{-2})\Psi_{b_1}^{\mathcal{L}}$$

Легко проверить, что $Q(O_{b_1}^{a_0}) = (L_{-1}^2 + 2/3L_{-2})\Psi_{b_1}^{\mathcal{L}} = 0$, так как вектор $(L_{-1}^2 + 2/3L_{-2})|\mathcal{L}_{b_1}\rangle$ является особым вектором в неприводимом модуле $\mathcal{L}_{b_1}$.

Уровень 2.

На этом уровне мы рассмотрим только пространство когомологий $H_*^{rel}(\mathcal{L}_{a_2})$. Представитель старшего когомологий был получен нами в (4.10). Рассмотрим все остальные.

Прямым вычислением можно убедиться, что классы когомологий с духовым числом 1 имеют следующий вид

$$\begin{gathered}
O_{a_2}^{a_1} = H_{a_2}^{a_1}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = (-c_{-1}b_{-1}L_{-1}^3 - \frac{20}{3}c_{-1}b_{-2}L_{-1}^2 - 4c_{-1}b_{-2}L_{-2} - \frac{52}{3}c_{-1}b_{-3}L_{-1} + 3c_{-2}b_{-1}L_{-1}^2 + \\
+\frac{64}{3}c_{-3}b_{-1}L_{-1} - \frac{76}{3}c_{-1}b_{-4} + 20c_{-3}b_{-2} + \frac{44}{3}c_{-4}b_{-1})\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} \\
O_{a_2}^{b_1} = H_{a_2}^{b_1}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = (-c_{-2}b_{-1}L_{-1}^2 - 6c_{-2}b_{-2}L_{-1} + 4c_{-3}b_{-1}L_{-1} - 12c_{-2}b_{-3} + 16c_{-4}b_{-1})\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}}
\end{gathered}$$

Действительно, можно проверить, что $Q(O_{a_2}^{a_1}) = D_{b_1,a_2}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = 0$ и $Q(O_{a_2}^{b_1}) = D_{b_1,a_2}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = 0$. Явный вид операторов D_{a_1,a_2} и D_{b_1,a_2} можно найти в работе[17].

Представитель классов когомологий с духовым числом -1 имеет следующий вид

$$O_{a_2}^{a_0} = (-\frac{2}{3}b_{-2}b_{-1}(L_{-1}^2 + 6L_{-2}) + \frac{2}{3}b_{-3}b_{-1}L_{-1} - \frac{4}{3}b_{-4}b_{-1} + 4b_{-3}b_{-2})\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}},$$

и можно убедиться, что

$$Q(O_{a_2}^{a_0}) = H_{a_1}^{a_0}D_{a_1,a_2}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} - H_{b_1}^{a_0}D_{b_1,a_2}\Psi_{a_2}^{\mathcal{L}} = 0$$

как и должно быть вследствие нашей конструкции.

Часть II

Формфакторы в модели Тоды: $A^{(1)}_{L-1}$

1 Введение

Точное вычисление формфакторов локальных и квазилокальных операторов в двумерных квантовых теориях поля, как известно, сводится к решению набора уравнений для аналитических функций, известных как аксиомы Каровски-Вейса-Смирнова. Один из способов решения этих уравнений является свободно–полевое представление, предложенное Лукьяновым [18]. Было показано, что это представление делает возможным вычисление формфакторов экспоненциальных полей $e^{\mathrm{i}\alpha\phi}$ в модели $\sin/\sinh$–модели Гордона и модели Тоды [19, 20]. Однако, набор экспоненциальных операторов далеко не описывает полный набор операторов теории, который содержит операторы–потомки, получаемые из экспоненциальных, действием алгебры Гейзенберга, связанной с полем $\phi(x)$. В этой работе мы предлагаем конструкцию формфакторов операторов–потомков в модели Тоды $A^{(1)}_{L-1}$.

Мы начнем с предложения Бабуджана и Каровски [21, 22], которые выразили формфакторы операторов–потомков в терминах набора вспомогательных функций. Наборы этих функций должна удовлетворять некоторым условиям, для того чтоб соответствовать формфакторам локальных операторов. В нашем подходе мы налагаем наиболее строгие условия на эти функции, которые позволяют установить точное соответствие между локальными операторами и набором функций.

Кроме того, мы предлагаем интерпретацию этих решений в терминах вспомогательной коммутативной алгебры и показываем, что при общих значениях α размерность подпространства на определенном уровне совпадает с размерностью Фоковского модуля алгебры Гейзенберга. Далее, с помощью процедуры бозонизации, мы доказываем отражательное свойство, которое связывает формфакторы операторов–потомков полей $e^{\mathrm{i}\alpha\phi}$ и $e^{\mathrm{i}(\hat{s}\alpha)\phi}$, где $\hat{s}$ – это элемент группы Вейля алгебры Ли $A^{(1)}_{L-1}$. Это соотношение, которое хорошо известно в теории Лиувилля [23], как предполагается, должно выполняться и в данной модели.

2 Модель Тоды $A^{(1)}_{L-1}$

Аффинная $A^{(1)}_{L-1}$ модель Тоды [24, 25] описывает динамику $L-1$ компонент действительного скалярного поля

$$\vec{\phi}(x) = (\phi^{(1)}, \ldots, \phi^{(N-1)}),$$

с действием

$$S[\varphi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu\varphi, \partial^\mu\varphi)}{8\pi} + \frac{\mu}{2}\sum_{i=0}^{L-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\alpha_i\varphi} \right), \tag{2.1}$$

где α_i, $i = 1, \dots, L-1$ - это простые корни алгебры Ли $A^{(1)}_{L-1}$, $\alpha_0 = -\sum_{i=1}^{L-1}\alpha_i$ и μ - константа связи.

