

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
КАФЕДРА ПРОБЛЕМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. ЛАНДАУ РАН

Тихонов Константин Сергеевич

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЭФФЕКТ БЛИЗОСТИ В SINIS-ПЕРЕХОДЕ

Магистерская диссертация

научный руководитель:
д.ф.-м.н. Фейгельман М.В.

Москва — 2009 г

Содержание

Введение. Сверхпроводящие гибридные структуры.	2
I. Решение нестационарных уравнений Узаделя.	5
А. Вычисление аномальных функций.	6
В. Вычисление функции распределения	8
1. Эффективная температура	8
2. Неравновесные поправки.	10
II. Вычисление электрического тока.	15
А. Ток через SINIS контакт	15
1. Равновесный ток.	15
2. Неравновесный ток.	18
В. Туннельный ток в пробник	20
III. Гистерезис в SNS-переходах.	21
А. RSJ-модель+перегрев электронов в нормальной области	22
В. Эффективная емкость	23
IV. Обсуждение результатов.	24
Список литературы	25

Список обозначений:

- $G_0 = \frac{2e^2}{h} \approx (12.9 \text{ кОм})^{-1}$ – квант кондактанса;
 T – эффективная температура электронов в нормальной области;
 L – длина нормальной области;
 \mathcal{V} – объем нормальной области;
 $R_N = G_N^{-1}$ – сопротивление нормальной области;
 $R_B = G_B^{-1}$ – сопротивление одного SIN барьера в нормальном состоянии;
 $\nu_0 = \frac{m p_F}{2\pi^2 \hbar^3}$ – нормальная плотность состояний бесспинового металла;
 $R = 2R_B$ – сопротивление SINIS перехода в нормальном состоянии;
 $\tau_D = \frac{L^2}{D}$ – время диффузии электрона на длину L ;
 $g = (G_0 R_N)^{-1} = 2\pi\nu E_{Th} \mathcal{V}$ – безразмерный кондактанс провода;
 τ_{out} – время электрон-электронного рассеяния в нормальной области;
 $\nu_{BCS}(\epsilon) = \frac{|\epsilon| \theta(|\epsilon| - \Delta)}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}}$ – сверхпроводящая плотность состояний;
 $\gamma = (\tau_{out} E_{Th})^{-1}$, $E_{Th} = \hbar \tau_D^{-1}$, $r = \frac{R_B}{R_N}$;
 $\vartheta_3(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$, $\vartheta_4(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 x}$.

Введение. Сверхпроводящие гибридные структуры.

Сверхпроводящими гибридными структурами называются контакты, составленные из разнородных металлов, некоторые из которых являются сверхпроводниками при данной температуре, а некоторые остаются нормальными. Интерес к таким структурам существует уже несколько десятилетий. В связи с развитием экспериментальной техники становится доступным изучение сопутствующих явлений в новых, недоступных ранее режимах.

Вблизи контакта нормального металла со сверхпроводником, нормальный металл приобретает частично сверхпроводящие свойства, в то время как сверхпроводящие корреляции в сверхпроводнике несколько ослабляются. Это явление называется эффектом близости. В грязном случае ($\Delta\tau \ll 1$) характерная длина, на которой сверхпроводящие корреляции затухают в нормальной области, зависит от энергии электрона и дырки, отсчитанной от Ферми-поверхности, и равна $\xi_\epsilon = \min(\sqrt{\hbar D/\epsilon}, L_\phi)$, где коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}v_F l$ и L_ϕ – характерная длина процессов сбоя фазы. При $\epsilon \rightarrow 0$ длина когерентности ξ_ϵ , фактически, может быть макроскопической даже в диффузном образце (например, $10\mu m$ [1]).

Одним из последствий эффекта близости является способность нормального металла проводить бездиссипативный сверхпроводящий ток (ток электрон-дырочных пар). В простейшем случае случае контакта нормальный металл/сверхпроводник элементарным процессом переноса заряда является Андреевское отражение, конвертирующее электрон с энергией меньше сверхпроводящей щели в сверхпроводящем берегу Δ , подходящий к границе, в отраженную дырку, таким образом приводя к переносу заряда, равного $2e$, где e - заряд электрона. Перенос заряда между сверхпроводниками, между которым создана постоянная разность потенциалов, устроен более сложным образом и происходит за счет многократных Андреевских отражений, сопровождаемых переносом тепла.

Если между сверхпроводящими берегами SNS - перехода отсутствует напряжение и поддерживается стационарная разность фаз ϕ (создаваемая магнитным полем в геометрии SQUID [1]), ток через контакт состоит только из сверхпроводящей компоненты и зависит от ϕ с периодом 2π . Конкретный вид ток-фазовой характеристики чувствителен ко многим параметрам (например, параметры SN - границ или концентрация магнитных примесей). Например, в случае длинного провода ($\xi_\Delta \ll L$), когда электроны в нормальной проволоке находятся в тепловом равновесии с нулевой температурой, границы идеальны а сопротивление структуры равно R , справедливо соотношение: $eIR = E_{Th} \sum_{n=1}^{\infty} i_n \sin n\phi$, где $i_n = \frac{33(-1)^n}{4n^2-1}$ [2]. Здесь энергия Таулеса определена как $E_{Th} = \hbar\tau_D^{-1}$, а τ_D - время диффузии электрона на длину проволоки L , то есть $\tau_D = \frac{L^2}{D}$. Такой результат получается в следующих приближениях (ограничивающих в дальнейшем область нашего интереса):

- Малость обратного эффект близости (выражающегося подавлением сверхпроводящего параметра порядка в берегах из-за контакта с нормальным металлом). Это предположение оправдано, если отношение кондактансов нормальной проволоки и сверхпроводящего резервуара велико.
- Отсутствие электрон-электронного взаимодействия в куперовском канале в нормальном металле, так что в этой области $\Delta = 0$.

В этих условиях сверхпроводящий параметр порядка как функция координаты имеет вид прямоугольной потенциальной ямы. Стационарный сверхпроводящий ток может быть объяснен в терминах Андреевских состояний (локализованных состояний квазичастиц в этой яме). Сверхток зависит как от как от положения этих уровней E_n , так и от их заселенности f_n , что дает возможность управлять током через переход, пропуская ток в перпендикулярном направлении [3].

Как известно, положение Андреевских уровней зависит от разности фаз ϕ сверхпроводящего параметра порядка между сверхпроводящими берегами: $E = E_n(\phi)$. Таким образом, энергия электронной системы приобретает зависимость от ϕ : $E(\phi) = \sum_n E_n(\phi)f_n$, что в равновесии дает для электрического тока такое выражение: $I = \frac{2e}{\hbar} \sum_n \frac{dE_n}{d\phi} f_n$. Это выражение, которое в присутствии примесей нужно усреднить по беспорядку, дает ток-фазовую характеристику SNS-перехода.

При приложении к переходу постоянной разности потенциалов eV возникает зависимость $\phi(t) = 2eVt/\hbar$ и сверхпроводящий ток, который в отсутствие напряжения был периодической функцией ϕ , начинает осциллировать со временем на фундаментальной частоте $\omega_J = 2eV/\hbar$, вообще говоря, со всеми ее гармониками $\omega_n = n\omega_J$. При малых напряжениях электрический ток был вычислен Аргаманом в картине Андреевских уровней [4].

Другое упрощение возникает, если напряжение велико $V \gg E_{Th}$, когда эффектами когерентности между берегами можно пренебречь и вычислить квазичастичный ток, предполагая, что в середине проволоки металл является нормальным. Для грязного металла это было сделано в работе [5]. Авторы вычислили функцию распределения электронов во всей области $-\Delta < \epsilon < \Delta$, которая формируется в результате многократных Андреевских отражений, объяснив экспериментально наблюдаемую структуру вольт-амперной характеристики SNS-перехода с пиками дифференциальной проводимости на напряжениях $V = \frac{2\Delta}{n}$.

Задача о вольт-амперной характеристике $I(V)$ (вычисление тока в условиях заданного напряжения) с учетом эффектов когерентности на фоне неравновесного распределения электронов для случая короткого ($L \ll \xi_\Delta$) SINIS-перехода была рассмотрена в [6]. Авторами было отмечено, что из-за малой прозрачности границ такого перехода эффекты, связанные с неравновесным транспортом, могут быть особенно существенны.

В этой работе мы рассматриваем эффекты, возникающие в режиме слабого эффекта близости с учетом когерентности и неравновесности электронов в нормальной области. Для описания такой ситуации в общем случае удобно использовать неравновесную технику Келдыша, использующую пропагаторы, упорядоченные по времени на контуре $t = (-\infty + i0, -\infty - i0)$. Для явлений сверхпроводимости этот подход был сформулирован в работе Ларкина и Овчинникова [7]. В квазиклассическом приближении ($\Delta \ll E_F$) и грязном пределе ($\Delta\tau \ll 1$) можно вывести уравнения диффузного типа, описывающие сверхпроводящие корреляции, - так называемые уравнения Узаделя. Основным объектом такой теории является Гриновская функция в пространстве Келдыша \times Намбу:

$$\check{G}(r, t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \hat{G}^R(r, t_1, t_2) & \hat{G}^K(r, t_1, t_2) \\ 0 & \hat{G}^A(r, t_1, t_2) \end{pmatrix},$$

где $\hat{G}^{R,A,K}(r, t_1, t_2)$ - матрицы в пространстве Намбу, каждая из которых содержит в качестве элементов четыре коррелятора, два из которых - нормальные, т.е. присутствующие в нормальном состоянии металла, и два - аномальные, т.е. присутствующие благодаря взаимодействию в куперовском канале или наведенные близостью со сверхпроводником. Заметим, что введенная так функция Грина зависит только от одной пространственной координаты, так как использованное при выводе уравнений Узаделя квазиклассическое приближение подразумевает взятие предела $r_1 \rightarrow r_2$. Удобно перейти к координатам центра масс по времени, вводя $t = (t_1 + t_2)/2$, $\tau = t_1 - t_2$, тогда уравнение Узаделя примет вид:

$$-D\partial_x(\check{G} \circ \partial_x \check{G}) + \partial_\tau[\check{\sigma}^3, \check{G}] + \frac{1}{2}\partial_t\{\check{\sigma}^3, \check{G}\} + i\varphi_- \check{G} = \check{I} \quad (1)$$

Здесь и далее мы используем единицы измерения, в которых $\hbar = e = 1$, восстанавливая размерность только в окончательных формулах. Символическое обозначение для операции свертки по времени определено как $(f \circ g)(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t)g(t, t_2)dt$. Кроме этого, введены матрицы $\check{\sigma}^3 = \hat{1}\hat{\tau}^3$ и $\check{I} = -i(\check{\Sigma}_{in} \circ \check{G} - \check{G} \circ \check{\Sigma}_{in})$, где $\check{\Sigma}_{in}$ - собственно-энергетическая часть (без чисто упругого вклада). Зависящий от времени электрический потенциал $\varphi(t)$ входит в уравнение в виде $\varphi_-(t_1, t_2) = \varphi(t_1) - \varphi(t_2)$. Он должен быть определен самосогласованно, с учетом условия электронейтральности [8]

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{4} \text{tr} \hat{G}^K(t, t). \quad (2)$$

Это условие является следствием сохранения локальной электронной плотности в квазиклассическом приближении (радиус экранировки - порядка межатомных расстояний и пренебрежимо мал по сравнению со сверхпроводящей длиной когерентности). Иначе говоря, оно обеспечивает сохранение электрического тока: $\partial_x j = 0$. Как мы увидим, если электрический потенциал не зависит от времени, то спектральные уравнения (уравнения на R, A компоненты функции \check{G}) становятся независимыми от кинетического уравнения (уравнения на K компоненту функции \check{G}). В противном случае они образуют систему уравнений, связанных условием самосогласования (2).

Следующее упрощение связано с тем, что квазиклассическая Гриновская функция \check{G} удовлетворяет условию нормировки $\check{G} \circ \check{G} = \hat{1}\delta(t_1 - t_2)$ и допускает представление в виде: $\hat{G}^K = \hat{G}^R \circ \hat{h} - \hat{h} \circ \hat{G}^A$, где \hat{h} - обобщенная функция распределения, которая имеет только две независимых компоненты и может быть выбрана диагональной [9]: $\hat{h} = h_0\hat{\tau}^0 + h_3\hat{\tau}^3$. В тепловом равновесии с температурой T имеем: $h_0 = -\frac{iT}{\sinh \pi\tau T}$ и $h_3 = 0$.