Спектр данной модели описывает $L-1$ частиц с массами [24, 25]

$$M_n = M\frac{\sin(\frac{\pi n}{L})}{\sin(\frac{\pi}{L})}$$

Пусть $\mathfrak{h}$ это $(L-1)$-мерная Картанова подалгебра простой алгебры Ли A_{L-1} и $\mathfrak{h}^*$ дуальная ей подалгебра, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - это форма Киллинга на $\mathfrak{h}$ либо на $\mathfrak{h}^*$. Простые корни алгебры $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$, $i = 1, \dots, L-1$ удовлетворяют соотношениям

$$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}$$

. Пусть ρ - это полусумма положительных корней, так что $(\rho, \alpha_i) = 1$, $i > 0$. $(\alpha_i, H_s) = \delta_{is} - \delta_{i,s-1}$. Кроме того, мы будем использовать следующие обозначения

$$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/L}, \qquad Q = b + b^{-1}, \qquad b = \sqrt{\frac{p}{1-p}}, \qquad \zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi p}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим операторы теории. Простейшие из них – это вертексные операторы

$$V_a(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q(a+\rho)\varphi}(x). \tag{2.3}$$

Операторы этого типа не описывают всех операторов теории. Необходимо определить операторы–потомки. Мы не будем описывать стандартную процедуру построения этих операторов. Ниже мы представим другое представление операторов–потомков. Для начала, мы напомним, каким образом определяются формфакторы вертексных операторов в свободно–полевом представлении.

3 Свободно–полевое представление

Для описания теории в свободно–полевом представлении, мы вводим набор вертексных операторов $\Lambda_s(\theta)$, $s = 1, \dots, L$, ассоциированных с весами H_s первого фундаментального (векторного) представления π_1 алгебры Ли A_{L-1}

$$\{H_s\}_{s=1}^{l} \;:\qquad H_s\alpha_k = \delta_{s,k} - \delta_{s,k+1}, \qquad k = 1, \dots, L-1.$$

Усреднение произведений этих операторов мы производим с помощью теоремы Вика, используя правила

$$\begin{aligned}
&\langle\!\langle \Lambda_s(\theta) \rangle\!\rangle = 1,\\
&\langle\!\langle \Lambda_s(\theta')\Lambda_s(\theta) \rangle\!\rangle = R(\theta-\theta'),\\
&\langle\!\langle \Lambda_{s'}(\theta')\Lambda_s(\theta) \rangle\!\rangle = R(\theta-\theta')F(\theta-\theta'+\mathrm{sign}(s-s')\frac{\mathrm{i}\pi}{L}),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\log R(\theta) = -4 \int \frac{dt}{t}\, \frac{\operatorname{sh}(L-1)t\, \operatorname{sh} pt\, \operatorname{sh}(1-p)t}{\operatorname{sh}^2 Lt} \operatorname{ch} \frac{L(\pi - \mathrm{i}\theta)t}{\pi}$$

и

$$F\left(\theta \pm \frac{\mathrm{i}\pi}{L}\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\mathrm{i}\pi p}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\mathrm{i}\pi(1-p)}{L}\right)}{\operatorname{sh}\frac{\theta}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\mathrm{i}\pi}{L}\right)}. \tag{3.2}$$

Мы будем использовать следующее обозначение

$$\Lambda_{s_1 \dots s_n}(\theta) = :\prod_{j=1}^{n} \Lambda_{s_j}\left(\theta + \frac{\mathrm{i}\pi(n+1-2j)}{L}\right):, \qquad 1 \le s_1 < \dots < s_n \le L. \tag{3.3}$$

В частности

$$\Lambda_{12\dots L}(\theta) = 1. \tag{3.4}$$

Введем центральный элемент $\hat{a}$ со значениями в $\mathfrak{h}^*$ такой что

$$\langle\!\langle X(\hat{a}) \rangle\!\rangle_a = \langle\!\langle X(a) \rangle\!\rangle$$

для любой функции $X(a)$. В этих обозначениях Лукьяновские операторы [20] имеют вид

$$T_n(\theta) = \lambda'_n \sum_{1 \le s_1 < \dots < s_n \le L} \omega^{\langle \hat{a}, H_{s_1 \dots s_n} \rangle} \Lambda_{s_1 \dots s_n}(\theta), \qquad H_{s_1 \dots s_n} = H_{s_1} + \dots + H_{s_n}. \tag{3.5}$$

где

$$\lambda'_n = \sqrt{\frac{L}{2 \sin \pi p}} \exp \int \frac{dt}{t}\, \frac{\operatorname{sh} pt\, \operatorname{sh}(1-p)t}{\operatorname{sh} t\, \operatorname{sh}^2 Lt} \Big(\operatorname{sh}^2 nt + \operatorname{sh}^2(L-n)t\Big).$$

В свободно–полевом представлении формфакторы принимают вид

$$\langle \mathrm{vac} | V_a(0) | n_1\theta_1, \dots, n_N\theta_N \rangle \equiv G_a f_a(\theta_1, \dots, \theta_N)_{n_1 \dots n_N} = G_a \langle\!\langle T_{n_N}(\theta_N) \dots T_{n_1}(\theta_1) \rangle\!\rangle_a. \tag{3.6}$$

Такое представление удобно тем, что задача о вычислении формфакторов сводится к некоторой комбинаторной задаче. Далее мы рассмотрим конструктивный способ нахождения операторов–потомков.

4 Потомки и коммутативная алгебра

Пусть $\mathcal{A} = \oplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{A}_l$ – это коммутативная алгебра, порождаемая элементами $c_{-k} \in \mathfrak{h}$ с положительными целыми k. Каждый уровень l подпространства $\mathcal{A}_l$ является линейной оболочкой векторов $\prod c_{-k_i}$, таких что $\sum k_i = l$. Мы так же будем использовать копию $\bar{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$, порождаемую компонентами векторов $\bar{c}_{-k} \in \mathfrak{h}$. Канонический гомоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\bar{\mathcal{A}}$ мы обозначим: $\overline{c_{-k}} = \bar{c}_{-k}$.

Определим скобку на алгебре $\mathcal{A}$:

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} (u_k c_{-k})^{m_k}, \prod_{k=1}^{\infty} (v_k c_{-k})^{n_k} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} m_k!\, \langle u_k, v_k \rangle^{m_k} \delta_{m_k n_k}, \qquad \forall u_k, v_k \in \mathfrak{h}^*. \tag{4.1}$$

Рассмотрим токи

$$a_s(z) = \exp\left(H_s \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\omega^{-\frac{L+1-2s}{2}k} z^k\right). \tag{4.2}$$

Пусть

$$a_{s_1\dots s_n} = \prod_{j=1}^{n} a_{s_j}\left(\omega^{\frac{n+1-2s_j}{2}} z\right), \qquad 1 \leq s_1 < \dots < s_n \leq L. \tag{4.3}$$

Так как $\sum_{s=1}^{L} H_s = 0$, легко проверить, что

$$a_{12\dots L}(z) = 1. \tag{4.4}$$

Пусть

$$b_{s_1\dots s_n}(z) = a_{L+1-s_n,\dots,L+1-s_1}(z). \tag{4.5}$$

Теперь мы можем определить модифицированные Лукьяновские операторы T следующим образом

$$\mathcal{T}_n(\theta) = \lambda'_n \sum_{1\leq s_1<\dots<s_n\leq L} \omega^{\langle \hat{a}, H_{s_1\dots s_n}\rangle} \Lambda_{s_1\dots s_n}(\theta) a_{s_1\dots s_n}(\mathrm{e}^{\theta}) \bar{b}_{s_1\dots s_n}(\mathrm{e}^{-\theta}). \tag{4.6}$$

Для любого элемента $g \in \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$. Тогда функция

$$f_a^g(\theta_1,\dots,\theta_N)_{n_1\dots n_N} = (\langle\!\langle \mathcal{T}_{n_N}(\theta_N)\dots\mathcal{T}_{n_1}(\theta_1)\rangle\!\rangle_a, g) \tag{4.7}$$

определяет оператор $V_a^g(z)$ посредством формфактора этого оператора

$$\langle \mathrm{vac}|V_a^g(x)|n_1\theta_1,\dots,n_N\theta_N\rangle = G_a f_a^g(\theta_1,\dots,\theta_N)_{n_1\dots n_N}. \tag{4.8}$$

Выражение (4.7) является наиболее алгебраическим представлением для формфакторов. Для вычисления (4.7) нам необходимо использовать следующее тождество

$$\left(a_{s_1}(x_1)\dots a_{s_N}(x_N), \prod_{k=1}^{\infty}(u_k c_{-k})^{m_k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{N}\langle u_k, H_{s_j}\rangle\, \omega^{-\frac{L+1-2s_j}{2}k} x_j^k\right)^{m_k}. \tag{4.9}$$

Удобно выделить факторы $R(\theta)$ в отдельный множитель:

$$\begin{gathered} f_a^g(\theta_1,\dots,\theta_N)_{n_1\dots n_N} = J_{N,a}^g(\mathrm{e}^{\theta_1},\dots,\mathrm{e}^{\theta_N})_{n_1,\dots,n_N} \prod_{i=1}^{N}\lambda'_{n_i} \prod_{i<j}^{N} R_{n_i n_j}(\theta_i-\theta_j), \\ R_{mn}(\theta) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} R\left(\theta + \frac{\mathrm{i}\pi}{L}(m-n-2i+2j)\right). \end{gathered} \tag{4.10}$$

Функция $J_{N,a}^g$ является функцией переменных $x_1,\dots,x_N$, симметричной относительно перестановок (n_i, x_i). Мы так же будем использовать обозначение $J_{N,a} \equiv J_{N,a}^1$. Далее мы получим свободно–полевое представление для функций $J_{N,a}^g$.

Теперь мы можем привести некоторые важные свойства полученного выражения для формфакторов.

4.1 Интегралы движения

Пусть

$$h_k^I = \sum_{i=1}^{L-1} \omega^{\frac{L+1-2i}{2}k} \frac{1-\omega^{ik}}{1-\omega^k} \alpha_i c_{-k}, \qquad h_{-k}^I = \bar{h}_k^I, \qquad k \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus k\mathbb{Z}_{>0}. \tag{4.11}$$

Легко проверить что

$$f_a^{h_k^I g}(\theta_1, \dots, \theta_N)_{n_1 \dots n_N} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\sin \frac{\pi n_i k}{L}}{\sin \frac{\pi k}{L}} \mathrm{e}^{k\theta_i} \right) f_a^g(\theta_1, \dots, \theta_N)_{n_1 \dots n_N}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus k\mathbb{Z}. \tag{4.12}$$

для любого элемента $g \in \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$. Отсюда следует что

$$V_a^{h_k^I g}(x) = [I_k, V_a^g(x)], \tag{4.13}$$

где I_k – подходящим способом нормированный локальный интеграл движения. Эта конструкция совпадает с конструкцией в работах [26, 27].