Для более явного представления свертки, удобно перейти к Вигнеровскому представлению по переменным τ, t , то есть написать $\check{G}(\tau, t) = \int \check{G}(\epsilon, t) e^{-i\epsilon\tau} \frac{d\epsilon}{2\pi}$. Для свертки функций $f(\epsilon, t) = e^{-i\omega_1 t} f(\epsilon)$, $g(\epsilon, t) = e^{-i\omega_2 t} g(\epsilon)$ в этом представлении, получим:

$$(f \circ g)(\epsilon, t) = e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} f(\epsilon + \frac{\omega_2}{2}) g(\epsilon - \frac{\omega_1}{2}).$$

Нашей целью будет вычисление \hat{G}^R , \hat{G}^A , \hat{G}^K для структуры SINIS и нахождение электрического тока. Он выражается через Келдышевскую компоненту матричного тока $\check{j} = \check{G} \circ \nabla \check{G}$ таким образом:

$$I(t) = \frac{\pi\sigma_N S}{4} \text{tr} \hat{\tau}^3 \check{j}^K(t, t), \quad (3)$$

где σ_N - проводимость металла в нормальном состоянии и S - площадь SIN -контакта (левый и правый барьеры в дальнейшем предполагаются идентичными).

Уравнения Узаделя (1) содержат в качестве своих компонент уравнения на \hat{G}^R , \hat{G}^A , определяющие спектральные свойства электронной системы

$$-D\partial_x(\hat{G}^R \circ \partial_x \hat{G}^R) + \partial_\tau[\hat{\tau}^3, \hat{G}^R] + \frac{1}{2}\partial_t\{\hat{\tau}^3, \hat{G}^R\} + i\varphi_- \hat{G}^R = \hat{I}^R \quad (4)$$

и уравнения на \hat{G}^K , написав которые через \hat{h} , получим кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned}
& -D \left[\partial_x (\partial_x \hat{h} - \hat{G}^R \circ \partial_x \hat{h} \circ \hat{G}^A) + (\hat{j}^R \circ \partial_x \hat{h} - \partial_x \hat{h} \circ \hat{j}^A) \right] = \\
& = \hat{I}_{St} - (\hat{G}_p^R \circ \partial_t \hat{h} + i \hat{G}^R \varphi_- \hat{h}) + (\partial_t \hat{h} \circ \hat{G}_p^A + i \varphi_- \hat{h} \circ \hat{G}^A),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\hat{G}_p^{R(A)} = \frac{1}{2} \left\{ \hat{G}^{R(A)}, \hat{\tau}^3 \right\}, \quad \hat{I}_{St} = -i \left(\hat{G}^R \circ \hat{\sigma} - \hat{\sigma} \circ \hat{G}^A \right), \quad \hat{\sigma} = \hat{\Sigma}_{in}^R \circ \hat{h} - \hat{h} \circ \hat{\Sigma}_{in}^A - \hat{\Sigma}_{in}^K.$$

В равновесии $\sigma = 0$ и интеграл столкновений I_{St} зануляется.

Матричное уравнение Узаделя должно быть дополнено граничными условиями на границах нормальный металл-сверхпроводник. Если граница идеальна, то граничные условия сводятся к требованию непрерывности функции Грина, но вообще говоря, квазиклассическая функция Грина на границе, имеющей неоднородности на атомных масштабах разрывна, и граничные условия требуют специального рассмотрения. Как было показано в работе [10], они имеют вид: $2R_B S \sigma_N \check{j}_{l,r} = [\check{G}_l \circ, \check{G}_r]$. Здесь R_B —сопротивление барьера в нормальном состоянии, S — площадь контакта. Индексы l, r относятся к левой и правой сторонам поверхности. Граничные условия в такой форме автоматически гарантируют сохранение тока и применимы при условии $G_N R_B \gg \frac{L}{L}$, где G_N —контактанс нормальной проволоки. Расписывая явно это граничное условие, для спектральных функций имеем:

$$2R_B S \sigma_N \check{j}_i^R = [\hat{G}_l^R \circ, \hat{G}_r^R]. \tag{6}$$

Для функции распределения:

$$2R_B S \sigma_N \left(\partial_x \hat{h}_l - \hat{G}_l^R \circ \partial_x \hat{h}_l \circ \hat{G}_l^A \right) = \left(\hat{G}_l^R \circ \hat{u} - \hat{u} \circ \hat{G}_l^A \right), \tag{7}$$

где $\hat{u} = \hat{G}_r^R \circ \delta \hat{h} - \delta \hat{h} \circ \hat{G}_r^A$, $\delta \hat{h} = \hat{h}_r - \hat{h}_l$.

Длину удобно измерять в единицах длины провода L , так что сверхпроводящие резервуары расположены в точках $x = \pm 1/2$.

I. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ УЗАДЕЛЯ.

Если разность фаз $\phi(t)$ между сверхпроводящими берегами зависит от времени, задача становится нестационарной ($\partial_t \check{G} \neq 0$) и довольно сложна. Функция Грина в таком случае имеет вид: $\check{G} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{G}_n e^{i\omega n}$, где ω —некоторая фундаментальная частота, а уравнения Узаделя связывают разные гармоники \check{G}_n между собой (член $\check{G} \circ \partial_x \check{G}$). Полное решение получающейся системы нелинейных уравнений доступно только численно. В работе [11] численно решалось уравнение Узаделя для не слишком малых постоянных напряжений (количество соответствующих уравнений растет, как Δ^2/V^2 , что ограничивает применимость метода при малых V). Однако, авторы по неясным причинам пренебрегли членом с электрическим потенциалом в уравнении Узаделя (1), что, по-видимому, ограничивает область применимости результатов случаем высоких температур $T \gg \min(E_{Th}, \Delta)$.

В дальнейшем нам понадобятся функции Грина сверхпроводящих резервуаров, котрые могут быть получены калибровочным преобразованием: $\check{G}_{l,r}(t_1, t_2) = \check{S}_{l,r}(t_1) \check{G}_{BCS}(t_1, t_2) \check{S}_{l,r}^+(t_2)$, где $\check{G}_{BCS}^{R(A)} = (g_S \hat{\tau}^3 + f_S \hat{\tau}^1)^{R(A)}$, $\check{G}_{BCS}^K = \tanh(\frac{\epsilon}{2T_S}) \left(\hat{G}_{BCS}^R - \hat{G}_{BCS}^A \right)$ и $\check{S}_{l,r}(t) = \exp(\pm i\phi(t)/4\hat{\tau}^3) \hat{1}$. Простое вычисление дает для запаздывающей функции Грина (если характерные частоты $\omega \ll \Delta$):

$$\hat{G}_{l,r}^R(t, \epsilon) = \begin{pmatrix} g_S^R(\epsilon) & e^{\mp i\phi(t)/2} f_S^R(\epsilon) \\ e^{\pm i\phi(t)/2} f_S^R(\epsilon) & -g_S^R(\epsilon) \end{pmatrix}$$

Если напряжение V на переходе постоянно (так что $\phi(t) = 2Vt$), то для функций распределения имеем:

$$\hat{h}_{l,r}(\epsilon) = \begin{pmatrix} \tanh(\frac{\epsilon \mp V/2}{2T_S}) & 0 \\ 0 & \tanh(\frac{\epsilon \pm V/2}{2T_S}) \end{pmatrix}.$$

А. Вычисление аномальных функций.

В отсутствие неупругих процессов, сверхпроводящая длина когерентности при малых энергиях становится ничем не ограниченной и может превысить размеры системы. А в таком случае аномальные функции Грина при низких энергиях не малы, даже если параметр r велик, что формально приводит к тому, что минимум не закрывается при сколь угодно малом отношении R_N/R_B . Однако, в любой электронной системе существует внутренний механизм, ограничивающий длину когерентности - процессы неупругой релаксации, вызванные электрон-электронными столкновениями. Частота таких процессов, обезразмеренная временем диффузии, в дальнейшем обозначается $\gamma = \tau_D/\tau_{out}$. Величина τ_{out} - электрон-электронное время рассеяния. Оно определяется собственно-энергетической частью электрон-электронного взаимодействия и равно [12] $\tau_{out}^{-1} = \frac{T}{6\pi\nu VE_{Th}}$ (та же величина возникает в формализме кинетического уравнения). В пределе $\gamma r \gg 1$, который мы будем рассматривать в дальнейшем, эффект близости является слабым во всем диапазоне энергий и может быть учтен как малая поправка к нормальному состоянию металла. Тогда наиболее существенными оказываются первые временные гармоники функции Грина и задача может быть решена аналитически. Впервые подобная система рассматривалась Асламазовым, Ларкиным и Овчинниковым в работе [13], где были получены общие формулы для сверхтока через контакт в первом исчезающем порядке по $1/r$, применимые как в баллистическом, так и в диффузном случаях и выраженные через соответствующие пропагаторы. Здесь мы выводим результаты для диффузного случая, приводя их в более явном виде, а также вычисляем неравновесные поправки к току. Как мы покажем, они оказываются основным вкладом в переменный ток при большой эффективной температуре электронов в проволоке, когда равновесные вклады экспоненциально подавлены.

Мы будем считать, что сверхпроводящая щель в берегах Δ - самый большой энергетический масштаб в задаче. В этом случае можно положить $f_S^{R(A)} = 1$, $g_S^{R(A)} = 0$.

Начнем с упрощения спектральных уравнений в рассматриваемом пределе. Параметризуя опережающую функцию Грина следующим образом:

$$\hat{G}^R = \begin{pmatrix} 1 - g_1^R & f_1^R \\ f_2^R & -(1 - g_2^R) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

получим уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f_{1,2}^R + \kappa^2(\epsilon) f_{1,2}^R &= 0, \\ \partial_x f_1^R|_{x=\pm\frac{1}{2}} &= \pm r^{-1} e^{\pm i\phi(t)/2}, \\ \partial_x f_2^R|_{x=\pm\frac{1}{2}} &= \pm r^{-1} e^{\mp i\phi(t)/2} \end{aligned} \quad (9)$$

с комплексным волновым вектором $\kappa(\epsilon) = \sqrt{2i\epsilon/E_{Th} - \gamma}$. Уравнения (9) могут быть легко решены:

$$\begin{aligned} f_1^R(\epsilon, x, t) &= v(\epsilon) \left[e^{i\phi(t)/2} \cos \kappa(x + 1/2) + e^{-i\phi(t)/2} \cos \kappa(x - 1/2) \right], \\ f_2^R(\epsilon, x, t) &= v(\epsilon) \left[e^{-i\phi(t)/2} \cos \kappa(x + 1/2) + e^{i\phi(t)/2} \cos \kappa(x - 1/2) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $v(\epsilon) = -\frac{1}{r} \frac{1}{\kappa \sin \kappa}$. Опережающие корреляторы определяются фундаментальной симметрией [8]: $\hat{G}^R(1, 1') = \hat{\tau}^3 \left(\hat{G}^A(1', 1) \right)^+ \hat{\tau}^3$, так что $f_{1,2}^R(\epsilon, x, t) = f_{1,2}^R(-\epsilon, x, t)$. У правого контакта аномальные функции равны:

$$f_{1,2}^R(x = \frac{1}{2}) = u(\epsilon) e^{\pm i\phi(t)/2} + v(\epsilon) e^{\mp i\phi(t)/2}, \quad (10)$$

где $u(\epsilon) = -\frac{1}{r} \frac{\cos \kappa}{\kappa \sin \kappa}$. Отметим, что аномальная функция в точке $x = 1/2$ является суммой двух вкладов, один из которых (пропорциональный $u(\epsilon)$) происходит от правого резервуара и спадает с энергией относительно медленно, как $\epsilon^{-1/2}$, а другой (пропорциональный $v(\epsilon)$) происходит от левого резервуара и спадает с энергией гораздо быстрее, как $\epsilon^{-1/2} \exp(-\sqrt{\epsilon/E_{Th}})$. Впоследствии нам пригодится Фурье-преобразование функций $u(\epsilon)$, $v(\epsilon)$:

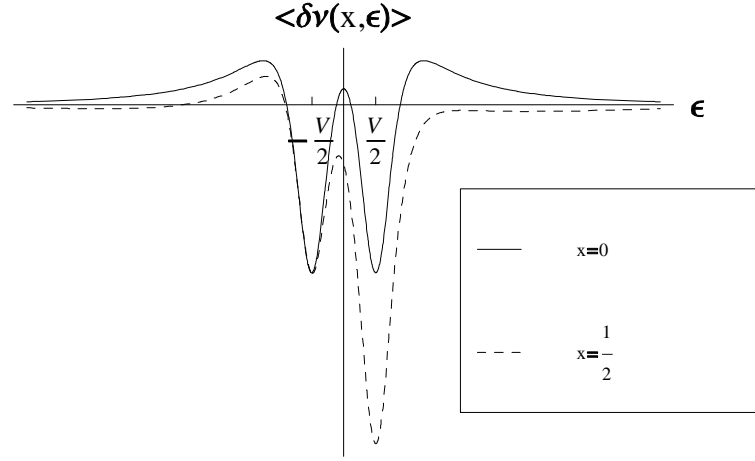


Рис. 1: Поправка к плотности состояний в нормальном металле

$$\bar{u}(\tau) = \frac{E_{Th}}{2r} \theta(\tau) e^{-\tau/2\tau_{out}} \vartheta_3\left(\frac{\tau E_{Th} \pi^2}{2}\right), \quad \bar{v}(\tau) = \frac{E_{Th}}{2r} \theta(\tau) e^{-\tau/2\tau_{out}} \vartheta_4\left(\frac{\tau E_{Th} \pi^2}{2}\right), \quad (11)$$

где $\vartheta_3(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$, $\vartheta_4(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 x}$. Функции $\vartheta_{3,4}(x)$ имеют следующие асимптотики:

$$\vartheta_3(x) = \begin{cases} 1, & x \rightarrow \infty, \\ \sqrt{\pi/x}, & x \rightarrow 0, \end{cases} \quad \vartheta_4(x) = \begin{cases} 1, & x \rightarrow \infty, \\ 2\sqrt{\pi/x} \exp(-\pi^2/4x), & x \rightarrow 0. \end{cases}$$

Диагональные компоненты запаздывающей и опережающей функций Грина, дающие поправку к плотности состояний, определяются условием нормировки Гриновской функции, которое дает:

$$g_1 = \frac{1}{2} f_1 \circ f_2, \quad g_2 = \frac{1}{2} f_2 \circ f_1,$$

Этот результат позволяет вычислить зависящую от времени плотность состояний (различную для электронов и дырок из-за наличия электрического поля), определяемую диагональной частью матрицы $\frac{1}{2}(\hat{G}^R(x, \epsilon, t) - \hat{G}^A(x, \epsilon, t))$, которая равна:

$$\hat{\nu}(\epsilon, x, t) = (1 + \delta\nu_3(x, \epsilon, t))\hat{\tau}_3 + \delta\nu_0(x, \epsilon, t)\hat{\tau}_0$$

При $V = const$ получаем: $\delta\nu_0(\epsilon, x, t) = \frac{1}{2}(\xi_1(\epsilon, x, t) - \xi_2(\epsilon, x, t))$, $\delta\nu_3(\epsilon, x, t) = \frac{1}{2}(\xi_1(\epsilon, x, t) + \xi_2(\epsilon, x, t))$ и для стационарной части ξ :

$$\begin{aligned} \xi_{1,0}(x, \epsilon) &= -\frac{1}{2r^2} \operatorname{Re} [\psi_L^2(x - 1/2, \epsilon + V/2) + \psi_R^2(x + 1/2, \epsilon - V/2)], \\ \xi_{2,0}(x, \epsilon) &= \xi_{1,0}(x, -\epsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\psi(x) = \frac{\cos \kappa(\epsilon)x}{\kappa(\epsilon) \sin \kappa(\epsilon)}$. Заметим, что $\psi_{L,R}(\epsilon = 0) \sim -\gamma^{-1}$, поэтому на энергиях, равных химическим потенциалам левого и правого резервуаров $\mu_{l,r} = \mp V/2$, плотность состояний подавлена, хотя и не обращается в ноль, как в случае с развитым эффектом близости (когда $\gamma r \lesssim 1$). На рисунке 1 построена энергетическая зависимость электронной плотности состояний (левая верхняя компонента $\langle \hat{\nu}(\epsilon, x, t) \rangle$, равная $\xi_{1,0}(x, \epsilon)$) в середине провода и у правого резервуара.

Теперь, после того как спектральные функции Грина вычислены, мы переходим к определению функции распределения электронов \hat{h} .

В. Вычисление функции распределения

В этом разделе мы обсуждаем вычисление функции распределения в нормальной проволоке в случае, когда к контакту приложено постоянное напряжение V .

1. Эффективная температура

Энергетическое распределение электронов в нормальной области SINIS-перехода формируется в результате нескольких процессов:

- Многократные Андреевские отражения (туннелирование Куперовских пар в сверхпроводник), приводящие к диффузии электронов в энергетическом пространстве от $\epsilon = -\Delta$ до $\epsilon = \Delta$.
- Туннелирование квазичастиц с энергиями $|\epsilon| > \Delta$ из нормальной области в сверхпроводники.
- Процессы электрон-электронной и электрон-фононной неупругой релаксации.

Рассмотрим их по отдельности.

Электрон-электронная релаксация. Электрон-электронные столкновения не изменяют суммарной энергии электронов, а приводят к ее перераспределению и, таким образом, локальной термализации. Поэтому электронная функция распределения близка к тепловой $\hat{h} = H(\epsilon)\hat{\tau}_0$ с $H(\epsilon) = \tanh(\frac{\epsilon}{2T})$ и некоторой эффективной температурой T . Вообще говоря, температура T зависит от координаты x . В случае SINIS-перехода эта зависимость слаба (не влияет на результат в рассматриваемом приближении), и мы пренебрегаем ей. В этом случае температура T может быть определена из условия энергетического баланса [14]:

$$2P_{cool}(T, V) + P_{e-ph}(T_{ph}, T) + I_A(V, T)V = 0, \quad (13)$$

где смысл членов, входящих в уравнение, объяснен ниже.

Андреевский тепловой ток. Электрон, приближающийся к границе нормальный металл-сверхпроводник, при низких энергиях не может протуннелировать в сверхпроводящую часть системы, так как в ее энергетическом спектре отсутствуют одночастичные низколежащие возбуждения. Перенос тока, тем не менее, возможен, если падающий электрон отразится в виде дырки, что приведет к переносу куперовской пары в сверхпроводник. Энергии электрона и отраженной дырки симметричны относительно ферми-уровня сверхпроводника, поэтому при нулевом напряжении этот процесс не приводит к переносу энергии и соответствующий ток I_A бездиссипативен. При конечном напряжении, однако, андреевский ток сопровождается переносом тепла в нормальную область с мощностью $I_A(V, T)V$. Андреевский ток вычислен в следующем разделе (см. формулу (29), которая воспроизводит результат Волкова [15]).

Квазичастичный ток. Электрон с энергией ϵ , которая превосходит $\Delta - V/2$, может протуннелировать непосредственно в сверхпроводник, давая вклад в ток квазичастиц. Такие процессы сопровождаются переносом тепла, что приводит к охлаждению нормальной области с мощностью $2P_{cool}$, где P_{cool} — мощность на одну SIN-границу, которая дается известным выражением:

$$P_{cool}(V, T) = \frac{1}{2R_B} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\epsilon - \frac{V}{2} \right) (H(\epsilon - V/2) - H_S(\epsilon)) \nu_{BCS}(\epsilon) d\epsilon.$$

Обратим внимание, что тепловой ток, в отличие от электрического, направлен симметрично по разные стороны нормальной области: квазичастичный ток через оба I барьера охлаждает систему, Андреевский - нагревает.

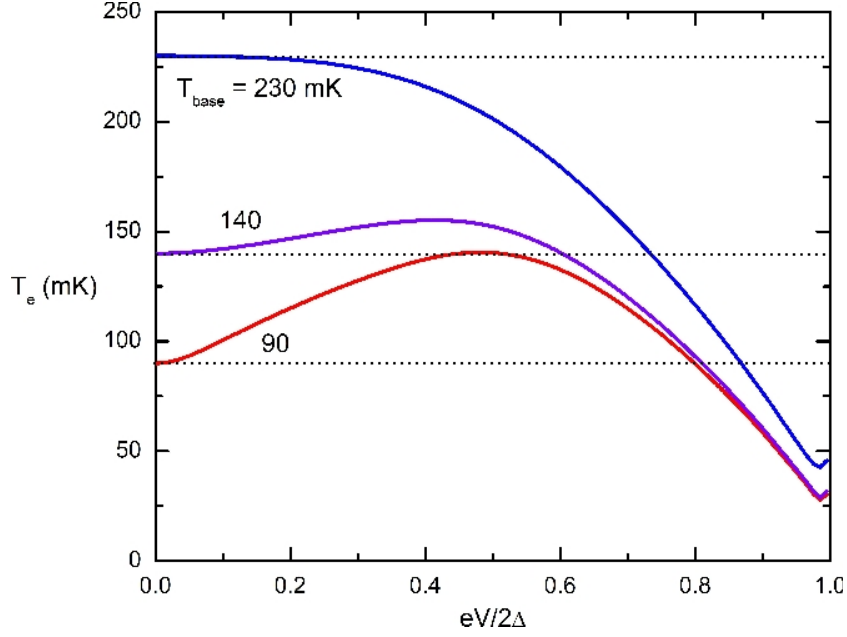


Рис. 2: Зависимость электронной температуры от напряжения для нескольких температур криостата (Rajauria, 2008)

Электрон-фононная релаксация. Частота электрон-фононных столкновений в грязном металле определяется величиной [16]:

$$\frac{1}{\tau_{ph}(T)} = T \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3, \quad (14)$$

$$\Theta = \left(\frac{\pi^2 \hbar^3 \nu \rho c_s^5}{6\alpha^2 n_{el} k_{Fl}} \right)^{1/3},$$

где $\alpha \sim 1.1$. В этой формуле: c_s - скорость звука, ρ - плотность материала и n_{el} - концентрация электронов проводимости. Для Θ можно написать оценку: $\Theta \approx \left(\frac{E_s^4}{E_F(k_{Fl})} \right)^{1/3}$, где $E_s = (\hbar^3 \rho c_s^5)^{1/4}$. Для меди, к примеру, $c_s = 3570$ м/с, $\rho = 8,92$ г/см³, и $E_s = 0,05$ эВ. Предполагая $k_{Fl} \sim 100$, получим оценку $\Theta \sim 50$ К. Как будет показано, благодаря большому значению этой величины, в интересующей нас ситуации (при гелиевых температурах и ниже) электрон-фононной релаксацией при решении кинетического уравнения можно пренебречь хотя она и важна при расчете эффективной температуры, так как обеспечивает баланс энергии в системе. Соответствующая мощность равна:

$$P_{e-ph}(T_{ph}, T) = \frac{\mathcal{E}(T_{ph})}{\tau_{ph}(T_{ph})} - \frac{\mathcal{E}(T)}{\tau_{ph}(T)},$$

где $\mathcal{E}(T) = \frac{\pi^2 \nu \mathcal{V} T^2}{6}$. Температура фононов T_{ph} обычно близка к температуре теплового резервуара.

В результате решения уравнения (13) относительно T получается зависимость температуры T от приложенного напряжения V . Такая процедура была проделана в работе [14]. Зависимость эффективной температуры от напряжения на переходе, полученная в этой работе, изображена на рисунке (2). Здесь мы считаем ее известной.

На фоне равновесного вклада в функцию распределения существует (малая в рассматриваемых условиях) неравновесная поправка. Перейдем к ее вычислению. Как мы увидим, функция распределения близка к тепловой, так что $h_3(x, \epsilon, t) \lesssim (\gamma r)^{-2}$ и $h_0(x, \epsilon, t) = H(\epsilon) + f(\epsilon, x, t)$, где $f \lesssim (\gamma r)^{-2}$.

2. *Неравновесные поправки.*

τ -приближение. В качестве первого приближения, мы будем предполагать, что кинетический интеграл можно рассматривать в τ -приближении: $\hat{I}_{St}\{\hat{h}\} = -\frac{2}{\tau_{out}} \left(\hat{h} - H(\epsilon)\hat{\tau}_0 \right)$. Это существенное упрощение позволяет вычислить функции распределения при произвольном соотношении остальных параметров. Кинетические уравнения во втором порядке по $(\gamma r)^{-1}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{Th}\partial_x^2 f - (\partial_t f + \tau_{out}^{-1}f) &= 0, \\ E_{Th}\partial_x^2 h_3 - (\partial_t h_3 + \tau_{out}^{-1}h_3 + i\varphi_- H) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что в эти уравнения входит зависящий от времени электрический потенциал. Как уже упоминалось, он должен быть определен самосогласованно. В рассматриваемом приближении, для φ из (2) получаем:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2} \int h_3(\epsilon, x, t) d\epsilon, \quad (16)$$

Заметим, что электрический потенциал мал по тому же параметру, что и неравновесные вклады в функцию распределения, что было использовано при записи уравнений (15).

Граничные условия на функции распределения можно рассматривать только на одном контакте (например, в точке $x = 1/2$), если учесть, что h_3 и f - нечетная и четная функция координаты x , соответственно. Рассматривая проекцию уравнений (7) на матрицы $\hat{\tau}_0$, $\hat{\tau}_3$ с нужной точностью, получим:

$$\begin{aligned} \partial_x f|_{x=\frac{1}{2}} &= J_0(\epsilon, t), \\ \partial_x h_3|_{x=\frac{1}{2}} &= J_3(\epsilon, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $J_{0,3}(\epsilon, t)$ определены таким образом:

$$\begin{aligned} J_0(\epsilon, t) &= \frac{1}{4r} \left[(f_1^R \circ e^{-iVt} H_D(\epsilon) + e^{iVt} H_D(\epsilon) \circ f_2^A) - (f_2^R \circ e^{iVt} H_D(\epsilon) + e^{-iVt} H_D(\epsilon) \circ f_1^A) \right], \\ J_3(\epsilon, t) &= \frac{1}{4r} \left[(f_1^R \circ e^{-iVt} H_D(\epsilon) + e^{iVt} H_D(\epsilon) \circ f_2^A) + (f_2^R \circ e^{iVt} H_D(\epsilon) + e^{-iVt} H_D(\epsilon) \circ f_1^A) \right] \end{aligned}$$

и $H_D(\epsilon) = \frac{1}{2} [H(\epsilon + V/2) - H(\epsilon - V/2)]$. Аномальные функции $f_{1,2}$ вычисляются в точке $x = 1/2$. Вычисление свертков в этих формулах дает:

$$J_{n=0,3}(\epsilon, t) = J_{n,0} + J_{n,1}e^{-2iVt} + J_{n,-1}e^{2iVt},$$

с гармониками:

$$\begin{aligned} J_{0,0}(\epsilon) &= \frac{1}{4r} [\alpha(\epsilon + V/2)H_D(\epsilon + V/2) - \alpha(\epsilon - V/2)H_D(\epsilon - V/2)], \\ J_{0,1}(\epsilon) &= \frac{1}{4r} [v(\epsilon + V/2)H_D(\epsilon - V/2) - v(-\epsilon + V/2)H_D(\epsilon + V/2)]; \\ J_{3,0}(\epsilon) &= \frac{1}{4r} [\alpha(\epsilon + V/2)H_D(\epsilon + V/2) + \alpha(\epsilon - V/2)H_D(\epsilon - V/2)], \\ J_{3,1}(\epsilon) &= \frac{1}{4r} [v(\epsilon + V/2)H_D(\epsilon - V/2) + v(-\epsilon + V/2)H_D(\epsilon + V/2)], \end{aligned}$$

где $\alpha(\epsilon) = u(\epsilon) + u(-\epsilon)$ и $J_{0,-1}(\epsilon) = J_{0,1}^*(\epsilon)$, $J_{3,-1}(\epsilon) = J_{3,1}^*(\epsilon)$. Теперь перейдем к совместному решению уравнений (15), (16) с граничными условиями (17). Разложим функции распределения по временным гармоникам:

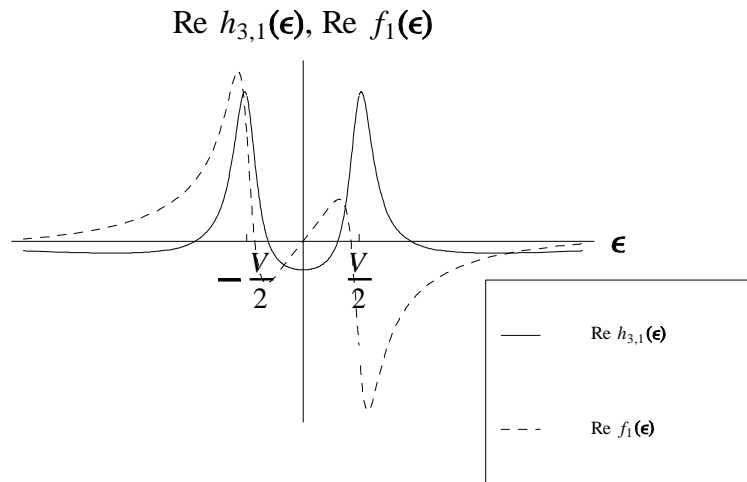


Рис. 3: Нестационарные функции распределения.

$$h_3(\epsilon, x, t) = \sum_{n=0, \pm 1} e^{-2inVt} h_{3,n}(\epsilon, x),$$

$$f(\epsilon, x, t) = \sum_{n=0, \pm 1} e^{-2inVt} f_n(\epsilon, x).$$

Дальнейшее рассмотрение зависит от параметра соотношения температуры и энергии Таулеса.

Высокая температура. Рассмотрим случай высоких температур $T \gg E_{Th}$, когда электрическим потенциалом при решении (15) можно пренебречь. В этом случае, уравнение легко решается и дает:

$$h_{3,n}(\epsilon, x) = \frac{\sin(\kappa(nV)x)}{\kappa(nV) \cos(\kappa(nV)/2)} J_{3,n}(\epsilon), \quad (18)$$

$$f_n(\epsilon, x) = -\frac{\cos(\kappa(nV)x)}{\kappa(nV) \sin(\kappa(nV)/2)} J_{0,n}(\epsilon).$$

Нестационарная часть электрического потенциала при высоких температурах экспоненциально мала, а стационарная вычисляется по формуле (16) с $h_3 = h_{3,0}$. Она оказывается равна:

$$\varphi(x) = \frac{1}{4r} x \int \alpha(\epsilon) H_D(\epsilon) d\epsilon = -\frac{1}{2r^2} x \int H_D(\epsilon) \operatorname{Re} \left[\frac{\cos \kappa_\epsilon}{\kappa_\epsilon \sin \kappa_\epsilon} \right] d\epsilon = -\frac{I_A R_N}{r} x.$$

Здесь I_A — стационарный ток, вычисленный в следующем параграфе (29). Функции распределения (18) построены на рисунке 3.

Произвольная температура: решение уравнения самосогласования на φ . В этом случае функция $f_n(\epsilon, x)$ дается тем же уравнением (см. (18)), что и в предыдущем случае, а для нахождения функции $h_{3,n}(x, t)$ необходимо решение уравнения самосогласования на электрический потенциал $\varphi(x, t) = \sum_{n=0, \pm 1} e^{-2iVnt} \varphi_n(x)$. Система уравнений на φ_n , $h_{3,n}$, которую нужно решить, имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{D}_x h_{3,n}(\epsilon, x) &= \varphi_n(x) B_n(\epsilon), \\ \partial_x h_3(\epsilon)|_{x=\frac{1}{2}} &= J_3(\epsilon),\end{aligned}\tag{19}$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} \int h_{3,n}(\epsilon, x) d\epsilon,$$

Здесь для краткости введены обозначения: $B_n(\epsilon) = -i(H(\epsilon + nV) - H(\epsilon - nV))$, $\hat{D}_x = E_{Th} \partial_x^2 + 2inV - \tau_{out}^{-1}$. Действуя оператором \hat{D}_x на обе части уравнения самосогласования (19) и выполняя элементарные преобразования, получим:

$$\begin{aligned}(E_{Th} \partial_x^2 + 4inV - \tau_{out}^{-1}) \varphi_n(x) &= 0, \\ \partial_x \varphi_n(x)|_{x=\frac{1}{2}} &= P_n.\end{aligned}$$

где $P_n = \frac{1}{2} \int J_{3,n}(\epsilon) d\epsilon$. Вычисляя P_n , получим:

$$P_n = \frac{1}{4r} \begin{cases} 2I_A R, & n = 0, \\ \int v(\epsilon) H_D(\epsilon - V) d\epsilon, & n = 1, \\ \int v(\epsilon) H_D(\epsilon + V) d\epsilon, & n = -1. \end{cases}\tag{20}$$

Таким образом, получаем для электрического потенциала:

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin(\kappa_{2nV} x)}{\kappa_{2nV} \cos(\kappa_{2nV}/2)} P_n.$$

Функция распределения теперь вычисляется из уравнения:

$$\hat{D}_x h_{3,n}(\epsilon, x) = \frac{\sin(\kappa_{2nV} x)}{\kappa_{2nV} \cos(\kappa_{2nV}/2)} P_n B_n(\epsilon).$$

При $n = 0$ правая часть равна нулю. Кроме того, так как $h_{3,-1} = h_{3,1}^*$, достаточно рассмотреть это уравнение при $n = 1$:

$$(E_{Th} \partial_x^2 + 2iV - \tau_{out}^{-1}) h_{3,1} = \frac{\sin(\kappa_{2V} x)}{\kappa_{2V} \cos(\kappa_{2V}/2)} P_1 B_1(\epsilon).$$

Решая это уравнение, найдем, что за счет учета электрического потенциала функция $h_{3,1}$ приобретает добавку $\delta h_{3,1}$ (к результату (18)), равную:

$$\delta h_{3,1}(\epsilon, x) = -\frac{P_1}{2V} \left[\frac{\sin(\kappa_{2V} x)}{\kappa_{2V} \cos(\kappa_{2V}/2)} - \frac{\sin(\kappa_V x)}{\kappa_V \cos(\kappa_V/2)} \right] [H(\epsilon + V) - H(\epsilon - V)].$$

Заметим, что эта добавка пропорциональна величине P_1 , определяемой формулой (20), которая и дает экспоненциальное спадание $\delta h_{3,1}$ при больших температурах.

Точный интеграл столкновений. Вычислим функцию распределения, исходя непосредственно из микроскопического интеграла столкновений. Мы рассмотрим только случай самых малых напряжений $V \ll \tau_{out}^{-1}$, когда в кинетическом уравнении членом с производной по времени можно пренебречь и заменить свертки на произведения:

$$E_{Th}\partial_x^2 f = K_{Coll}\{h_0\}, \quad E_{Th}\partial_x^2 h_3 = K_{Coll}\{h_3\}$$

с граничными условиями (17). Если напряжение мало и релаксация слабая (точное условие будет выписано ниже), то пространственную зависимость функций распределения можно записать следующим образом:

$$f(x, \epsilon, t) = f^{(0)}(\epsilon, t) + f^{(2)}(\epsilon, t)x^2,$$

$$h_3(x) = h_3^{(1)}(\epsilon, t)x,$$

в котором $f^{(2)} \ll f^{(0)}$. Тогда, с учетом граничных условий (17), для определения $h_3^{(1)}$ и $f^{(0)}$ получим уравнения:

$$K_{Coll}\{f^{(0)}(\epsilon, t)\} = 2E_{Th}J_0(\epsilon, t),$$

$$h_3^{(1)}(\epsilon, t) = J_3(\epsilon, t).$$

Заметим, что использование разложение действительно применимо, если окажется, что

$$\begin{aligned} J_0 &\ll f^{(0)}, \\ K_{Coll}(h_3^{(1)}) &\ll J_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, вычисление $h_3^{(1)}$ тривиально, а вычисление $f^{(0)}$ сводится к решению интегрального уравнения. Для его решения воспользуемся тем, что $f^{(0)} \ll H(\epsilon)$, что дает возможность линеаризовать интеграл столкновений, который дается выражением [17]:

$$K_{Coll}(\epsilon, t) = \frac{1}{4\pi\nu\mathcal{V}} \int d\omega I(\epsilon, \omega, t)K(\omega),$$

где

$$I(\epsilon, \omega) = \int d\epsilon' [(h(\epsilon + \omega) - h(\epsilon))(1 - h(\epsilon' + \omega)h(\epsilon')) - (h(\epsilon' + \omega) - h(\epsilon'))(1 - h(\epsilon + \omega)h(\epsilon))], \quad (22)$$

где $K(\omega) = \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\omega^2 + (D\mathbf{q}^2)^2}$. Подставляя $h = H(\epsilon) + f^{(0)}(x, \epsilon, t)$, и линеаризуя его относительно $f^{(0)}$, получаем при $\epsilon \ll T$:

$$K_{Coll}[H + f^{(0)}](\epsilon, t) = P[f^{(0)}](\epsilon), \quad (23)$$

где

$$P[f^{(0)}](\epsilon) = \frac{1}{4\pi\nu\mathcal{V}} \int \omega K(\omega)B(\omega) \left[f^{(0)}(\epsilon + \omega) + f^{(0)}(\epsilon - \omega) - 2f^{(0)}(\epsilon) \frac{1 + \cosh \epsilon/T}{\cosh \omega/T + \cosh \epsilon/T} \right] d\omega, \quad (24)$$

где $B(\omega)$ — бозонная функция распределения, $B(\omega) = \coth \frac{\omega}{2T}$. В квазиодномерном случае $L_{\perp} \ll L_T \ll L$ суммирование в формуле для $K(\omega)$ происходит по $\mathbf{q} = \frac{\pi n}{L}$, где $n \in N$.