4.2 Свойство факторизации

Пусть $g = h\bar{h}'$, $h, h' \in \mathcal{A}$. Рассмотрим асимптотики

$$f_a^g(\theta_1, \dots, \theta_M, \theta_{M+1} + \Lambda, \dots, \theta_N + \Lambda), \qquad \Lambda \to \infty.$$

Легко проверить, что $F(\theta \pm \Lambda) \to 1$, $R(\theta \pm \lambda) \to 1$. Кроме того, из выражения (4.9) следует что

$$\begin{gathered}(a_{s_1}(x_1) \dots a_{s_M}(x_M) a_{s_{M+1}}(x_{M+1}\mathrm{e}^{\Lambda}) \dots a_{s_N}(x_N \mathrm{e}^{\Lambda}), h) = (a_{s_{M+1}}(x_{M+1}\mathrm{e}^{\Lambda}) \dots a_{s_N}(x_N \mathrm{e}^{\Lambda}), h),\\ (a_{s_1}(x_1) \dots a_{s_M}(x_M) a_{s_{M+1}}(x_{M+1}\mathrm{e}^{-\Lambda}) \dots a_{s_N}(x_N \mathrm{e}^{-\Lambda}), h) = (a_{s_1}(x_1) \dots a_{s_M}(x_M), h)\end{gathered}$$

для элемента $h \in \mathcal{A}$. Поэтому, мы немедленно получаем свойство кластерной факторизации:

$$f_a^{h\bar{h}'}(\theta_1, \dots, \theta_M, \theta_{M+1}+\Lambda, \dots, \theta_N+\Lambda) = f_a^h(\theta_{M+1}+\Lambda, \dots, \theta_N+\Lambda) f_a^{\bar{h}'}(\theta_1, \dots, \theta_M), \qquad \Lambda \to \infty. \tag{4.14}$$

Мы можем заключить, что формфакторы f_a^h, $h \in \mathcal{A}_n$ соответствуют формфакторам факторам киральных потомков на уровне n, а $f_a^{\bar{h}'}$ соответствуют формфакторам антикиральных потомков. Тем не менее мы не можем сказать определенно, какому именно потомку соответствует любой элемент $h\bar{h}'$ $h \in \mathcal{A}_n$, $\bar{h}' \in \mathcal{A}_{\bar{n}}$, кроме того, что этот элемент представляет собой некоторую линейную комбинацию потомков уровней $(m, \hat{m})$, таких что $0 \le m \le n$, $0 \le \hat{m} \le \hat{n}$.

4.3 Подсчет киральных потомков

Мы хотим доказать, что при общих значениях a, формфакторы f_a^g с различными значениями g различаются. Для этого, мы докажем этот факт для одного частного случая. А именно, мы рассмотрим некоторую асимптотику по параметру a. Пусть

$$a(\tau) = \frac{L\tau}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{i(L-i)}{2} \alpha_i, \qquad a(\tau) H_s = \frac{L\tau}{2\pi\mathrm{i}} \left(\frac{L+1}{2} - s \right).$$

Рассмотрим предел $\tau \to +\infty$. Очевидно, что

$$\frac{2\pi \mathrm{i}}{L\tau} a(\tau) H_{12\dots n} = \frac{n(N-n)}{2}, \qquad \frac{2\pi \mathrm{i}}{L\tau} a(\tau) H_{s_1 s_2 \dots s_n} > \frac{n(N-n)}{2} \quad \text{для } s_n > n.$$

Поэтому

$$T_n(z)|_{\hat{a}=a(\tau)} = \mathrm{e}^{\tau \frac{n(L-n)}{2}} \left(\Lambda_{12\dots n}(z) + O(\mathrm{e}^{-\tau})\right) \quad \text{при } \tau \to +\infty. \tag{4.15}$$

Легко проверить, что функции $J^g_{N,a}$ имеют следующие асимптотики:

$$\mathrm{e}^{-\tau \sum_{i=1}^{N} \frac{n(L-n)}{2}} J^g_{N,a}(x_1, \dots, x_N)_{n_1 \dots n_N} \Big|_{\tau \to \infty} = P^g(X_1 | \dots | X_{L-1}), \qquad X_n = \{x_i | n_i = n\}. \tag{4.16}$$

Функции P^g являются полиномами, определяемыми следующими соотношениями:

$$P^{g_1 g_2} = P^{g_1} P^{g_2}, \qquad P^{k_1 g_1 + k_2 g_2} = k_1 P^{g_1} + k_2 P^{g_2} \qquad (\forall g_1, g_2 \in \mathcal{A},\ k_1, k_2 \in \mathbb{C}). \tag{4.17a}$$

$$P^{\alpha_i c_{-k}}(X_1 | \dots | X_{L-1}) = \omega^{\frac{i-1}{2}} S_k(X_i) + \sum_{n=i+1}^{L-1} \omega^{\frac{i-n}{2}} (1-\omega) S_k(X_n), \tag{4.17b}$$

$$P^{\alpha_{L-i} \bar{c}_{-k}}(X_1 | \dots | X_{L-1}) = -\omega^{-\frac{i-1}{2}} S_{-k}(X_i) + \sum_{n=i+1}^{L-1} \omega^{\frac{n-i-1}{2}} (1-\omega) S_{-k}(X_n), \tag{4.17c}$$

Здесь

$$S_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Произведение полиномов S_k при $k > 0$ заданной степени образует базис симметричных полиномов соответствующей степени при достаточно большом числе переменных.

Для начала, рассмотрим случай $g \in \mathcal{A}$. Так как мы интересуемся полным набором формфакторов, мы можем рассматривать функции $z_{nk} = S_k(X_n)$, $n = 1, \dots, L-1$ как независимые переменные. Уравнение (4.17b) определяет отображение из алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру полиномов переменной z_{nk}. Это отображение является обратимым. Действительно, уравнение (4.17b) позволяет выразить любой моном z_{nk} в терминах функций $P^{\alpha_n c_{-k}}$ и мономов $z_{n'k}$, $n' > n$. Применяя это уравнение рекурсивно, мы можем выразить любой моном z_{nk} в виде линейной комбинации полиномов $P^{\alpha_{n'} c_{-k}}$ с $n' \geq n$. Поэтому, $z_{nk} = P^{g_{nk}}$, где $g_{nk} = \sum_{j=n}^{L-1} A_j \alpha_j c_{-k}$ с некоторыми, точно определенным коэффициентами A_j. Это соотношение определяет отображение из алгебры полиномов переменной z_{nk} в алгебру $\mathcal{A}$.

Это доказывает, что различные элементы $g_1 \neq g_2 \in \mathcal{A}$ порождают различные полиномы $P^{g_1} \neq P^{g_2}$ переменных z_{nk}. Так как формфакторы являются аналитическими функциями переменной a, эти элементы порождают различные наборы формфакторов $f^{g_1}_a \neq f^{g_2}_a$.

Теперь предположим, что $g = \sum h_i \tilde{h}_i$, где $h_i \in \mathcal{A}_l$, $\tilde{h}_i \in \bar{\mathcal{A}}_{\bar{l}}$ являются линейно независимыми элементами. Предположим, что $f^g_a = 0$. Тогда, в силу свойства факторизации, комбинации

$$\sum f^{h_i}_a(\theta_1, \dots, \theta_M) f^{\tilde{h}_i}_a(\theta'_1, \dots, \theta'_N) = 0.$$

Это противоречит линейной независимости формфакторов f^{h_i} для общего значения a. Поэтому, отсюда следует

Теорема 3 *Линейное отображение $g \mapsto f_a^g$ из $\mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$ в пространство наборов функций является обратимым как отображение на его образ при общих значениях a.*

5 Бозонизация

Мы видели, что формфакторы пропорционален функциям $J_{N,a}(X)$ с точностью до множителя, одинакового для всех формфакторов с данным количеством частиц. В этом разделе получим представление для функций $J_{N,a}(X)$ в виде матричных элементов некоторых новых вертексных операторов. Мы определим эти вертексные операторы в терминах свободных полей.

Рассмотрим алгебру Гейзенберга с генераторами $d_k^{(s)}$, $s = 1, \ldots, L$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ и коммутационными соотношениями

$$[d_k^{(s)}, d_l^{(s)}] = 0, \qquad [d_k^{(s')}, d_l^{(s)}] = k\delta_{k+l,0}A_k^{\mathrm{sign}(s'-s)}, \quad (s' \neq s), \tag{5.1}$$

где

$$A_k^{\pm} = (\zeta^{\mp k} - \omega^{\mp k})(1 - \zeta^{\pm k}). \tag{5.2}$$

Заметим, что

$$A_k^- = A_{-k}^+ = \omega^k A_k^+. \tag{5.3}$$

Определим вакуумы $|1\rangle_a$ и ${}_a\langle 1|$ следующим образом

$$d_k^{(s)}|1\rangle_a = 0, \quad \hat{a}|1\rangle_a = a|1\rangle_a, \quad {}_a\langle 1|d_{-k}^{(s)} = 0, \quad {}_a\langle 1|\hat{a} = {}_a\langle 1|a, \quad {}_a\langle 1|1\rangle_a = 1 \quad (k > 0) \tag{5.4}$$

и операторы нормального упорядочивания $:\cdots:$. Мы так же будем использовать следующее обозначение

$$\langle \ldots \rangle_a \equiv {}_a\langle 1| \ldots |1\rangle_a.$$

Рассмотрим вертексные операторы

$$\lambda_s(z) = \exp \sum_{k \neq 0} \frac{d_k^{(s)}}{k} z^{-k}. \tag{5.5}$$

Заметим, что экспоненты в правой части этого выражения не нуждаются в нормальном упорядочивание вследствие коммутативности всех $d_k^{(s)}$ с заданным k. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \lambda_s(z')\lambda_s(z) &= :\lambda_s(z')\lambda_s(z):, \\ \lambda_{s'}(z')\lambda_s(z) &= f\left(\frac{z}{z'}\right):\lambda_{s'}(z')\lambda_s(z):, \qquad s' > s, \\ \lambda_{s'}(z')\lambda_s(z) &= f\left(\frac{z'}{z}\right):\lambda_{s'}(z')\lambda_s(z):, \qquad s' < s. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь мы использовали следующее обозначение

$$f(z) = F\left(\log z - \frac{\mathrm{i}\pi}{L}\right) = \frac{(z-\zeta)(z-\omega\zeta^{-1})}{(z-1)(z-\omega)}, \qquad f(z) = f(\omega/z). \tag{5.7}$$

Пусть

$$\lambda_{s_1\dots s_n}(z) = :\prod_{j=1}^{n} \lambda_{s_j}\left(z\omega^{\frac{n+1-2j}{2}}\right):, \qquad 1 \le s_1 < \dots < s_n \le L. \tag{5.8}$$

Заметим, что операторы $\lambda_{12\dots L}(z)$ не равны единице и будут играть важную роль далее. Важное свойство которое мы будем использовать–это следующее соотношение

$$\lambda_{12\dots L}(z)\lambda_s(x) = \prod_{j=1}^{L-1} f\left(\frac{z}{x}\omega^{\frac{L+1-2j}{2}}\right) :\lambda_{12\dots L}(z)\lambda_s(x):. \tag{5.9}$$

Коэффициенты в правой части не зависят от s.