Используя (24), получим (пренебрегая энергетической зависимостью в $\tau(\epsilon) \rightarrow \tau(0)$, так как нас интересуют энергии $\epsilon \ll T$):

$$P[f^{(0)}](\epsilon) = \frac{1}{\nu\mathcal{V}} \int \omega K(\omega) B(\omega) \left(f^{(0)}(\epsilon + \omega) - f^{(0)}(\epsilon) \cosh^{-2} \frac{\omega}{2T} \right) \frac{d\omega}{2\pi}$$

или, во временном представлении:

$$P[\bar{f}^{(0)}](\tau) = -\frac{\Gamma(E_{Th}\tau) \bar{f}^{(0)}(\tau)}{\tau_{out}},$$

где при $T\tau \gg 1$ для Γ имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma(E_{Th}\tau) &= \frac{\tau_{out}}{\nu\mathcal{V}} \sum_n \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{\omega^2 + (Dq_n^2)^2} \left[\frac{2}{\sinh \frac{\omega}{T}} - \coth \frac{\omega}{2T} e^{-i\omega\tau} \right] = \\ &= \sum_n \frac{6}{\pi^2 n^2} (1 - e^{-\pi^2 n^2 (E_{Th}\tau)}), \end{aligned}$$

Асимптотики функции $\Gamma(x)$ таковы:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 6\sqrt{x/\pi}, & x \ll 1, \\ 1, & x \gg 1. \end{cases}$$

Запишем: $f^{(0)}(t) = \sum_{n=0,\pm 1} e^{-2inVt} f_n^{(0)}$, тогда уравнения для разных гармоник будут независимы и

$$\bar{f}_n(\tau) = -\frac{2\bar{J}_{0,n}(\tau)}{\gamma\Gamma(E_{Th}\tau)} \quad (25)$$

Вычислим $\bar{J}_{0,n}(\tau)$, также ограничиваясь при этом большими временами $\tau \gg T^{-1}$. Заметим, что при $V \ll E_{Th} \ll T$, можно положить $H_D \rightarrow V/4T$, тогда для преобразования Фурье от $J_{0,n}(\epsilon)$ получим:

$$\bar{J}_{0,n}(\tau) = \frac{1}{4r} \frac{V}{4T} \cdot \begin{cases} (e^{iV\tau/2} - e^{-iV\tau/2})\bar{\alpha}(\tau), & n = 0; \\ e^{iV\tau/2}\bar{v}(\tau) - e^{-iV\tau/2}\bar{v}(-\tau), & n = 1; \\ -\bar{J}_{0,1}(\tau), & n = -1. \end{cases} \quad (26)$$

Сравним функции распределения, вычисленные в тау-приближении (18) с функциями распределения, полученными из решения уравнения с точным интегралом столкновений (25). Во временном представлении, имеем:

$$\frac{f_n^{(tau)}(\tau)}{f_n^{(exact)}(\tau)} = \Gamma(E_{Th}\tau).$$

Таким образом, при $\tau \gg \tau_D$ функции распределения во временном представлении совпадают, а при $\tau \ll \tau_D$ имеем $f_n^{(tau)} \ll f_n^{(exact)}$, что означает что точная функция распределения, вообще говоря, шире, что, однако, как будет показано ниже, не влияет существенно на электрический ток. Это связано с тем, что основной вклад в нестационарный ток происходит от пиков функции распределения на $\epsilon = \pm\mu_{l,r}$, то есть от больших времен, определяемых экспоненциальной обрезкой интеграла (45) на $\tau_{out} \gg \tau_D$.

Теперь сравним характерное электрон-электронное время τ_{out} со временем релаксации электронов на фононах τ_{ph} . Их отношение оказывается равно (см. (1B 1)):

$$\frac{\tau_{out}}{\tau_{ph}} = g(T/\Theta)^3,$$

Ясно, что при температурах порядка несколько Кельвинов и ниже $\tau_{out} \ll \tau_{ph}$ при $g \lesssim 10^4$. Кроме этого, так как мы предположили, что релаксация слабая, для справедливости результатов этого параграфа, необходимо выполнение условия (21), которое эквивалентно неравенству $\tau_{out} \gg \tau_D$, то есть $T/E_{Th} \ll g$.

II. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА.

A. Ток через SINIS контакт

После того, как вычислены функции распределения и спектральные функции, можно вычислить электрический ток. Удобно проводить вычисление тока вблизи одной из границ (правой) по формуле (3), что дает

$$I(t) = \frac{1}{8R} \text{tr} \left(\hat{\tau}^3 [\hat{G}_{x=1/2}, \hat{G}_r]^K \right).$$

Перепиывая это выражение явным образом, получим (с нужной точностью):

$$I(t) = \frac{1}{2R} \text{Re} \int e^{-i\phi(t)/2} I(\epsilon, t) d\epsilon, \quad (27)$$

где

$$I(\epsilon, t) = f_1^R \circ (h_0 - h_3) - (h_0 + h_3) \circ f_1^A. \quad (28)$$

В этой формуле все функции координаты предполагаются взятыми в точке $x = \frac{1}{2}$. Заметим, что ток $I(t)$ естественным образом представляет собой сумму двух вкладов, которые происходят от разных части функции распределения: равновесной $H(\epsilon)$ и неравновесной.

1. Равновесный ток.

В равновесном случае, в формуле (28): $h_0 = H(\epsilon)$, $h_3 = 0$. Аномальные функции зависят от того, в каких условиях находится переход. Мы рассмотрим два случая: 1) случай постоянного напряжения и 2) случай периодической разности фаз (создаваемой, например, классически слабым переменным магнитным полем в геометрии SQUID).

Постоянное напряжение. В этом случае, пользуясь формулами выше с $\phi(t) = 2Vt$, получим, что равновесный ток равен $I_{eq} = I_A + \text{Re}[e^{-2iVt} I_S]$, где I_A — диссипативный ток и I_S — амплитуда сверхтока. Они даются интегралами:

$$I_A(V, T) = \frac{1}{R} \int H_D(\epsilon) \text{Re} u(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{R} \text{Re} \underline{u}(V), \quad (29)$$

$$I_S(V, T) = \frac{1}{R} \int H(\epsilon - V/2) v(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{R} \underline{v}(-V).$$

Мы определили здесь $\underline{u}(\omega) = \int [H(\epsilon + \omega/2) - H(\epsilon)] u(\epsilon) d\epsilon$, $\underline{v}(\omega) = \int H(\epsilon + \omega/2) v(\epsilon) d\epsilon$. Вычисляя интегралы по т. вычетов, получаем для этих функций:

$$\underline{u}(\omega) = \frac{4\pi iT}{r} \sum_n \left[\frac{\cosh k_n(\omega)}{k_n(\omega) \sinh k_n(\omega)} - \frac{\cosh k_n(0)}{k_n(0) \sinh k_n(0)} \right],$$

$$\underline{v}(\omega) = \frac{4\pi iT}{r} \sum_n \frac{1}{k_n(\omega) \sinh k_n(\omega)},$$

$$k_n(\omega) = \sqrt{\frac{4\pi T}{E_{Th}} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{i\omega}{E_{Th}}}.$$

В этих формулах мы учли, что $\tau_{out} \sim gT^{-1} \gg T^{-1}$. Вычислим асимптотики функций $\underline{v}(\omega)$, $\underline{u}(\omega)$, которые пригодятся нам в дальнейшем.

a. Низкие температуры. При $T \ll \max(E_{Th}, \omega)$ можно заменить $\sum_n \rightarrow \int dn = \frac{E_{Th}}{T} \int k \frac{dk}{2\pi}$, что дает:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\omega) &= -\frac{2iE_{Th}}{r} \ln \frac{\sinh k_0(\omega)}{\sinh k_0(0)}, \\ \underline{v}(\omega) &= -\frac{2iE_{Th}}{r} \ln \tanh \frac{k_0(\omega)}{2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Выделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \underline{u}(\omega) &= \frac{2E_{Th}}{r} \cdot \begin{cases} \omega/4\pi T - \frac{4}{3}(\omega/4\pi T)^2, & \omega \ll T, \\ \sqrt{\omega/2E_{Th}}, & T \ll \omega; \end{cases} \\ \operatorname{Im} \underline{u}(\omega) &= \frac{2E_{Th}}{r} \cdot \begin{cases} -(\omega/4\pi T)^2, & \omega \ll T, \\ -\sqrt{\omega/2E_{Th}}, & T \ll \omega \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \underline{v}(\omega) &= \frac{2E_{Th}}{r} \cdot \begin{cases} \omega/4\pi T - \frac{4}{3}(\omega/4\pi T)^2, & \omega \ll T, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\omega/E_{Th} + C_3(\omega/E_{Th})^3, & T \ll \omega \ll E_{Th}, \\ 2 \exp\left(-\sqrt{\omega/2E_{Th}}\right) \cos \sqrt{\omega/2E_{Th}}, & T \ll E_{Th} \ll \omega; \end{cases} \\ \operatorname{Im} \underline{v}(\omega) &= \frac{2E_{Th}}{r} \cdot \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{\pi T}{2E_{Th}}} - (\omega/4\pi T)^2, & \omega \ll T, \\ -\frac{1}{2} \ln \sqrt{\omega/E_{Th}}, & T \ll \omega \ll E_{Th}, \\ 2 \exp\left(-\sqrt{\omega/2E_{Th}}\right) \sin \sqrt{\omega/2E_{Th}}, & T \ll E_{Th} \ll \omega. \end{cases} \end{aligned}$$

b. Высокие температуры В случае высоких температур $T \gg \omega$ можно разложить по ω : $\partial_\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{n+1/2} i\partial_T$, что дает:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\omega) &= \frac{T}{r} \sum_n \left(-\omega \partial_T \frac{1}{n+1/2} - \frac{i}{8\pi} (\omega \partial_T)^2 \frac{1}{(n+1/2)^2} + \frac{1}{96\pi^2} (\omega \partial_T)^3 \frac{1}{(n+1/2)^3} \right) \frac{\cosh k_n(0)}{k_n(0) \sinh k_n(0)}, \\ \underline{v}(\omega) &= \frac{T}{r} \sum_n \left(4\pi i - \omega \partial_T \frac{1}{n+1/2} - \frac{i}{8\pi} (\omega \partial_T)^2 \frac{1}{(n+1/2)^2} + \frac{1}{96\pi^2} (\omega \partial_T)^3 \frac{1}{(n+1/2)^3} \right) \frac{1}{k_n(0) \sinh k_n(0)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Для действительной и мнимой частей:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \underline{u}(\omega) &= \frac{T}{r} \cdot \begin{cases} 4.77 \sqrt{E_{Th}/4\pi T} \left(\omega/2T - C_1(\omega/2T)^3 \right), & E_{Th} \ll T, \\ -\omega E_{Th}/2\pi T^2 + C_4(\omega E_{Th}/2\pi T^2)^3, & T \ll E_{Th}; \end{cases} \\ \operatorname{Im} \underline{u}(\omega) &= \frac{T}{r} \cdot \begin{cases} -C_2(\omega/2T)^2, & E_{Th} \ll T, \\ -\frac{1}{8\pi} (\omega E_{Th}/2\pi T^2)^2, & T \ll E_{Th} \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$\operatorname{Re} \underline{v}(\omega) = \frac{T}{r} \cdot \begin{cases} -2 \left(\omega/T - \frac{\pi}{48} \omega^3/T^2 E_{Th} \right) \exp \left(-\sqrt{2\pi T/E_{Th}} \right), & E_{Th} \ll T, \\ -\omega E_{Th}/2\pi T^2 + C_4 \left(\omega E_{Th}/2\pi T^2 \right)^3, & T \ll E_{Th}; \end{cases}$$

$$\operatorname{Im} \underline{v}(\omega) = \frac{T}{r} \cdot \begin{cases} 4\pi \left(1 - \omega^2/16\pi T E_{Th} \right) \sqrt{E_{Th}/2\pi T} \exp \left(-\sqrt{2\pi T/E_{Th}} \right), & E_{Th} \ll T, \\ 4\pi \ln \frac{E_{Th}}{2\pi T}, & T \ll E_{Th}. \end{cases}$$

В этих формулах $C_1 \approx 0.0026$, $C_2 \approx 0.052$, $C_3 \approx 0.022$, $C_4 \approx 0.001$.