Теперь мы можем определить W ток

$$t_n(z) = \sum_{1\le s_1<\dots<s_n\le L} \omega^{\langle a, H_{s_1\dots s_n}\rangle}\lambda_{s_1\dots s_n}(z). \tag{5.10}$$

Очевидно, что

$$J_{N,a}(x_1,\dots,x_N)_{n_1\dots n_N} = \langle t_{n_N}(x_n)\dots t_{n_1}(x_1)\rangle_a\,. \tag{5.11}$$

Эта конструкция похожа на стандартное свободно–полевое представление, однако имеются и отличия. Набор осцилляторов, которые мы вводим, является счетным. Кроме того, в этом представлении формфакторы пропорциональны вакуумным ожидаемым, а не следу. В этой конструкции мы избавились от дополнительных множителей $R(\theta_i - \theta_j)$. Однако, помимо этих преимуществ, есть и некоторые усложнения. Действительно, вычеты в кинематических полюсах для вертексных операторов являются не c–числом, а новым вертексным оператором.

Для того, чтоб получить функции $J^g_{N,a}$ для любого элемента g нам необходимо использовать следующую конструкцию. Рассмотрим два представления алгебры $\mathcal{A}$ в алгебре Гейзенберга, π_R и π_L, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned}
\pi_R(\alpha_i c_{-k}) &= R_k^{(i)} = \frac{\omega^{-\frac{L+1-2i}{2}k}}{A_k^+}(d_k^{(i)} - d_k^{(i+1)}),\\
\pi_L(\alpha_i c_{-k}) &= L_k^{(i)} = \frac{\omega^{-\frac{L+1-2i}{2}k}}{A_k^+}(d_{-k}^{(L-i)} - d_{-k}^{(L+1-i)}).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Эти операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\pi_R(\alpha_i c_{-k}), \lambda_s(z)] = \langle\alpha_i, H_s\rangle\omega^{-\frac{L+1-2s}{2}k}z^k\lambda_s(z), \tag{5.13a}$$

$$[\lambda_s(z), \pi_L(\alpha_i c_{-k})] = \langle\alpha_i, H_{L+1-s}\rangle\omega^{\frac{L+1-2s}{2}k}z^{-k}\lambda_s(z), \tag{5.13b}$$

$$[\pi_R(\alpha_i c_{-k}), \pi_L(\alpha_j c_{-l})] = k\delta_{kl}(A_k^+)^{-1}(\delta_{i+j,L-1} + \omega^k\delta_{i+j,L+1} - (1+\omega^k)\delta_{i+j,L}). \tag{5.13c}$$

Нам потребуется следующий набор операторов D_k ($k \ne 0$), таких что

$$[D_k, \pi_R(h)] = [D_k, \pi_L(h)] = 0. \tag{5.14}$$

Эти операторы имеют следующий вид

$$D_k = \sum_{i=1}^{L} \omega^{-\frac{L+1-2i}{2}k} d_k^{(i)}. \tag{5.15}$$

Пусть ${}_a\langle U|$, $|V\rangle_a$–это некоторые состояния из фоковских модулей ${}_a\langle 1|$, $|1\rangle_a$. Тогда, можно показать, что

$$\begin{aligned} {}_a\langle U|D_{-k} = 0 \quad \forall k > 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists h \in \mathcal{A}: \quad {}_a\langle U| = {}_a\langle 1|\pi_R(h), \\ D_k|V\rangle_a = 0 \quad \forall k > 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \exists h \in \mathcal{A}: \quad |V\rangle_a = \pi_L(h)|1\rangle_a. \end{aligned} \tag{5.16}$$

6 Соотношение рекурсии и свойство отражения

В этом разделе мы будем использовать следующие обозначения. Пусть $I = (1, \ldots, N)$, $X = (x_1, \ldots, x_N)$, $\hat{I}_i = I \setminus \{i\}$, $\hat{X}_i = X \setminus \{x_i\}$.

Рассмотрим функцию

$$J_{k,N+1,a}(z; X) = \prod_{i\in I}\prod_{j=1}^{k-1} f^{-1}\left(\frac{z}{x_i}\omega^{\frac{k+1-2j}{2}}\right)\langle t_k(z)t_1(x_1)\ldots t_1(x_N)\rangle_a \tag{6.1}$$

как аналитическую функцию переменной z, зависящей от параметров $X = (x_1, \ldots, x_N)$. Дополнительный множитель в этом выражении введен для того, чтоб сократить нефизические полюса. Действительно, рассмотрим произведение двух токов $t_k(z)t_1(x)$. Это произведение имеет полюса первого порядка в точках

$$z = x(\omega^{\frac{k+1-2j}{2}})^{\pm 1}, \quad j = 1, \ldots, k \tag{6.2}$$

и равно нулю в

$$z = x(\zeta\omega^{\frac{k+1-2j}{2}})^{\pm 1} \quad j = 1, \ldots, k. \tag{6.3}$$

Поэтому, удобно переопределить произведение, введя дополнительный множитель

$$\prod_{j=1}^{k-1} f^{-1}\left(\frac{z}{x}\omega^{\frac{k+1-2j}{2}}\right)t_k(z)t_1(x). \tag{6.4}$$