Рассмотрим более подробно результаты для сверхтока $I_S(V)$ при разном соотношении температуры и энергии Таулеса. Согласно (29) и приведенным асимптотикам, при малых температурах $T \ll E_{Th}$ имеем:

$$|I_S(V)| = \frac{4E_{Th}}{rR} \cdot \begin{cases} \frac{1}{4} \ln \frac{\pi T}{2E_{Th}}, & V \ll T, \\ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \ln^2 \frac{V}{4E_{Th}}}, & T \ll V \ll E_{Th} \\ \exp(-\sqrt{V/2E_{Th}}), & V \gg E_{Th}. \end{cases}$$

При больших температурах $T \gg E_{Th}$ получаем:

$$|I_S(V)| = \frac{2E_{Th}}{rR} \cdot \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi T}{E_{Th}} + \left(\frac{V}{2E_{Th}} \right)^2} \exp(-\sqrt{2\pi T/E_{Th}}), & V \ll T, \\ \exp(-\sqrt{V/2E_{Th}}), & T \ll V. \end{cases} \quad (32)$$

Периодическая разность фаз. Вычислим ток через контакт, к которому приложена гармонически зависящая от времени разность фаз $\phi(t) = \phi_0 + \alpha \sin \omega t$, где $\alpha \ll 1$. В этом случае аномальные функции опять даются уравнением (10). Релаксацию будем предполагать достаточно сильной, так что функция распределения электронов в проволоке - тепловая. Ток вычисляется по формуле (3) вблизи правой границы. При малых α результат имеет вид:

$$I(t) = I_c \sin \phi_0 + \frac{\alpha}{2} I_c \cos \phi_0 \sin \omega t - \frac{\alpha}{2R} \operatorname{Im} \int \left(u(\epsilon) \sin \omega t \circ H - e^{-i\phi_0} v(\epsilon) \sin \omega t \circ H \right) d\epsilon,$$

где I_c - критический ток элемента:

$$I_c = \frac{1}{R} \int \operatorname{Im} v(\epsilon) H(\epsilon) d\epsilon.$$

Дальнейшее вычисление дает:

$$I(t) = I_c \sin \phi_0 + \frac{\alpha}{2} I_c \cos \phi_0 \sin \omega t + \alpha \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega t} \sigma \right] \quad (33)$$

Здесь для проводимости имеем:

$$\operatorname{Re} \sigma = \frac{1}{4R} \operatorname{Re} \int \left(u(\epsilon) + v(\epsilon) \cos \phi_0 \right) \left(H(\epsilon + V/2) - H(\epsilon - V/2) \right) d\epsilon,$$

$$\operatorname{Im} \sigma = -\frac{1}{4R} \operatorname{Im} \int \left(u(\epsilon) - v(\epsilon) \cos \phi_0 \right) \left(H(\epsilon + V/2) + H(\epsilon - V/2) \right) d\epsilon.$$

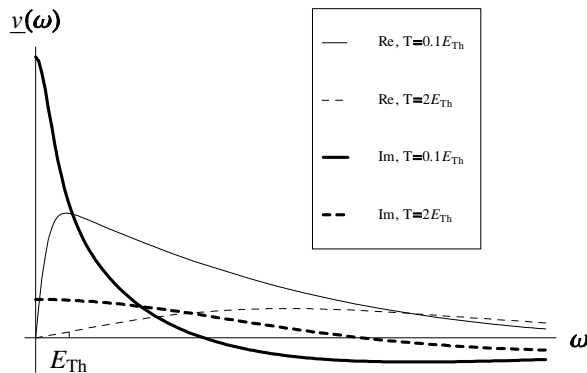


Рис. 4: Зависящий от фазы вклад в проводимость.

Выражая интегралы через \underline{u} , \underline{v} , получим:

$$\text{Im } \sigma = -\frac{1}{2R} [\text{Im } \underline{u}(\omega) - \cos \phi_0 \text{Im } \underline{v}(\omega)],$$

$$\text{Re } \sigma = \frac{1}{2R} [\text{Re } \underline{u}(\omega) + \cos \phi_0 \text{Re } \underline{v}(\omega)].$$

Действительная части и мнимая части $\sigma(\omega)$ соответствуют диссипативному и бездиссипативному току соответственно, так что $\langle I \frac{\dot{\phi}}{2} \rangle = \frac{\alpha^2}{4} \omega \text{Re } \sigma$ — мощность, диссипируемая в контакте. Рассмотрим подробнее зависящие от постоянной части фазы ϕ_0 вклады в σ , измеримые экспериментально. Имеем:

$$\partial_{\phi_0} \sigma = -\frac{\sin \phi_0}{2R} \underline{v}(\omega),$$

Асимптотические выражения для $\text{Re } \underline{v}(\omega)$, $\text{Im } \underline{v}(\omega)$ выписаны выше: (30), (31). На рисунке (4) построены величины $\text{Re } \underline{v}(\omega)$, $\text{Im } \underline{v}(\omega)$ при значениях температуры $T = \frac{1}{10} E_{Th}$, $T = 2E_{Th}$.

2. Неравновесный ток.

При больших температурах $T \gg E_{Th}$ равновесный вклад в нестационарный электрический ток I_S в (29) становится экспоненциально мал. Поэтому может оказаться так, что неравновесный вклад, будет доминировать (несмотря на то, что в нашем случае он содержит дополнительную малость по параметру $1/r$, по сравнению с равновесным) так как подавлен температурой только степенным образом. Подобное замечание было впервые сделано Аргаманом [4], который на основании качественных соображений оценил этот вклад. Здесь мы вычислим неравновесные поправки к электрическому току при постоянном напряжении V . Вычисляя ток по формуле (27), получим:

$$I_{neq}(t) = \text{Re} [e^{-i\omega_J t} \Phi_1 + e^{-2i\omega_J t} \Phi_2]. \quad (34)$$

Далее мы вычисляем амплитуды первой и второй гармоник Φ_1 , Φ_2 двумя способами - сначала, используя функции распределения, полученные в τ -приближении и при произвольных в остальном смысле V , τ , E_{Th} , а затем - используя функции распределения, полученные из точного интеграла столкновений при малых напряжениях.

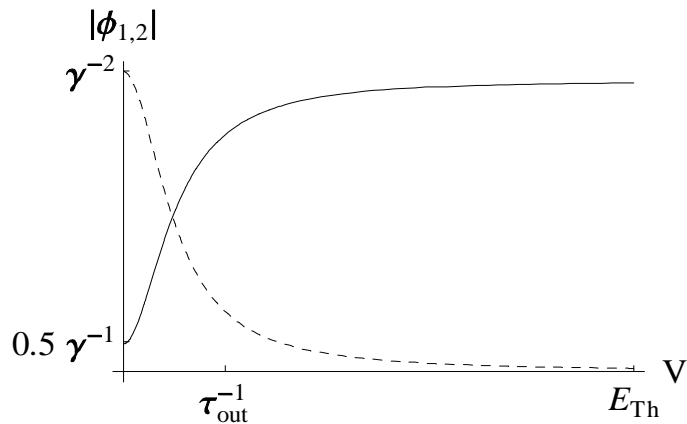


Рис. 5: Неравновесные вклады в переменный ток

τ -приближение. Вычисление в τ -приближении дает:

$$\Phi_{1,2} = -\frac{\pi E_{Th} V}{16 R r^3 T} \phi_{1,2}.$$

Здесь ϕ_1, ϕ_2 даются выражением:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \Gamma_0(x_0 - y_0) - \Gamma_V(x_0 + y_0) + (x_V + y_V)(\Gamma_{2V} - \Gamma_V) \\ \phi_2 &= -(x_V + y_V)\Gamma_{2V} \end{aligned}$$

и

$$x_\epsilon = -\frac{\cot(\kappa_\epsilon/2)}{\kappa_\epsilon}, \quad y_\epsilon = \frac{\tan(\kappa_\epsilon/2)}{\kappa_\epsilon}$$

$$\Gamma_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2(i\epsilon/E_{Th} - \gamma)} \sin \sqrt{2(i\epsilon/E_{Th} - \gamma)}}$$

В этих формулах $\gamma \ll 1$. В пределе $V \rightarrow 0$, имеем: $|\phi_2| = 2\gamma^{-1}|\phi_1| \gg |\phi_1|$ вторая гармоника в токе доминирует. Для конечных напряжений, малых по сравнению с энергией Таулеса: $V \lesssim E_{Th}$ можно написать асимптотические выражения:

$$\Phi_1 = -\frac{\pi E_{Th} V}{16 R r^3 T} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2}\gamma^{-1} + 4\gamma^{-4}(V/E_{Th})^2, & V \ll \tau_{out}^{-1} \\ -\gamma^{-2}, & \tau_{out}^{-1} \ll V \end{cases} \quad (35)$$

и

$$\Phi_2 = -\frac{\pi E_{Th} V}{16 R r^3 T} \cdot \begin{cases} \gamma^{-2}, & V \ll \tau_{out}^{-1} \\ -\frac{1}{4}(E_{Th}/V)^2, & \tau_{out}^{-1} \ll V \end{cases} \quad (36)$$

Сравнивая неравновесный вклад с равновесным, находим, что неравновесная вторая гармоника преобладает в переменном токе при $\ln^2(\gamma r) \lesssim T/E_{Th}$ и $V \ll \tau_{out}^{-1}$.

Зависимость амплитуд $\phi_{1,2}$ от напряжения при $V \lesssim E_{Th}$ построена на рисунке 5.

Точный интеграл столкновений. У правого контакта ($x = 1/2$) при $\gamma \ll 1$ и $V \ll \tau_{out}^{-1}$ для функций распределения имеем:

$$h_{3,n} = \frac{1}{2} J_{3,n}, \quad \bar{f}_n = -\frac{2}{\gamma} \frac{\bar{J}_{0,n}(\tau)}{\Gamma(E_{Th}\tau)}.$$

Вычислим вклад в ток от функции распределения f . Ее вклад в электрический ток даются интегралами:

$$\Phi_1^{(0)} = -\frac{4\pi}{R} \int \bar{f}_0(\tau) \bar{v}(-\tau) d\tau,$$

$$\Phi_2^{(0)} = -\frac{2\pi}{R} \int \bar{f}_1(\tau) \bar{v}(-\tau) d\tau.$$

В явном виде интегралы имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(0)}(V) &= -\frac{4\pi i}{\gamma R r T} \frac{V}{T} \int_0^\infty \frac{\sin V\tau/2}{\Gamma(E_{Th}\tau)} \bar{u}(\tau) \bar{v}(\tau) d\tau, \\ \Phi_2^{(0)}(V) &= -\frac{2\pi}{R} \frac{2}{\gamma} \frac{1}{4r} \frac{V}{4T} \int_0^\infty \frac{e^{iV\tau/2}}{\Gamma(E_{Th}\tau)} \bar{v}(\tau) \bar{v}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

При $V \rightarrow 0$ имеем $\Phi_1^{(0)} \ll \Phi_1^{(3)}$, $\Phi_2^{(0)} \gg \Phi_2^{(3)}$ – то есть, первая гармоника определяется в основном функцией h_3 , вторая - f .

Окончательно, получим:

$$\Phi_1 = -\frac{\pi E_{Th}}{32 R r^3 \gamma} \frac{V}{T},$$

$$\Phi_2 = -\frac{\pi E_{Th}}{16 R r^3 \gamma^2} \frac{V}{T}.$$

Заметим, что эти результаты совпадают с результатами решения задачи в τ -приближении (ср. асимптотики $V \ll \tau_{out}^{-1}$ в (35),(36)).

В. Туннельный ток в пробник

Непосредственное измерение плотности состояний и функции распределения электронов в нормальной области доступно с помощью туннельной спектроскопии [18] с пробником, поднесенным к нормальной проволоке, соединяющей сверхпроводящие резервуары. Измеряемой величиной является туннельный ток, который мы вычисляем в этой главе. Рассмотрим случай, когда в качестве пробника используется сверхпроводящий металл со щелью Δ_P под напряжением U . Для туннельного тока $\langle I_T \rangle$ в таком случае имеем:

$$\langle I_T \rangle = \frac{1}{16 R_T} \int tr \hat{\tau}^3 (\hat{g}_P^R - \hat{g}_P^A) (\hat{g}^R - \hat{g}^A) (\hat{h} - \hat{h}_P) d\epsilon.$$

Вычисление дает явные выражения для трех различных вкладов ($U \neq V/2$): $\langle I_T \rangle = I_T^{(0)} + I_T^{(DOS)} + I_T^{(NEQ)}$, где

$$I_T^{(0)} = -\frac{1}{2R_T} \int \nu_{BCS}(\epsilon) [H(\epsilon + U/2) - H(\epsilon - U/2)] d\epsilon,$$

$$I_T^{(DOS)} = \frac{1}{2R_T} \int \nu_{BCS}(\epsilon) [H_P(\epsilon) (\xi_{2,0}(\epsilon + U/2) - \xi_{1,0}(\epsilon - U/2)) + H(\epsilon - U/2)\xi_{1,0}(\epsilon - U/2) - H(\epsilon + U/2)\xi_{2,0}(\epsilon + U/2)] d\epsilon, \quad (37)$$

$$I_T^{(NEQ)} = \frac{1}{2R_T} \int \nu_{BCS}(\epsilon) [-f_0(\epsilon + U/2) + f_0(\epsilon - U/2) + h_{3,0}(\epsilon + U/2) + h_{3,0}(\epsilon - U/2)] d\epsilon.$$

Как видно из этих выражений, эти три поправки имеют разную природу. $I_T^{(0)}$ – главный вклад, присутствующий уже в нормальном состоянии системы и не зависящий от напряжения V на переходе и не интересующий нас. $I_T^{(DOS)}$ – поправка, возникающая благодаря модификации плотности состояний в нормальной проволоке из-за эффекта близости (см. формулы (12)) и $I_T^{(NEQ)}$ – вклад, связанный с неравновесностью функции распределения электронов (см. (25), (18)). Заметим, что величины $I_T^{(DOS)}$, $I_T^{(NEQ)}$ малы, как $(\gamma r)^{-2}$, так как ξ , f , $h_3 \lesssim (\gamma r)^{-2}$. Рассмотрим сначала случай, когда пробник – нормальный металл, то есть $\Delta_P = 0$ и $T \gg E_{Th} \gg T_P$. Тогда $I_T^{(NEQ)}$ не зависит от U , а для $I_T^{(DOS)}$, для туннельного тока в точку x , получаем (см. (12)):

$$\frac{d}{dU} R_T I_T^{DOS} = -\frac{1}{2r^2} \text{Re}[\psi^2(x - 1/2, U + V/2) + \psi^2(x + 1/2, U - V/2)] \quad (38)$$

Видно, что максимального значения эта величина достигает при $U = \pm V/2$.

Вычислим теперь поправку $I_T^{(NEQ)}$, которая становится зависящей от напряжения U , если пробник – сверхпроводящий. В тау-приближении она вычисляется точно и равна:

$$\frac{d}{dU} I_T^{(NEQ)} = \frac{\pi V \tau_{out} E_{Th}}{48r^2 R_T T} [\Gamma_{U-V/2} - \Gamma_{-(U-V/2)} - \Gamma_{U+V/2} + \Gamma_{-(U+V/2)}], \quad (39)$$

где $\Gamma(\epsilon) = \text{Im} \frac{i\epsilon\tau_{out} + 1/2}{\sqrt{(i\epsilon\tau_{out} + 1/2)^2 + \tau_{out}^2 \Delta_P^2}}$.

Для сравнения вычислим ее исходя из (25). При слабой релаксации она определяется в основном функцией f_0 и во временном представлении равна:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dU} I_T^{(NEQ)} &= -\frac{\pi i}{R_T} \int \tau \bar{\nu}_{BCS}(\tau) \bar{f}_0(\tau) \cos \frac{U\tau}{2} d\tau = \\ &= \frac{\pi V \tau_{out} E_{Th}^2}{8r^2 R_T T} \int_0^\infty \tau \bar{\nu}_{BCS}(\tau) \cos \frac{U\tau}{2} \sin \frac{V\tau}{2} \frac{1}{\Gamma(E_{Th}\tau)} e^{-\tau/2\tau_{out}} \vartheta_3\left(\frac{\tau E_{Th} \pi^2}{2}\right) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\nu}_{BCS}(\tau)$ – быстро осциллирующая функция τ : $\bar{\nu}_{BCS}(\tau) = -\frac{\Delta_P}{2} J_1(\Delta_P \tau)$. Отличие этого результата от результата в тау-приближении происходит из области $\tau \ll \tau_D$, когда функция Γ отлична от единицы. Так как высота пика определяется в основном областью больших τ (экспоненциальная обрезка на больших временах τ_{out}), то ясно, что точный учет интеграла столкновений приводит к уширению пиковой области, но не затрагивает высоту пика, которая определяется энергией τ_{out}^{-1} .

Однако, в рассмотренной области напряжений $V \ll T$ неравновесный вклад (39) в dI_T/dU в любом случае мал по сравнению с вкладом от плотности состояний (38) и поэтому последний доминирует.

III. ГИСТЕРЕЗИС В SNS-ПЕРЕХОДАХ.

Рассмотрим SNS-переход, который включен в цепь, фиксирующую постоянный ток через переход. Из эксперимента известно, что в таких условиях вольт-амперная характеристика перехода гистерезисна. Для качественного объяснения эффекта было предложено два качественных объяснения, одно из которых связано с перегревом [19], другое – с предположением о наличии у перехода конечной эффективной емкости порядка $C \sim \tau_D/R$ [1]. В этом параграфе мы анализируем эти подходы количественно.

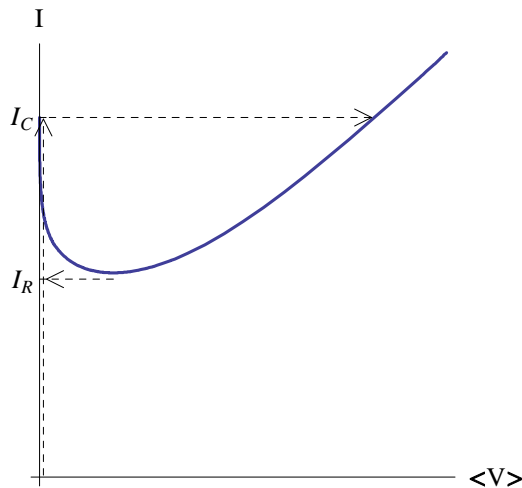


Рис. 6: Гистерезис в RSJ-модели с перегревом

А. RSJ-модель +перегрев электронов в нормальной области

Предположим, что переход эффективно описывается RSJ-моделью, в которой зависимость тока от разности фаз определяется феноменологическим уравнением:

$$I(t) = I_c(T) \sin \phi(t) + \frac{\dot{\phi}}{2R}. \quad (40)$$

Отличие от стандартной RSJ-модели, используемой для описания вольт-амперных характеристик SIS-переходов состоит в том, что в этом уравнении учтена сильная неравновесность электронов в проволоке. В простейшем варианте модели неравновесное распределение описывается одним параметром - эффективной температурой электронов T , которая определяется из соотношений баланса энергии в системе:

$$\langle IV \rangle = P(T), \quad (41)$$

где $P(T)$ дает мощность, уносимую фононами и туннелирующими квазичастицами. Вольт-амперная характеристика RSJ-модели при заданном токе получается из решения уравнения (40) с $I = const$. Результат хорошо известен и имеет вид:

$$\langle V \rangle = R\sqrt{I^2 - I_c^2(T)}. \quad (42)$$

В нашем случае уравнения (42), (41) должны быть решены совместно, что дает вольт-амперную характеристику, заданную параметрически: $I(T)$, $V(T)$. Ее типичный вид, полученный численным решением этой системы, изображен на рисунке 6.

Из него ясно, что напряжение захвата V_R , при котором происходит срыв на бездиссипативную ветвь, а также температура T_R перед срывом, определяются из условия $\partial_T I = 0$ и даются, таким образом, системой уравнений ($\tilde{I} = V_R/R$):

$$R\tilde{I}\sqrt{I_c(T_R)^2 + \tilde{I}^2} = P(T_R),$$

$$\tilde{I}^2 = -I_c(T_R)I_c'(T_R)\frac{P(T_R)}{P'(T_R)}.$$

Здесь T_R —температура в нормальной области, соответствующая точке срыва. Заметим, что отсюда следует соотношение:

$$\frac{I_R}{I_c(T_R)} = \sqrt{1 + \xi^2(T_R)}, \quad (43)$$

где $\xi(T) = \frac{(\ln I_c(T))'}{(\ln P(T))'}$. Это условие, вообще говоря, отличается от условия $\frac{I_R}{I_c(T_R)} = 1$, предложенного в работе [19]. Это отличие определяется вторым слагаемым под корнем. Рассмотрим два предельных случая, отличающихся основным механизмом охлаждения имея в виду нулевую температуру резервуара.

Электрон-фононная релаксация. В этом случае, $P(T) = \frac{\varepsilon(T)}{\tau e^{-ph(T)}} = R\alpha^3 \left(\frac{T}{\theta}\right)^6$. Тогда характерный параметр $I_R/I_c(T=0)$ зависит только от $\alpha = \left(\frac{\pi}{12}\right)^{1/3} \frac{E_{Th}}{\Theta}$, где Θ —характерный энергетический масштаб электрон-фононного взаимодействия (см. (IV 1)). На рисунке изображен график этой зависимости. Заметим, что типичные значения $\alpha \leq 0.001$, так что $I_R/I_c(T=0) \leq 0.01$. Вычислим еще величину $\xi(T \gg E_{Th})$. Имеем: $\ln I_c(T \gg E_{Th}) \sim -\sqrt{2\pi T/E_{Th}}$, $\ln P(T) \sim 6 \ln T/\theta$, так что $\xi^2(T) = \frac{2\pi}{144} \frac{T}{E_{Th}}$.

Унос тепла квазичастицами. Будем предполагать, что $\Delta \gg T$. В этом случае, $P(T) = W \int_0^T r(T')T'dT'$, где $r(T) = \frac{3}{2\pi^2} \int_{\Delta/T}^{\infty} \frac{x^2}{\cosh^2 \frac{x}{2}} dx \sim \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\Delta}{T}\right)^2 e^{-\Delta/T}$. Таким образом, имеем

$$P(T) = \frac{6W\Delta^2}{\pi^2} \int_{\Delta/T}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \sim \frac{6W\Delta T}{\pi^2} e^{-\Delta/T}$$

и $\xi^2(T) = \frac{\pi}{2} \frac{T^3}{\Delta^2 E_{Th}}$. При характерных для эксперимента Courtois параметрах $E_{Th} = 0.02K$, $\Delta = 2K$, $T_R = 0.2K$, получаем $\xi^2 \sim 0.02$.