Произведение (6.4) имеет динамические полюса в точках $z = x\omega^{\pm\frac{k+1}{2}}$, и вычеты в этих полюсах пропорциональны току $t_{k+1}(x)$

$$\operatorname*{Res}_{z=x\omega^{\pm(k+1)/2}}\prod_{j=1}^{k-1} f^{-1}\left(\frac{z}{x}\omega^{\frac{k+1-2j}{2}}\right)t_k(z)t_1(x) = \pm x\omega^{-1\pm\frac{k+1}{2}}t_{k+1}(x\omega^{\pm\frac{k}{2}})\operatorname*{Res}_{w=\omega} f(w). \tag{6.5}$$

Дополнительный множитель в (6.1) упрощает аналитические свойства функции $J_{k,N+1,a}(z; X)$. Единственные динамические полюса находятся в точках $z = x_i\omega^{\pm(k+1)/2}$. Выражение (6.5) позволяет вычислить вычеты в этих полюсах:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=x_i\omega^{(k+1)/2}} J_{k,N+1,a}(z; X) &= x_i\omega^{\frac{k+1}{2}}R^{+}_{N,i}(X)\cdot J_{k+1,N,a}(x_i\omega^{\frac{k}{2}}; \hat{X}_i), \\ \operatorname*{Res}_{z=x_i\omega^{-(k+1)/2}} J_{k,N+1,a}(z; X) &= -x_i\omega^{-\frac{k+1}{2}}R^{-}_{N,i}(X)\cdot J_{k+1,N,a}(x_i\omega^{-\frac{k}{2}}; \hat{X}_i), \end{aligned} \tag{6.6}$$

где

$$R^{\pm}_{N,i}(X) = \frac{(\omega-\zeta)(1-\zeta^{-1})}{\omega-1}\prod_{j\in\hat{I}_i} f\left(\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{\pm 1}\right). \tag{6.7}$$

В функции $J_{k,N+1,a}(z;X)$, как аналитической функции от переменной z, можно выделить вклад от кинематических полюсов

$$\begin{aligned} J_{k,N+1,a}(z;X) &= J^{\infty}_{k,N+1,a}(z;X) \\ &+ \sum_{i\in I} \frac{x_i\omega^{\frac{k+1}{2}}}{z - x_i\omega^{\frac{k+1}{2}}}\, R^{+}_{N,i}(X) J_{k+1,N,a}(x_i\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_i) \\ &- \sum_{i\in I} \frac{x_i\omega^{-\frac{k+1}{2}}}{z - x_i\omega^{-\frac{k+1}{2}}}\, R^{-}_{N,i}(X) J_{k+1,N,a}(x_i\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_i). \end{aligned} \tag{6.8}$$

где функция $J^{\infty}_{k,N+1,a}(z;X)$ является регулярной везде, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$. Заметим, что сумма по вычетам ведет себя как $O(z^{-1})$ при $z \to \infty$. Поэтому, асимптотическое поведение функции (6.1) как функции переменной z определяется $J^{\infty}_{k,N+1,a}(z;X)$.

Для того, чтоб зафиксировать эту функцию, необходимо вычислить $J_{k,N+1,a}(0;X)$ и $J_{k,N+1,a}(\infty;X)$. Так как $f(0) = f(\infty) = 1$, можно получить

$$J_{k,N+1,a}(0;X) = J_{k,N+1,a}(\infty;X) = J_{k,1,a}(0)\cdot J_{1,N,a}(x_1;\hat{X}_1) \tag{6.9}$$

и

$$J_{k,1,a}(0) = J_{k,1,a}(\infty) = K_a \equiv \sum_{1\le s_1<\cdots<s_n\le k} \omega^{\langle a, H_{s_1\ldots s_n}\rangle} \tag{6.10}$$

Теорема 4 *Рекурсионные соотношения*

$$\begin{aligned} J_{k,N+1,a}(z;X) &= K_a J_{1,N+1,a}(X) \\ &+ \sum_{i\in I} \frac{x_i\omega^{\frac{k+1}{2}}}{z - x_i\omega^{\frac{k+1}{2}}}\, R^{+}_{N,i}(X) J_{k+1,N,a}(x_i\omega^{\frac{k}{2}};\hat{X}_i) \\ &- \sum_{i\in I} \frac{x_i\omega^{-\frac{k+1}{2}}}{z - x_i\omega^{-\frac{k+1}{2}}}\, R^{-}_{N,i}(X) J_{k+1,N,a}(x_i\omega^{-\frac{k}{2}};\hat{X}_i), \end{aligned} \tag{6.11}$$

с начальными условиями

$$J_{k,0,a} = 0, \qquad J_{k,1,a}(z) = K_a \tag{6.12}$$

и свойством

$$J_{L,N+1,a}(z;X) = J_{1,N,a}(X) \tag{6.13}$$

полностью определяют набор функций $J_{k,N,a}$.

Здесь функции $R^{\pm}_{N,i}(X)$ *определены в (6.7) и множитель* K_a *определен в (6.10).*

Заметим, что вследствие (6.5) любая функция $\langle t_{n_N}(x_N)\ldots t_{n_1}(x_1)\rangle_a$ с произвольными n_i может быть получена их функций (6.1) путем взятия вычетов в соответствующих динамических полюсах.