В. Эффективная емкость

Хорошо известно, что гистерезисное поведение вольт-амперных характеристик SIS-переходов хорошо описывается RSJC-моделью, которая определяется следующим уравнением, дающим ток при заданной разности фаз $\phi(t)$ на переходе:

$$I(t) = I_c \sin \phi(t) + \frac{1}{2R} \partial_t \phi + \frac{C}{2} \partial_{tt}^2 \phi. \quad (44)$$

Гистерезисные свойства вольт-амперной характеристики в такой модели определяются параметром $\beta_M = R^2 I_c C$. Известно, что при $\beta_M > 1$ вольт-амперная характеристика RSJC-модели гистерезисна. Смысл емкости C в случае SIS-перехода ясен, так как в этом случае переход действительно образует конденсатор, который может обладать значительной емкостью геометрического происхождения. Однако, геометрическая емкость SNS-перехода пренебрежимо мала. Тем не менее, анализ, выполненный в [1], показывает, что введение эффективной емкости порядка τ_D/R позволяет качественно объяснить экспериментальные значения I_R/I_c для переходов разной длины.

В связи с этим мы рассмотрим задачу о вычислении электрического тока через SINIS переход, к которому приложено переменное напряжение (медленно меняющееся во времени, точный критерий будет указан ниже). Предполагая, что электроны в переходе находятся в равновесии с температурой T , которая определяется средней за период диссипацией энергии в контакте, мы получим выражение для тока, аналогичное (44). В этом рассмотрении мы полагаем, что геометрической емкостью длинного SINIS-перехода можно пренебречь.

Для вычисления тока при произвольной зависимости $\phi(t)$ удобно воспользоваться формулой (27) во временном представлении, так что:

$$I(t) = \frac{2\pi}{R} \operatorname{Re} \int d\tau H(\tau) \left[\bar{u}(-\tau) e^{i(\phi(t+\tau/2) - \phi(t))/2} + \bar{v}(-\tau) e^{-i(\phi(t+\tau/2) + \phi(t))/2} \right].$$

Здесь $H(\tau) = -\frac{iT}{\sinh \pi\tau T}$, а $\bar{u}(\tau)$, $\bar{v}(\tau)$ даются формулами (11), так что:

$$I(t) = \frac{\pi E_{Th}}{rR} \int_0^\infty \frac{T d\tau}{\sinh \pi T \tau} \left[\vartheta_3\left(\frac{\pi^2}{2} \tau E_{Th}\right) \sin\left(\frac{\phi(t) - \phi(t - \tau/2)}{2}\right) + \vartheta_4\left(\frac{\pi^2}{2} \tau E_{Th}\right) \sin\left(\frac{\phi(t) + \phi(t - \tau/2)}{2}\right) \right].$$

Применимость этого выражения ограничена только предположением о равновесности электронов в проводе. Выполним линейное по \dot{V} разложение:

$$\frac{\phi(t) - \phi(t - \tau/2)}{2} \approx \frac{1}{2} V \tau - \frac{1}{8} \dot{V} \tau^2,$$

$$\frac{\phi(t) + \phi(t - \tau/2)}{2} \approx \phi(t) - \frac{1}{2} V \tau + \frac{1}{8} \dot{V} \tau^2,$$

допустимое, если $\omega/T \ll 1$, где ω —характерная частота изменения $V(t)$. Тогда:

$$I(t) = I_A(V) + \left[I_c^{(1)}(V) + \dot{V} C^{(1)}(V) \right] \sin \phi + \left[I_c^{(2)}(V) + \dot{V} C^{(2)}(V) \right] \cos \phi + \dot{V} C^{(0)}(V). \quad (45)$$

Выпишем выражения для входящих в ток амплитуд. Все они выражаются через интегралы вида

$$\frac{E_{Th}}{rR} \int_0^\infty \frac{dx}{\sinh x} \vartheta_n\left(\frac{\pi E_{Th}}{2T} x\right) e^{-i(V/2\pi T)x} = -\frac{i}{R} \cdot \begin{cases} \underline{u}(V), & n = 3, \\ \underline{v}(V), & n = 4. \end{cases}$$

Тогда:

$$I_A(V) = \frac{1}{R} \operatorname{Re} \underline{u}(V), \quad C_0(V) = \frac{1}{2R} \operatorname{Im} \partial_V^2 \underline{u}(V).$$

$$I_c^{(1)}(V) = \frac{1}{R} \operatorname{Im} \underline{v}(V), \quad I_c^{(2)}(V) = -\frac{1}{R} \operatorname{Re} \underline{v}(V),$$

$$C^{(1)}(V) = -\frac{1}{2R} \operatorname{Re} \partial_V^2 \underline{v}(V), \quad C^{(2)}(V) = -\frac{1}{2R} \operatorname{Im} \partial_V^2 \underline{v}(V).$$

Асимптотики $\underline{u}(V)$, $\underline{v}(V)$ выписаны выше (см. (31), (30)). Из них легко понять поведение всех членов в (45) при произвольных температурах. Проанализируем случай $T \ll V \lesssim E_{Th}$. Тогда, аналогично (44) имеем ($V = 1/2\partial_t \phi$):

$$I = \frac{2E_{Th}}{rR} \left[\sqrt{V/2E_{Th}} - \left(\frac{1}{4} \ln \frac{V}{E_{Th}} + 0.066 \frac{V}{E_{Th}} \frac{\dot{V}}{E_{Th}^2} \right) \sin \phi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \frac{\dot{V}}{V^2} \right) \cos \phi + \frac{1}{8\sqrt{2E_{Th}V}} \frac{\dot{V}}{V} \right]. \quad (46)$$

Это выражение представляет собой микроскопически полученный аналог (44) для SINIS-перехода. Видно, что члены, пропорциональные \dot{V} даже в случае медленно меняющегося напряжения (с характерной частотой $\omega \lesssim T$) могут быть порядка диссипативного и сверхпроводящего вкладов. Однако, их интерпретация в терминах эффективной емкости затруднительна, потому что емкость, которую можно было бы ввести таким образом, зависела бы от напряжения V и от разности фаз ϕ на переходе. Тем не менее, в принципе, для получения вольт-амперной характеристики при заданном токе и выяснения вопроса о гистерезисе в такой модели следует численно решать уравнение $I = \text{const}$ относительно $V(t)$ аналогично тому, как это делается в обычной RSJC-модели. Мы оставляем этот вопрос для будущего изучения.

IV. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ.

Мы рассмотрели нестационарный эффект Джозефсона в длинной ($E_{Th} \ll \Delta$) квазиодномерной структуре сверхпроводник-нормальный металл-сверхпроводник с сопротивлением границы, много большим сопротивлением нормальной области: $r = R_B/R_N \gg 1$. В этих условиях существует широкая область параметров, в которой

время электрон-электронного рассеяния τ_{out} удовлетворяет неравенству: $\tau_{out} \ll r\tau_D$, что может быть записано в виде:

$$T \gg g_B E_{Th}, \quad (47)$$

где $g_B = G_B/G_0$ — безразмерный кондактанс барьера. В области параметров, заданной неравенством (47), эффект близости слаб, что позволяет линеаризовать уравнение Узделя и получить следующие результаты.

1. В τ -приближении для интеграла столкновений вычислен электрический ток через переход при заданном напряжении $V \ll \Delta$, произвольном относительно E_{Th} , τ_{out} . Показано, что он содержит равновесный и неравновесный вклады. Несмотря на то, что неравновесный вклад дополнительно подавлен малым параметром r^{-1} , он может оказаться больше равновесного при высоких температурах $T \gg E_{Th}$. Это связано с тем, что равновесный ток при таких условиях спадает экспоненциально (см. (32)), а неравновесный лишь степенным образом (см. (35), (36)). Таким образом, при $E_{Th} \ln^2(\gamma r) \lesssim T$ неравновесный вклад оказывается важнее. Вычислена поправка к туннельному току в пробник, связанная с эффектом близости в нормальной области. Основной вклад в нее при $V \ll T$ происходит от поправки к плотности состояний и равен (38).
2. При малых напряжениях и слабой релаксации: $V \ll \tau_{out}^{-1}$, $\tau_{out} \gg \tau_D$ рассмотрено кинетическое уравнение с точным интегралом столкновений (22). Слабость неравновесных эффектов позволяет линеаризовать интеграл столкновений и решить кинетическое уравнение при $T \gg E_{Th}$. Результатом является функция распределения (18). Показано, что в рассмотренной области параметров результат для тока, полученный таким образом, воспроизводит результат вычисления в τ -приближении.
3. Вычислен электрический ток через переход, к которому приложена переменная разность фаз $\phi = \phi_0 + \alpha \sin \omega t$, где $\alpha \ll 1$. Получено выражение для протекающего электрического тока (33), который содержит диссипативную $\sim \cos \omega t$ и бездиссипативную $\sim \sin \omega t$ компоненты, которые зависят от стационарной части разности фаз ϕ_0 .
4. Микроскопически вычислен электрический ток через SINIS-переход для случая медленно меняющегося напряжения: $\dot{V}/V \ll T$. В общем случае результат имеет вид (45). Видна аналогия с выражением для тока в т.н. RSJC-модели (44), однако вид возникающих членов не позволяет ввести емкость в обычном смысле, т.к. коэффициенты перед членами, содержащими \dot{V} явно зависят от напряжения и разности фаз на переходе. При низких температурах и напряжениях, к примеру, получается результат (46).

Кроме этого, рассмотрена задача о гистерезисе в SNS-переходе в рамках RSJ-модели с учетом перегрева (41), (42). В этой модели срыв на бездиссипативную ветвь происходит, вообще говоря, при конечном значении $\langle V \rangle$, причем ток возврата определяется условием (43), где величина ξ^2 зависит от доминирующего механизма охлаждения и равна $0.04 \frac{T_R}{E_{Th}}$, если этот механизм — электрон-фононная релаксация, и $1.6 \frac{T_R^3}{\Delta^2 E_{Th}}$, если это квазичастичное туннелирование.

-
- [1] L. Angers, *et al.*, *Phys. Rev. B* **77**, 165408 (2008).
 [2] T. Heikkila, J. Sarkka, F. Wilhelm, *Phys. Rev. B* **66**, 184513 (2002).
 [3] J. Baselmans, A. Morpurgo, B. Van Wees, T. Klapwijk, *Nature* **397**, 43 (1999).
 [4] N. Argaman, *Superlattices and microstructures* **25**, 861 (1999).
 [5] E. Bezuglyi, E. Bratus, V. Shumeiko, G. Wendin, H. Takayanagi, *Phys. Rev. B* **62**, 14439 (2000).
 [6] A. Brinkman, A. Golubov, H. Rogalla, F. Wilhelm, M. Kupriyanov, *Phys. Rev. B* **68**, 224513 (2003).
 [7] A. Larkin, Y. Ovchinnikov, *Nonequilibrium Superconductivity* p. 493 (1986).
 [8] J. Rammer, H. Smith, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 323 (1986).
 [9] N. Kopnin, *Theory of nonequilibrium superconductivity* (Oxford University Press, 2001).
 [10] М. Куприянов, В. Лукичев, *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики* **94**, 139 (1988).
 [11] J. Cuevas, J. Hammer, J. Корн, J. Viljas, M. Eschrig, *Phys. Rev. B* **73**, 184505 (2006).
 [12] Y. Blanter, *Phys. Rev. B* **54**, 12807 (1996).
 [13] Л. Асламазов, А. Ларкин, Ю. Овчинников, *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики* **55**, 323 (1968).
 [14] S. Rajauria, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 207002 (2008).
 [15] A. Volkov, T. Klapwijk, *Phys. Lett. A* **168**, 217 (1992).
 [16] Ю. Рейзер, А. Сергеев, *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики* **90**, 1056 (1986).

- [17] O. Dimitrova, V. Kravtsov, *JETP Letters* **86**, 670 (2008).
- [18] F. Pierre, A. Anthore, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1078 (2001).
- [19] H. Courtois, M. Meschke, J. Peltonen, J. Pekola, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 067002 (2008).