Теперь рассмотрим отражательное соотношение для экспоненциальных полей. Пусть $\mathcal{W}$ – это группа Вейля алгебры Ли $A^{(1)}_{L-1}$. Отражательное свойство имеет вид

$$V_a(x) = V_{\hat{s}a}(x) \qquad \forall \hat{s} \in \mathcal{W}. \tag{6.14}$$

Это свойство является следствием теоремы

Теорема 5 *Функции $J^a_{k,N}$ симметричны по отношению к группе Вейля $\mathcal{W}$ алгебры Ли $A^{(1)}_{L-1}$*

$$J_{k,N,a}(z;X) = J_{k,N,\hat{s}a}(z,X) \qquad \forall \hat{s} \in \mathcal{W}. \tag{6.15}$$

Докажем эту теорему. Параметр a входит в рекурсионные соотношения (6.11), (6.12) только в функции K_a. Поэтому, достаточно доказать отражательное свойство только для этих функций. Кроме того, группа Вейля порождается простыми отражениями $\hat{s}_i \equiv \hat{s}_{\alpha_i}$. Поэтому, достаточно доказать отражательное свойство по отношению к действию $\hat{s}_i$, то есть

$$K_a = K_{\hat{s}_i a}.$$

Легко проверить, что

$$\hat{s}_i H_s = \begin{cases} H_{s+1}, & \text{если } s = i, \\ H_{s-1}, & \text{если } s = i+1, \\ H_s, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \hat{s}_i a, H_{s_1 \dots s_k \dots s_n} \rangle &= \langle a, H_{s_1 \dots, s_k+1, \dots s_n} \rangle, && \text{если } s_k = i,\ s_{k+1} > i+1, \\ \langle \hat{s}_i a, H_{s_1 \dots s_k \dots s_n} \rangle &= \langle a, H_{s_1 \dots, s_k-1, \dots s_n} \rangle, && \text{если } s_k = i+1,\ s_{k-1} < i, \\ \langle \hat{s}_i a, H_{s_1 \dots s_n} \rangle &= \langle a, H_{s_1 \dots s_n} \rangle, && \text{иначе.} \end{aligned}$$

Следовательно, под действием простого отражения, каждый элемент из набора $\{\langle a, H_{s_1 \dots s_n} \rangle\}$ функций переменной a отображается в другой элемент этого–же набора. Так как сумма в выражении (6.10) идет по всему набору, функции K_a инвариантны относительно простых Вейлевских отражений.

Список литературы

[1] A. Polyakov, Quantum geometry of bosonic strings. Phys.Lett. B103 (1981) 207.

[2] J. Distler and H. Kawai, Conformal field theory and 2-D quantum gravity or who's afraid of Joseph Liouville? Nucl.Phys. B231 (1989) 509,

F. David, Conformal field theories coupled to 2-D gravity in the conformal gauge. Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 1651.

[3] A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory. Nucl.Phys. B241 (1984) 333.

[4] Al. Zamolodchikov, Three-point function in the Minimal Liouville Gravity. Theor.Math.Phys. 142 (2005) 183 hep-th/0505063.

[5] A. Belavin, Al. Zamolodchikov, Moduli integrals, ground ring and four-point function in minimal Liouville gravity. Theor.Math.Phys. 147 (2006) 729, hep-th/0510214, p 16.

[6] B. Lian and G. Zuckerman, New Selection Rules And Physical States in 2D Gravity. Phys. Lett. B254 (1991) 417.

[7] B. Feigin, D. Fuchs, Verma modules over the Virasoro algebra. Lectures Notes in Math. 1060 Springer, Berlin, (1984) 230.

[8] H. Kanno and M. Sarmadi. BRST cohomology ring in 2D gravity coupled to minimal models. Int. J. Mod. Phys. A9 (1994) 39 hep-th/9207078 .

[9] A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov. Structure Constants and Conformal Bootstrap in Liouville Field Theory. Nucl.Phys. B477 (1996) 577 hep-th/9506136 .

[10] C. Imbimbo, S. Mahapatra and S. Mukhi. Construction of physical states of non-trivial ghost number in $c < 1$ string theory. Nucl.Phys. B375 (1992) 399.

[11] I. Frenkel, H. Garland, G. Zuckerman, Semi-infinite cohomology and string theory. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 83 (1986) 8442.

[12] L. Goncharova, Cohomologies of Lie algebras of formal vector fields on the line. Funkts. Anal. Prilozhen. 7:2 (1973) 6

[13] M. Bauer, P. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber, Covariant differential equations and singular vectors in Virasoro representations. Nucl. Phys. B 362, (1991), 515.

[14] E. Frenkel. Determinant formulas for the free field representations of the Virasoro and Kac-Moody algebras. Phys. Lett. 286B (1992) 71.

[15] P. Griffits and J. Harris. Principles of algebraic geometry. Wiley-Interscience Publication (1994).

[16] B. Lian and G. Zuckerman, New perspectives on the BRST-algebraic structure of string theory. Comm. Math. Phys. 154:3 (1993), 613 hep-th/9211072 .

[17] Al. Zamolodchikov. Higher equations of motion in Liouville field theory. Int.J.Mod.Phys. A19S2 (2004) 510, hep-th/0312279.

Часть II.

[18] S. Lukyanov, Commun. Math. Phys. 167 (1995) 183.

[19] S. Lukyanov, Mod. Phys. Lett. A12 (1997) 2543.

[20] S. Lukyanov, Phys. Lett. B408 (1997) 192.

[21] H. Babujian and M. Karowski, Phys. Lett. B471 (1999) 53.

[22] H. Babujian and M. Karowski, J. Phys. A35 (2002) 9081.

[23] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B477 (1996) 577

[24] Mikhailov, A.V., Olshanetskii, M.A. and Perelomov, A.M. Commun. Math. Phys. 79, 473-488 (1981)

[25] Arinshtein, A.E., Fateev, V.A. and Zamolodchikov, A.B. Phys. Lett. B87, 389-392 (1979)

[26] M. R. Niedermaier, preprint DESY-92-105 (1992).

[27] M. R. Niedermaier, Nucl. Phys. B424 (1994) 184.